

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Про наближені методи у геометрії ріманових просторів»

**«About approximate methods in the geometry of
Riemannian spaces»**

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Дажук Олена Сергіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Покась С. М.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Курбатова І. М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від «____» _____ р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від «____» ____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Рімановий простір другого наближення $\tilde{V}_n^2$	4
2 Наближення другого порядку для ріманового простору ненульової постійної кривини	9
3 Нескінченно малі конформні перетворення другої степені в рімановому просторі другого наближення $\tilde{V}_n^2$	12
4 Нескінченно малі конформні перетворення в наближеному $\tilde{V}_n^2$ для простору V_n постійної кривини	21
Висновок	25
Список літератури	26

ВСТУП

Дана робота присвячена розкладанню метричного тензора в степеневий ряд Тейлора , побудові ріманового простору другого наближення $\tilde{V}_n^2$ у тому числі для ріманового простору ненульової постійної кривини. Знайдено матрицю метричного тензора наближення другого порядку для ріманового простору та дослідженню нескінченно малих конформних перетворень другої степені в $\tilde{V}_n^2$.

РОЗДІЛ 1

РІМАНОВИЙ ПРОСТІР ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ $\tilde{V}_n^2$

Розглянемо рімановий простір V_n , віднесений до довільної системи координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ з метричним тензором $g_{ij}(x)$. В околі будь-якої його фіксованої точки $M_0(x_0^h)$ побудуємо новий простір $\tilde{V}_n^2$ який відноситься до нової системи координат $y^1, y^2, \dots, y^n$ з метричним тензором $\tilde{g}_{ij}(y)([1],[2],[3])$,

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2}, \quad (1.1)$$

де

$$g_{ij} = g_{ij}(M_0), \quad R_{il_1 l_2 j} = R_{il_1 l_2 j}(M_0)$$

Якщо в початковому просторі V_n перейти до ріманової системи координат з початком в точці M_0 , то легко бачити, що $\tilde{V}_n^2$ реалізує наближення другого порядку для V_n і тому відображає його геометричні властивості з деяким ступенем точності.

Означення. Рімановий простір $\tilde{V}_n^2$, метричний тензор якого має вигляд (1.1) називається наближенням другого порядку для простору V_n .

Далі ми домовимось, що всі об'єкти початкового простору V_n обчислюються у точці M_0 і 0 позначати не будемо.

Відмітим деякі властивості простору $\tilde{V}_n^2([1],[2])$.

Теорема 1.1. Якщо простір V_n піддається ізометричному перетворенню, тоді простір другого наближення $\tilde{V}_n^2$ також піддається лише ізометричному перетворенню.

Доведення. Дійсно, із (1.1) слідує, що

$$\tilde{ds}^2 = \left[g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2} \right] dy^i dy^j \quad (1.2)$$

В просторі V_n від координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ перейдемо до нових координат $\{x'^1, x'^2, \dots, x'^n\}$.

Відомо, що при цьому

$$\tilde{ds}'^2 = \left[g'_{ij} + \frac{1}{3} R'_{il_1 l_2 j} y'^{l_1} y'^{l_2} \right] dy'^i dy'^j \quad (1.2')$$

де

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}$$

$$R'_{i\vartheta\mu j} = R_{\alpha\delta\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\vartheta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}$$

Підставляючи значення останніх двох співвідношень, обчислених в точці M_0 в праву частину (1.2') і ввівши позначення

$$y^h = \frac{\partial x^h}{\partial y'^\alpha} (M_0) y'^\alpha,$$

отримуємо, що $\tilde{ds}'^2 = ds^2$.

Таким чином, ми переконались, що простір $\tilde{V}_n^2$ інваріантно зв'язаний з початковим простором V_n відносно вибору системи координат в V_n .

Теорема 1.2. Система координат $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ в просторі $\tilde{V}_n^2$ є рімановою з початком в точці $y^h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$).

Доведення. Дійсно, з (1.1) ми отримуємо:

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{3} R_{k(ij)l} y^l$$

Тому

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij,k}(y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial y^i} + \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^k} \right) = \frac{1}{6} (R_{j(ik)l} + R_{i(jk)l} + R_{k(ij)l}) y^l = \\ &= \frac{1}{6} (R_{jikl} + R_{jkil} + R_{ijkl} + R_{ikjl} - R_{kijl} - R_{kjil}) (y^l) = -\frac{1}{3} R_{k(ij)l} y^l \end{aligned}$$

Отже,

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k}(y) = -\frac{1}{3}R_{k(ij)l}y^l \quad (1.3)$$

Тому

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k}(0) = 0, \quad \text{і} \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,k}y^\alpha y^\beta = 0$$

Але цими двома умовами характеризується ріманова система координат, що і завершує доведення теореми.

Для ефективного вивчення властивостей простору $\tilde{V}_n^2$ знадобиться $\tilde{g}^{ij}$ - елементи оберненої матриці для $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$ з елементами (1.1).

