Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Співвідношення між середніми степеневого порядку»

«The ratio between the averages of degree order»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Тюртюбек Арсеній Максимович

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кореновський А. О. .
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шанін Р.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2023 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № _____________

Протокол № ____ від ______________ 2023 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

У роботі будуть розглядатися та досліджуватися інтегральні середні функції на множині. Розглянеться взаємодія між середніми різного порядку та поводження середніх відносно порядку, для фіксованої функції та множини інтегрування.

Середні значення використовуються в багатьох прикладних галузях наук, наприклад, у статистиці. Існують середні нескінченних послідовностей, нескінченних послідовностей та середні функцій. Кожне с цих середніх є продовженням попередньої: від скінчених множин до зчисленних множин та незчисленних множин. Тому середні функції мають важливу роль в прикладних галузях, де аналізують функції та їх властивості.

У роботі будуть розглянуті середні дійсних порядків з нескінченностями включно. Розглянуться такі співвідношення, як монотонне зростання середнього відносно порядку, неперервність середніх по порядку, обмеженість середніх чи необмеженність середніх. Також будуть розглянуті різні граничні випадки середніх, а саме біля порядку нуля, та порядків нескінченності.

РОЗДІЛ 1

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ

У цій роботі розглядаються функції, які є скінченні майже скрізь, додатні майже скрізь та вимірні на деякій множині $E \subset \mathbb{R}^1$. Параметр r — дійсне число. Множина E вимірна за Лебегом, обмежена та має додатну скінченну міру. Усі інтеграли є інтегралами Лебега, якщо не сказано протилежне. Також з розгляду виключені функції, які еквівалентні нулю на деякій не нульовій підмножині множини E.

Інтеграли Лебега від невід'ємної функції можуть бути розбіжними, тоді будемо вважати, що ці інтеграли дорівнюють $+\infty$. У випадках, коли отримаємо $\frac{1}{+\infty}$, будемо вважати, що $\frac{1}{+\infty} = 0$. Також будемо вважати, що $\exp(-\infty) = 0$ та $\exp(+\infty) = +\infty$.

Допоміжні теореми

Розглянемо декілька допоміжних теорем.

Теорема 1.1 ([1, с. 84]). *Нехай $f(x)$ невід'ємна на відрізку $[a; b]$ функція та сумовна за Ріманом на будь якому відрізку $[a + \varepsilon; b]$, де $0 < \varepsilon < b$. Далі нехай невласний інтеграл Рімана*

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

існує та скінченний. Тоді $f(x)$ сумовна та

$$\int\limits_{[a;b]} f(x)dx = I.$$

Доведення. Оскільки інтеграл Лебега від невід'ємної, обмеженої та вимірної функції дорівнює інтегралу Рімана від цієї функції на деякому відрізку, то отримаємо

$$\int\limits_{[a+\varepsilon;b]} f(x)dx = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

де зліва інтеграл Лебега та справа інтеграл Рімана. Далі введемо наступні функції

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [a; a + (b-a)/k) \\ f(x), & \text{якщо } x \in [a + (b-a)/k; b] \end{cases}.$$

Розглянемо послідовність функції $f_k(x)$, де $k \in \mathbb{N}$. Оскільки послідовність функції $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ є такою, що $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$, то за теоремою Леві про монотонну збіжність для невід'ємних функції[1, с. 66] отримаємо, що

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[a;b]} f_k(x)dx = \int\limits_{[a;b]} f(x)dx.$$

А з того, що

$$\int\limits_{[a;b]} f_k(x)dx = \int\limits_{[a+b/k;b]} f(x)dx = \int\limits_{a+b/k}^{b} f(x)dx,$$

отримаємо результат теореми. $\square$

Теорема 1.2 ([2, с. 29]). *Нехай дано два невід'ємних числа a та b, та два числа p, q такі, що $p, q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.1}$$

при тому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $a^p = b^q$.

Доведення. Нехай $ab > 0$. Розглянемо $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$, оскільки логарифмічна функціє є опуклою догори[3, с. 138], то $\ln(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y$, для $x, y > 0$ та $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Позначимо $\alpha = \frac{1}{p}$, $x = a^p$ та $y = b^q$. Тоді

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} = \ln ab.$$

Оскільки логарифмічна функція монотонно зростає на своїй множині визначення, то $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Випадок для $ab = 0$, де один з множників не є нулем, є очевидним.

Розглянемо випадки рівності. Випадок для $a = 0$ та $b = 0$ є очевидним. Нехай $a^p = b^q$, тоді отримаємо зліва $a^{1+p/q} = a^p$ та справа $\frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} = a^p$, таким чином рівність доведено.

Нехай тепер $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Оскільки логарифмічна функція є строго опуклою догори[3, с. 138] на множині визначення, то у нерівності $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}$ рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a^p = b^q$, то отримаємо, що з рівності $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ слідує, що $a^p = b^q$. □

Перша теорема допоможе при знаходженні значень інтегралів, друга у доведені нерівності Гельдера.

Нерівність Гельдера для інтегралів та двох функцій

Означення 1.1. Функції $f(x)$, $g(x)$ називають пропорційними, якщо $Af(x) = Bg(x)$ майже скрізь та обидві константи A, B не дорівнюють нулю.

Далі розглянемо теорему, яка допоможе у доведені теорем про середні.

Теорема 1.3 ([2, с. 169]). *Нехай $p, q > 1$, такі що $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, та функції $f^p(x)$ та $g^q(x)$ сумовні на множині E. Тоді*

$$\int_E f(x)g(x)dx \leqslant \left(\int_E f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

при тому рівність досягаеться тоді і тільки тоді, коли одна з функцій еквівалентна нулю або функції $f^p(x)$ та $g^q(x)$ є пропорційними.

Доведення. Розглянемо доведення нерівності. Нехай функції не еквівалентні нулю, тоді інтеграли Лебега додатні, тому з теореми 1.2:

$$\frac{\int_E f(x)g(x)dx}{\left(\int_E f^p(t)dt\right)^{1/p}\left(\int_E g^q(t)dt\right)^{1/q}} =$$
$$= \int_E \frac{f(x)}{\left(\int_E f^p(t)dt\right)^{1/p}} \frac{g(x)}{\left(\int_E g^q(t)dt\right)^{1/q}} dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_E \left(\frac{f^p(x)}{p\left(\int_E f^p(t)dt\right)} + \frac{g^q(x)}{q\left(\int_E g^q(t)dt\right)}\right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Причому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{f^p(x)}{\left(\int_E f^p(t)dt\right)} = \dfrac{g^q(x)}{\left(\int_E g^q(t)dt\right)}$ майже скрізь, тобто функції $f^p(x)$ та $g^q(x)$ пропорційні.

