Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Математичне моделювання інфляційних процесів і їх вплив на економіку»

«Mathematical modeling of inflationary processes and their impact on the economy»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»

Тімкова Олена Сергіївна

Керівник к.ф. - м.н., доцент, Шарай Н.В.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент к.ф. - м.н., доцент, Білозерова М.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _____________2023 р.

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ________ 2023 р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

________- ____________________
(підпис) (прізвище, іиціали)

Голова ЕК

_________— ____________________—
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2023

ЗМІСТ

ВВЕДЕННЯ

Інфляційні процеси є важливим аспектом економіки, оскільки вони впливають на купівельну спроможність громадян, ціни на товари та послуги, валютний курс та інші показники економічного розвитку країни. Математичне моделювання інфляційних процесів дозволяє досліджувати ці процеси та їх вплив на економіку, визначати оптимальні стратегії регулювання інфляції та розробляти прогнози щодо її розвитку.

У короткостроковому аспекті відхилення виробництва від економічного потенціалу вимірюються величинами інфляції чи безробіття. У довгостроковому аспекті динаміка змін економічного потенціалу визначається факторами, що лежать на стороні пропозиції, у загальному вигляді - обсягами та ефективністю застосовуваних ресурсів. У сучасній теорії проблема макроекономічної стабілізації, у багатьох випадках постає як завдання оптимального вибору між соціально прийнятними рівнями інфляції та безробіття. Можна показати, що досить широкий клас макроекономічних проблем подібного типу може бути зведений до розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку як лінійних, так і нелінійних. Наприкінці 1980-х – на початку 1990-х років ціла низка країн, у тому числі Нова Зеландія, Канада, Швеція, Сполучене королівство, Фінляндія, Австралія та Іспанія, стали застосовувати монетарні політики, які використовували цільові установки у вигляді гранично допустимих рівнів інфляції цьому значення безробіття задаються або у неявному вигляді, або як обмеження відповідного завдання оптимізації. Найкращі рівні інфляції та безробіття в певному сенсі як дві ключові цілі макроекономічної стабілізації повинні гарантовано перебувати на заданому інтервалі значень при різних впливах зовнішніх шоків випадкового або детермінованого характеру.

Інфляція, зокрема, яка розуміється як інфляція попиту, акумулює вплив практично всіх факторів, що впливають на збільшення розмірів та зміну структури агрегованого попиту. З іншого боку, у короткостроковому періоді безробіття - найбільш загальна характеристика використання ресурсів, отже, агрегованої пропозиції. Проблема вибору між інфляцією чи безробіттям - це проблема вибору макроекономічного становища, яке у певному сенсі відповідає макроекономічній рівновазі, а в моделі найкращому поєднанню агрегованого попиту та пропозиції. При цьому, слід мати на увазі, що в ринковій економіці, де немає прямого директивного розподілу ресурсів, управління можливе і здійснюється насамперед із боку попиту. Це означає, що хоча безробіття змінює обсяг і структуру агрегованої пропозиції, але її величина сама змінюється під впливом факторів, що лежать на боці агрегованого попиту, наприклад, співвідношення інфляції та номінальної пропозиції грошей.

Розглянемо послідовно прості моделі агрегованої пропозиції, взаємодії інфляції та безробіття, а потім економічного зростання.

РОЗДІЛ № 1

МОДЕЛІ ПРОПОЗИЦІЇ ТА ВИРОБНИЦТВА

1.1 Допоміжні факти з теорії диференціальних рівнянь та основні елементи теорії інфляції

Рівень інфляції – один із основних показників порушення балансу функціонування економіки, та її підвищення призводить до значних втрат суспільства, як фінансовим, так і нематеріальним.

Інфляція – це довгострокове стійке підвищення рівня цін, що призводить до знецінення грошей, зниження їх купівельної спроможності.

Інфляція виникає внаслідок порушення балансу між товарним та грошовим потоками. Зовнішньою ознакою інфляції є неперервне зростання загального рівня цін, що охоплює всі ринки та всі товари протягом досить тривалого проміжку часу.

Для забезпечення балансу товарів та грошей загальна сума грошей в країні з урахуванням їх оборотності за рік має бути такою, щоб можна було викупити вироблені за рік інвестиційні та споживчі товари (ВВП), тобто має місце макроекономічне рівняння:

$$M\nu = pY$$

де M-загальна маса грошей, що перебувають у обігу;

ν - швидкість обороту грошей за рік;

p-загальний рівень цін;

Y – натуральне значення ВВП.

Враховуючи випуск облігацій, стан ринку цінних паперів, зовнішню торгівлю, рівняння $M\nu = pY$ записується у формі:

$$M = kpY$$

де k – коефіцієнт, обернено пропорційно залежить від швидкості обороту грошей.

Інфляцію поділяють на інфляцію попиту та інфляцію пропозиції.

Інфляція попиту — породжується надлишком сукупного попиту проти реальним обсягом виробництва(дефіцит товару).

Інфляція пропозиції (витрат) означає зростання цін, викликане збільшенням витрат виробництва в умовах недовикористання виробничих ресурсів. Підвищення витрат за одиницю продукції скорочує обсяг запропонованої виробниками продукції за рівні цін.

Інфляційні очікування - передбачувані, прогнозні рівні інфляції, ґрунтуючись на яких виробники та споживачі, продавці та покупці будують свою майбутню кредитно-фінансову та цінову політику, оцінюють рівень доходів, витрат, передбачуваний обсяг прибутку.

О з н а ч е н н я 1.1

Функція називається однорідною першого ступеня, якщо для будь-якого значення аргументу x та будь-якого числа k, виконується наступне:

$$f(kx) = k \cdot f(x)$$

де $f(x)$ - однорідна функція першого ступеня, k - константа.

Також, рівняння називається однорідним першого ступеня, якщо його права частина дорівнює нулю:

$$f(x) = 0$$

Т е о р е м а 1.1

Нехай функція буде неперервно-диференційованою $f \in C^1$ в деякій області D та x^*- це положення рівноваги системи $\frac{dx}{dt} = f(x)$, тобто $f(x^*) = 0$. Припустимо, що $f'(x^*) \neq 0$, отже положення рівноваги системи $\frac{dx}{dt} = f(x)$ є асимптотично стійким в додатному напрямку за Ляпуновим при умові $f'(\overset{*}{x}) < 0$ і буде нестійким при умові $f'(\overset{*}{x}) > 0$.

Доведення: Нехай $\overset{*}{x}$ - положення рівноваги рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Розкладемо у ряд Тейлора в точці $\overset{*}{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = f(\overset{*}{x}) + f'(\overset{*}{x})(x - \overset{*}{x}) + \frac{1}{2}f''(\overset{*}{x})(x - \overset{*}{x})^2 + \ldots$$

Враховуючи $f(\overset{*}{x}) = 0$ за положення рівноваги, лінійне рівняння має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = f'(\overset{*}{x})(x - \overset{*}{x}).$$

Інтегруємо:

$$x - \overset{*}{x} = cexp(\lambda t),$$

де $\lambda = f'(\overset{*}{x}),\ c$ – довільна стала. Позначимо $x - \overset{*}{x} = \bar{x}$.

Якщо $\lambda < 0$, то при $t \to \infty$, $\bar{x} \to 0$, тоді первинне відхилення x від стану рівноваги з часом затухає. Враховуючи означення, отримуємо, що стан положення рівноваги є стійким.

Якщо $\lambda < 0$, то при $t \to \infty$, $\bar{x} \to \infty$, отже стан положення рівноваги є нестійким.

При умові якщо $\lambda = 0$, рівняння першого наближення не може визначити стійкість стану рівноваги системи. Необхідно розглядати члени високого порядку в ряді Тейлора.

Таким чином, стійкість чи нестійкість положення рівноваги диференціального рівняння $\frac{dx}{dt} = f(x)$ *визначається знаком похідної правої частини в точці рівноваги.*

Зауваження. Лінійне диференціальне рівняння $x` = f'(\overset{*}{x})x$ називається *лінійним рівнянням варіації або лінеаризацією векторного поля* $x` = f(x)$ відносно своєї точки рівноваги $\overset{*}{x}$.

1.2 Макроекономічна виробнича функція

Розглянемо макроекономіку з боку пропозиції, *макроекономіка* зазвичай видається виробничою функцією, одним з варіантів якої є виробнича *функція з нейтральним за Харрод технічним прогресом*:

$$Q(t) = Q[K(t), A(t)L(t)], \qquad (1)$$

де:

$Q(t)$ - реальний дохід чи випуск, наприклад вироблений ВВП у постійних цінах;

$K(t)$ - обсяг готівкового капіталу;

$A(t)$ - технічний – прогрес, реалізований як ефективність трудових ресурсів;

$L(t)$ - обсяг використовуваних трудових ресурсів.