Справедлива Теорема 1.3. ([2],[4],[7])

Елементи $\tilde{g}^{ij}(y)$ оберненої матриці для матриці з елементами (1.1) мають вигляд

$$\tilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t^{(k)ij}, \quad (1.4)$$

де введені позначення

$$t_k^h = \frac{1}{3}R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \quad (1.5)$$

$$t_k^{(p)h} = t_\alpha^{(p-1)h} t_k^\alpha \quad (p = 2, 3, \dots) \quad (1.6)$$

Доведення. Елементи будемо шукати у вигляді аналітичних функцій

$$\tilde{g}^{ij}(y) = a^{ij} + a_l^{ij} y^l + a_{l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} + \dots, \quad (1.7)$$

де $a_{l_1, \dots, l_p}^{ij}$ - невідомі константи, причому $a_{l_1, \dots, l_p}^{ij}$ симетричні за будь-якою парою нижніх індексів. З умови $\tilde{g}_{i\alpha} \tilde{g}^{\alpha j} = \delta_i^j$ знаходимо коефіцієнти ряду (1.7):

$$\begin{aligned}
& g_{i\alpha} a^{\alpha j} + \left(g_{i\alpha} a_l^{\alpha j} \right) y^l + \left(g_{i\alpha} a_{l_1 l_2}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a^{\alpha j} R_{\alpha l_1 l_2 i} \right) y^{l_1} y^{l_2} + \\
& + \left(g_{i\alpha} a_{l_1 l_2 l_3}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a_{l_1}^{\alpha j} R_{\alpha l_2 l_3 i} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + \\
& + \left(g_{i\alpha} a_{l_1, \dots, l_{\iota}}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a_{l_1, \dots, l_{\iota-1}}^{\alpha j} R_{\alpha l_{2k-1} l_{3k} i} \right) y^{l_1} \dots y^{l_{3k}} + \dots + \\
& = \left(g_{i\alpha} a_{l_1, \dots, l_{\iota+1}}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a_{l_1, \dots, l_{\iota-2}}^{\alpha j} R_{\alpha l_{2k} l_{3k+1} i} \right) y^{l_1} \dots y^{l_{3k+1}} = \delta_i^j
\end{aligned}$$

Звідки ми отримуємо

$$\begin{aligned}
a^{ij} &= g^{ij}, & a_{l_1, \dots, l_{2k+1}}^{ij} y^{l_1} \dots y^{l_{2k+1}} &= 0, & (k = 0, 1, 2, \dots) \\
a_{l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} &= -t^{ij}, & a_{l_1, \dots, l_4}^{ij} y^{l_1} \dots y^{l_4} &= t^{(2)ij} \dots
\end{aligned}$$

Відмітимо, що ряди (1.4) збігаються абсолютно і рівномірно на множині

$$\frac{1}{3} |R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2}| \leq \frac{C}{n} \quad (C < 1)$$

Дійсно, функції $\varphi_{hk} = \frac{1}{3} R_{hl_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}$ обмежені на будь-якій компактній множині, тобто $|\varphi_{hk}| \leq \frac{C}{n}$, де $C = \text{const}$. Тоді справедливі наступні оцінки:

$$\left| t_k^{(2)h} \right| \equiv \left| t_{\alpha}^h t_k^{\alpha} \right| = \left| t_{\alpha}^h \right| \left| t_k^{\alpha} \right| \leq \frac{C^2}{n^2} \cdot n = \frac{C^2}{n}$$

$$\left| t_k^{(3)h} \right| \leq \frac{C^3}{n}; \dots, \left| t_k^{(p)h} \right| \leq \frac{C^p}{n}$$

Отже,

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t_k^{(p)h} \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \left| t_k^{(p)h} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{\infty} (C^p)$$

Ряд $\sum_{p=1}^{\infty} C^p$ збігається при $C < 1$.

Звідси слідує, що ряд (1.4) мажорується збіжним при $C < 1$ числовим рядом, що і завершує доведення теореми.

РОЗДІЛ 2

НАБЛИЖЕННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ РІМАНОВОГО ПРОСТОРУ НЕНУЛЬОВОЇ ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ

Розглянемо випадок, коли початковий простір V_n є простором ненульової постійної кривини K . Відомо ([2],[4],[5]), що для цього необхідно і достатньо, щоб

$$R_{ijp}^h = K(g_{ip}\delta_j^h - g_{ij}\delta_p^h) \quad (2.1)$$

Підставляючи (2.1) в (1.5), отримаємо:

$$\begin{aligned} t_p^h &= \frac{K}{3}(g_{ip}\delta_j^h - g_{ij}\delta_p^h)y^{l_1}y^{l_2} \\ t_p^{(2)h} &= -A \cdot t_p^h \\ t_p^{(3)h} &= -A^2 \cdot t_p^h \\ &\dots\dots\dots \\ t_p^{(m)h} &= (-1)^{m+1}A^{m-1} \cdot t_p^h, \quad m = 4, 5 \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$$A = \frac{K}{3}g_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2}. \quad (2.3)$$

