Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

« Асимтотична поведінка розв'язків систем диференціальних рівнянь »

« Asymptotic behaviour of solutions of systems of differential equations»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Баєва Катерина Олегівна

Керівник: доцент, канд. фіз.-мат. наук Шарай Н.В.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, професор Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

No_____ від _________ 2024 р

Завідувач кафедри

____________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ДЕК No

протокол No____ від ________2024 р.

Оцінка___________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

____________ ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2024 року

ЗМІСТ

ВСТУП……………………………………………………………3

РОЗДІЛ 1……………………………………………………….5

Дослідження асимптотичної поведінки фундаментальних розв'язків деяких лінійних систем ....……………….....5

1.1 Дослідження диференціальних систем близьких до лінійних ....………………………………………… 5

1.2 Основні результати про асимптотику фундаментальних розв'язків на нескінченності………….........………………..6

1.3 Асимптотичні подання розв'язків нелінійних систем………..9

РОЗДІЛ 2……………………………………………………...21

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІІ ПОРЯДКУ……………….21

2.1 Лінійні диференціальні рівняння ІІ порядку..........................21

2.2. Загальні теореми про асимптотичну поведінку рівнянь ІІ порядку...24

ВИСНОВКИ ………………………………………………..….33

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ …………………...34

ВСТУП

Системи диференціальних рівнянь відіграють ключову роль у математичному моделюванні багатьох явищ і процесів у природничих науках, техніці, економіці та біології. Вони використовуються для опису динамічних систем, таких як рух тіл у фізиці, популяційні моделі в біології, економічні процеси та електричні ланцюги в інженерії. Однак, не завжди можливо отримати точний розв'язок цих рівнянь для будь-якого моменту часу. Тому вивчення асимптотичної поведінки розв'язків є важливим, оскільки дозволяє зрозуміти, як система поводиться за великих значень часу або за певних граничних умов.

Вивчення асимптотичної поведінки має велике практичне значення, оскільки часто цікавить не сам точний розв'язок на кожному кроці, а те, до чого система прагне у майбутньому. Наприклад, в економіці можна вивчати довготривалі наслідки введення певної політики, в фізиці – поведінку частинок у нескінченному часі, в екології – динаміку популяцій через кілька поколінь. Аналіз асимптотичних розв'язків дозволяє прогнозувати стійкість систем, виявляти можливі коливання або хаотичні режими, а також будувати стратегії керування процесами.

Сьогодні існує безліч підходів до вивчення асимптотичної поведінки, серед яких методи Ляпунова, Пуанкаре, метод середніх та пертурбаційні методи. Ці інструменти дозволяють розв'язувати широкий спектр завдань, пов'язаних із нелінійними і лінійними системами, і показують високу ефективність при аналізі реальних процесів. Тому детальне вивчення цієї теми є необхідним для подальшого розвитку теоретичної та прикладної математики.

Основною метою цієї дипломної роботи є аналіз методів вивчення асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь, а також застосування цих методів для різних типів систем. Зокрема, дослідження буде зосереджене на таких питаннях, як стійкість розв'язків, наближені методи для нелінійних систем, а також знаходження асимптотичних розв'язків у прикладних задачах.

Для досягнення мети дипломної роботи необхідно вирішити такі завдання:

Дослідити основні підходи до аналізу асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Розглянути та описати основні теореми стійкості і критерії для визначення асимптотичних властивостей систем.

Застосувати методи Ляпунова для вивчення асимптотичної поведінки нелінійних систем.

Провести аналіз прикладів реальних систем із застосуванням методу середніх.

Об'єктом дослідження є системи диференціальних рівнянь, які використовуються для опису динамічних систем у різних галузях науки. Особлива увага буде приділена нелінійним системам, оскільки їхня поведінка значно складніша для аналізу, ніж у лінійних систем.

У роботі будуть використовуватися такі основні методи:

Метод Ляпунова для аналізу стійкості та асимптотичної поведінки.

Метод середніх для нелінійних систем і періодичних розв'язків.

РОЗДІЛ 1

Дослідження асимптотичної поведінки фундаментальних розв'язків деяких лінійних систем

1.1 Дослідження диференціальних систем близьких до лінійних

Розглянемо таку систему лінійних диференціальних рівнянь :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \tag{1.1.1}$$

де x(t) $\in \mathbb{R}^n$, а матриця A має розмір nxn та містить сталі коефіцієнти. Розв'язок цієї системи можна подати у вигляді:

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

де x_0 -це початковий вектор.

Щоб розглянути асимптотичну поведінку розв'язків системи (1.1.1), необхідно розглянути власні значення матриці A.

У випадку, коли всі власні значення є дійсними та від'ємними, то при t→+∞ розв'язок x(t)системи (1.1.1) прямує до нуля.

Причому, коли одне власне значення є додатнім, то розв'язок x(t) системи(1.1.1) збільшується експоненційно при t→∞.

Можемо довести, що якщо всі власні значення матриці A є дійсним та від'ємними, то її можна записати у співвідношенні:

$$A = Q\Lambda Q^{-1},$$

де матриця Λ є діагональною, елементи якої на діагоналі відповідають власним значенням матриці A, а матриця Q є оберненою, в якої стопцями виступають вектори власних векторів матриці A.

Використовуючи даний розв'язок до розв'язку x(t) системи (1.1.1)

$$x(t) = e^{At}\, x_0,$$

отримуємо:

$$x(t) = e^{At}\, x_0 = (Qe^{\Lambda t}Q^{-1})\, x_0.$$

Тоді, асимптотична поведінка розв'язків x(t) визначається власними значеннями матриці A. Якщо всі власні значення будуть від'ємними, то при t → ∞ розв'язок прямує до нуля.

Аналогічно, якщо хоча б одне власне значення є додатним, то розв'язок x(t) збільшується експоненційно при t → ∞.

Якщо A не є діагональною матрицею, можемо використовувати аналогічний підхід, знаходячи її жорданову нормальну форму і визначаючи асимптотичну поведінку розв'язків за допомогою жорданових клітин.

Тоді, аналіз власних значень і векторів матриці A є важливим інструментом для вивчення асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних систем.

Для лінійних диференціальних систем(1.1.1) з змінними коефіцієнтами, використовуються ще інші методи дослідження асимптотичної поведінки. Такі як, метод Ляпунова, який дозволяє вивчати умови стійкості розв'язків лінійних диференціальних систем. Існують інші методи, наприклад, метод Пуанкаре, який дозволяють досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків систем з неоднорідними коефіцієнтами.