Для *виробничої функції (1)* перші похідні по капіталу та праці (граничні продукти праці та капіталу) додатні, а другі похідні (зміни граничних продуктів) - від'ємні.

Можемо побачити що сукупний дохід (продукт) виробляється під час використання капіталу праці, причому технічний прогрес, чи знання, реалізується передусім підвищення ефективності одиниці застосованої праці. У цій гіпотезі виробничої функції передбачається, що віддача від масштабів застосування ресурсів постійна і дорівнює певній константі α. Це означає, що й ефективна праця і капітал збільшаться одночасно, та у стільки ж зросте і випуск товарів та послуг. Припущення сталості масштабів виробництва, або лінійної однорідності виробничої функції, еквівалентне твердженню про відсутність додаткових ефектів від спеціалізації виробництва, а також про незначний вплив на виробництво всіх інших факторів, наприклад зовнішньоекономічних ефектів, природних ресурсів тощо, крім аргументів виробничої функції.

З умови *однорідності першого ступеня* (лінійної однорідності) виходить, що якщо $\alpha = \frac{1}{AL}$, то

$$q = \frac{Q}{AL} = Q[\frac{K}{AL}, 1] = f(k), \qquad (2)$$

де $f(k) = \frac{Q}{AL}$ - середній продукт ефективної праці;

$k = \frac{K}{AL}$ - середня капіталізованість ефективної праці.

Для *граничних продуктів виробничої функції* (1) з праці та капіталу, а також функції $f(k)$ справедливо, що граничний продукт капіталу збігається з *граничним продуктом капіталоозброєності*, а *граничний продукт праці* виражається через середній та граничний продукти капіталоозброєності:

$$\frac{dQ}{dK} = \frac{d}{dK}ALf(k) = ALf'(k)\frac{d}{dK} = ALf'(k)\frac{d}{dK}(\frac{K}{AL}) = f'(k) \quad (3)$$

та

$$\frac{dQ}{dAL} = \frac{d}{dAL}ALf(k) = f(k) + ALf'(k)\frac{d}{dAL}(\frac{K}{AL}) = f(k) - f'(k)k. \quad (4)$$

Для *виробничої функції (1)* перша похідна по капіталу додатна, а друга від'ємна і з огляду на це для *функції випуску* на одиницю ефективної праці мають місце умови:

$$f'(k) > 0; \ f''(k) < 0,$$

які разом з додатковими умовами:

$$lim_{k\to-\infty}f'(k) = 0; \ lim_{k\to+\infty}f'(k) = 0$$

визначають середню капіталоозброєність праці $f(k)$ як суворо увігнуту функцію.

1.3 Виробничі потужності

В аналізі макроекономічних систем використовуються і прості форми виробничих функцій. Наприклад, якщо економічне зростання явно лімітоване одним із факторів, то правомірно у певному контексті розглядати виробництво як результат використання саме даного фактора. У окремому випадку залежності виробництва від обсягу капіталу $K(t)$, який в умовах економічного переходу є лімітуючим фактором економічного зростання, *виробнича функція (1)* може бути представлена як *функція одного аргументу*, капіталу:

$$Q(t) = \eta K(t), \qquad (5)$$

де η – коефіцієнт середньої капіталовіддачі. Граничний продукт капіталу додатній, але скорочується, тобто $Q_K > 0$; $Q_{KK} < 0$, як і прийнято для *стандартної виробничої функції*. Виробничі функції цього виду досліджуються у багатьох моделях економічного зростання, зокрема моделях Харрода-Домара (Harrod - Domar).

Для перехідної економіки, яка здійснює глибоку якісну перебудову виробництва на новій технічній основі, де брак інвестицій та капіталу є головним лімітуючим фактором, *виробнича функція (5)* є повністю відповідною. Разом з тим, практично всі економіки перехідного періоду характеризуються значним і тривалим спадом виробництва, що викликається цілою низкою причин об'єктивного та суб'єктивного характеру. Ця особливість перехідної економіки може бути досліджена за допомогою простої *нелінійної моделі*, яка передбачає залежність темпу зростання пропозиції (реального випуску) від степеня використання капіталу та виробничих потужностей.

1.4 Проста нелінійна модель динаміки виробництва

Нехай при максимальній величині капіталу K^* виробничі потужності $Q = Q^*$. *Виробничі потужності* є природним обмеженням виробництва при заданому рівні ефективності використання ресурсів. Дослідження показують, що можливості розвитку не інваріантні до наявних обмежень, зокрема до розмірів виробничих потужностей. Темп приросту продукту визначається як його логарифмічна похідна:

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = \frac{Q`}{Q} = \lambda. \qquad (6)$$

Розв’яжемо рівняння (6) при заданих початкових умовах $Q(0) = Q_0$.

$$\frac{1}{Q}dQ = \lambda dt$$

Розділимо обидві частини на Q:

$$\frac{1}{Q}dQ = \lambda dt$$

$$\int \frac{1}{Q}dQ = \int \lambda dt$$

Інтегруємо обидві частини:

$$In|Q| = \lambda t + C$$

де $C \in R$.

Тепер, використовуючи властивості логарифмів:

$$In|Q| = \lambda t + C$$

$$In|Q| = e^{\lambda t + C}$$

Помітимо, що Q може бути або додатним, або від'ємним. Але за початковою умовою $Q(0) = Q_0$, ми знаємо, що $Q_0 > 0$.

Підставимо початкову умову в рівняння:

$$|Q_0| = e^{\lambda(0) + C}$$

$$|Q_0| = e^{C}$$

Отримали, що $C = In(Q_0)$, де Q_0 є початковим значенням.

Тепер, підставимо значення C у вираз для $|Q|$:

$$|Q| = e^{(\lambda t + In(Q_0))}$$

Враховуючи, що $Q_0 > 0$, ми можемо записати:

$$Q = e^{\lambda t} \cdot Q_0$$

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння щодо виробництва ВВП має вигляд:

$$Q(t) = Q_0 \cdot exp\lambda t$$

Розв’язок рівняння (6) показує, що в області визначення функції $Q(t)$ у будь-який момент часу виробництво зростає зі сталим темпом незалежно від його розмірів, а в залежності від степеня використання виробничих потужностей. Насправді це, звичайно, не так. При підвищені використання виробничих потужностей можливості подальшого нарощування виробництва знижуються. Дане твердження випливає з *положення про зниження віддачі капіталу*: граничний продукт капіталу при фіксованих інших факторах знижується (друга похідна виробничої функції від’ємна). Отже, повинен скорочуватися і темп приросту випуску зі збільшенням розмірів виробництва.

Найпростішим припущенням, що моделює залежність обсягів поточного випуску від ступеня використання виробничих потужностей є рівняння

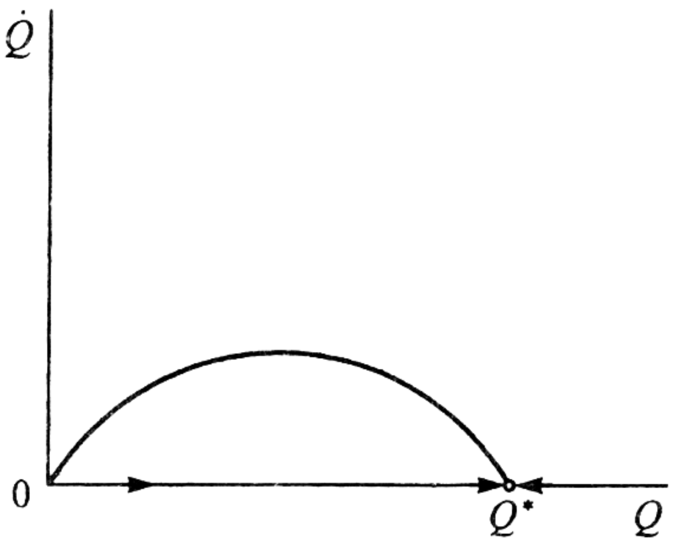
$$\lambda(t) = \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{Q^*}. \qquad (7)$$

Формула (7) означає, що тільки при малих рівнях виробництва $Q(t)$ темп приросту - стала величина, яка визначається рівнянням (6). Після досягнення повного використання виробничих потужностей $Q(t) = Q^*$ темп приросту стає рівним нулю, оскільки ресурси вичерпані, тоді як спроба перевищення виробничих потужностей тягне у себе скорочення виробництва. З урахуванням (7) рівняння виробництва (6), яке визначає розміри реальної пропозиції, надається у вигляді

$$Q` = Q(\lambda - \frac{\lambda}{Q^*}Q) \qquad (8)$$

Рівняння виробництва (8) відображає залежність темпів виробництва від рівнів останнього. Це *нелінійне диференціальне рівняння першого* *порядку з коефіцієнтом*, що залежить від фазової змінної обсягів виробництва. Воно зветься *логістичним рівняння*, або *рівняння Верхулста (Verchulst)*.