Підставимо (2.2) в (1.5), отримаємо:

$$\tilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} - t^{ij} \sum_{p=1}^{\infty} A^p \quad (2.4)$$

Оскільки

$$|t_p^h| \leq \frac{C}{n}, \quad \left| \frac{K}{3}(g_{l_1p}\delta_{l_2}^h - g_{l_1l_2}\delta_p^h)y^{l_1}y^{l_2} \right| \leq \frac{C}{n}$$

Просумувавши останнє співвідношення по індексам h і p , отримуємо:

$$\left| \frac{K}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right| \leq \frac{C}{n(n-1)} < 1,$$

або

$$|A| < 1$$

Тому ряд $\sum_{p=1}^{\infty} A^p$ збігається і $\sum_{p=1}^{\infty} A^p = \frac{A}{1-A}$ як сума членів нескінченно спадаючої геометричної прогресії, а співвідношення (2.4) набуває вигляду:

$$\tilde{g}^{ij}(y) = \frac{g^{ij} - \frac{K}{3} y^i y^j}{1 - \frac{K}{3} g_{\alpha\beta} y^{\alpha} y^{\beta}} \quad (2.5)$$

Маючи символи Крістофеля I роду у вигляді (1.3), скористаємось співвідношенням (2.1) і отримаємо:

$$\tilde{\Gamma}_{ij,p}(y) = \frac{K}{3} (2g_{i\alpha} g_{pl} - g_{pi} g_{jl}) y^l \quad (2.6)$$

Оскільки $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = \tilde{g}^{h\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij,\alpha}(y)$, то ми можемо знайти символи Крістофеля II роду для наближення другого порядку для простору постійної кривини V_n :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = \frac{K}{3(1-A)} (2g_{ij} \delta_l^h - g_{l(i} \delta_{j)}^h) y^l - \frac{2K}{3} (g_{ij} g_{l_1 l_2} - g_{il_1} g_{jl_2}) y^{l_1} y^{l_2} y^h \quad (2.7)$$

На основі (2.7) компоненти тензора Рімана простору $\tilde{V}_n^2$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijp}^h(y) = & \frac{K(4A-3)}{3(A-1)} (g_{ip} \delta_j^h - g_{ij} \delta_p^h) + \frac{2K^2}{9(A-1)} (g_{ij} g_{pl_1} - g_{ip} g_{jl_1}) y^{l_1} y^h + \\ & + \frac{K^2(4A-5)}{9(A-1)^2} (g_{jl_1} \delta_p^h - g_{pl_1} \delta_j^h) g_{il_2} y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Просумувавши (2.8) за індексами h і p , та приймаючи до уваги (1.1) і (2.1), отримуємо компоненти тензора Річчі простору $\tilde{V}_n^2$:

$$\tilde{R}_{ij}(y) = \rho_1 \tilde{g}_{ij}(y) + \rho_2 \tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j, \quad (2.9)$$

де

$$\tilde{\gamma}_i = g_{il} y^l, \quad (2.10)$$

а $\rho_1(y)$ і $\rho_2(y)$ - деякі функції, залежні від $y^1, y^2, \dots, y^n$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось в тому, що:

- 1) тензор конформної кривини $\tilde{C}_{ijp}^h(y)$ простору $\tilde{V}_n^2$ тотожно дорівнює нулю:

$$\tilde{C}_{ijp}^h(y) = 0 \quad (2.11)$$

2)

$$\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j \tilde{g}^{ij}(y) = g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \neq 0 \quad (2.12)$$

Відомо ([2],[4],[5],[7]), що умовами (2.11) і (2.12) визначаються субпроективні простори В.Ф. Кагана основного випадку. Таким чином доведене твердження.

Теорема 2.1 . Наближення другого порядку для ріманового простору ненульової постійної кривини є субпроективним простором основного випадку.

РОЗДІЛ 3

НЕСКІНЧЕННО МАЛІ КОНФОРМНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДРУГОЇ СТЕПЕНІ В РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ $\tilde{V}_n^2$

С.М. Покась досліджував аналітичні нескінченно малі конформні перетворення в просторі другого наближення $\tilde{V}_n^2$.

Узагальнений вектор Кіллінга $\tilde{\xi}^h(y)$ був знайдений у вигляді степеневого ряду $([1],[4],[6])$

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h. \quad (3.1)$$

Аналізував узагальнені рівняння Кіллінга

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{g}_{\alpha i} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{g}_{\alpha j} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^\alpha} &= \psi(y) \tilde{g}_{ij} \\ \psi(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

була доведена Теорема $([1])$.