Далі доведемо рівність, якщо одна з функції еквівалентна нулю. У цьому випадку інтеграл зліва дорівнює нулю, та добуток справа дорівнює нулю, оскільки один з інтегралів дорівнює нулю. Таким чином доведена рівність якщо одна з функції еквівалентна нулю.

Помітимо, що у доведенні нерівності було ділення лівої частини нерівності на праву, тому залишилося довести, що з того, що права частина дорівнює нулю, а значить ліва частина теж, слідує, що функції $f^p(x)$ та $g^q(x)$ пропорційні чи одна з них еквівалентна нулю. Оскільки права частина дорівнює нулю, то один з множників дорівнює нулю, значить один з інтегралів у правій частині дорівнює нулю. Це можливо тоді і тільки тоді, коли підінтегральна функція еквівалентна нулю. Тим самим доведення випадків рівності завершено. □

Теорема 1.3 має назву нерівність Гельдера.

Теорема 1.4 ([2, с. 170]). *Нехай* $0 < p < 1$ *та* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Нехай функції* $f^p(x)$, $g^q(x)$ *та* $f(x)g(x)$ *сумовні на множині* E, *де* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тоді*

$$\int_E f(x)g(x)dx \geqslant \left(\int_E f^p(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_E g^q(x)dx\right)^{1/q},$$

та рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $f^p(x)$ *та* $g^q(x)$ *пропорційні або* $f(x)$ *еквівалентна нулю функція.*

Доведення. Використати нерівність Гельдера неможливо оскільки один з коефіцієнтів від'ємний. Нехай $0 < p < 1$, $l = \frac{1}{p}$ та $\frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{l}$, тоді $l{,}m > 1$. зробимо заміну: $f(x) = (u(x)v(x))^l$, $g(x) = v^{-l}(x)$, тоді $f(x)g(x) = u^l(x)$, $f^p(x) = u(x)v(x)$, $g^q(x) = v^m(x)$. Тоді $u(x)$ та $v(x)$ визначені майже для всіх $x \in E$. Використавши нерівність Гельдера отримаємо:

$$\int_E u(x)v(x)dx \leqslant \left(\int_E u^l(x)dx\right)^{1/l} \left(\int_E v^m(x)dx\right)^{1/m},$$

повернемося до заміни та отримаємо:

$$\int_E f^p(x)dx \leqslant \left(\int_E f(x)g(x)dx\right)^{p} \left(\int_E g^q(x)dx\right)^{1-p},$$

при тому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $u^l(x)$ та $v^m(x)$ пропорційні чи $u(x)v(x)$ еквівалентна нулю. Оскільки $u^l(x) = f(x)g(x)$ та $v^m(x) = g^q(x)$ пропорційні, тоді

$$Af(x)g(x) = g^q(x)$$
$$Af(x) = Bg^{q-1}(x)$$
$$A^p f^p(x) = B^p g^q(x).$$

Таким чином $f^p(x)$ та $g^q(x)$ пропорційні. Оскільки $u(x)v(x) = f^p(x)$ еквівалентна нулю, то $f(x)$ еквівалента нулю. Оскільки $\int_E g^q(x)dx$ не дорівнює нулю, то нерівність можливо переписати у шуканому вигляді. $\square$

Якщо у теоремі взяти $p < 0$, то отримаємо, що $0 < q < 1$, і таким чином, теорема виконується і у цьому випадку. Цю теорему ще називають нерівність Гельдера для від'ємного показника.

Взагалі можна розглядати нерівність Гельдера для від'ємного показника для розбіжних інтегралів. Якщо інтеграл від функції $f(x)g(x)$ розбіжний, а два інші сумовні, то нерівність виконується у вигляді $+\infty > c$, де c — деяке скінченне число. Випадок, коли інтеграл від $f^p(x)$, де $p < 0$, дорівнює нулю виключено, так як для цього потрібно, щоб $f^p(x) \equiv 0$, а значить $f(x)$ є нескінченною функцією на множині додатної міри, а ці функції виключено з розгляду. Якщо розбігається інтеграл від функції $g^q(x)$ та $f^p(x)$, де $q < 0$, то отримаємо вираз $+\infty \cdot 0$, що не має сенсу. Якщо інтеграл від $g^q(x)$ розбігається, а інтеграл від $f^p(x)$ збігається, то нерівність прийме вигляд $c \geqslant 0$, де $0 \leqslant c \leqslant +\infty$, при тому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ еквівалентна нулю.

Інтегральні середні функції

Означення 1.2. Середнім функції f порядку $r \neq 0$ на множині E називається число:

$$M_r(f,E) = \left(\frac{\int_E f^r(x)dx}{|E|} \right)^{1/r},$$

де $|E|$ — міра множини E.

Помітимо, що $M_r(f,E)$ може приймати скінченні значення або нескінченність. Якщо $\int_E f^r(x)dx = +\infty$, то з домовленостей отримаємо, що $M_r(f,E) = +\infty$, якщо $r > 0$, та $M_r(f,E) = 0$, якщо $r < 0$. Таким чином, у широкому сенсі інтегральні середні можуть приймати будь-яке невід'ємне значення чи нескінченність.

Знайдемо середні для функції, еквівалентної константі. Нехай $f(x) \equiv C$, де $C \neq 0$, на довільній не нульовій множині E. Очевидно $M_r(f,E) = C$ для усіх $r \neq 0$.

Як приклад наведемо наступну теорему:

Теорема 1.5. *Нехай задана додатна, вимірна функція* $f(x)$ *на множині* E*. Якщо функція* $f(x)$ *обмежена та віддiлена від нуля майже скрізь, то для неї середні приймають додатні значення для будь-якого порядку.*

Доведення. Нехай $0 < A \leqslant f(x) \leqslant B < +\infty$ майже скрізь. Розпочнемо з розгляду для $r > 0$. Інтеграли від $f^r(x)$ сумовні, оскільки $f^r(x) \leqslant B^r$ та $f^r(x)$ вимірна функція. Та оскільки $0 < f^r(x)$, значить для будь якого $r > 0$ середні додатні.

Розглянемо для $r < 0$. Так як функція $f(x)$ відділена від нуля, то $f^r(x) \leqslant A^r$, та $f^r(x)$ вимірна. Тоді інтеграли від $f^r(x)$ сумовні. Таким чином середні існують та скінчені для будь якого $r < 0$. Оскільки $0 < f^r(x)$, то середні для будь якого порядку $r < 0$ додатні.