Дослідимо якісно рівняння (8). Фазова діаграма (мал 1) показує, що динаміка виробництва характеризується спочатку прискореним його розвитком досягаючи максимума у точці $\frac{Q^*}{2}$. Потім починає спадати, залишаючись додатнім до точки Q^*, де випуск дорівнює виробництва є рівним потужностям.



Малюнок. 1. Фазова діаграма логістичного рівняння

Для аналізу стійкості та нестійкості рівняння (8), можна використати метод лінійних стійких лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Для початку, перепишемо рівняння у вигляді:

$$Q' = Q(\lambda - \frac{\lambda}{Q^*}Q)$$

де Q' позначає похідну Q по відношенню до часу.

Тепер замінимо Q на Y, щоб отримати лінійне диференціальне рівняння:

$$Y' = \lambda Y - (\frac{\lambda}{Q^*})Y^2$$

Щоб вивчити стійкість цього рівняння, розглянемо точку рівноваги. Знайдемо значення Y, при якому ліва частина рівняння дорівнює нулю:

$$\lambda Y - (\frac{\lambda}{Q^*})Y^2 = 0$$

$$\lambda Y - (\frac{\lambda}{Q^*})Y = 0$$

Звідси маємо дві точки рівноваги: $Y = 0$ і $Y = Q^*$.

Щоб дослідити стійкість цих точок, візьмемо похідну від правої частини рівняння по Y:

$$\frac{d}{dY}(\lambda Y - \frac{\lambda}{Q^*}Y^2 = \lambda - \frac{2\lambda}{Q^*}Y$$

Тепер підставимо значення $Y = 0$ та $Y = Q^*$ у вираз для похідної:

При $Y = 0$: $\frac{d}{dY}(\lambda Y - \frac{\lambda}{Q^*}Y^2) = \lambda$

При $Y = Q^*$: $\frac{d}{dY}(\lambda Y - \frac{\lambda}{Q^*}Y^2) = \lambda - \frac{2\lambda}{Q^*}Q^* = \lambda - 2\lambda =- \lambda$

Отже, отримали, що при $Y = 0$ похідна дорівнює λ, а при $Y = Q^*$ похідна дорівнює $-\ \lambda$.

За допомогою методу лінійних стійких лінійних диференціальних рівнянь можна зробити висновок:

Якщо $\lambda > 0$, то точка рівноваги $Y = 0$ є нестійкою, оскільки похідна додатна.

Якщо $\lambda < 0$, то точка рівноваги $Y = 0$ є стійкою, оскільки похідна від'ємна.

Якщо $\lambda = 0$, то потрібно проводити додатковий аналіз.

Таким чином, залежно від значення параметра λ, точка рівноваги $Y = 0$ може бути стійкою або нестійкою.

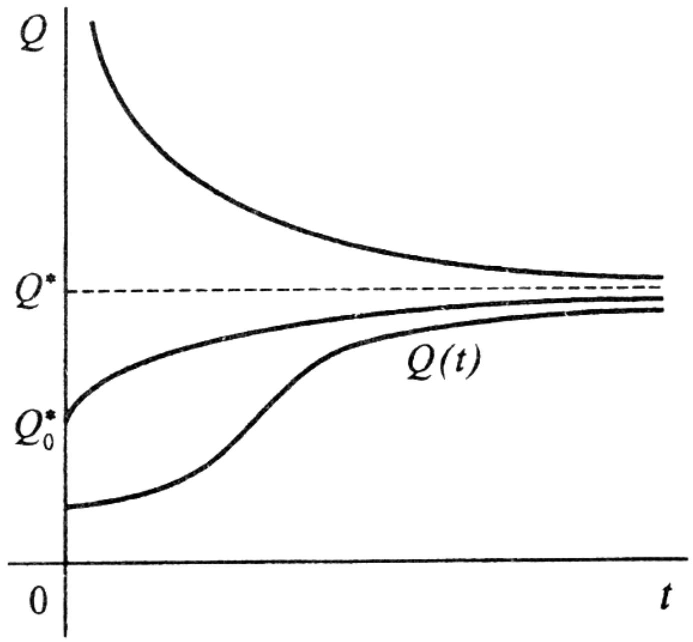
Динаміка траєкторій системи залежить від початкових умов, що показані на мал. 2.

Припустимо, що виробництво пережило глибокий спад і починає поступово відновлюватись. У цьому випадку початкове положення системи відображається точкою Q_0, розташованої досить близько від нуля $0 < Q_0 < \frac{Q^*}{2}$. Якісний аналіз розв'язку (8) показує, що траєкторія виробництва асимптотично прямує до рівноважного розв'язку, маючи перегин у точці $\frac{Q^*}{2}$, зростаючи спочатку з прискоренням, а потім сповільнюючи у міру наближення до рівноважної траєкторії. Якщо ж припустити, що спад виробництва невеликий, тобто початкові рівні виробництва знаходяться в інтервалі значень $\frac{Q^*}{2} < Q_0 < Q^*$, то виробництво зростає монотонно, наближаючись до свого рівноважного значення. У разі $Q_0 > Q^*$ виробництво монотонно скорочується, також наближаючись до точки рівноваги.

Таким чином, саме повне використання виробничих потужностей визначає рівноважний випуск продукції Q^* , а наближення фактичного випуску до рівноважного рівня зменшує величину темпу приросту продукції. У цьому полягає принципова відмінність моделі з *"загасаючим темпом" (8)* від *простої моделі (6)* зростання виробництва, в якій обсяги випуску за позитивного темпу $\lambda > 0$ необмежено зростають.

Зробимо заміну координат у *моделі агрегованої пропозиції (8)*: замість абсолютних випусків розглядатимемо інтенсивності, тобто відносні випуски $q = \frac{Q}{Q^*}$, а замість абсолютного, тобто "календарного", часу-відносне, або час системи: $\tau = \frac{t}{T}$, де T - масштаб власного часу системи, що буде визначено пізніше. Неважко переконатися в тому, що оскільки $dt = Td\tau$ та $\frac{dQ}{dt} = Q^{*}\frac{dq}{dt}$, то

$$\frac{dq}{dt} = T\lambda(1 - q)q. \qquad (9)$$



Малюнок. 2. Розв'язок логістичного рівняння

Масштаб власного часу системи, як випливає з (9), можна підібрати так, щоб, наприклад, виконувалася рівність

$$T = \frac{1}{\lambda}, \qquad (10)$$

звідки випливає, що власний час виробничої системи (8) - це величина, зворотна темпу приросту (при малих обсягах виробництва).

З урахуванням зазначених замін рівняння (8) повністю зберігаючи свій економічний сенс, перепишемо для свого часу в більш простому вигляді

$$\frac{dt}{d\tau} = q - q^{2}. \qquad (11)$$

Інтеграл рівняння (11) знаходиться дуже просто, оскільки це рівняння з змінними, що розділяються. Записавши його як

$$[\frac{1}{q} + \frac{1}{1-q}]dq = d\tau,$$

а потім проінтегрувавши обидві частини цього рівняння, отримуємо

$$ln\, q - ln(1 - q) = \tau + ln\, A$$

де A - довільна константа інтегрування. З останнього співвідношення безпосередньо слідує рівність

$$\frac{q}{1-q} = Ae^{\tau},$$

$$q = Ae^{\tau}(1 - q)$$

$$q = Ae^{\tau} - Ae^{\tau}q$$

$$q + Ae^{\tau}q = Ae^{\tau}$$

$$q(1 + Ae^{\tau}) = Ae^{\tau}$$

$$q = \frac{Ae^{\tau}}{1+Ae^{\tau}}$$

$$q = [1 + (\frac{1}{q_0} - 1)e^{-\tau}]^{-1}. \quad (12)$$

Аналіз розв’язку (12) призводить до результатів, отриманих раніше якісним шляхом, не вдаючись до інтегрування рівняння (11) у явному вигляді. Зауважимо, що при $\tau \to \infty$ розв’язок має асимптоту, рівну одиниці, тобто система прямує до повного використання свого потенціалу.