Для того, щоб вектор (3.1) був аналітичним узагальненим вектором Кіллінга у просторі $\tilde{V}_n^2$ необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення:

$$a_{(ij)} = b g_{ij} \quad (3.3)$$

$$a_2^h = a \cdot^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b_1 \cdot y^h - \frac{1}{2} b \cdot^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_{2p}^{h\cdot} &= \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^{\cdot\alpha} t_{\alpha}^{(p)h} + \frac{1}{2p} \left(b_{2p-1}^{\cdot} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-2}^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \\
&+ \frac{(-1)^p}{4(2p-1)} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} b_{2p-2s-2}^{\alpha} t_{\alpha}^{(s)h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$a_3^{h\cdot} = \frac{1}{3} \left(b_2 y^h - \frac{1}{2} b_1^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_{2p+1}^{h\cdot} &= \frac{1}{2p} \left[\frac{p+1}{2p+1} b_{2p-3}^{\alpha} t_{\alpha}^h + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} b_{2p-2s+1}^{\alpha} \times \right. \\
&\times \left. t_{\alpha}^{(s)h} \right] g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2p+1} \left(b_{2p}^{\cdot} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-1}^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$(p = 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{4k}{2k+1} \left(a_{2k-1}^{\alpha} t_{j\alpha} + a_{2k}^{\alpha} \mu_{ij}^{\alpha} \right) + \frac{k}{k+1} \left(b_{2k}^{(i} g_{j)l} y^l - b_{2k+1}^{\cdot} g_{ij} - \right. \\
&\left. - b_{2k-1}^{ij} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) b \cdot t_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2m+1}{m+1} \left(a_{2m}^{\alpha} t_{j\alpha} + a_{2m+1}^{\alpha} \mu_{ij}^{\alpha} \right) - b_{2m}^{\cdot} t_{ij} + \\
&+ \frac{2m+1}{2m+3} \left(b_{2m+1}^{(i} g_{j)l} y^l - b_{2m+2}^{\cdot} g_{ij} - b_{2m}^{ij} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

Означення ([1]) Нескінченно малі перетворення

$$y'^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y)\delta t \quad (3.8)$$

називаються перетворенням другої степені, якщо вектор зміщення $\tilde{\xi}^h(y)$ має вигляд

$$\tilde{\xi}^h(y) = a^h + a_{\cdot l}^h y^l + a_{l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} \quad (3.9)$$

Оскільки у цьому випадку в (3.1)

$$a_{\cdot k}^h = 0 \quad (k \geq 3), \quad (3.10)$$

тоді з рівняння (3.3) і рекурентних співвідношень (3.4)-(3.7) слідує :

$$a_{ij} = b g_{ij}, \quad (3.11)$$

$$a_{\cdot 2}^{\cdot h} = a^{\cdot \alpha} t_{\alpha}^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right), \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{3} a_{\cdot 2}^{\cdot \alpha} t_{\alpha}^h + \frac{1}{4} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) = 0, \quad (3.13)$$

$$\left[b^{\cdot} y^h - \frac{1}{2} b^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right]_{2m-1} = 0, \quad (3.14)$$

$$m \geq 3$$

$$\left[b y^h - \frac{1}{2} b^{\cdot h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right]_{2k} = 0, \quad (3.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Згідно з (3.10) рівняння (3.6)-(3.7) набувають вигляду :

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} \left[a_1^\alpha \cdot ({}_i t_j)_\alpha + a_2^\alpha \mu_{ij}^\alpha \right] + \frac{1}{2} \left[b_2 ({}_i g_j)_l y^l + b_3 g_{ij} - b_1 g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - \\ & - b_1 \cdot t_{ij} = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{\rho}{\rho+1} \left[b_2 ({}_i g_j)_l y^l - b_{2\rho+1} g_{ij} - b_{2\rho-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - b_{2\rho-1} \cdot t_{ij} = 0 \quad (3.17)$$

$$(\rho = 2, 3, \dots),$$

$$\left(a_1^\alpha \cdot ({}_i t_j)_\alpha + a_1^\alpha \mu_{ij}^\alpha \right) + \frac{1}{3} \left(b_1 ({}_i g_j)_l y^l - b_2 g_{ij} - b_{ij} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b t_{ij} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{2k+1}{2k+3} \left[b_2 ({}_i g_j)_l y^l - b_{2k+2} g_{ij} - b_{2k} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right] - b_{2k} t_{ij} = 0 \quad (3.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Розглянемо рівняння (3.15). Згорнемо обидві частини даних рівнянь з $g_{hl} y^l$:

$$\left[b_{l_1 \dots l_{2k}} g_{l_{2k+1} l_{2k+2}} \right] y^{l_1} \dots y^{l_{2k+2}} = 0.$$

Останнє співвідношення запишемо у еквівалентному вигляді

$$S_{l_1 \dots l_{2k+2}} \left[b_{l_1 \dots l_{2k}} g_{l_{2k+1} l_{2k+2}} \right] = 0. \quad (3.20)$$

Згортання (3.20) з $g^{l_1 l_2} \cdot g^{l_3 l_4} \cdot \dots \cdot g^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ дає :

$$b_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} g^{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \dots \cdot g^{\alpha_{2k-1} \alpha_{2k}} = 0 \quad (3.21)$$