1.2 Основні результати про асимптотику фундаментальних розв'язків на нескінченності

Теорема 1.2.1. Нехай дана диференціальна система

$$x' = [\Lambda(t) + C(t)]x \;, \qquad (1.2.1)$$

в якої матриця Λ(t)= diag $[\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)]$ є неперервною та діагональною, а матриця C(t) також є неперервною такою, що виконується умова

$$\int_{t_0}^{\infty} |C(t)|dt < \infty. \qquad (1.2.2)$$

Нехай для деякого фіксованого цілого k ($1 \le k \le n$) вираз

$$Re\{\lambda_i - \lambda_k(t)\} \quad (i = 1, \ldots\ldots, n)$$

не змінює знак, тобто є додатнім або від'ємним. Тоді диференціальна система (1.2.1) має фундаментальний розв'язок x(t), компоненти якого мають асимптотичне подання при $t \to \infty$

$$x_k(t) \sim exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds\right) e_k, \qquad (1.2.3)$$

де e_k це сталий вектор, k-та компонента якого дорівнює 1, а всі інші дорівнюють нулю.

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо систему (1.2.1). Для дослідження асимптотичних властивостей фундаментальних розв'язків системи(1.2.1) зробимо заміну невідомої функції вигляду

$$x(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)ds\right) y(\mathrm{t}),$$

де y (t)- вектор- функція, розмір якої співпадає з розміром вектор-функції $x(t)$. В результаті такої заміни отрмуємо систему відносно невідомої y(t), де замість матриці Λ(t) будемо мати матрицю

$$\Lambda(\mathrm{t}) - \lambda_k(t) I.$$

Таким чином припустимо, що $\lambda_k(t)$ дорівнює тотожному нулю. Звідки випливає, що

$$\Lambda(\mathrm{t})\, e_k = 0$$

За умовою теореми дійсні частини різниць $\lambda_1(t), \ldots.. \lambda_n(t)$ не міняють знак. Звідси можливо зробити вивід, що функція

$$\mu_i(t) = \mathrm{Re}\int_{t_0}^{t} \lambda_i(s)ds$$

є монотонною функцією.

Позначимо через P_1таку діагональну матрицю, яка має на i-мо місці 1 або 0 і відповідно $\mu_i(\infty)$= -∞ або $\neq -\ \infty$, причому P₂ = I - P_1. Фундаментальною матрицею для системи диференціальних рівнянь

$$y' = \Lambda(t)y. \qquad (1.2.4)$$

є діагональна матриця, яку можлтво записати наступним чином

$$Y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \Lambda(s)ds\right) .$$

Можливо зробити вивід, що елементи наступних матриць, які взагалі кажучи, є діагональними, Y(t) P_1 Y^{-1} (s) та Y(t) P_2 Y^{-1} (s) дорівнюють нулю чи можливо записати в вигляді

$$exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_i(\tau)d\tau\right),$$

де $\mu_i(\infty)$= -∞ для першої матриці та $\neq -\ \infty$ для другої. Оцінимо

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| = exp\left(Re\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right) = exp[\mu_i(t)\text{-}\ \mu_i(s)].$$

При $\mu_i(\infty)$ = - ∞ маємо, що $\mu_i(t)$ це незростаюча функція, причому виконується

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq 1 \qquad при\ t_0 \leq s \leq t.$$

У випадку, коли $\mu_i(\infty)$ $\neq$ - ∞ , то $\mu_i(t)$- це неспадна функція, яку можна оцінити наступним чином

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq 1 \qquad \text{при } t_0 \leq t \leq s,$$

у випадку $\mu_i(\infty) \neq$ -∞ та $\mu_i(t)$- це незростаюча функція, отримуємо оцінку

$$\left|exp\left(\int_s^t \lambda_i(\tau)d\tau\right)\right| \leq exp[\mu_i(\infty)] \quad при\ t_0 \leq t \leq s.$$

Звідси можливо зробити вивід, що існує така стала К > 0, що справедливі наступні

$$\left|\mathrm{Y(t)}P_1\, Y^{-1}(\mathrm{s})\right| \le K\, при\ t_0 \le t \le s,$$

$$\left|\mathrm{Y(t)}P_2\, Y^{-1}(\mathrm{s})\right| \le K\, при\ t_0 \le t \le s.$$

Звідси, за означенням P_1, маємо, що $\mathrm{Y(t)}P_1 \to 0\ при\, t \to \infty$.

Так як система (1.2.4) має сталий розв'язок e_k ,тоді система (1.2.1) містить розв'язок, для якого виконується асимптотична оцінка $x_k(t) \to e_k,\ при\, t \to \infty$.

Теорема доведена.

Теорема 1.2.2. Нехай дана диференціальна система

$$x' = [A + B(t)]x\,, \qquad (1.2.5)$$

у якої матриця А є сталою, причому всі характеристичні корені $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є простими та різними. Нехай ξ_i –це характеристичний вектор А, що відповідає характеристичному числу $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$.

Нехай матриця B(t) - неперервна, визначена при t ≥ t_0 і задовольняє умову

$$\int_{t_0}^{\infty} |B(t)|dt < \infty. \qquad (1.2.6)$$

Тоді диференціальна система

$$x' = [A + B(t)]x$$

містить системy фундаментальних розв'язків $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, яка при $t \to \infty$ має асимптотичне подання

$$x_k(t) \sim e^{\lambda_k t}\xi_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо диференціальну систему(1.2.5). Позначимо через Т– сталу матрицю, елементами якої є стовпчики власних векторів $\xi_1, \ldots, \xi_n$, які відповідають характеристичним числам матриці

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n].$$

За теорією лінійної алгебри матриця T має обернену, причому матриця Λ має вигляд $T^{-1}AT = \Lambda$. Таким чином, якщо зробити заміну x = Ty і домножити систему (1.2.5) зліва на матрицю T^{-1}, то отримаємо наступну систему

$$y' = [\Lambda + C(t)]y,$$

де $C = T^{-1}BT$, для якої справедлива теорема 1.2.1, умови якої виконані.

Теорема доведена.

1.3 Асимптотичні подання розв’язків нелінійних систем

Розглянемо асимптотичне подання розв'язків систем диференціальних рівнянь з нелінійностями. Для таких систем асимптотика розв’язків взагалі не може бути точно визначена,так як не має деякої стандартної форми розв'язків, на відміну від лінійних диференціальних систем.

Розглянемо деякі спеціальні класи систем нелінійних диференціальних рівнянь, для яких можливо розглянути асимптотичну поведінку розв'язків.

Відома теорія,що за допомогою теорем Ляпунова для динамічних автономних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ і f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ неперервна функція, можливо дослідити асимптотичну поведінку розв'язків.

Тобто, якщо існує додатно визначена функція Ляпунова V(x), для якої виконуються умови:

$$V(x) > 0 \text{ для всіх } x \neq 0;$$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \leq 0 \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}^n,$$

то для будь-якого розв'язку системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

прямує до невід'ємної непорушної множини, яка складається з множини x, для яких V(x) = 0.

Теорія Ляпунова фактично встановлює асимптотичну поведінку розв'язків деяких класів нелінійних диференціальних систем, які задовольняють умовам відповідних теорем.