1.5 Проста модель взаємодії інфляції та безробіття

Розширення виробництва скорочує безробіття, але оскільки це досягається стимулюванням номінального попиту, то зменшення безробіття відбувається одночасно із зростанням цін або інфляцією. Проста крива Філіпса, доповнена очікуваннями, зазвичай використовується для характеристики залежності інфляції від рівня безробіття:

$$p =- \beta u + h\pi;\ h > 0;\ \beta > 0, \qquad (13)$$

де $p = \frac{d}{dt}(ln\frac{P(t)}{P^*})$ - фактична інфляція;

u - безробіття;

π - інфляційні очікування.

Параметр $\beta = \frac{\partial p}{\partial u}$ – це чутливість інфляції до зміни безробіття, а параметр $h = \frac{\partial p}{\partial \pi}$ - чутливість інфляції до зміни очікувань.

Очікування змінюються відповідно до адаптивної схеми, згідно з якою вони зростають, якщо фактична інфляція перевищує очікування, і скорочуються, інакше:

$$\pi` = \theta(p - \pi`);\ \theta > 0, \qquad (14)$$

де θ – параметр адаптації. Зворотній зв'язок – вплив інфляції на реальні змінні, у цій моделі - на безробіття, реалізується в наступному рівняння:

$$u` =- k(\mu - p);\ k > 0. \qquad (15)$$

Його сенс полягає в тому, що безробіття скорочується, коли темп зростання номінальної грошової маси $\mu = \frac{d}{dt}(ln\, M(t)) = \frac{M`}{M}$ випереджає інфляцію та росте в протилежному випадку. Обгрунтуванням цього є твердження про стимулюючу роль зростання грошової пропозиції в номінальному вираженні: якщо останнє зростає швидше, ніж інфляція, то звеличується агрегований попит, що сприяє збільшенню виробництва, або, що те саме, скорочення безробіття.

Рівняння (13-15) легко скомбінувати. Продиференціюємо по часу рівняння (14) і підставимо до нього попередньо продиференційоване рівняння (13), а також рівняння (15), що після невеликих перетворень призводить до рівняння другого порядку щодо очікувань:

$$\pi`` = \theta(p` - \pi`) = \theta(- \beta\mu` + h\pi`) - \theta\pi` =$$
$$=- \beta(- k\mu + kp) + \theta(h - 1)\pi` =$$
$$= \theta\beta k\mu - \theta\beta k\pi - [\beta k + \theta(1 - h)]\pi`$$

або

$$\pi`` + a_1\pi` + a_2\pi = b, \qquad (16)$$

де $a_1 = \beta k + \theta(1 - h)$; $a_2 = \theta\beta k\mu$.

Загальна залежність між інфляційними очікуваннями, їх змінами та безробіттям представлена таким чином у вигляді звичайного диференціального рівняння другого порядку щодо рівнів очікувань та їх змін. У стаціонарному стані, тобто, при постійних очікуваннях, як це випливає з (14), фактична інфляція дорівнює інфляційним очікуванням. Загальний розв'язок рівняння (16) записується у вигляді:

$$\pi(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + \mu, \qquad (17)$$

де r_1, r_2 - корені характеристичного рівняння

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0$$

C_1, C_2 - довільні постійні інтегрування, що визначаються початковими умовами завдання.

Економічний аналіз розв'язку (17) зводиться, таким чином, до аналізу характеристичного коренів рівняння, яке, у свою чергу, визначається структурою макроекономічного процесу. Наприклад, якщо співвідношення параметрів макроекономічної системи таке, що корені характеристичного рівняння дійсні та від'ємні (або комплексні з від'ємними дійсними частинами), то перехідний процес, що описується розв'язком однорідного рівняння, з часом згасає. Траєкторія очікувань (17) для досить великих інтервалів часу визначається частинним інтегралом, який у даній моделі дорівнює μ. У цьому випадку, отже, можна зробити висновок, що в довгостроковій перспективі величини очікувань та інфляції визначаються в кінцевому рахунку швидкістю зміни грошової маси. .

1.6 Модель оптимального вибору між інфляцією та безробіттям

Проблема оптимального вибору між інфляцією та безробіттям буде модельована як задача варіаційного обчислення, яка в макроекономічній теорії відома як модель Д. Тейлора (D. Taylor). В цій моделі, взаємозв'язок інфляції та безробіття, як і раніше описуються кривою Філліпса, але уявлення останньої дещо інше, ніж у попередній моделі. Коли виробництво дорівнює потенційному рівню, то безробіття знаходиться на своєму "нормальному" рівні, або, що те ж саме, існує лише добровільне безробіття (так зване full-employment unemployment rate), а вимушеного немає. Тому витрати безробіття може бути виражені як різницю між потенційним Q^* і фактичним Q обсягами виробництва $(Q^* - Q)$. Рівняння доповненої очікуваннями кривої Філіпса буде таким:

$$p =- \beta(Q^* - Q) + \pi. \qquad (18)$$

Очікування бізнесу та населення змінюються, як і в попередній моделі, за адаптивною схемою, у зв'язку з чим *рівняння (14)* зберігається.

Вибір між інфляцією та безробіттям у цій постановці завдання полягає у мінімізації втрат, викликаних тим, що величини інфляції та безробіття можуть не відповідати деяким нормативним значенням, які характерні, наприклад, для "нормального" економічного розвитку. *Критерій оптимальності,* який представляється як функція витрат інфляції та безробіття (соціальних втрат), набуває наступного вигляду:

$$\lambda = (Q^* - Q)^2 + \alpha p^2;\ \alpha > 0, \qquad (19)$$

де α - параметр порівняння інфляції та втрат у виробництві. Оскільки однаково небажано як надвиробництво, що викликає інфляцію, так і недовиробництво, пов'язане з безробіттям, то в певному сенсі знак неузгодженості фактичних і потенційних значень виробництва не має значення, що пояснює зведення в квадрат різниці $(Q^{*} - Q)$. Втрати від інфляції оцінюються як різниця між "запланованою", скажімо на нульовому рівні, та фактичною інфляцією. Критерій оптимальності (19) може бути легко представлений як функція лише інфляційних очікувань та їх змін:

$$\lambda(\pi, \pi`) = (\frac{\pi`}{\theta\beta})^{2} + \alpha(\frac{\pi`}{\theta} + \pi)^{2}.$$

Слід додати тепер, що величини економічних чи соціальних втрат від інфляції та безробіття не рівноцінні в часі, тому вони зважуються з деяким ненульовим дисконтом $a > 0$, що означає, що найближчому майбутньому надається більше значення, ніж віддаленій перспективі. Таким чином, критерій оптимальності набуває наступного вигляду:

$$\lambda(\pi, \pi`)exp(-\ at) = [(\frac{\pi`}{\theta\beta})^{2} + \alpha(\frac{\pi`}{\theta} + \pi)^{2}]e^{-at}. \ (20)$$

Граничні умови завдання оптимізації можуть бути задані наступним чином. Період часу, протягом якого шукається оптимальний розв’язок, вважається фіксованим, причому у початковий момент очікування відомі і дорівнюють $\pi(0) = \pi_{0}$, а кінцевий момент $T > 0$ планується досягти нульових очікувань, тобто, домогтися того, щоб населення та бізнес повірили в рішучість уряду довести боротьбу з інфляцією до кінця $(\pi(T) = 0)$. З урахуванням сказаного завдання вибору оптимального поєднання інфляції та безробіття формулюється як завдання варіаційного обчислення наступним чином: на безлічі допустимих способів боротьби з інфляцією та безробіттям знайти таку траєкторію очікувань, вздовж якої сукупні втрати від безробіття та інфляції мінімальні, тобто

$$\Lambda = \int_{0}^{T} \lambda(\pi, \pi`)exp(-\ at)dt \rightarrow min \ (21)$$

при

$$\pi(0) = \pi_{0} \text{ та } \pi(T) = 0.$$

Відомо, що необхідні умови для цього завдання варіаційного обчислення визначаються як рівняння Ейлера:

$$F_{\pi} - \frac{d}{dt}F_{\pi`} = 0, \quad (22)$$

де F_{π}, $F_{\pi`}$- відповідні похідні за очікуваннями та їх змінами підінтегральної функції у функціоналі задачі (21). *Рівняння Ейлера – диференціальне рівняння другого порядку*, яке в еквівалентній формі може бути записане як

$$F_{\pi`\pi`}\pi`` + F_{\pi`\pi} + F_{\pi t} - F_{\pi} = 0.$$

Обчислюючи відповідні похідні та підставляючи їх у рівняння (22), після деяких перетворень отримуємо

$$F_{\pi} = \frac{d\pi}{dt} = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t},$$

$$\frac{d}{dt}F_{\pi``} = \frac{d^2\pi}{dt^2} = C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t}$$

$$F_{\pi} - \frac{d}{dt}F_{\pi``} = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} - (C_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 r_2^2 e^{r_2 t})$$

$$\pi`` - a\pi` - \Omega\pi = 0, \qquad (23)$$

$$\text{де } \Omega = \frac{\alpha\beta^2\theta(a+\theta)}{(1+\alpha\beta^2)}; \ \Omega > 0.$$