Таким чином для функції $f(x)$ існують середні будь якого порядку та при тому додатні. □

Для середніх існує наступний очевидний зв'язок між додатними середніми та від'ємними середніми:

$$M_r(f,E) = \frac{1}{M_{-r}(1/f,E)}. \tag{1.2}$$

Ця рівність допоможе у доведені теорем для середніх від'ємного порядку.

Далі розглянемо теорему, яка покаже, що середні існують для порядків з інтервалів чи напівінтервалів, якщо існує хоч одне середнє ненульового порядку:

Теорема 1.6 ([2, с. 174])**.** *Якщо для деякого* $0 < s < +\infty$*(*$-\infty < s < 0$*)* $M_s(f,E)$ *скінченне(додатне), то усі середні* $M_r(f,E)$ *скінченні(додатні) для* $0 < r < s$*(*$s < r < 0$*).*

Доведення. Розглянемо випадок для $0 < s < +\infty$. Буде виконана наступна нерівність $f(x)^r < 1 + f(x)^s$, для усіх $0 < r < s$ та $x \in E$. З існування $M_s(f,E)$ випливає, що $\int_E f^s(x)dx$ сумовна. Тоді $\int_E (1 + f^r(x))dx$ сумовна.

Звідки отримаємо, що інтеграл $\int_E f^r(x)dx$ сумовний, а значить $M_r(f,E)$ приймає скінченні значення.

Розглянемо випадок для $-\infty < s < 0$. Оскільки $M_s(f,E)$ додатне, то значить, що інтеграл $\int_E f^s(x)dx$ сумовний та не дорівнює нулю. Це значить, що якщо $f(x)$ дорівнює нулю, то тільки на деякій множині нульової міри. Далі розглянемо функцію: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Тоді $\int_E g^{-s}(x)dx$ сумовне та додатне, тоді можливо використати першу частину доведення теореми, і отримати, що для $g(x)$ існують середні для $0 < -r < -s$. Далі отримаємо з рівності (1.2), що $M_r(f,E)$ існують для $s < r < 0$ і є додатними. $\square$

Висновком з цієї теорему буде: якщо для деякого $s > 0$ середнє нескінченне, то середні для $r > s$ нескінченні. Якщо для деякого $s < 0$ середнє дорівнює нулю, то для $r < s$ середні дорівнюють нулю.

Розглянемо приклад функцій, для якої середні є нескінченністю для деякого додатного порядку, чи нуль для деякого від'ємного порядку. Нехай $f(x) = x^\alpha$ на інтервалі $E = (0;1)$, де $\alpha > 0$. Використаємо теорему 1.1:

$$\int_{(0;1)} x^{r\alpha}dx = \int_0^1 x^{r\alpha}dx.$$

Останій інтеграл існує для $r\alpha > -1$. Таким чином, для $r > -1/\alpha$. Розглянемо для $r = -1/\alpha$:

$$\int_{(0;1)} \frac{1}{x}dx \geqslant \int_{(\varepsilon;1)} \frac{1}{x}dx = -\ln\varepsilon,$$

де $0 < \varepsilon < 1$. При ε близьких до нуля, $-\ln\varepsilon$ прямує до нескінченності. Таким чином середнє порядку $r = -1/\alpha$ дорівнює нулю. З висновку до теореми 1.6 отримаємо, що середні для $r < -1/\alpha$ дорівнюють нулю. Якщо $\alpha < 0$, то отримаємо, що середні додатні для $r < -1/\alpha$ та $r \neq 0$, та при $r \geqslant -1/\alpha$ середні дорівнюють $+\infty$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$, де $\alpha > 0$ та $\beta < 0$. Помітемо що для $r > 0$ функція $x^{r\alpha}$ обмежена. Також для $r < 0$ функція $(1-x)^\beta$ обмежена. Тоді, використавши попередній приклад, отримаємо, що середні додатні для $-1/\alpha < r < 0$ чи $0 < r < -1/\beta$, та при $r < -1/\alpha$ дорівнюють нулю, та при $r > -1/\beta$ дорівнюють нескінченності.

Розглянемо функції $f(x) = (1-x)^{\beta} \ln^{2\beta}(2/(1- \ x))$ на $E = (0;1)$, де $\beta < 0$. Для $r = -\beta$ маємо $\int_{(0;1)} f^b(x)dx = \int_{(0;1)} (1-x)^{-1} \ln^{-2}(2/(1-x))dx$. Далі по теоремі 1.1 перейдемо до інтеграла Рімана:

$$\int_0^1 (1-x)^{-1} \ln^{-2}(2/(1-x))dx = \begin{bmatrix} z = \ln\left(\dfrac{2}{1-x}\right) & dz = \dfrac{1}{1-x}dx \\ x \to 0 \ z \to \ln 2 & x \to 1 \ z \to +\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz = \left.\frac{-1}{z}\right|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Отримаємо, що середнє скінченне для $r = -\beta$, а значить для $0 < r < -\beta$ за теоремою 1.6. Для від'ємних порядків функція є обмеженою на E, а значить усі середні від'ємного порядку додатні. Таким чином, для цих функцій середні скінченні для порядків з напівінтервалу $(0;b]$, а для усіх від'ємних порядків додатні.

Далі розглянемо функції $x^{\alpha} \ln^{2\alpha}(2/x)$ на $E = (0;1)$, де $\alpha > 0$. Аналогічно, як і з попереднім прикладом отримаємо, що для додатних порядків середні скінченні та середні додатні для порядків з $[-a;0)$.

Далі, об'єднавши два попередні приклади, отримаємо функції $f(x) = x^{\alpha} \ln^{2\alpha}(2/x)\,(1-x)^{\beta} \ln^{2\beta}(2/(1-x))$ на $E = (0;1)$, де $\alpha > 0$ та $\beta < \ 0$. Так як для додатних порядків множник $x^{\alpha} \ln^{2\alpha}(2/x)$ є обмеженим, то на нескінченність інтеграла він не впливає, аналогічно з множником $(1- \ x)^{\beta} \ln^{2\beta}(2/(1-x))$ для від'ємних порядків. Таким чином, скориставшись результатами попередніх прикладів, отримаємо, що для порядків $r \in [-1/\alpha; -1/\beta] \setminus 0$ середні додатні, та для $r > -1/\beta$ середні нескінченні, та для $r < -1/\alpha$ середні дорівнюють нулю.

Далі розглянемо теорему, яка покаже, що інтегральні середні — це зростаюча функція відносно порядку, при незмінній функції та множині інтегрування.