Асимптотична поведінка розв’язків диференціальних систем загалом залежить від їхніх властивостей і початкових умов. У випадку лінійних систем вона визначається власними значеннями матриці системи. Для певних класів нелінійних систем можливе застосування теорії Ляпунова, що дозволяє аналізувати асимптотичну стійкість розв’язків. Однак для нелінійних диференціальних систем у загальному випадку не існує універсального підходу, і їх асимптотична поведінка зазвичай досліджується індивідуально для кожного конкретного класу систем.. Наприклад, для дослідження асимптотики розв'язків систем з деякими специфічними властивостями використовуються методи динамічних систем і теорія катастроф. Також важливим інструментом для аналізу нелінійних диференціальних систем є чисельні методи, зокрема методи розв'язання диференціальних рівнянь, які дозволяють отримувати чисельні розв'язки систем і відслідковувати їх асимптотичну поведінку.

Розглянемо асимптотичне поводження розв’язків нелінійної системи, яка має спеціальний вигляд

$$x' = Ax + f(t, x), \quad (1.3.1)$$

де матриця A є постійною, а вектор-функція f є неперервною та означеною для $t \geq t_0$, |x| < c.

Позначимо μ як деяке довільне дійсне число. Подамо простір розв’язків X як суму підпросторів X_0, X_1 , які є інваріантними щодо матриці A. Характеристичні числа матриці A, дійсні частини яких є меншими або рівними μ. Нехай P_i проекція X на X_i $(i =- 1, 0,1)$.

Можливо довести, що якщо B(t) → 0 при t→∞, рішення систем диференціальних рівнянь

$$x^{'} = [A(t) + B(t)]x \qquad (1.3.2)$$

мають або таку саму асимптотику, як незбурена система, а система так і іншу, яка відрізняється від базової

$$y^{'} = Ay.$$

Дослідження асимптотики системи (1.3.2) наводять на ідею, що логарифми розв'язків обох систем містять однакову асимптотику. Такий дуже цікавий факт є дуже важливим пр дослідженні деяких моделей, наприклад в економіці.

Теорема 1.3.1. Нехай розв'язок x(t) є обмеженим при $t \geq t_0$ системи (1.3.1), тобто |x(t)| < c та виконується співвідношення

$$|f[t, x(t)]| \leq \gamma(t)|x(t)| \qquad (1.3.3)$$

при $t \geq t_0$, функція γ(t) - непервна невід'ємна, причому, виконується умова

$$\int_t^{t+1} \gamma(s)ds \to 0 \qquad при\, t \to \infty\,. \qquad (1.3.4)$$

То справедливо: або x(t) = 0 для будь-яких великих t , або виконується умова

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)| \;\;, \qquad (1.3.5)$$

де μ можливо побачити як дійсну частину одного з характеристичних чисел матриці A. Більш того, справедлива асимптотика

$$|P_{\pm 1}x(t)| = o(|P_0 x(t)|) \quad при\, t \to \infty \qquad (1.3.6)$$

(Таким чином, рішення системи є дотичним до підпростору X_0 $при\, t \to \infty$)

ДОВЕДЕННЯ. Розглянемо більш детально питання про норму вектора у скінчених просторах. З теорії функціонального аналізу відомо, що всі норми скінчено-вимірних проторах є еквівалентними, тому верхня та нижня границі

$t^{-1}\log|x(t)|$ не залежать від вибору конкретної норми та є інваріантами відносно оберненого постійного перетворення. Припустимо, що матриця А може бути подана у відповідністю з теорією лінійної алгебри в канонічній квазідіагональній формі Жордана. Покладемо

$$x = Ty, \text{ де } \quad T = diag[1, \alpha^{-1}, \ldots, \alpha^{1-n}],$$

та припустимо, що всі ненульові кодіагональні елементи матриці А були рівними α, де α – будь-яке задане додатнє число. Тоді можливо переписати систему (1.3.1) в вигляді

$$x_i^{'} = \lambda_i x_i + \alpha_i x_{i-1} + f_i(t, x) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

де $Re\lambda_1 \geq \ Re\lambda_2 \geq \ldots \ \geq Re\lambda_n,\ \ \alpha_i = 0$ *або* α *і* $\alpha_i = 0$ *при* $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}.$

Випливає, що

$$\frac{d}{dt}|x_i|^2 = 2Re\left(x_i^{-} x_i^{'}\right) = 2Re\left(\alpha_i x_i^{-} x_{i-1}^{'} + x_i^{-} f_i\right).$$

Таким чином, якщо позначити $r_i = |x_i(t)|$, можливо переписати наступним чином

$$\left|\frac{d}{dt}\left(r_i^2\right) - 2Re\lambda_i r_i^2\right| \leq 2\alpha_i r_i r_{i-1} + 2r_i|f_i[t, x(t)]|. \qquad (1.3.7)$$

Позначимо як |x| - звчисайну евклідову норму $(\sum |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Позначимо чере $\mu_1 > \ \mu_2 > \ldots > \ \mu_h$ дійсні частини різних характеристичних чисел матриці А, причому оберемо α настільки малим, що

$$2\alpha < \ \mu_k - \ \mu_{k+1} \ (k = 1, \ldots, h\text{-}1).$$

Оберемо,

$$L_k = \sum_{Re\lambda_i = \mu_k} r_i^2\,, \qquad M_k = \sum_{Re\lambda_i > \mu_k} r_i^2\,, \qquad N_k = \sum_{Re\lambda_i \leq \mu_k} r_i^2,$$

так, щоб виконувалась умова $M_k + N_k = |x(t)|^2$. Тоді з (2.5.7) користуючись нерівністю Коші наступні оцінки

$$\left|L_k^{'} - 2\,\mu_k L_k\right| \leq 2\alpha L_k + 2\gamma(t) L_k^{\frac{1}{2}} (M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.3.8)$$

$$M_k^{'} \geq 2(\mu_{k-1} - \alpha) M_k - 2\gamma(t) M_k^{\frac{1}{2}} (M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1.3.9)$$

$$N_k^{'} \leq 2(\mu_k + \alpha) N_k + 2\gamma(t) N_k^{\frac{1}{2}} (M_k + N_k)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.3.10)$$

Таким чином, $N_1 = M_{h+1} = |x(t)|^2$ причому виконується умова

$$2[\,\mu_h - \alpha - \gamma(t)]N_1 \leq N_1^{'} \leq 2[\,\mu_1 + \alpha + \gamma(t)]N_1.$$

Якщо проінтегрувати, можливо отримати при $t \geq t_1$співвідношення

$$\left[exp\left\{(\,\mu_h - \alpha)(t - t_1) - \int_{t_1}^{t} \gamma(s)ds\right\}\right] |x(t_1)| \leq |x(t)|$$
$$\leq \left[exp\left\{(\,\mu_1 + \alpha)(t - t_1) - \int_{t_1}^{t} \gamma(s)ds\right\}\right] |x(t_1)| \qquad (1.3.11)$$

Можливо бачити, що при $|x(t)|, \textit{яке}$ дорівнює нулю при $t = t_1 \geq t_0$ та не дорівнює нулю для будь-яких $t > t_1$. Такий випадок ми розглдати не будемо .