Згорнемо тепер (3.20) з $g^{l_3 l_4} \cdot g^{l_5 l_6} \cdot \dots \cdot g^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ і візьмемо до уваги (3.21):

$$b_{l_1 l_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} g^{\alpha_1 \alpha_2} \cdot g^{\alpha_3 \alpha_4} \cdot \dots \cdot g^{\alpha_{2k-3} \alpha_{2k-2}} = 0 \quad (3.22)$$

При згортанні (3.20) з $g^{l_5 l_6} \cdot g^{l_7 l_8} \cdot \dots \cdot g^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ при умові (3.22), отримуємо

$$b_{l_1 l_2 l_3 l_4 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} g^{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \dots \cdot g^{\alpha_{2k-5} \alpha_{2k-4}} = 0 \quad (3.23)$$

Продовжуючи ці дії, на $(k-1)$ -му кроці ми маємо

$$b_{l_1 l_2 \dots l_{2k-2} \alpha \beta} g^{\alpha \beta} = 0. \quad (3.24)$$

І наостанок, згорнувши (3.20) з $g^{l_{2k+1} l_{2k+2}}$ згідно з (3.24), переконуємось в тому, що

$$b_{l_1 \dots l_{2k}} = 0, \quad (3.25)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

Аналогічно з (3.14) слідує

$$b_{l_1 \dots l_{2m-1}} = 0, \quad (3.26)$$

$$(m = 3, 4, \dots)$$

Оскільки мають місце рівняння (3.25), то всі рівняння системи (3.19) виконуються тотожно. Помітим, що згідно з (3.26) із сукупності рівнянь (3.17) залишається тільки одне - при $\rho = 2$:

$$S_{l_1 \dots l_5} [b_{l_1 l_2 l_3} R_{i l_4 l_5 j}] = 0, \quad (3.27)$$

а інші виконуються тотожно. З (3.18) на основі (3.25) маємо :

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 l_2) \alpha} + a_{\cdot(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij) \alpha} = b R_{i(l_1 l_2) j} .$$

Із згортання останнього рівняння з $g^{l_1 l_2}$ отримуємо:

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_{j) \alpha} + a_{\alpha \beta} R_{\cdot(ij) \cdot}^{\alpha \beta} = b R_{ij} .$$

Але із (3.11) витікає, що

$$a_{\alpha \beta} R_{\cdot(ij) \cdot}^{\alpha \beta} = b R_{ij} ,$$

тому,

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_{j) \alpha} = 0 . \quad (3.28)$$

Згорнувши (3.28) з g^{ij} , використавши (3.11) і тим, що $R \neq 0$, отримуємо

$$b = 0. \quad (3.29)$$

Беручи до уваги відповідність (3.25), (3.26) та (3.29), бачимо, що функція

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b + b_l y^l + b_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots$$

має вигляд:

$$\psi(y) = b_l y^l + b_{l_1 l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}. \quad (3.30)$$

Відомо, що $([1],[2],[6])$, що розв'язки узагальнених рівнянь Кілінга

при $\psi = \text{const}$ визначає вектор зміщення нескінченно малих гомотетичних перетворень у рімановому просторі. Формула (3.30) свідчить про справдливність теореми ([1]).

Теорема 3.1. Вектор зміщення нескінченно малих гомотетичних перетворень другої степені у просторі $\tilde{V}_n^2$, асоційованому з рімановим простором V_n в околі його точки M_0 , скалярна кривина R якого у цій точці відмінна від нуля, по необхідності є вектором Кіллінга.

Рівняння (3.18) у відповідності з (3.25) і (3.29) приймають вигляд:

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_{j)(l_1 l_2) \alpha} + a_{\cdot(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij) \alpha} = 0. \quad (3.31)$$

Далі з рівняння (3.13) маємо

$$\left[\frac{1}{9} \left(2a_{\cdot j l_1}^{\alpha} R_{\alpha l_2 l_3 i} + a_{\cdot l_1 l_2}^{\alpha} R_{\alpha(j l_3) i} \right) - \frac{1}{4} \left(3b_{j l_1 l_2} g_{i l_3} + b_{l_1 l_2 l_3} g_{ij} - b_{ij l_1} g_{ij} - \right. \right. \\ \left. \left. - b_{il_1 l_2} g_{jl_3} \right) \right] y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0$$

Просиметрувавши останню відповідність по індексам i і j на підставі (3.16) отримуємо

$$\left\{ a_{\cdot j l_1}^{\alpha} R_{\alpha(ij) l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} + \frac{3}{4} \left[3(b_{\cdot l_1 l_2} g_{ij) l_3} - b_{ij l_1} g_{l_2 l_3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + b_{l_1 l_2 l_3} g_{ij} \right] \right\} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.32) згорнемо з y^i і результат підставимо у (3.13) :

$$\left(\frac{1}{3} b_{l_1 l_2 l_3} \delta_{l_4}^h + \frac{1}{2} b_{\cdot l_1 l_2}^h g_{l_3 l_4} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = 0.$$

З останніх рівнянь, подібно до того, як отримані (3.25), витікає

$$b_{l_1 l_2 l_3} = 0. \quad (3.33)$$

На основі (3.33) рівняння (3.27), а, отже, і всі рівняння системи (3.17), виконуються тотожно.