Таким чином, *модель оптимізації вибору між інфляцією та безробіттям* зводиться до однорідного диференціального рівняння другого порядку. Його розв’язком, тобто траєкторією оптимальних значень очікувань є наступна функція:

$$\pi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \qquad (24)$$

де C_1, C_2 - константи, що визначаються із заданих граничних умов задачі, а r_1, r_2 - корені характеристичного рівняння $r^2 - ar - \Omega = 0$.

При заданих параметрах задачі характеристичні корені

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}(a \mp \sqrt{a^2 + 4\Omega})$$

дійсні та різних знаків. Нехай, наприклад, $r_1 > 0$; $r_2 < 0$; тоді із заданих граничних умов отримуємо два рівняння для довільних констант:

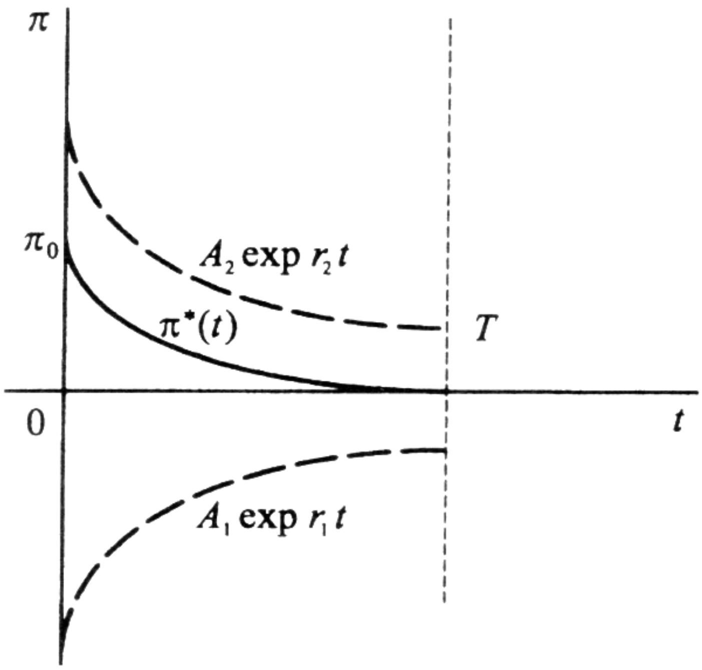
$$C_1 + C_2 = \pi_0;$$

$$C_1 e^{r_1 T} + C_2 e^{r_2 T} = 0,$$

звідки з урахуванням знаку коріння знаходимо: $C_1 < 0$; $C_2 > 0$. Графічно розв'язок (24) представляє монотонно спадаючу криву (мал. 3), оскільки в силу знаків характеристичного коріння і довільних сталих

$$\frac{d\pi}{dt} = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t} < 0.$$

Траєкторія оптимальних очікувань $\pi(t)$ має початкову точку $(0, \pi_0)$, де $\pi_0 = C_1 + C_2$, і кінцеву точку $(T, 0)$. Економічний аналіз *траєкторії оптимальних значень очікувань* свідчить, що ефективна макроекономічна політика, тобто. політика, здатна впливати на очікування бізнесу та населення, в принципі за досить тривалий час може зупинити інфляцію.



Малюнок. 3. Траєкторія оптимальних очікувань

1.7 Модель економічного зростання

Динаміка агрегованої пропозиції вивчається розділ макроекономічної теорії, що зветься теорії економічного зростання. Уявлення про моделі економічного зростання можна сформувати на прикладі неокласичної моделі, яку для постійної частки інвестицій у валовому внутрішньому продукті (ВВП) часто називають моделлю Р. Солоу (R. Solow). З боку пропозиції ця модель представлена макроекономічною виробничою функцією (2). З боку попиту вона представлена рівністю

$$Q = I + C, \qquad (25)$$

де I- валові інвестиції, C- невиробниче споживання.

У короткостроковому періоді валові та чисті капіталовкладення зазвичай не різняться. У довгостроковому періоді терміни функціонування капіталу суттєво перевищують інвестиційний цикл, тому необхідно враховувати вибуття капіталу, яке може бути досить значним, у тому числі дорівнювати або навіть перевищувати обсяг чистих інвестицій, тобто чистий приріст капіталу. З урахуванням сказаного запишемо, що

$$I = K` + \delta K, \qquad (26)$$

тобто, валові інвестиції рівні чистим інвестиціям (приріст капіталу) та вибуття капіталу. Функцію вибуття капіталу вважаємо лінійною з нормою вибуття $\delta > 0$.

Припустимо тепер, що валові інвестиції становлять фіксовану частину продукту ($I = sQ$), а знання та трудові ресурси збільшуються з постійними темпами α та β відповідно. З урахуванням вказаного обчислимо зміну капіталоозброєності у часі:

$$k' = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{AL}\right) = \frac{K`}{AL} - \frac{K}{(AL)^2}[A`L + AL`] = sf(k) - (\alpha + \beta + \delta)k,$$

або $k` = sf(k) - \nu k$, (27)

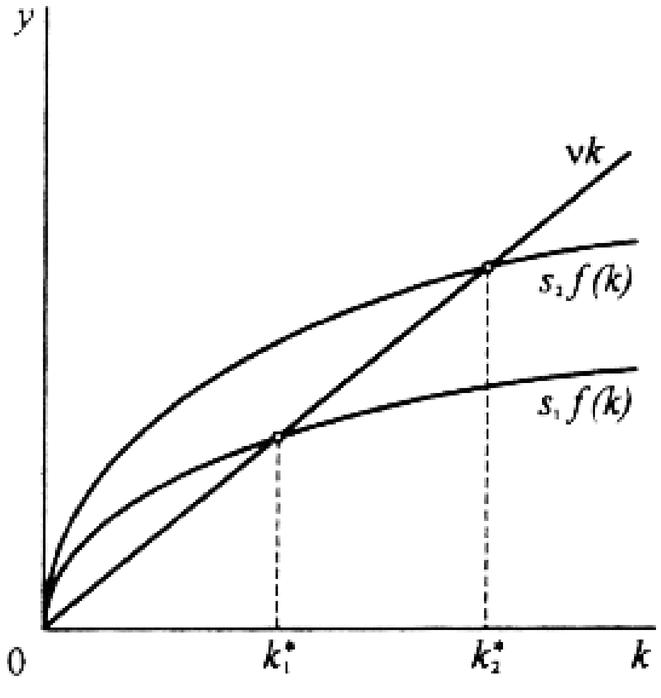
де $\nu = \alpha + \beta + \delta$ - коефіцієнт “стаціонарності” для капіталоозброєності.

Рівняння (27) – основне рівняння *моделі економічного зростання Р. Солоу.* Це нелінійне диференціальне рівняння першого порядку щодо капіталоозброєності одиниці ефективної праці. Для нормованих на одиницю ефективної праці величин вона має природну економічну інтерпретацію: чистий приріст капіталовкладень дорівнює різниці між валовими капіталовкладеннями та капіталовкладеннями стаціонарного режиму.