Для функції

$$\upsilon = \upsilon_k(t) = \frac{M_k}{M_k + N_k}$$

яка є визначеною для будь-яких $t \geq t_1$, виконується співвідношення $0 \leq \upsilon \leq 1$. Звідси з урахуванням властивостей

$$\upsilon^{'} = \frac{M^{'}N - M\,N^{'}}{(M+N)^2} \quad i \quad \upsilon(1-\upsilon) = \frac{MN}{(M+N)^2},$$

та нерівностей (1.3.9), (1.3.10) можемо отримати оцінку

$$\upsilon^{'} \geq b\upsilon(1-\upsilon) - 2\gamma(t), \qquad (1.3.12)$$

де

$$b = b_k = 2(\mu_{k-1} - \mu_k - 2\alpha) > 0.$$

Теорема 1.3.2. Припустимо, що майже одне характеристичне число матриці А має від'ємну дійсну частину μ < 0 та вектор-функція f(t,x) задовольняє умові

$$f(t,x) = o(|x|) \qquad при\ t \to \infty, |x| \to 0. \qquad (1.3.13)$$

Тоді можливо знайти такі додатні постійні η, К, які залежать від матриці А та додатні постійні Т, ρ, які залежать від функції f, такої, що якщо $\xi_{-1} \in X_{-1}, \xi_0 \in X_0$, для яких виконується умова

$$|\xi_{-1}| \le \eta\,|\xi_0|, \quad 0 < |\xi_0| < \frac{\rho}{2K},$$

тоді система (1.3. 1) має хоча б один розв'язок x(t) при $t \ge t_1$, який є обмеженим |x(t)| ≤ ρ при $t \ge t_1$ та задовольняє умові

$$P_{-1}x(t_1) = \xi_{-1},\ P_0 x(t_1) = \xi_0, \qquad (1.3.14)$$

та

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)|,$$

причому цей розв'язок є єдиним і функція f задовольняє умову Ліпшица

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|\,x_1 - x_2| \qquad (1.3.15)$$

якщо t ≥ T, $|x_1| \le \rho,\ |x_2| \le \rho$ з достатньо малою додатною сталою L.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай існують додатні постійні α, β, γ такі, що

$$-\beta + \alpha < \mu < -\gamma - \alpha$$

та будь-яке характеристичне число матриці А, яке містить дійсну частину, яка менша ніж μ, містить дійсну частину, яка менша ніж $-\beta - \alpha$, та будь-яке характеристичне число, яке містить дійсну частину, яка більша ніж μ , та містить дійсну частину, яка більша ніж $-\gamma + \alpha$. Тоді можливо знайти таку постійну K > 0 , що з (1.3.14) оберемо $T \geq t_1$ і $\rho > 0$ такі, що виконується оцінка

$$|f(t,x)| \leq \left(\frac{\alpha}{4K}\right) |x| \qquad \text{при } t \geq T, |x| \leq \rho.$$

Якщо $\xi_{-1} \in X_{-1}, \xi_0 \in X_0$ задовольняють співвідношенням

$$|\xi_{-1}| \leq \frac{\rho}{2K}, \; |\xi_0| \leq \frac{\rho}{2K}.$$

Оберемо будь-яку функцію x(t), яка є неперервною, означеною при $t \geq t_1 (\geq T)$, обмеженою $|x(t)| \leq \rho$ і для якої справедливо x(t) = O($e^{-\gamma t}$) при $t \geq t_1$. Позначимо як

$$|x| = \sup_{t \geq t_1} e^{\gamma(t-t_1)} |x(t)|$$

і припустимо, що

$$\mathcal{T}x(t) = e^{(t-t_1)A}(\xi_{-1} + \xi_0) + \int_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}(P_{-1} + P_0) f[s, x(s)]\, ds - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A} P_1 f[s, x(s)]\, ds.$$

Звідки

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}x(t)| &\leq \tfrac{1}{2} K e^{-(\gamma+\alpha)(t-t_1)}(|\xi_{-1}| + |\xi_0|) \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\alpha \left\{ \int_{t_1}^{t} e^{-(\gamma+\alpha)(t-s)} |x(s)|\, ds + \int_t^{\infty} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)} |x(s)|\, ds \right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2} K e^{-\gamma(t-t_1)}(|\xi_{-1}| + |\xi_0|) + \tfrac{1}{2} |x|\, e^{-\gamma(t-t_1)}, \end{aligned}$$

і виконується

$$|\mathcal{T}x| \leq \tfrac{1}{2} K (|\xi_{-1}| + |\xi_0|) + \tfrac{1}{2} |x|. \tag{1.3.16}$$

Звідки, якщо $|x(t)| \leq \rho$, то $|Gx| \leq \rho$. Ми отримали, що всі умови теореми Шаудера і Тихонова про нерухому точку виконуються. Звідки, інтегральне рівняння $x = Gx$ має хоч би один неперервний розв'язок x(t) такий, що виконується співвідношення $|x| \leq \rho$.

Якщо продиференціювати, можливо побачити, що функція x(t) відповідає і є розв'язком диференціального рівняння (1.3. 1). Більш того, відповідно (1.3.16) виконується

$$|x(t_1)| \leq K(|\xi_{-1}| + |\xi_0|).$$

Обернено, будь-яке рішення x(t) диференціального рівняння (1.3. 1), яке задовольняє (1.3.14) та задовольняє оцінці x(t) = O($e^{-\gamma t}$), має бути розв'язком інтегрального рівняння x = Gx. Покладемо z = x – Gx, тоді

$$(P_{-1} + P_0)z(t_1) = 0, \;\; z(t) = O(e^{-\gamma t}), \;\; \text{і} \;\; z' = Az,$$

де це можливо, якщо z ≡ 0.

Можливо довести, що система (1.3.1) містить хоч би один розв'язок x^- (t), який означений при $t \geq t_1$ та такий, для якого справедливо $P_{-1}x^-\,(t_1) = \xi_{-1}$, | x^- (t)| ≤ ρ і x^- (t) = O($e^{-\beta t}$) при $t \geq t_1$. Причому, будь-який розв'язок задовольняє також

$$|x^-(t)| \leq K|\xi_{-1}|.$$

Якщо x^- (t)збігається з попереднім розв'язком x(t) при $t \geq t_1$, якщо виконується $|P_0| \leq \frac{1}{2}K$, можливо записати

$$|\xi_0| = |P_0 x(t_1)| \leq \frac{1}{2}K|x(t_1)| \leq \frac{1}{2}K|\xi_{-1}|.$$

Можливо відмітити, що якщо нерівність не виконується, то розв'язок x(t) має інший порядок мализни $O(e^{-\gamma t})$, який відрізняється від O($e^{-\beta t}$). Тоді за теоремою 1.3.1 можливо визначити, що log |(x(t)|~ μt при t→ ∞.