Підставляючи (3.33) в (3.32) і (3.13), будемо мати відповідно

$$\left(a_{\cdot l_1 l_2}^{\alpha} R_{\alpha(ij)l_3} - \frac{1}{2} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0, \quad (3.34)$$

$$(a_{\cdot l_1 l_2}^{\alpha} R_{\cdot l_3 l_4 \alpha}^h) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = 0. \quad (3.35)$$

Легко бачити, що рівняння (3.35) (тоді і рівняння (3.13)) виконуються внаслідок (3.34).

Продиференціюємо (3.35) по y^i , опустимо індекс h за допомогою gh_i , результат просиметруємо по індексам i і j та врахуємо (3.34):

$$\left(a_{\cdot l_1(i}^{\alpha} R_{j)l_2 l_3 \alpha} - \frac{1}{4} b_{l_1} R_{il_2 l_3 j} \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0. \quad (3.36)$$

Тоді очевидно, що рівняння (3.16) є не щось інше, як сума рівнянь (3.34) і (3.36) при умові (3.33), тобто виконуються в силу (3.33) і (3.34).

Підстановка співвідношення (3.3) в рівняння (3.34), а (3.33) - в (3.30) дає відповідно:

$$C_{l_1 l_2 l_3} \left[a_{\cdot}^{\alpha} R_{\alpha(l_1 l_2) \beta} R_{\cdot(ij)l_3}^{\beta} - \frac{3}{2} \left(b_{\alpha} R_{\cdot(ij)l_1}^{\alpha} g_{l_2 l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2 l_3)j} \right) \right] = 0, \quad (3.37)$$

$$\psi(y) = b_l y^l. \quad (3.38)$$

В результаті проведених міркувань приходимо до теореми ([1]).

Теорема 3.2. Наближення другого порядку $\tilde{V}_n^2$ допускає узагальнений конформний вектор Кіллінга другої степені у вигляді

$$\tilde{\xi}^h(y) = a^h \cdot + a_l^h y^l + a_{l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2},$$

тоді і тільки тоді коли виконуються наступні умови :

$$a_2^h = a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b_1 y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (3.39)$$

$$\psi(y) = b_l y^l \quad b_l \neq 0, \quad (3.40)$$

а коефіцієнти a_i^h задовільняють рівнянням :

$$a(ij) = 0 \quad (3.41)$$

$$a^\alpha \cdot_{(i} R_{j)(l_1 l_2) \alpha} + a^\alpha \cdot_{(l_1} R_{l_2)(ij) \alpha} = 0 \quad (3.42)$$

$$C_{l_1 l_2 l_3} \left[a^\alpha R_{\alpha(l_1 l_2) j} R^\beta \cdot_{(ij) l_3} - \frac{3}{2} \left(b_\alpha R_{(ij) l_1}^\alpha g_{l_2 l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2 l_3) j} \right) \right] = 0 \quad (3.43)$$

РОЗДІЛ 4

НЕСКІНЧЕННО МАЛІ КОНФОРМНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В НАБЛИЖЕНОМУ $\tilde{V}_n^2$ ДЛЯ ПРОСТОРУ V_n ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ

Розглянемо випадок коли в Теоремі 3.2 вихідний простір V_n - простір ненульової постійної кривини, тоді

$$\tilde{\xi}^h(y) = a^h \cdot + a_l^h y^l + a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \quad (4.1)$$

$$\psi(y) = b_l y^l, \quad (4.2)$$

а коефіцієнти a_l^h, b_l - задовільняють рівнянням (3.41-3.45). Тоді конформний вектор Кіллінга простору $\tilde{V}_n^2$ має наступний вигляд:

$$R_{\cdot i j p}^h = K(g_{ip} \delta_j^h - g_{ij} \delta_p^h) \quad (4.3)$$

$$R_{\alpha(l_1 l_2)\beta} = K(g_{\alpha l_2} g_{\beta l_1} + g_{\alpha l_1} g_{\beta l_2} - 2g_{\alpha\beta} g_{l_1 l_2}),$$