У стаціонарному режимі, тобто при $k^{*} = const$, або незмінній капіталоозброєності, чистий приріст капіталу дорівнює нулю ($k = 0$), проте обсяги виробництва та продуктивність змінюються, оскільки зростають трудові ресурси та знання, а капітал зношується. Якщо економіка витрачатиме капітальні вкладення лише на просте відтворення капіталу та підтримання незмінних темпів зростання знань і праці, то чистий приріст капіталу дорівнюватиме нулю. Отже, лівіше точки рівноваги капітальні вкладення зростають ($k > 0$), а правіше знижуються ($k < 0$), що говорить про стійкість динамічної рівноваги. При будь-яких початкових значеннях капіталоозброєності ефективної праці макроекономіка за досить тривалий час розвиватиметься наближаючись до стаціонарного рівня капіталоозброєності. Інша точка рівноваги системи - початок нестійка, і оскільки її економічний сенс тривіальний, то в подальшому вона не розглядатиметься.

1.8 Накопичення, виробництво та споживання.

Модель зростання неокласичного типу, тобто система є конкурентною, отже, норма накопичення збігається з нормою інвестування. Ця вимога має принципове значення: у конкурентній, на відміну від перехідної, економіці заощадження мають приносити дохід, який має бути не меншим за реальну норму віддачі на капітал. Збільшення норми накопичення, таким чином, спричиняє зростання інвестицій та капіталу, що, у свою чергу, підвищує капіталоозброєності ефективної праці. Зростання останньої призводить до збільшення виробництва та середнього продукту ефективної праці. Положення точки рівноваги змінюються, якщо змінюватимуться параметри системи: s, α, β і δ. Розглянемо, як зміниться рівновага, якщо, наприклад, збільшиться значення норми накопичення s. Це графічно представлено на мал. 4.



Малюнок. 4 Рівновага макроекономіки

Для економічного аналізу інтерес представляє динаміка не тільки капіталу та інвестицій, а й споживання. Однак не можна сказати однозначно, що збільшення норми накопичення призводить до зростання споживання, може статися і навпаки, коли надмірна ощадливість дає від'ємний приріст споживання.У статичному варіанті для моделі Кейнса існує *"парадокс ощадливості"*, що означає, що при фіксованих інвестиціях (суворіше - автономних витрат) збільшення норми заощаджень призводить до скорочення рівноважного доходу.

Зауважимо, що аналогія зі статичною моделлю, звичайно, не цілком обґрунтована, оскільки у разі неокласичної динаміки заощадження та інвестиції рівні, отже, фіксація інвестицій не може супроводжуватися зростанням заощаджень. Тим часом і в динаміці, щоправда з інших причин, збільшення норми заощаджень може мати неоднозначний вплив на рівень споживання стаціонарної точки.

Споживання на одиницю ефективної праці визначається рівністю $c = \frac{C}{AL} = \frac{(Q-1)}{AL}$, і в точці рівноваги k^* вона задовольняє умову

$$c^*(k^*) = f(k^*) - \nu k^* \quad (28)$$

Вважаючи залежність капіталоозброєності та споживання на одиницю ефективної праці безперервної від норми накопичення та диференціюючи (28) за параметром s, отримуємо

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*) - \nu]\frac{\partial k^*}{\partial s^*} \quad (29)$$

Нехай $\frac{\partial k^*}{\partial s} > 0$, тоді зростання норми накопичення збільшує рівноважне споживання тільки якщо граничний продукт більший за частку стаціонарних інвестицій. Інакше зростання частки накопичення в продукті має протилежний ефект. Отже, у відповідь питання: додатньо чи від'ємно споживання впливає підвищення норми накопичення, залежить від величини рівноважної капіталоозброєності, що забезпечує максимальний обсяг споживання. Неважко підрахувати, що максимальний обсяг рівноважного споживання на одиницю ефективної праці забезпечується у точці k^*, де $f'(k^*) = \nu$. Ця точка зветься точка капіталоозброєності, що відповідає *"золотому правилу накопичення"*. Перевищення рівня фактичної капіталоозброєності цієї величини призводить до зменшення споживання. Отже, тільки коли фактична капіталоозброєність нижча за своє оптимальне значення, збільшення норми заощаджень може стимулювати зростання споживання.

Вплив на норму накопичення на виробництво. Тепер обчислимо вплив норми накопичення обсягу виробництва у стаціонарної точці. У точці рівноваги має місце рівність

$$f(k^*) = q^*,$$

диференціюючи яке за нормою накопичення отримуємо

$$\frac{\partial q^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} \quad (30)$$

Обчислимо величину $\frac{\partial k^*}{\partial s}$ у точці рівноваги k^*. З умови макроекономічної рівноваги

$$sf(k^*) = \nu k^*$$

знаходимо, що

$$f(k^*) + sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} = \nu\frac{\partial k^*}{\partial s} \quad (31)$$

Підставляючи вираз для $\frac{\partial k^*}{\partial s}$ з (30) до (31), отримаємо

$$\frac{\partial q^*}{\partial s} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{\nu - sf'(k^*)} \quad (32)$$

Помножимо тепер обидві частини рівності (32) на $\frac{s}{q^*}$, поклавши у відповідності при умові стаціонарності $s = \frac{\nu k^*}{f(k^*)}$:

$$\frac{s}{q^*}\frac{\partial q^*}{\partial s} = \frac{\frac{\nu k^* f'(k^*)}{f(k^*)}}{\nu[1 - \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}]} \quad (33)$$

Еластичність продукту за капіталом у точці рівноваги k^* дорівнює

$$\varepsilon_K(k^*) = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{Kf'(k^*)}{ALf(k^*)} = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}$$

Підставляючи цей вираз у (33), отримуємо формулу еластичності середнього продукту ефективної праці за нормою накопичення

$$\frac{s}{q^*}\frac{\partial q^*}{\partial s} = \frac{\varepsilon(k^*)}{[1-\varepsilon(k^*)]} \quad (34)$$

В умовах вільної конкуренції, які справедливі для неокласичної моделі зростання, величина еластичності виробництва за капіталом $\varepsilon(k^*)$ відповідає частці відшкодування капіталу (або прибутку) у виробленому продукті. Якщо покласти її, наприклад, рівної $\frac{1}{3}$, як і нормальних умов конкуренції, то зі збільшенням норми накопичення на 1% валовий випуск зросте на 0,5%.

Аналіз неокласичної моделі економічного зростання допомагає об'єктивно оцінити роль, яку відіграє частка накопичень для прискорення економічного розвитку. Так, з формули (34) видно, що дуже значне збільшення норми накопичення, наприклад з 0,1 до 0,2, тобто на 100%, помітно впливає обсяг виробництва, який у разі зросте на 50%.

1.9 Оптимальна модель економічного зростання

Розглянемо завдання оптимізації поведінки макроекономічної системи у довгостроковому періоді, вважаючи, що ця система конкурентна та макроекономічні траєкторії є результатом раціональної поведінки великої кількості взаємодіючих виробників та споживачів.

У неокласичній постановці обмеженням задачі оптимального зростання є рівняння руху (поведінки) системи, яке визначимо як основне рівняння неокласичного зростання економіки:

$$k` = f(k) - \nu k - c \qquad (35)$$

Зазначимо, що рівняння (35) виводиться так само, як і рівняння моделі Р. Солоу, але, на відміну від (27), тут не передбачається, що валові інвестиції – це фіксована частина продукту. Навпаки, у моделі оптимізації шукається найкраще у сенсі співвідношення між споживанням і накопиченням (інвестиціями). Рівняння (35) зветься *основним рівнянням* *неокласичної моделі економічного зростання*. Воно залежить від керуючого параметра $c = c(t)$ - споживання на одиницю ефективної праці. Економічна логіка в задачі оптимального економічного зростання наступна: вибір оптимального значення невиробничого споживання визначає величини інвестицій, капіталу, а отже, і випуску. Отже, слід вибирати такі величини споживання, щоб протягом досить тривалої перспективи сумарна (інтегральна) корисність споживання була б максимальною, що, свою чергу, вимагає розширення виробництва та здійснення інвестицій.