Припустимо, що (1.3.15) виконується для L = α/4K. Таким чином, можемо помітити що для будь-яких двох неперервних функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, для яких виконується співвідношення $|x_i(t)| \leq$ p і $x_i(t)| = O(e^{-\gamma t})$ при $t \geq t_1$ (i = 1, 2), можемо записати оцінку

$$|\mathcal{T}x_1 - \mathcal{T}x_2| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Користуючись принципом згортання, наше інтегральне рівняння x = Gx містить не більше одного розв'язку, а фактично маємо один розв'язок x(t), який задовольняє умову $|x(t)| \leq \rho$.

Теорема доведена.

Теорема 1.3.3. Нехай канонічна жорданова форма матриці A має m> 0 — максимальний порядок блоків, у яких дійсні частини характеристичних чисел дорівнюють μ. Нехай x(t) — розв'язок рівняння (1.3 .1), який задовольняє (1.3.5) . Якщо виконується

$$|[f(t, x(t)]| \leq \gamma(t)|x(t)|, \qquad (1.3.17)$$

де $t^{m-1}\gamma(t) \in L[t_0, \infty]$, тоді існує розв'язок y(t) автономної системи

$$y' = Ay\,, \qquad (1.3.18)$$

який при t→∞ має подання

$$x(t) = y(t) + o(|y(t)|). \qquad (1.3.19)$$

Наведемо теорему, яка історично називається теоремою Хартманна та Уінтнера. Її доведення аналогічно доведенню теореми 1.3.1.

Теорема 1.3.4 (Хартмана і Уінтнера). Нехай матриця A диференцальної системи (1.3.2) є сталою і має простий характеристичне число λ. Припустимо, що будь-який інший характеристичне число матриці A не має такої ж дійсної частини, як λ.

Нехай матриця B(t) є неперервною, означеною при $t \geq t_0$ та для якої виконується умова

$$\int^{\infty} |B(t)|^2 dt < \infty. \qquad (1.3.20)$$

Якщо x(t) є нетривіальним розв'язком системи (1.3.2) ,для якого справедливо

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)| = \mu = \mathbb{R}\lambda$$

Тоді при $t \to \infty$ справедливе асимптотичне подання розв'язків системи

$$x(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \{\lambda + \beta(s)\} ds\right] [\xi + o(1)], \qquad (1.3.21)$$

де ξ– характеристичний вектор матриці A, який відповідає характеристичному числу λ, причому, β(t) деяка скалярна функція, яка задовольняє співвідношенню

$$P_0 B(t)\xi = \beta(t)\xi.$$

Кожна з теорем 1.2.2 і 1.3.3 показує, що розв'язки диференціальної системи (1.3. 1) повторюють розв'язки незбуреного рівняння (1.3. 18) при дуже загальних обмеженнях на функцію f. Застосовуючи бульш суворі обмеження на вигляд функції f, ми можемо довести теорему про зв'язок між розв'язками двох рівнянь.

Теорема 1.3.5. Якщо хоч би одне характеристичне число матриці A системи містить дійсну частину μ < 0 і справедлива умова

$$|f(t,x)| \le L|x|^{1+\rho} \qquad (1.3.22)$$

при $t \ge t_0$, |x| ≤ δ, де L, ρ і δ є додатними постійними.

Тоді можливо знайти додатну сталу n таку, що якщо розв'язок x(t) системи (1.3.1) , який задовольняє умові

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|x(t)|,$$

то система (1.3 .18) містить єдиний розв'язок y(t), для якого виконується оцінки

$$P_{-1}x(t_0) = P_{-1}y(t_0) \qquad (1.3.23)$$

та

$$x(t) = y(t) + O\left(e^{(\mu-\eta)t}\right). \qquad (1.3.24)$$

І оберенене, якщо y(t) є розв'язком (1.3. 18), для якого виконується співвідношення

$$\mu = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \log|y(t)|$$

і $|y(t_0)|$ є достатньо малим, система (1.3.1) має хоч би один розв'язок x(t), який є обмеженим $|x(t)| \leq \delta$ при $t \geq t_0$ та виконуються співвідношення (1.3.23) і (1.3.24). Якщо виконується умова Ліпшица для f

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \gamma \mid x_1 - x_2| \qquad (1.3.25)$$

при $t \geq t_0$, $|x_1| \leq \delta$, $|x_2| \leq \delta$ із достаньо малою додатною сталою γ, то розв'язок є єдиним.

З огляду на складність дослідження асимптотичної поведінки нелінійних диференціальних систем, важливо володіти розвиненими математичними навичками та глибоким розумінням основ диференціальних рівнянь і теорії хаосу. Використання цих методів дає змогу краще зрозуміти динаміку системи, а також простежити, як змінюються розв'язки при великих і малих значеннях часу.

Отримання асимптотичних характеристик розв'язків нелінійних систем є ключовим етапом у вивченні складної динаміки, що має значний вплив на різні галузі науки й техніки. Аналіз асимптотичної поведінки сприяє прогнозуванню розвитку систем, управлінню їх рухом і розв'язанню багатьох прикладних завдань.

РОЗДІЛ 2

Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь II порядку

2.1 Лінійні диференціальні рівняння II порядку

Оскільки лінійні рівняння другого порядку мають особливе значення для прикладної математики, ми неодноразово ілюстрували застосування загальних результатів до цього випадку в попередніх розділах. Ми не повторюємо тут результати, отримані таким чином, а замість цього розглядаємо певні методи для рівнянь другого порядку, які, здається, не можна поширити на рівняння довільного порядку або системи.

Отримаємо спочатку асимптотичну формулу для розв'язків самоспряженого рівняння

$$L[y] \equiv (py')' + qy = 0. \qquad (2.1.1)$$

Припустимо, що p(x) і q(x) є дійсними ненульовими двічі безперервно диференційованими функціями, і набір

$$\mu = (\epsilon pq)^{\frac{-1}{4}},$$

де $\epsilon = \pm 1$ відповідно до $pq > 0$, $pq < 0$. В рівняні

$$y = \mu(x)z, \qquad t = \int^{x} \frac{d\xi}{p(\xi)\mu^2(\xi)}$$

перетворює однорідне рівняння (2.1.1) у рівняння

$$\ddot{z} + p\mu^3 \left[\left(p\mu'\right)' + q\mu \right] z = 0,$$

тобто

$$\ddot{z} + [p\mu^3 \left(p\mu'\right)' + \epsilon]z = 0 \qquad (2.1.2)$$

Розглянемо це як збурення рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\ddot{z} + \epsilon z = 0.$$

Щоб застосувати теорему, ми припускаємо, що t→∞ відповідає x→∞ і що обурювальний член $p\mu^3(p\mu')'$ є абсолютно інтегровним як функція t. Тобто ми припускаємо

$$\int_{x_0}^{\infty} (p\mu^2)^{-1} dx = \infty \tag{2.1.3}$$

та

$$\int_{x_0}^{\infty} \left|\mu(p\mu')'\right| dx < \infty. \tag{2.1.4}$$

Спочатку ми розглянемо наслідки цих припущень.