то

$$\begin{aligned} R_{\alpha(l_1 l_2)\beta} R_{\cdot(ij)l_3}^\beta &= K^2 \left[g_{\alpha l_1} g_{\beta l_2} + g_{\alpha l_2} g_{\beta l_1} - 2g_{l_1 l_2} g_{\alpha\beta} \right] \left(g_{il_3} \delta_j^\beta + g_{jl_3} \delta_i^\beta - \right. \\ &\quad \left. - 2g_{ij} \delta_{l_3}^\beta \right) = K^2 \left[g_{\alpha l_1} g_{il_3} g_{jl_2} + g_{\alpha l_1} g_{jl_3} g_{il_2} - 2g_{\alpha l_1} g_{l_2 l_3} g_{ij} + g_{\alpha l_2} g_{il_3} g_{jl_1} \right. \\ &\quad \left. + g_{\alpha l_2} g_{il_1} g_{jl_3} - 2g_{\alpha l_2} g_{l_1 l_3} g_{ij} - 2g_{l_1 l_2} \left(g_{\alpha i} g_{jl_3} + g_{\alpha j} g_{il_3} - 2g_{\alpha l_3} g_{ij} \right) \right] \\ a_{l_1 l_2 l_3}^\alpha \left(R_{\alpha(l_1 l_2)\beta} R_{\cdot(ij)l_3}^\beta \right) &= K^2 \left\{ a_{l_1} (g_{il_2} g_{jl_3} + g_{il_3} g_{jl_2} - 2g_{l_2 l_3} g_{ij}) + \right. \\ &\quad \left. + a_{l_2} (g_{il_3} g_{jl_1} + g_{jl_3} g_{il_1} - 2g_{l_3 l_1} g_{ij}) + a_{l_3} (g_{il_1} g_{jl_2} + g_{jl_1} g_{il_2} - 2g_{l_1 l_2} g_{ij}) \right\} \quad (*) \end{aligned}$$

$C_{l_1 l_2 l_3}$ - операція циклювання за індексами $l_1 l_2 l_3$

$$\begin{aligned}
& b_\alpha R_{(ij)l_1}^\alpha g_{l_1 l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2 l_3)j} = \\
& = K \left[b_\alpha (g_{il_1} \delta_j^\alpha + g_{jl_1} \delta_i^\alpha - 2g_{ij} \delta_{l_1}^\alpha) g_{l_2 l_3} - b_{l_1} (g_{il_2} g_{jl_3} + g_{jl_2} g_{il_3} - 2g_{ij} g_{l_2 l_3}) \right] = \\
& = K \left[(b_i g_{jl_1} + b_j g_{il_1} - 2b_{l_1} g_{ij}) g_{l_2 l_3} - b_{l_1} (g_{il_2} g_{jl_3} + g_{jl_2} g_{il_3} - 2g_{ij} g_{l_2 l_3}) \right] = \\
& = K \left[(b_i g_{jl_1} + b_j g_{il_1}) g_{l_1 l_3} - b_{l_1} (g_{il_2} g_{jl_3} + g_{jl_2} g_{il_3}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{l_1 l_2 l_3} \left(b_\alpha R_{(ij)l_1}^\alpha g_{l_2 l_3} - b_{l_1} R_{l_2(ij)l_3} \right) &= K \left[(b_i g_{jl_1} + b_j g_{il_1}) g_{l_2 l_3} + b_{(ij)l_2} g_{l_3 l_1} + \right. \\
&\quad \left. + b_{(ij)l_3} g_{l_1 l_2} - b_{l_1} g_{l_2(ij)l_3} - b_{l_2} g_{l_3(ij)l_1} - b_{l_3} g_{l_1(ij)l_2} \right] \quad (**)
\end{aligned}$$

Рівняння (3.43) приймає вигляд :

$$\begin{aligned}
& 2K^2 \left[a_{l_1} (g_{i(l_2 l_3)j} - 2g_{l_2 l_3} g_{ij}) + a_{l_2} (g_{i(l_3 l_1)j} - 2g_{l_3 l_1} g_{ij}) + a_{l_3} (g_{i(l_1 l_2)j} - \right. \\
& \quad \left. - 2g_{l_1 l_2} g_{ij}) \right] - 3K \left[b_{(ij)l_1} g_{l_2 l_3} + b_{(ij)l_2} g_{l_3 l_1} + b_{(ij)l_3} g_{l_1 l_2} - b_{l_1} g_{l_2(ij)l_3} - \right. \\
& \quad \left. - b_{l_2} g_{l_3(ij)l_1} - b_{l_3} g_{l_1(ij)l_2} \right] = 0 : K \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2K \left[a_{l_1} (g_{i(l_2 l_3)j} - 2g_{l_2 l_3} g_{ij}) + a_{l_2} (g_{i(l_3 l_1)j} - 2g_{l_3 l_1} g_{ij}) + a_{l_3} (g_{i(l_1 l_2)j} - \right. \\
& \quad \left. - 2g_{l_1 l_2} g_{ij}) \right] - 3 \left[b_{(ij)l_1} g_{l_2 l_3} + b_{(ij)l_2} g_{l_3 l_1} + b_{(ij)l_3} g_{l_1 l_2} - b_{l_1} g_{l_2(ij)l_3} - \right. \\
& \quad \left. - b_{l_2} g_{l_3(ij)l_1} - b_{l_3} g_{l_1(ij)l_2} \right] = 0 \quad (4.4)
\end{aligned}$$

$$(g_{il_2} g_{l_3 j} + g_{jl_2} g_{l_3 i}) g^{ij} = g_{il_2} g^{ij} g_{l_3 j} + g_{jl_2} g^{ij} g_{l_3 i}$$