Теорема 1.7 ([2, с. 173]). *Нехай виключено випадок, коли* $f(x) = C$ *майже скрізь, де* $0 < C < +\infty$. *Якщо* $M_s(f,E)$ *існує при* $s \neq 0$, *тоді* $M_r(f,E) < M_s(f,E)$ *(*$M_s(f,E) < M_r(f,E)$*) для* $0 < r < s$ *(*$s < r < 0$*).*

Доведення. Розглянемо випадок коли s додатне. Нехай $s = rp$, де $p > 1$, тоді за нерівністю Гельдера для інтегралів маємо:

$$\left(\frac{\int_E 1 \cdot f^r(x)dx}{|E|}\right)^{1/r} = \left(\int_E 1 \cdot \frac{f^r(x)}{|E|}dx\right)^{1/r} <$$

$$< \left(\left(\int_E \left(\frac{f^r(x)}{|E|}\right)^p dx\right)^{1/p} \left(\int_E 1^q dx\right)^{1/q}\right)^{1/r} = \left(\frac{\int_E f^s(x)dx}{|E|}\right)^{1/s}.$$

Притому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $f^s(x) = C$ майже скрізь, а цей випадок виключено. З означення середніх отримаємо, що $M_r(f,E) < < M_s(f,E)$. Тому теорема доведена для додатних r.

Розглянемо від'ємне s. Введемо заміну $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, помітимо, що $f(x)$ може дорівнювати нулю тільки на множині нульової міри. Тоді для $g(x)$ існує скінченне $M_{-s}(g,E)$. Використаємо першу частину доведення та повернемося до заміни $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, отримаємо $M_{-r}(1/f,E) < M_{-s}(1/f,E)$ для $0 < -r < -s$. Далі використаємо (1.2) та отримаємо, що $M_s(f,E) < < M_r(f,E)$. $\square$

Ця теорема показує, що якщо брати інтегральні середні у вузькому сенсі (без нескінченно великих інтегралів, а значить, без середніх, які дорівнюють нескінченності чи нулю) та без константної функції, то відносно порядку середні є строго зростаюча функція. Якщо додати граничні випадки, то середні можуть дорівнювати одне одному тільки, якщо вони приймають значення нескінченність чи нуль.

Проблема визначення середнього для $r = 0$. Існують наступні проблеми, якщо ми визначимо це як для $r \neq 0$. Перша пов'язана з f^0, тобто якщо f скінченна на множині, то це означає, що $f^0 = 1$, тобто незалежно від функції інтеграл буде один і той самий. Друга з розумінням $1/0$: якщо припустити, що це нескінченно велика величина, то середнє має мало сенсу, оскільки отримаємо невизначеність 1^∞. Тому визначення середнього для

$r = 0$, виконується по іншому.

Розглянемо наступний вираз:

$$\exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right).$$

Оскільки $\ln f$, не завжди є невід'ємною функцією, то проблеми збіжності інтеграла більш складна. Розглянемо $\int_E \ln^+ f(x)dx$ та $\int_E \ln^- f(x)dx$, де $\ln^+ f(x) = \max(0; \ln(f(x)))$ та $\ln^- f(x) = \min(0; \ln(f(x)))$. Можуть бути чотири варіанти: обидва інтеграла існують та кінцеві, перший $+\infty$ та другий скінчений, перший скінчений другий $-\infty$, перший $+\infty$ та другий $-\infty$. У першому випадку інтеграл існує та скінченний, у другому можливо позначити $\int_E \ln f(x)dx = +\infty$ та вираз дорівнює $+\infty$, у третьому $\int_E \ln f(x)dx = -\infty$ та вираз дорівнює 0, у останньому вираз не має сенсу, притому $M_r(f,E)$ та $M_r\left(\frac{1}{f},E\right)$ для усіх $r > 0$ нескінченно великі та для усіх $r < 0$ дорівнюють нулю.

Розглянемо наступну важливу теорему:

Теорема 1.8 ([2, с. 168])**.** *Якщо для деякого $r > 0$ $M_r(f,E)$ скінчено, то* $\lim\limits_{r\to 0^+} M_r(f,E) = =\ \exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right)$*. Та якщо для деякого $r < 0$ $M_r(f,E)$ додатне, то* $\lim\limits_{r\to 0^-} M_r(f,E) = \exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right)$.

Доведення. Із теореми 1.6 виходить, що усі середні $M_s(f,E)$ існують для $0 < s < r (r < s < 0)$. Має місце наступний вираз для $0 < r$:

$$\ln\exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right) \leqslant \ln M_r(f,E) = \frac{1}{r}\ln M_1(f^r,E) \leqslant \frac{1}{r}\left(M_1(f^r,E) - 1\right).$$

Звідки $\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{1}{r}\left(M_1(f^r,E) - 1\right) = M_1(\ln f,E) = \ln\exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right)$. Отримаємо теорему для $r > 0$.

Для $r < 0$ введемо заміну $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, тоді за першою частиною доведення $\lim\limits_{r\to 0^-} M_{-r}(g,E) = \exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right)$. Повертаємося до заміни

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ та з (1.2) отримаємо: $\lim\limits_{r\to 0^-} M_r(f,E) = \exp\left(\dfrac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right)$. $\square$

Теорема 1.8 показує, що існує вираз, до якого збігаються зліва чи справа середні при порядку спрямованому до 0. Таким чином, можна ввести середнє нульового порядку.

Інтегральне середнє геометричне функції

Означення 1.3. Середнім геометричним функції f на множині E називається число, яке знаходиться за формулою:

$$M_0(f,E) = \exp\left(\frac{\int_E \ln f(x)dx}{|E|}\right).$$

Середнім геометричним функції f на множині E за теоремою 1.11 $M_0(f,E)$ називають середнім порядку 0.

Звернемо увагу, що $M_0(f,E)$ може бути скінченим та для усіх $r > 0$ $M_r(f,E) = +\infty$, також, що $M_0(f,E)$ може відрізнятися від нуля та для усіх $r < 0$ $M_r(f,E) = 0$.

Наведемо приклади. Почнемо з функції $f(x) = C$ майже скрізь, де $0 < C < +\infty$. Очевидно, що середнє геометричне дорівнює C.

Повернемося до вимірних, обмеженних та відділених функцій $f(x)$ майже скрізь. Оскільки $0 < A \leqslant f(x) \leqslant B < +\infty$ майже скрізь, то $\ln A \leqslant f(x) \leqslant \ln B$. Таким чином інтеграли від додатної та від'ємної частини функції $\ln f(x)$ сумовні. Таким чином середнє геометричне існує та додатне.