Лема 2.1.1. Нехай p(x) – додатна неперервна функція, а μ(x) – неперервно диференційовна функція, така що $p\mu'$ неперервно диференційовна для x ≥ x_0 і

$$\int_{x_0}^{\infty} \mu(p\mu')' dx \quad \textit{збігається} \tag{2.1.5}$$

Якщо $p\mu'^2 \notin L[x_0, \infty]$, то $p\mu'$ має кінцеву межу y≠0 при x→∞ і μ→±∞ відповідно до y > 0, y < 0.

Якщо $p\mu'^2 \in L[x_0, \infty]$, то $p\mu\mu'$ має скінчену межу δ при x→∞.

Якщо $(p\mu^2)^{-1} \notin L[x_0, \infty]$, то $p\mu'^2 \in L[x_0, \infty]$ і δ = 0.

Доведення. Припустимо спочатку, що $p\mu'^2 \notin L[x_0, \infty]$. Оскільки

$$(p\mu\mu')' = \mu(p\mu')' + p\mu'^2, \tag{2.1.6}$$

з (5) випливає, що $p\mu\mu' \to \infty$ при x→∞. Таким чином або μ > 0, μ'> 0 або μ < 0, μ'< 0 для великих x. Тому μ^{-1} має скінчену межу при x→∞. Оскільки

$$(p\mu')' = \mu(p\mu')'\mu^{-1} \tag{2.1.7}$$

з (5) знову випливає, що $p\mu'$ має кінцеву межу γ при x→∞. Оскільки $p\mu\mu' \to \infty$ ми повинні мати μ→±∞. Інтегруючи(2.1.7) між границями x і ∞, отримуємо

$$p\mu' = \gamma - \int_x^\infty \mu\left(p\mu'\right)'\mu^{-1}dx = \gamma + o(\mu^{-1}),$$

оскільки μ^{-1} є монотонним. Якби γ дорівнювало нулю,випливало б, що $p\mu\mu' = o(1)$, що є протиріччям. Тому γ≠0. Із співвідношення

$$-(\mu^{-1})' = \mu^2\mu' = \left[\gamma + o(\mu^{-1})\right]/p\mu^2,$$

тепер випливає, що $(p\mu^2)^{-1} \in L[x_0, \infty]$.

Далі припустимо, що $p\mu'^2 \in L[x_0, \infty]$. У цьому випадку з (2.1.6) випливає, що $p\mu\mu'$ має скінчену межу δ при x→∞. Якщо δ≠0, то

$$(p\mu^2)^{-1} = (p\mu\mu')^{-2}p\mu'^2$$

належить $L[x_0, \infty]$. Це завершує доказ.

Тепер повернемось до рівняння (2.1.2), яке запишемо у вигляді системи

$$\dot{w} = [A + B(t)]w$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -p\mu^3\left(p\mu'\right)' & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичні корені A і $\lambda = \pm\,(-\epsilon)^{\frac{1}{2}}$, тобто ±i якщо є = 1 і ±1 якщо є = -1. Якщо виконуються умови (2.1.3) і (2.1.4), то за теоремою рівняння (2.1.2) має розв’язок, для якого

$$z \sim e^{\lambda t}, \dot{z} \sim \lambda e^{\lambda t}.$$

Отже, рівняння (2.1.1) має розв’язок, для якого $y \sim \mu(x)e^{\lambda t(x)}$ і

$$py' = p\mu' z + \mu^{-1}\dot{z} \sim (p\mu\mu' + \lambda)\mu^{-1}e^{\lambda t} \sim \lambda[\mu(x)]^{-1}e^{\lambda t(x)}$$

оскільки $p\mu\mu^{'} \to 0$ за лемою .

Доведення завершено.

Загальні теореми про асимптотичну поведінку

2.2 Загальні теореми про асимптотичну поведінку

Теорема 2.2.1. Нехай p(x), q(x) додатні двічі неперервно диференційовані функції, визначені для x ≥ x_0 такі, що

$$t(x) = \int_{x_0}^{x} (\frac{q}{p})^{\frac{1}{2}}\, dx \to \infty \qquad при\, x \to \infty$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \left|\mu\left(p\mu^{'}\right)^{'}\right| dx < \infty,$$

де μ(x) = $[p(x)q(x)]^{-\frac{1}{4}}$. Тоді (i) рівняння

$$(py^{'})^{'} + qy = 0$$

має фундаментальну систему розв'язків, що задовольняє x→∞

$$y \sim \mu\left(x\right)e^{\pm it(x)},\ py^{'} \sim \pm\, [\mu(x)]^{-1}\, e^{\pm it(x)},$$

(ii) рівняння

$$(py^{'})^{'} - qy = 0$$

має фундаментальну систему розв'язків, що задовольняє x→∞

$$y \sim \mu\left(x\right)e^{\pm t(x)},\ py^{'} \sim \pm\, [\mu(x)]^{-1}\, e^{\pm t(x)}.$$

Приклад 1.

Випливає, що α – β < 2, то нетривіальні дійсні розв'язки рівняння

$$\left(x^{\alpha} y^{'}\right) + x^{\beta} y = 0$$

мають при x→∞ асимптотичну форму

$$y = Ax^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\left[\sin\left\{\frac{2}{\beta-\alpha+2}x^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha+2)}+\delta\right\}+o(1)\right],$$

$$y' = Ax^{\frac{1}{4}(\beta-3\alpha)}\left[\cos\left\{\frac{2}{\beta-\alpha+2}x^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha+2)}+\delta\right\}+o(1)\right],$$

де A > 0 і $0 \le \delta < 2\pi$.

Далі ми покажемо, що для важливого окремого випадку, коли p ≡ 1, умови (3) і (4) з $\mu = f^{-\frac{1}{4}}$, тобто

$$\int_{x_0}^{\infty} f^{\frac{1}{2}}dx = \infty \quad i \quad \int_{x_0}^{\infty} |f^{-\frac{1}{4}}(f^{-\frac{1}{4}})''|dx < \infty,$$

еквівалентні умові

$$\int_{x_0}^{\infty} \left|f^{-\frac{3}{2}}f''\right| dx < \infty.$$

Випливає

$$f^{-\frac{1}{4}}(f^{-\frac{1}{4}})'' = -\frac{1}{4}\{f^{-\frac{3}{2}}f'' - \frac{5}{4}f^{-\frac{5}{2}}f'^2\}$$

з наступної леми при α = 0 та $\alpha = \frac{5}{4}$.

Лема 2.2.2. Нехай f(x) додатна двічі неперервна диференційована функція для x ≥ x_0 і нехай

$$\int_{x_0}^{\infty}\left(f^{-\frac{3}{2}}f'' - \alpha f^{-\frac{3}{2}}f'^2\right)dx \ \ \textit{сходиться}$$

для деякого дійсного $\alpha \neq \frac{3}{2}$. Тоді такі три умови еквівалентні:

$$\int_{x_0}^{\infty} f^{-\frac{3}{2}}f'^2dx < \infty, \tag{2.2.8}$$

$$f^{-\frac{3}{2}} f' \to 0 \quad при\, x \to \infty, \tag{2.2.9}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} f^{\frac{1}{2}}\, dx = \infty. \tag{2.2.10}$$

Крім того, кожна з цих умов виконується, якщо α < 1 та α > $\frac{3}{2}$.