$$\begin{aligned}
& 2K \left[2(1-n)(a_{l_1}g_{l_2l_3} + a_{l_2}g_{l_3l_1} + a_{l_3}g_{l_1l_2}) \right] - 3 \left[2(b_{l_1}g_{l_2l_3} + b_{l_2}g_{l_3l_1} + \right. \\
& \left. + b_{l_3}g_{l_1l_2}) - 2(b_{l_1}g_{l_1l_3} + b_{l_2}g_{l_3l_1} + b_{l_3}g_{l_1l_2}) \right] = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow a_{l_1}g_{l_1l_3} + a_{l_2}g_{l_3l_1} + a_{l_3}g_{l_1l_2} = 0 \Rightarrow | g^{l_1l_2} \Rightarrow (n+2)a_{l_3} = 0
\end{aligned}$$

$$a_i = 0$$

Рівняння приймає вигляд :

$$C_{l_1l_2l_3} \left[b_{\alpha} R_{(ij)l_1}^{\alpha} g_{l_2l_3} - b_{l_1} R_{i(l_2l_3)j} \right] = 0, \text{ або на підставі формули (**)}$$

$$\begin{aligned}
& K \left[b_{(ig_j)l_1} g_{l_2l_3} + b_{(ig_j)l_2} g_{l_3l_1} + b_{(ig_j)l_3} g_{l_1l_2} - b_{l_1} g_{l_2(i g_j)l_3} - b_{l_2} g_{l_3(i g_j)l_1} - \right. \\
& \left. - b_{l_3} g_{l_1(i g_j)l_2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
& b_{ig_jl_1} g^{l_1l_2} g_{l_2l_3} + b_{jg_{il_1}} g^{l_1l_2} g_{l_2l_3} + b_{(ig_j)l_3} + nb_{(ig_j)l_3} - b_{l_1} g^{l_1l_2} g_{l_2(i g_j)l_3} - \\
& - 2b_{l_3} g_{ij} = 0
\end{aligned}$$

Таким чином

$$nb_{(ig_j)l_3} - 2b_{l_3} g_{ij} = 0 \tag{4.6}$$

$$nb_{(ig_j)l_3} - 2b_{l_3} g_{ij} = 0 \mid g^{jk} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
& n(n+1)b_i - 2b_i = 0 \Rightarrow (n^2 + n - 2)b_i = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow b_i = 0
\end{aligned}$$

Теорема 4.1. Простір другого наближення $\tilde{V}_n^2$ для простору ненульової постійної кривини не допускає нескінченно малих конформних перетворень другої степені.

ВИСНОВОК

Дана робота фокусується на розкладанні метричного тензора в степеневий ряд Тейлора та побудові ріманового простору другого наближення $\tilde{V}_n^2$. Особлива увага приділяється рімановому простору ненульової постійної кривини.

Спочатку розглядається знаходження матриці метричного тензора наближення другого порядку для ріманового простору. Це означає розкладання метричного тензора у степеневий ряд, в якому беруться до уваги члени не вище другого порядку відносно координат цього простору. Такий розклад дозволяє отримати більш точний опис геометрії ріманового простору V_n .

Нескінченно малі конформні перетворення в рімановому просторі другого наближення $\tilde{V}_n^2$, є малими змінами, які зберігають форму кривих та геометричні властивості простору. Розглядається їхнє застосування в $\tilde{V}_n^2$, що дозволяє отримати додаткову інформацію про геометрію простору другого наближення.

Дослідження нескінченно малих конформних перетворень в рімановому просторі другого наближення $\tilde{V}_n^2$ є важливою частиною даної роботи. Ці перетворення дозволяють вивчати і моделювати різноманітні геометричні системи з врахуванням вищих порядків кривини. Аналіз нескінченно малих конформних перетворень надає додатковий інструментарій для розуміння геометрії та властивостей ріманових просторів другого наближення.

В роботі доведено, що наближення простору другого порядку $\tilde{V}_n^2$ ненульової постійної кривини не допускає нескінченно малих конформних перетворень другої степені.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Покась С.М., «Групи Лі рухів у рімановому просторі другого наближення. Стаття Пензенського державного університету імені В.Г. Белінського, фіз.-мат. науки», №26, 2011, ст. 220-224
- [2] Петров А.З., «Нові методи в теорії відносності», М, Наука, 1966
- [3] А.В. Крутоголова, С.М. Покась, Л.Г. Цехмейструк, «Індуковані відображення ріманових просторів другого наближення» Математичні студії Т41, №2, 2014, ст. 220-224
- [4] Ейзенхарт Л.П., «Ріманова геометрія» М, ІЛ, 1948.
- [5] Каган В.Ф., «Субпроективні простори», М, фізико-математична гімназія, 1961.
- [6] Ейзенхарт Л.П., «Неперервні групи перетворень», М, ІЛ, 1947.
- [7] Покась С.М., Крутоголова А.В. «Геометрія ріманового простору другого наближення.» Proceedings of the International Geometry Center, 2009 2(3) pages 53-59.