По економічному сенсу величина споживання кожен час має бути додатною і може перевищувати обсяги виробництва загалом, тобто функція споживання відповідає обмеженню

$$0 \leq c(t) \leq f(k) \qquad (36)$$

Як заведено в економічній теорії, припустимо існування функції корисності споживання $U = U[c(t)]$ такою, що

$$U'(c) > 0;\ U"(c) < 0;\ \lim_{c\to 0} U'(c) = \infty;\ \lim_{c\to\infty} U'(c) = 0.$$

(37)

Умови (37) означають, що функція корисності - це *суворо увігнута функція* від обсягів споживання на одиницю ефективної праці. Показником кривизни цієї функції є величина еластичності граничної корисності споживання:

$$\sigma(c) =- \frac{c}{U'(c)} \frac{dU'(c)}{U'(c)} \qquad (38)$$

Вважатимемо, що корисності споживання, отримані в різні моменти часу, не залежать один від одного і адитивні. Отже, якщо існує відповідний захід дисконтування, наприклад безризикова ставка прибутковості урядових короткострокових зобов'язань, то корисності, одержувані в різні моменти часу, можна складати. Значить, величина $exp(-\ at)U[c(t)]$ вимірює корисність споживання в момент $t = 0$, наведену на момент

$t = 0$. Параметр дисконтування a будемо вважати позитивною і постійною величиною. Сказане дозволяє сформулювати критерій оптимальності наступного виду:

$$V[c] = \int_0^{t_1} e^{-at} U[c(t)]dt$$

відповідно до якого на перспективу має бути обрана така траєкторія споживання, отже, виробництва та капіталоозброєності, яка максимізує інтегральну величину корисності споживання для всієї передбачуваної перспективи.

При такій постановці задачі виникає, однак, природна складність: який би не був великий період оптимізації, економіка не перестає розвиватися і за його межами, а тому необхідно передбачити і капіталовкладення наприкінці цього періоду. Як їх ставити - не ясно, а з іншого боку, їх величина визначатиме і інвестиції у цьому періоді, тобто вирішувати результати оптимізації. Ця проблема можна обійти, якщо вважати період оптимізації нескінченним і гарантувати збіжність невласного інтеграла:

$$V[c] = \int_0^{\infty} e^{-at} U[c(t)]dt \qquad (39)$$

Інтеграл (39) сходиться, якщо, наприклад, початкове значення капіталоозброєння $k(0) = k_0$ менше максимально досяжного рівня $\overline{k}$ і норма дисконтування позитивна. У цьому випадку для споживання справедливо $c(t) \leq f(\overline{k})$ та

$$\int_0^{\infty} e^{-at} U[c(t)]dt \leq \int_0^{\infty} e^{-at} U[f(\overline{k})]dt \leq \frac{U[f(\overline{k})]}{a}$$

Отже, завдання оптимального економічного зростання на перспективу формулюється в цілому таким чином:

знайти максимум $V[c] = \int\limits_0^{\infty} e^{-at} U[c(t)]dt$

за умов $k` = f(k) - vk - c; k(0) = k_0,$ (40)

$$0 \leq c(t) \leq f(k)$$

У цій задачі станом системи, або її фазової змінної є капіталоозброєність, а управлінням, що визначає оптимальну траєкторію економічного зростання в перспективі, функція споживання на одиницю ефективної праці.

1.10 Розв'язання системи рівнянь оптимальної моделі

Розв'язанням задачі оптимізації (40) є траєкторія споживання на одиницю ефективної праці $c^*(t)$ та траєкторія капіталоозброєності ефективної праці $k^*(t)$, вздовж яких функціонал $V[c]$ досягає максимума. У формулюванні (40) завдання оптимізації може вирішуватись на основі принципу максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона для цього завдання записується у вигляді

$$H(t, c, k, q) = e^{-at}\{U(c) + q[f(k) - vk - c]\}, \quad (41)$$

де q - пов'язана змінна. Економічно природно розглядати як пов'язану змінну також і функцію $y = e^{-at}q$, значення якої наведено зараз. Відповідно до принципу максимуму оптимальне управління, тобто. оптимальна функція c^* споживання на одиницю ефективної праці, що максимізує гамільтоніан (41) у кожний момент часу. Будемо вважати для простоти, що оптимальний розв'язок досягається у внутрішній точці інтервалу допустимих значень споживання, де виконується необхідна умова $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$. Диференціюючи (41), для внутрішньої точки максимуму отримуємо

$$q = U'(c). \qquad (42)$$

Економічний зміст (42) досить простий і природний. Сполучена змінна отримує інтерпретацію оптимальної ціни одиниці капіталу вздовж оптимальної траєкторії, яка виявляється рівною граничною корисністю одиниці споживання (усі величини нормовані на одиницю ефективної праці). Відповідно дисконтована сполучена змінна $y = e^{-at}U'(c)$ має сенс оптимальної ціни одиниці корисності, наведеної на даний момент часу. *Канонічне рівняння для фазової змінної* – це просто рівняння руху:

$$k` = \frac{\partial H}{\partial y} \text{ або } k` = f(k) - vk - c \qquad (43)$$

Канонічне рівняння для сполученої змінної записується у вигляді:

$$y` =- \frac{\partial H}{\partial k};\ y` = \frac{d}{dt}(e^{-at}q) =- aqe^{-at} + e^{-at}q;$$

$$\frac{\partial H}{\partial k} = y[f'(k) - v]; \text{ і остаточно}$$

$$q` =- q[f'(k) - (v + a)]. \qquad (44)$$

Рівняння для фазової змінної (43) та сполучної змінної (44) разом з умовою оптимальності (42) визначають *оптимальну траєкторію економічного зростання* $\{\overset{*}{k}(t),\ \overset{*}{c}(t)\}$, вздовж якої існують оптимальні ціни. Для економічного аналізу, проте, зручніше використовувати не фазову площину "капіталоозброєнність - оптимальні ціни", а площину з координатами "капіталоозброєнність - споживання". З цією метою перетворимо диференціальне рівняння (44) для сполученої змінної. Оскільки вздовж оптимальної траєкторії для сполученої змінної справедлива рівність (42), то $q` = \overset{*}{U}(c)c`$ і за допомогою співвідношення (38) для кривизни функції корисності рівняння (44) може бути записане у вигляді:

$$c` = \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (v + a)]c. \qquad (45)$$

Таким чином, розв'язання задачі оптимального економічного зростання знаходиться з наступних рівнянь для фазової та пов'язаної змінних та керування:

$$q = U'(c);$$

$$k` = f(k) - vk - c;$$

$$c` = \frac{1}{\sigma(c)}[f'(k) - (v + a)]c. \qquad (46)$$

1.11 Якісний аналіз оптимальних траєкторій

Економічний аналіз розв’язку оптимальної моделі проведемо, використовуючи мал. 5, де на першому з них зображені обсяги середнього продукту 4, капіталоозброєності і стаціонарні капіталовкладення, а на другому - траєкторії рівноважних значень капіталоозброєності та споживання. Траєкторії рівноважних значень капіталоозброєності та споживання представлені на мал. 5 відповідно кривими $k` = 0$ і $c = 0$. Уздовж кривої рівноважної капіталоозброєності споживання визначається рівнянням $c^* = f(k^*) - vk^*$. Отже, у кожній точці вище цієї кривої споживання більше оптимального значення, що може бути тільки, якщо $k` < 0$. Отже, у кожній точці вище кривої рівноваг капіталоозброєність буде знижуватися, а в точках, розташованих нижче кривої $k` = 0$, підвищуватиметься.

Споживання не змінюється, якщо капіталоозброєність рівноважна й у точці рівноваги виконується умова $f'(k^*) = v + a$. Отже, оптимальні рівні споживання представлені на мал. 5 вертикальної прямої, що проходить через точку k^*. Це рівні споживання, що відповідають модифікованому *"золотому правилу накопичення"*, яке скориговано щодо правила, через ненульове дисконтування одиниці корисності в часі.

Рівноважний рівень капіталоозброєності може реалізувати багато варіантів споживання, що відповідають модифікованому "золотому правилу накопичення".

Однак у довільній точці $\grave{c} = 0$ поза прямою капіталоозброєність може змінюватися, оскільки інвестиції не нульові. Якщо капіталоозброєність вище рівноважної, її граничний продукт менше, ніж $v + a$, і споживання знижується; інакше оптимальне значення споживання зростає. Можливі напрями оптимальних траєкторій споживання та капіталоозброєності на фазовій площині "капіталоозброєності - споживання" показані на мал. 5. У точці (k^*, c^*) капіталоозброєність і споживання не змінюються, це - траєкторія збалансованого зростання, чи магістраль.