Далі розглянемо функції $f(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ на інтервалі $E = (0;1)$. Для $r = 0$ маємо $\ln x^\alpha(1-x)^\beta = \alpha \ln x + \beta \ln(1-x)$. На E $(\alpha) \ln x < 0$ та $\beta \ln(1-x) > 0$. З теореми 1.1 отримаємо, що

$$\int_E -\alpha \ln x dx = \alpha$$

та

$$\int_E \beta \ln(1-x) dx = -\beta.$$

Отримаємо, що середнє геометричне існує та дорівнює $\exp(-\beta-\alpha)$. Таким чином для $f(x)$ на E середні додатні для порядків $r \in (-1/\alpha; -1/\beta)$.

Наступна функція $f(x) = x^{\alpha} \ln^{2\alpha}(2/x)(1-x)^{\beta} \ln^{2\beta}(2/(1-x))$ на $E = (0;1)$. Маємо $\ln f(x) = \alpha \ln x + \beta \ln(1-x) + 2\alpha \ln\ln(2/x) + 2\beta \ln\ln(2/(1-x))$. Розглянемо кожен доданок окремо. Для перших двох доданків інтеграли існують та дорівнюють $-\alpha$ та $-\beta$ відповідно. Розглянемо третій. Функція приймає додатні та від'ємні значення на інтервалах $(2/e;1)$ та $(0;2/e)$ відповідно. На інтервалі $(2/e;1)$ функція обмежена, а тому інтеграл Лебега існує та скінчений. З теореми 1.1 отримаємо:

$$\int_0^{2/e} 2\alpha \ln\ln\frac{2}{x}dx = \begin{bmatrix} u = \ln\ln\frac{2}{x} & dv = dx \\ du = -\frac{1}{x}\ln\frac{2}{x} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= 2\alpha\left(x\ln\ln\frac{2}{x}\bigg|_0^{2/e} + \int_0^{2/e} \ln\frac{2}{x}dx \right) = 2\alpha \int_0^{2/e} \ln\frac{2}{x}dx = \begin{bmatrix} u = \ln\frac{2}{x} & dv = dx \\ du = -\frac{1}{x} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= 2\alpha\left(x\ln\frac{2}{x}\bigg|_0^{2/e} + \int_0^{2/e} dx \right) = \frac{8\alpha}{e}.$$

Для інтеграла від'ємної частини функції аналогічно отримаємо $2\alpha\ln\ln 2 + 2\alpha\ln 2 - \frac{8\alpha}{e}$. Тоді інтеграл від цієї функції дорівнює $2\alpha(\ln\ln 2 + \ln 2)$. Тепер розглянемо четвертий доданок. Функція приймає додатні та від'ємні значення на інтервалах $(0;1-2/e)$ та $(1-2/e;1)$ відповідно. Помітимо, що інтеграли можна звести до тих самим інтегралів, що були у третьому доданку, заміною $t = 1-x$. Таким чином отримаємо, що інтеграл від четвертого доданку дорівнює $2\beta(\ln\ln 2 + \ln 2)$. Отримаємо, що геометричне середнє існує та дорівнює $\exp(-\beta-\alpha+(\ln\ln 2+\ln 2)(2\alpha-2\beta))$. Таким чином отримали, що для цих функцій середні додатні на відрізку $[-1/\alpha; -1/\beta]$, де $\alpha > 0$ та $\beta < 0$.

Таким чином були розглянуті середні, для яких середнє порядку нуль додатне разом з середнім додатного чи від'ємного порядку. Далі розглянемо функції для яких середнє геометричне дорівнює нулю, нескінченності та середнє геометричне не має сенсу.

Спочатку розглянемо випадок, коли середнє геометричне дорівнює $+\infty$ чи 0. Для $f(x) = e^{1/x}$ на $E = (0;1)$ маємо $\ln f(x) = \dfrac{1}{x}$. Ця функція додатна, а тому інтеграл від від'ємної частини дорівнює нулю. А інтеграл $\int_E \dfrac{1}{x} dx$ існує та є нескінченним. Таким чином середнє геометричне дорівнює $+\infty$ для функції $f(x) = e^{1/x}$ на $E = (0;1)$. Для $f(x) = e^{-1/x}$ на $E = (0;1)$, аналогічно попередньому, але тепер інтеграл від від'ємної частини нескінченний. Таким чином, середнє геометричне дорівнює 0 для функції $f(x) = e^{-1/x}$ на $E = (0;1)$.

Далі розглянемо функцію, для якої середнє геометричне не має сенсу, та усі не нульові середні не існують. Для $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right)$ на $E = (0;1)$ маємо $\ln f(x) = (1/x^2)\sin 1/x$. Помітимо, що $\sin 1/x$ має злічену кількість нулів на інтервалі $(0;1)$, таким чином можна розбити множину E на злічене об'єднання диз'юнктивних відрізків, на яких функція приймає значення одного знаку. На відрізках типу $\left[(\pi(2k+1))^{-1}; (2\pi k)^{-1}\right]$ функція приймає додатні значення та нуль на кінцях відрізку, та на відрізках типу $\left[(\pi(2k+2))^{-1}; (\pi(2k+1))^{-1}\right]$ функція приймає від'ємні значення та нуль на кінцях відрізку. Тут $1 \leqslant k < +\infty$ та $k \in \mathbb{Z}$, та ще є додатковий напівінтервал $\left[\pi^{-1}; 1\right)$, так як функція на ньому обмежена, то інтеграл існує та скінчений на цьому проміжку. Для подальшої простоти виключимо його з розрахунків. З теореми 1.1 маємо

$$\int_E \ln^+ f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[(\pi(2k+1))^{-1};(2\pi k)^{-1}]} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{(\pi(2k+1))^{-1}}^{(2\pi k)^{-1}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \left[z = \frac{1}{x} \quad dz = -\frac{1}{x^2}dx\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2\pi k}^{\pi(2k+1)} \sin z dz = \sum_{k=1}^{\infty} 2 = +\infty.$$

Аналогічний результат отримаємо і для від'ємної частини. Таким чином довели, що середнє геометричне для цієї функції не має сенсу. Розглянемо $M_r(f,E)$. Нехай E_1 підмножина E, де $\ln f(x)$ приймає додатні значення.

Тоді

$$M_r^r(f,E) = \int_E f^r(x)dx \geqslant \int_{E_1} f^r(x)dx \geqslant \int_{E_1} \left(1 + \frac{r}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right) dx.$$

Останній інтеграл є нескінченним. Таким чином ми довели, що для будь якого порядку середні функції $f(x)$ для додатних порядків нескінченні, та для від'ємних порядків дорівнюють нулю. Для середніх $M_r(1/f,E)$ доведення проводиться аналогічно, так як $\dfrac{1}{f(x)} = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\right)$, що тільки змінить відрізки на яких функція $\ln f(x)$ буде додатною чи від'ємною.