Доведення. Покладемо p = $f^{\frac{5}{2}-2\alpha}$, $\mu = f^{\alpha-\frac{3}{2}}$. Тоді

$$\mu(py')' = (\alpha - 3/2)(f^{-\frac{3}{2}} f'' - \alpha f^{-\frac{5}{2}} f'^2)$$

отже, виконується (2.1.5). За лемою 2.1.1 якщо

$$p\mu'^2 = (\alpha - 3/2)^2 f^{-\frac{5}{2}} f'^2$$

не належить $L[x_0, \infty]$, то, оскільки μ додатнє

$$py' = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) f^{-\alpha} f' \to \gamma > 0$$

і

$$p\mu\mu' = (\alpha - 3/2) f^{-\frac{3}{2}} f' \to \infty$$

при x→∞. Тому

$$(f^{1-\alpha})' \to \frac{(1-\alpha)\gamma}{\alpha - \frac{3}{2}} \qquad якщо\, \alpha \neq 1$$

і

$$(\log f)' \to - 2\gamma \qquad якщо\, \alpha = 1$$

Отже

$$f^{1-\alpha} \sim \frac{(1-\alpha)\gamma x}{\alpha - \frac{3}{2}} \qquad якщо\, \alpha \neq 1$$

і

$$\log f \sim -2\gamma x \qquad\qquad \textit{якщо}\, \alpha = 1$$

Якщо α < 1 та α > $\frac{3}{2}$, це означає, що $f^{1-\alpha}$ від'ємне для великих x, що є протиріччям. З іншого боку, якщо 1 < α < $\frac{3}{2}$, це означає

$$f^{\frac{1}{2}} \sim cx^{\frac{1}{2(1-\alpha)}},$$

де c > 0, тому (2.2.10) не виконується. Аналогічно, (2.2.10) не виконується, якщо α=1. За лемою 1 якщо $f^{-\frac{5}{2}} f'^2 \in L[x_0, \infty]$, то $(f^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} f^{-\frac{3}{2}} f'$ має скінчену межу δ при x→∞. Тому $f^{-\frac{1}{2}} \sim \delta x$ і (2.2.10) виконується. Оскільки $(py^2)' = f^{\frac{1}{2}}$, тепер із леми 2.1.1 випливає, що $f^{-\frac{3}{2}} f' \to 0$ при x→∞.

Доведення завершено.

Таким чином, для p ≡1 і q = f теорема 1 набуває вигляду:

Теорема 2.2.2. Нехай f(x) - додатна двічі неперервно диференційована функція для x ≥ x_0 така, що

$$\int_{x_0}^{\infty} |f^{-\frac{3}{2}} f'^2| dx < \infty. \tag{2.2.11}$$

Потім (i) рівняння

$$y'' + \mathrm{f(x)y} = 0$$

має фундаментальну систему розв'язків, що задовольняє при x→∞

$$y \sim [\mathrm{f(x)}]^{-\frac{1}{4}} \exp\{\pm i \int_{x_0}^{x} [f(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\},$$

$$y' \sim \pm i [\mathrm{f(x)}]^{-\frac{1}{4}} \exp\{\pm i \int_{x_0}^{x} [f(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\};$$

(ii) рівняння

$$y'' - \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{y} = 0$$

має фундаментальну систему розв'язків, що задовольняє при x→∞

$$y \sim [\mathrm{f}(\mathrm{x})]^{-\frac{1}{4}} \exp\{\pm \int_{x_0}^{x} [f(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\},$$

$$y' \sim \pm [\mathrm{f}(\mathrm{x})]^{-\frac{1}{4}} \exp\{\pm \int_{x_0}^{x} [f(\xi)]^{\frac{1}{2}} d\xi\};$$

Рівняння (i), (ii) були розглянуті Вінтером та іншими авторами припущення

$$\int_{x_0}^{\infty} f^{-\frac{1}{4}} \left| \left(f^{-\frac{1}{4}} \right)'' \right| dx < \infty.$$

Доведення леми 2.1.2 показує, що якщо ця умова виконується, то виконується й умова (2.2.11), хіба що

$$f(x) \sim cx^{-4}, \quad f'(x) \sim -4cx^{-5} \ (c > 0).$$

У цьому єдиному винятковому випадку асимптотичні формули наведеного вище типу є абсолютно непридатним, оскільки згідно з теоремою рівняння (i), (ii) кожне має два лінійно незалежних розв'язки $y_1(x), y_2(x)$ такі що для x→∞

$$y_1(x) \sim x, \quad y_1'(x) \to 1,$$

$$y_2(x) \to 1, \quad y_2' = o(x^{-1}).$$

Таким чином, видається кращим накласти умову (2.2.11), яка також легше перевіряється. Асимптотична формула для y, але не для його похідної y', була доведена для рівняння (i) з гіпотези (2.2.11) Аткінсоном.

Асимптотична поведінка розв'язків рівняння

$$y'' + [1 + g(x)]y = 0, \tag{2.2.12}$$

де $g(x)$ є «малим» для великих х, можна зручно досліджувати методом полярних координат. Покладемо

$$y = r\cos(x+\varphi),\, y' = -r\sin(x+\varphi), \qquad (2.2.13)$$

де r > 0. Потім

$$\varphi' = \frac{1}{2}g(x)\{1+\cos 2(x+\varphi)\}, \qquad (2.2.14)$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{2}g(x)\sin 2(x+\varphi). \qquad (2.2.15)$$

Ми використовуємо ці співвідношення для доведення.

Теорема 2.2.3. Нехай $g(x)$ є дійсною неперервною функцією для х ≥ x_0, нехай інтеграли

$$\int_x^\infty g(\xi)d\xi,$$

$$g_1(x) = \int_x^\infty g(\xi)\cos 2\xi\, d\xi, \qquad g_2(x) = \int_x^\infty g(\xi)\cos 2\xi\, d\xi$$

існують і виконується

$$\int_{x_0}^{\infty} |gg_i|dx < \infty \qquad (j = 1,2).$$

Тоді рівняння (2.2.12) має фундаментальну систему розв’язків y_1, y_2 для х→∞

$$y_1(x) = \cos x + o(1), \qquad y_2(x) = \sin x + o(1),$$

$$y_1'(x) = -\sin x + o(1), \quad y_2'(x) = \cos x + o(1).$$

Теорема 2.2.4. Нехай $g(x)$ є дійсною неперервною функцією для х ≥ x_0, нехай інтеграли

$$\int_x^{\infty} g(\xi)d\xi, \qquad \int_x^{\infty} \{e^{2i\xi} g(\xi) - ia|g(\xi)|\} d\xi$$