Таким чином, були наведені приклади функцій, для яких середнє геометричне є нескінченість чи нуль, та функція, для якої середнє геометричне не має сенсу, а інші середні нескінченні чи нуль. Далі буде наведена функція, для якої додатнє лише середнє геометричне.

Розглянемо $f(x) = \exp\left(-x^{-1/2} + (1-x)^{-1/2}\right)$ на $E = (0;1)$. Нехай $r > 0$, тоді маємо $\int_E f^r(x)dx \geqslant \int_{(0.5;1-\varepsilon)} f^r(x)dx$, де $0 < \varepsilon < 0.5$. Далі

$$\int_{(0.5;1-\varepsilon)} f^r(x)dx \geqslant e^{0.5r} \int_{(0.5;1-\varepsilon)} e^{r(1-x)^{-1/2}}dx =$$
$$= 2r^{-2}e^{0.5r} \int_{(r\sqrt{0.5}^{-1};r(\sqrt{\varepsilon})^{-1})} x^{-3}e^x dx.$$

Останій інтеграл може бути нескінченно великим при ε близьких до нуля. Таким чином для $r > 0$ середніх не існує, аналогічно з $r < 0$. Розглянемо $\ln f(x)$, маємо $\ln f(x) = -x^{-1/2} + (1-x)^{-1/2}$, очевидно, що $-x^{-1/2} < 0$ та $(1-x)^{-1/2} > 0$. Тоді отримаємо $\int_E x^{-1/2}dx = 2$ та $\int_E (1-x)^{-1/2}dx = 2$. Тобто середнє геометричне існує та дорівнює 1. Для функції $f(x)$ на E середні додатні тільки для $r = 0$, інші нескінченні чи нуль.

Далі розгянемо приклади функції, для яких середнє геометричне нуль та нескінченість, та існують середні додатних та від'ємних порядків відповідно.

Розглянемо дві функції $f(x) = e^{1/x}$ та $g(x) = e^{-1/x}$. З прикладів до цього відомо, що для першої функції середнє геометричне нескінченне та для другої дорівнює нулю. Розглянемо середні додатних порядків r функції

$f(x)$: $\int_E f^r(x)dx \geqslant e^r \int_E \left(1+\dfrac{1}{x}\right) dx$, другий інтеграл нескінченно великий, таким чином середніх додатного порядку для нього не існує. $\int_E g^r(x)dx$ є інтеграл від обмеженої функції, а тому інтеграл існує та скінченний. Знайдемо середні додатного порядку для функції $g(x)$:

$$\int_E g^r(x)dx = \int\limits_0^1 e^{-\dfrac{r}{x}} dx = \left[t = \frac{r}{x} \quad dx = -\frac{r}{t^2}dt\right] =$$

$$= r\int\limits_r^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-t} & dv = \dfrac{1}{t^2}dt \\ du = -e^{-t}dt & v = -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} = e^{-r} - r\int\limits_r^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-t} & dv = \dfrac{1}{t}dt \\ du = -e^{-t}dt & v = \ln t \end{bmatrix} = e^{-r} + re^{-r}\ln r + r\int\limits_r^{+\infty} e^{-t}\ln t dt =$$

$$= [q = \ln t \quad dx = e^q dq] = e^{-r} + re^{-r}\ln r + r\int\limits_{\ln r}^{+\infty} qe^q e^{-e^q} dq =$$

$$= \begin{bmatrix} u = q & dv = e^q e^{-e^q}dq \\ du = 1 & v = -e^q e^{-e^q} \end{bmatrix} = e^{-r} + re^{-r}\ln r + r^2e^{-r}\ln r + r\int\limits_{\ln r}^{+\infty} e^q e^{-e^q} dq =$$

$$= e^{-r} + re^{-r}\ln r + r^2e^{-r}\ln r + r\left(-e^q e^{-e^q}\Big|_{\ln r}^{+\infty}\right) =$$

$$= e^{-r} + re^{-r}\ln r + r^2e^{-r}\ln r + r^2e^{-r}.$$

Тоді $\lim\limits_{r\to 0^+} M_r(g,E) = 0$. Таким чином для функції $g(x)$ усі середні додатного порядку додатні та при порядках близьких до нуля зверху вони спрямовуються до нуля, що і є середнім геометричним. Помітимо, що $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$. Таким чином, для $g(x)$ середні від'ємного порядку дорівнюють нулю, та для $f(x)$ середні скінченні. При цьому, $\lim\limits_{r\to 0^-} M_r(f,E) = +\infty$.

Далі наведемо приклади, для яких середні додатні тільки для додатних чи від'ємних порядків, але при цьому середнє геометричне дорівнює додатному числу.

Розглянемо функції $f(x) = e^{x^{-1/2}}$ та $f(x) = e^{-x^{-1/2}}$. Помітимо, що $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, а тому можно розглянути одну функцію, нехай це буде функція

$f(x)$. Для $r>0$ маємо

$$\int_E e^{\frac{r}{\sqrt{x}}}dx \geqslant \int_E \left(1+\frac{r}{\sqrt{x}}+\frac{r}{2x}\right)dx.$$

Останній інтеграл є нескінченно великим. Таким чином середні додатного порядку нескінченні. Для від'ємних порядків r функція $f^r(x)$ є обмеженою, і тому сумовною. Таким чином для усіх від'ємних порядків середні додатні. Середнє геометричне дорівнює e^2, що береться з результату попереднього прикладу. Тоді за теоремою 1.8, отримаємо, що середні прямують до e^2 при порядках близьких до нуля знизу. Повернемося до $g(x)$. Для неї середні від'ємного порядку дорівнюють нулю та усі середні додатного порядку додатні. Середнє геометричне дорівнює e^{-2}, що береться з результату попереднього прикладу . При тому середні додатного порядку прямують до e^{-2} при порядках близьких до нуля зверху.

Інтегральні середні нескінченного порядку

Означення 1.4. Число M називається істотною верхньою(нижньою) межею функції $f(x)$ на множині E, якщо воно найбільше(найменше) з чисел ξ, які задовольняють наступній умові: для кожного $\varepsilon>0$ існує множина e додатної міри, на якій виконано $f>\xi-\varepsilon(f<\xi+\varepsilon)$. Надамо їм позначення $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f$ та $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f$ відповідно. Якщо при визначенні ефективної верхньої границі немає найбільшого числа, то $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f=+\infty$.

Також $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$ та $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)$ зв'язані наступною очевидною формулою для додатних функції $f(x)$:

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)=\frac{1}{\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in E}\dfrac{1}{f(x)}}. \tag{1.3}$$

Теорема 1.9 ([2, с. 165]). *Нехай для деякого $r \neq 0$ існує додатне $M_r(f,E)$. Тоді $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x) < M_r(f,E) < \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$, окрім $f(x) = C$, де $0 < C < +\infty$.*

Доведення. Очевидно, що $\dfrac{\int_E (f(x) - M_1(f,E))dx}{|E|} = 0$. Звідки чи $f(x) = M_1(f,E)$ майже скрізь, чи $f(x) - M_1(f,E)$ мають як додатні так і від'ємні значення на множинах додатної міри. Перше відпадає, оскільки $f(x) \neq C$ майже всюди, тому отримаємо, що $f(x) > M_1(f,E)$ та $f(x) < M_1(f,E)$ на деяких підмножинах додатної міри множини E. Звідки отримаємо, що $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x) < M_1(f,E) < \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$. Далі доведемо для $r \neq 1$. Маємо $M_r^r(f,E) = M_1(f^r,E)$. Звідки отримаємо, що $\left(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)\right)^r < M_r^r(f,E) < \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)\right)^r$ і цим теорема доведена. □

Розглянемо наступну важливу теорему теорему:

Теорема 1.10 ([2, с. 173]). *Нехай для всіх $r > 0$ існують скінченні $M_r(f,E)$. Тоді $\lim_{r\to+\infty} M_r(f,E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$. Нехай для всіх $r < 0$ існують додатні $M_r(f,E)$. Тоді $\lim_{r\to-\infty} M_r(f,E) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)$.*

Доведення. Доведемо для додатних r. Нехай $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x) = \nu$ та є скінчене число. Тоді $M_r(f,E) \leqslant \nu$ та $f(x) > \nu - \varepsilon$ на деякій множині e додатної міри. Далі маємо $M_r(f,E) \geqslant \dfrac{(\nu-\varepsilon)|e|^{1/r}}{|E|^{1/r}}$, де $|e|$ та $|E|$ — міри множин e та E відповідно. Звідки $\varliminf_{r\to+\infty} M_r(f,E) \geqslant \nu - \varepsilon$. Отримаємо, що $\lim_{r\to+\infty} M_r(f,E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$. Нехай $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x) = +\infty$, тоді для будь-якого $G > 0$, $f(x) > G$ на множині e додатної міри. Використаємо таку ж ідею, як при доведені для $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x) = \nu$ і отримаємо, що $\varliminf_{r\to+\infty} M_r(f,E) \geqslant G$. Звідки $\lim_{r\to+\infty} M_r(f,E) = +\infty$.

Доведемо для від'ємних r. Введемо заміну $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, тоді

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} g(x) = \frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)}.$$

Для $g(x)$ використаємо доведення першої частини. Отримаємо

$$\lim_{r\to-\infty} M_{-r}(g,E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} g(x).$$

Далі, використавши (1.2) та (1.3), отримаємо $\lim\limits_{r\to-\infty} M_r(f,E) = \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in E} f(x)$.
□

Таким чином можна ввести означення середніх порядків $+\infty$ та $-\infty$.

Означення 1.5. Нехай для всіх $r>0$ існують скінченні $M_r(f,E)$(для всіх $r<0$ середні $M_r(f,E)$ додатні). Середнім функції f на множині E порядку $+\infty(-\infty)$ є $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in E} f(x)(\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in E} f(x))$. Та позначаються $M_{+\infty}(f,E)(M_{-\infty}(f,E))$.

Розглянемо декілько прикладів.

Розглянемо $f(x)\equiv C$. Отримаємо, що середні нескінченних порядків існують та дорівнюють C.

Далі розглянемо середні порядку нескінченність для вимірної, обмеженної та відділенної від нуля майже скрізь функції $f(x)$. Так як функція обмеженна та відділенна від нуля майже скрізь, то існують істотні верхня та нижня границя функції, і при тому додатні. З попередніх прикладів відомо, що існують середні будь якого дійсного порядку. Таким чином, для функції $f(x)$ середні порядку нескінченність існують та додатні.

Далі розглянемо приклади функцій, для яких средні є нуль для порядку $-\infty$, та $+\infty$ для порядку $+\infty$. Розглянемо функцію $f(x)=\ln\dfrac{1}{x}$ на $E=(0;1)$. Функція на E є неперервною, та при значеннях x близьких до нуля спрямовується до нескінченності. Таким чином $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in E} f(x)=+\infty$. Розглянемо середні додатних порядків:

$$\left(\int_E f^r(x)dx\right)^{1/r} = \left(\int\limits_0^1 \ln^r\frac{1}{x}dx\right)^{1/r} = \left[t=\ln\frac{1}{x} \quad dx=e^{-t}dt\right] =$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} t^r e^{-t}dt\right)^{1/r} = (\Gamma(r+1))^{1/r}.$$

Отримали, що інтеграли дорівнюють гамма функції у деякому ступені. З теорії про гамма функцію маємо, що інтеграл існує та набуває додатних значень при $r+1>0$ чи $r>-1$, що для додатних порядків виконано. Розглянемо границю при $r\to+\infty$. З теореми 1.10 отримаємо

$$\lim_{r\to+\infty}(\Gamma(r+1))^{1/r}=+\infty.$$

Таким чином для функції $f(x)=\ln\dfrac{1}{x}$ середні усіх додатних порядків додатні, та які прямують до нескінченості при порядку спрямованому до нескінченості.

Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}}$. Так як ця функція є минула поділенна на 1, то з (1.2) та (1.3) отримаємо, що $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}f(x)=0$, усі середні від'ємних порядків існують та додатні, та

$$\lim_{r\to-\infty}M_r(f,E)=0.$$

Таким чином, для цієї функції усі середні від'ємних порядків додатні, та середні при порядках спрямованих до $-\infty$ прямують до нуля.

Загальні властивості інтегральних середніх функції

Розглянемо властивості середніх. Спершу виключимо функцію $f=C$, для якої $M_r(f,E)=C$, для усіх $-\infty\leqslant r\leqslant+\infty$. Тоді середні мають наступні властивості:

Теорема 1.11 ([2, с. 174]). *Якщо* $0<r<s(s<r<0)$ *та* $M_s(f,E)$ *має скінчене значення(є додатнім), тоді* $M_r(f,E)$ *неперервні для* $0<r<s(s<r<0)$ *і для* $r=s$ *неперервна зліва(справа). Якщо* $M_s(f,E)=+\infty(M_s(f,E)=0)$ *та для всіх* $0<r<s(s<r<0)$ $M_r(f,E)$ *є скінченим(додатними), тоді* $\lim_{r\to s}M_r(f,E)=+\infty\ \left(\lim_{r\to s}M_r(f,E)=0\right)$.