існують для деякої дійсної константи a > 0, припустимо

$$\int^{\infty} |g(x)|dx = \infty. \qquad (2.2.16)$$

Якщо

$$G(x) = |\int_x^{\infty} g(\xi)d\xi| + |\int_x^{\infty} \{e^{2i\xi} g(\xi) - ia|g(\xi)|\} d\xi|$$

задовольняє

$$\int^{\infty} |g(x)| sup_{\xi \geq x} G(\xi) dx < \infty \qquad (2.2.17)$$

то рівняння має фундаментальну систему розв'язків y_1, y_2, що задовольняє для x→∞

$$y_1(x) = \rho(x)\,[\cos x + o(1)], \qquad y_2(x) = [\rho(x)]^{-1}[\sin x + o(1)],$$

$$y_1^{'}(x) = \rho(x)[-\sin x + o(1)], \quad y_2^{'}(x) = [\rho(x)]^{-1}[\cos x + o(1)],$$

де

$$\rho(x) = \exp\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\sin 2\xi\, d\xi\}.$$

ДОВЕДЕННЯ. Для будь-якого дійсного α ми можемо записати (2.2.14) у вигляді

$$\varphi = \frac{1}{2} g(x)\{1 + \cos 2(x + \alpha)\} + E,$$

де

$$|E| \leq |g(x)|\,|\psi(x) - \alpha|;$$

тобто

$$\varphi^{'} = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2}\mathcal{R}[e^{2ix}\{g(x) - ia|g(x)|\}] - \frac{1}{2} a|g(x)| \sin 2\alpha + E. \qquad (2.2.18)$$

Припустимо, $\psi(x_1) = \alpha, \psi(x_2) = \beta$ a ψ(x) лежить між α і β для $x_1 \leq x \leq x_2$. Інтегруючи останнє рівняння по $[x_1, x_2]$, ми отримуємо

$$\beta - \alpha = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \tag{2.2.19}$$

де

$$|I_1| + |I_2| \leq \frac{1}{2}G(x_1) + \frac{1}{2}G(x_2),$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}a\, sin2\alpha \int_{x_1}^{x_2} |g(x)|dx,$$

$$|I_4| \leq |\beta - \alpha| \int_{x_1}^{x_2} |g(x)|dx.$$

Припустимо, що α не є кратним $\frac{1}{2}\pi$ і β≠α задовольняє

$$|\beta - \alpha| \leq \frac{1}{2}a\,|sin2\alpha|.$$

Оберемо $\bar{x}$ такий великий, щоб G(x) < $|\beta - \alpha|$ для x ≥ $\bar{x}$. Ми покажемо, що якщо ψ(x) переходить від α до β, коли x зростає в $[\bar{x}$, ∞], тоді β < α, якщо sin 2α > 0, і β > α, якщо sin 2α < 0. Фактично, ми можемо вибрати $x_1, x_2 \geq \bar{x}$, так що ψ(x_1)=α, ψ(x_2)=β, а ψ(x) лежить між α і β для $x_1 \leq x \leq x_2$. Оскільки β – α – $(I_1 + I_2)$ має той самий знак, що й β - α, а $I_3 + I_4$ має знак протилежний від sin2α, ми маємо протиріччя, якщо

$$(\beta - a) \sin 2\alpha > 0.$$

Тепер ми виведемо з цього, що ψ(x) має межу при x→∞. По-перше, ψ(x) обмежений зверху і знизу, оскільки якщо 0 <δ< $\frac{1}{2}a$, то для великих x ψ(x) не може збільшуватися на інтервалі [α, α+ δ] або зменшуватися на інтервалі [α – $\frac{1}{2}$π – δ,α – $\frac{1}{2}$π], де α = ηπ + $\frac{1}{4}$π. Знову ж таки, якби ψ(x) мав два різних граничних значення при $x \to \infty$, існував би малий інтервал $[\alpha, \beta]$, такий, що $\sin 2\psi \neq 0$.

Асимптотична поведінка розв’язків нелінійних диференціальних систем другого порядку є важливим аспектом сучасного математичного аналізу, оскільки такі системи широко застосовуються в моделюванні реальних процесів. У цьому розділі детально розглянуто умови, за яких розв’язки нелінійних систем демонструють стабільну або нестабільну поведінку, їх прагнення до стаціонарних точок чи більш складних об'єктів, таких як граничні цикли. Особливу увагу приділено строгому формулюванню та доведенню теорем, які описують ці явища.

Основний акцент зроблено на використанні функцій Ляпунова як універсального інструменту для аналізу стійкості. Це дозволило формалізувати умови, за яких нелінійні системи мають локально стійкі або глобально стійкі розв’язки. Було показано, що властивості системи значною мірою залежать від топологічної структури фазового простору: у разі простих фазових портретів розв’язки прагнуть до рівноваги, тоді як у складніших випадках можуть формуватися межові цикли або хаотична динаміка.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було проведено глибокий аналіз асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Розглянута тема має як теоретичне, так і прикладне значення, адже нелінійні системи описують широкий спектр реальних процесів, зокрема в механіці, фізиці, біології та техніці. Основний акцент зроблено на строгому математичному формулюванні задачі, доведенні теорем і розробці методів дослідження стійкості та динаміки систем.Використання функцій Ляпунова дало змогу строго довести умови стійкості стаціонарних точок і граничних циклів.

Результати роботи мають широкий спектр застосувань. Зокрема, аналіз стабільності стаціонарних розв'язків корисний у задачах керування складними системами, коливальних процесах чи прогнозуванні поведінки фізичних систем. У більш загальному плані, отримані результати є внеском у розвиток теорії нелінійних диференціальних рівнянь, створюючи основу для подальших досліджень.

Загалом, виконане дослідження досягло поставлених цілей, розкрило ключові особливості асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних систем і створило перспективи для майбутніх робіт у цій галузі. Робота продемонструвала, що математичні методи аналізу є надзвичайно потужними інструментами для вивчення складних динамічних систем, забезпечуючи їх глибоке розуміння та практичну застосовність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- Костюкевич Ю.В., Городецький В.П. Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладних задачах. — Київ: Либідь, 2020. — 320 с.
- Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations// Duke Math. J. - 1948.- 15. - P. 111-126.
- Hartman P., Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations. // Am. J. Math. - 1955. - 77 - P. 48-86 and 932
- M.S.P. Eastham The asymptotic solution of linear differential systems. // Oxford University Press, New York, 1989. – 241 с.
- Горбачук М.Л., Горбачук В.І. Теорія звичайних диференціальних рівнянь. — Київ: Вища школа, 2022. — 368 с.
- W. A. Coppel Stability and asymptotic behavior of differential equations. // D.C. Heath and Company Boston , 1965. - 172 с.
- Євтухов В.М. Деякі питання асимптотичної теорії лінійних диференціальних рівнянь. – Укр. Мат. Ж. – 2002. – 20-42 с.