Доведення. Розглянемо спочатку додатне s. Нехай $M_s(f,E)$ має скінченне значення. Тоді можливо ввести мажоранту:

$$f^r(x)\leqslant max(1,f^s(x)),$$

ця мажоранта сумовна. Далі для r обираємо послідовність $\{r_k\}_{k=1}^{+\infty}$, яка збігається до r. Отримаємо, що для $0 < r < s$ середні $M_{r_k}(f,E)$ збігаються до $M_r(f,E)$ по теоремі Лебега про мажоровану збіжність[2, с. 71]. Оскільки послідовність довільна, то отримаємо, що для $0 < r < s$ середні $M_r(f,E)$ неперервні. Аналогічно з $r = s$, але тепер отримаємо неперервність зліва. Нехай $M_s(f,E) = +\infty$, тоді для будь-якого $G > 0$ ми зможемо знайти таке n, що $\int_E [f^s(x)]_n dx > G$, де $[f(x)]_n = min(n,f(x))$. Також $M_r([f^r(x)]_n,E)$ неперервні по r, а значить $\int_E [f^r(x)]_n dx > \dfrac{G}{2}$ для $r > s - \varepsilon$, де $\varepsilon \in (0,s)$. Звідки $\int_E f^r(x)dx > \dfrac{G}{2}$. Тому при $r \to s$ середні $M_r(f,E) \to +\infty$.

Розглянемо від'ємне s. Зробимо заміну $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Тоді $M_{-s}(g,E)$ існує і тому можливо використати доведене у першій частині. Маємо, що $M_{-r}(g,E)$ неперервні. Для них використаємо (1.2). Маємо $M_r(f,E) = = \dfrac{1}{M_{-r}(g,E)}$, Оскільки $M_{-r}(g,E)$ неперервні та не дорівнюють нулю, то $M_r(f,E)$ неперервні. Якщо $M_s(f,E) = 0$, то $M_{-s}(g,E) = +\infty$, і тому з $M_s(f,E) = \dfrac{1}{M_{-s}(g,E)}$ отримаємо, що $M_r(f,E)$ прямують до нуля при порядку $r \to s$. □

Якщо додати теорему 1.8, то якщо для деяких $a \geqslant 0$ та $b \geqslant 0$ дійсних чисел існують середні, то вони неперервні для порядків з інтервалу $[-a; b]$.

Теорема 1.12 ([2, с. 174]). *$M_r(f,E) \leqslant M_s(f,E)$ для $r < s$, при тому для будь-яких дійсних s та r включно зі значеннями $+\infty$ та $-\infty$. При тому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $r \geqslant 0$, і тоді $M_r(f,E) = M_s(f,E) = +\infty$, або коли $s \leqslant 0$, та тоді $M_r(f,E) = M_s(f,E) = 0$.*

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 1.7, та висновків, які можна зробити на основі теорем 1.10 та 1.8, тобто для порядків нуль та нескінченність нерівність випливає з теореми про існування монотонної та обмеженної послідовності. Друга частина говорить про те, що якщо при $r \geqslant 0$ середнє не додатне, то воно нескінченність, і тому вони «дорівнюють» одне одному. Теж саме з середніми при $r \leqslant 0$ тільки замість нескінченності вони «дорівнюють» нулю. □

Ця теорема показує, що середнє більшого порядку більше ніж середнє меншого порядку, якщо вони додатні.

З властивостей випливає, що інтегральні середні можуть бути додатними для порядків з $(a;b)$, $[a;b]$, $[a;b)$ та $(a;b]$, де $-\infty \leqslant a \leqslant 0 \leqslant b \leqslant +\infty$. При тому на своїй множині додатності середні є неперервною та строго монотонно зростаючою функцією від порядку, окрім функцій еквівалентних константі.

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $E = (0;1)$. З прикладів маємо, що середні додатні для порядків з напівінтервалу $[-\infty;1)$. Знайдемо ці середні для додатних $r < 1$:

$$\left(\int_E \frac{1}{x^r} dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int\limits_0^1 \frac{1}{x^r} dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{(1-r)x^{r-1}}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Тоді:

$$\lim_{r\to 1^-} \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{r}} = +\infty.$$

Що і є результатом теореми 1.10. Таким чином, цей приклад показує, що існує функція, для якої середні спрямовуються до нескінченності для порядків спрямованих до деякого додатного порядку знизу.

Далі розглянемо функцію $f(x) = x$ на $E = (0;1)$. З прикладів маємо, що середні існують для порядків з напівінтервалу $(1;+\infty]$. Знайдено середні для від'ємний порядків $r > 1$:

$$\left(\int_E x^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int\limits_0^1 x^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Тоді:

$$\lim_{r\to -1^+}\left(\frac{1}{r+1}\right)^{\dfrac{1}{r}} = 0.$$

Що і є результатом теореми 1.10. Таким чином, цей приклад показує, що існує функція, для якої середні спрямовується до нуля для порядків спрямованих до деякого від'ємного порядку зверху.

ВИСНОВОК

У роботі були розглянуть середні функції усіх порядків та їх властивості. Дослідивши середні можна зробити висновок, що середні вимірної, додатної майже скрізь функції на вимірній та обмеженій множині є неперервна, строго монотона функція від порядку, на множині порядків, для яких середні додатні. При тому, середні спрямовані до значень нескінченість чи нуль, якщо середні додатні для порядків з інтервалу. Якщо середні додатні на напівінтервалі чи відрізку, то для порядків на кінці множини, де середні додатні, буде розрив, для додатних у сенсі з скінченного числа до нескінченності, та для від'ємних порядків з скінченного числа до нуля. При тому для нуля може бути обидва варіанти розриву у залежності від того, які середні не додатні, для додатних чи від'ємних порядків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wheedan R. L. Measure and integral an introduction to real analysis/ Richard L. Wheedan, Antoni Zygmund. — NW : CRC Press, 1977. — 274 с.
2. Гарди Г. Г. Неравенста/ Г. Г. Гарди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа; пер. с англ. В. И. Левина — т. Ш. М., Наука, 1969. — Т. 2. — 1969. — 456 с.
3. K. G. Binmore Mathematical Analysis: A Straightforward Approach/ K. G. Binmore — Cambridge University Press, 1982. — 361 с.