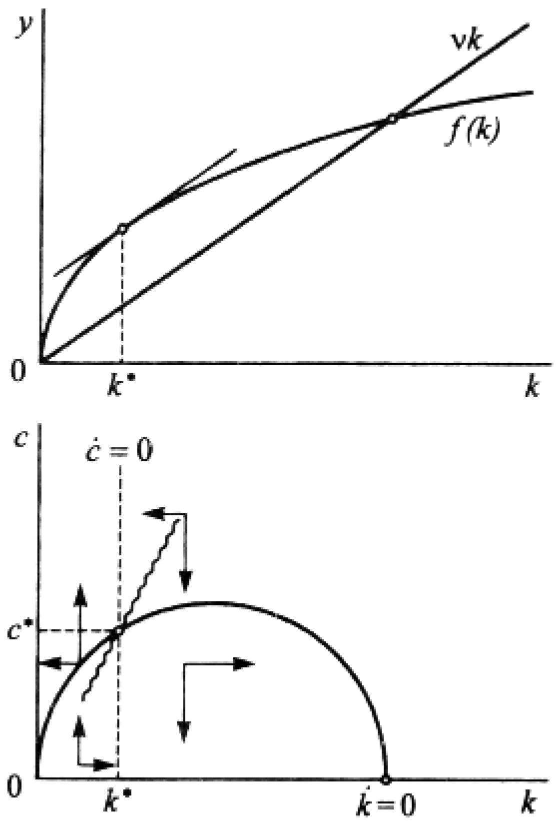


Рис 5 Фазова діаграма економічного зростання

Для того, щоб визначити характер точки рівноваги, необхідно лінеаризувати канонічні рівняння для змінних $k(t)$ і $c(t)$ у її малому околі. Матриця Якобі в точці рівноваги має вигляд

$$J^* = \begin{pmatrix} a & -1 \\ \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c^*)} & 0 \end{pmatrix},$$

а її слід і детермінант рівні відповідно

$$tr\, J^* = a > 0;\ det\, J^* = \frac{c^* f''(k^*)}{\sigma(c)}$$

Таким чином, точка рівноваги системи – це “сідло”. Якщо початкові умови системи перебувають у “гілки стійкості” , то з часом система еволюціонує до точки рівноваги $\{k^*, c^*\}$, у якій середній продукт, капіталоозброєність і споживання одиницю ефективної праці незмінні, а виробництво та капітал зростають із темпом, рівним $\alpha + \beta$. Поза гілки стійкості капіталоозброєності і споживання одиницю ефективної праці зростають чи зменшуються або разом, або порізно. Оскільки стійкості у точці рівноваги немає, то забезпечення модифікованого "золотого правила накопичення" - справа дуже тонка: будь-яке скільки завгодно мале обурення "скидає" систему з гілки стійкості, і вона починає дрейфувати в будь-якому з напрямків зміни капіталоозброєності та споживання.

Приклади до розділу 1

Приклад 1:

Покажемо, що в точці "золотого правила накопичення":

а) норма накопичення дорівнює еластичності виробництва на капіталі, тобто $s = \alpha_K(k^*)$.

б) еластичність виробництва з капіталу дорівнює частці прибутку (відшкодування капіталу) в сукупному продукті.

Для доведення зазначених тверджень використаємо властивість однорідності першого ступеня для агрегованої виробничої функції.

Припустимо, що ми маємо агреговану виробничу функцію, яка виражає залежність валового національного продукту (Y) від капіталу (K) та інших факторів виробництва:

$$Y = f(K, L)$$

де L позначає працю та інші фактори виробництва.

а) Доведемо, що в точці золотого правила накопичення норма накопичення (s) дорівнює еластичності виробництва на капіталі $(\alpha_K(k^*))$.

За визначенням, норма накопичення (s) визначає відношення зміни капіталу до валового національного продукту:

$$s = \frac{\Delta K}{\Delta Y}.$$

За допомогою агрегованої виробничої функції, ми можемо виразити зміну валового національного продукту (ΔY) через зміну капіталу (ΔK) та інші фактори:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \Delta L$$

Зауважимо, що $\frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \Delta L$ представляє зміну валового національного продукту, яка відбувається через зміну інших факторів виробництва (не капіталу).

Таким чином, ми можемо переписати зміну валового національного продукту (ΔY) у вигляді:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K + \Delta Y_i,$$

де ΔY_i позначає зміну валового національного продукту, яка відбувається через зміну інших факторів виробництва.

Підставимо цей вираз в формулу для норми накопичення:

$$s = \frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{\Delta K}{\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K + \Delta Y_i}.$$

Зауважимо, що при прикладанні капіталу (ΔK), частка (ΔY_i) у виразі для ΔY буде незначною порівняно з часткою, пов'язаною з капіталом ($\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K$). Таким чином, ми можемо простоювати часткою ΔY_i:

$$s \approx \frac{\Delta K}{\frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \Delta K + \Delta Y_i} = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial K}}.$$

Оскільки $\alpha_K(k^*)$ виражає еластичність виробництва на капіталі, то ми можемо записати $\alpha_K(k^*) = \frac{\partial K}{\partial Y}$.

Таким чином, ми отримуємо, що в точці золотого правила накопичення норма накопичення дорівнює еластичності виробництва на капіталі: $s = \alpha_K(k^*)$.

б) Доведемо, що в точці золотого правила накопичення еластичність виробництва з капіталу ($\alpha_K(k^*)$) дорівнює частці прибутку (відшкодування капіталу) в сукупному продукті.

За визначенням, еластичність виробництва з капіталу $\varphi_K(k^*)$ визначає зміну виробництва (Y) при зміні капіталу (K):

$$\varphi_K(k^*) = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$$

Для точки золотого правила накопичення ми знаємо, що норма накопичення (s) дорівнює еластичності виробництва на капіталі ($s = \alpha_K(k^*)$). Підставимо це значення виразу для $\varphi_K(k^*)$:

$$s = \alpha_K(k^*) = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$$

Ми можемо виразити $\frac{\partial Y}{\partial K}$ через $\alpha_K(k^*)$, використовуючи вираз для норми накопичення (s):

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{s}{\frac{K}{Y}} = \frac{s}{r}$$

де $r = \frac{K}{Y}$ позначає частку капіталу в сукупному продукті.

Підставимо це значення $\frac{\partial Y}{\partial K}$ у вираз для $\varphi_K(k^*)$:

$$\alpha_K(k^*) = \frac{s}{\frac{K}{Y}} \cdot \frac{K}{Y} = s = \alpha_K(k^*)$$

Таким чином, ми показали, що в точці золотого правила накопичення еластичність виробництва з капіталу $\alpha_K(k^*)$ дорівнює частці прибутку (відшкодування капіталу) в сукупному продукті.

Таким чином, ми довели обидва твердження:

а) Норма накопичення дорівнює еластичності виробництва на капіталі: $s = \alpha_K(k^*)$.

б) Еластичність виробництва з капіталу дорівнює частці прибутку (відшкодування капіталу) в сукупному продукті.

Приклад 2

Дано:

Частка прибутку на продукти (відшкодування капіталу) = $\frac{1}{3}$

Збільшення норми накопичення = 10%

Можемо скористатись формулою еластичності виробництва за нормою накопичення для визначення відсоткового зростання виробництва.

За формулою, еластичність виробництва (ε) дорівнює відношенню зміни виробництва (ΔY) до відносної зміни норми накопичення (Δs), помноженому на початкову норму накопичення (s):

$$ε = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta s}{s}}$$

В даному випадку, $\frac{\Delta s}{s} = 10\% = 0.1$ (10% виражено у вигляді десяткового дробу).

За умовою, частка прибутку на продукти (відшкодування капіталу) становить $\frac{1}{3}$, що означає $s = \frac{1}{3}$.

Підставимо ці значення у формулу еластичності виробництва:

$$ε = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{0.1} = \frac{\Delta Y}{Y} \cdot 10$$

Ми шукаємо відсоткове зростання виробництва, тобто $\frac{\Delta Y}{Y}$, тому напишемо формулу:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{ε}{10}$$

За умовою, частка прибутку на продукті становить $\frac{1}{3}$, тобто $ε = \frac{1}{3}$.

Підставимо це значення в формулу:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{1}{30}$$

Отже, виробництво зросте на $\frac{1}{3}$ або 3.33% (округлено до двох знаків після коми).

Таким чином, виробництво зросте на приблизно 3.33%.

РОЗДІЛ № 2

ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ІНФЛЯЦІЇ

Однією з головних рушійних сил процесу економічного перетворення є інфляція. Інфляція, постійно змінюючи ціни та витрати, змушує національних виробників діяти в ринкових умовах, надаючи монополістам можливість безкарно збільшувати ціни і прибутки.

Р. Лукас був, мабуть, першим, хто звернув увагу на залежність реакції виробників від рівня інфляції. У моделях перехідної економіки, що розвиваються в даній роботі, реалізується ідея Р. Лукаса.

2.1 Взаємодія конкуренції та інфляції

Найпотужнішою силою, що діє у ринковій економіці, є *конкуренція*.

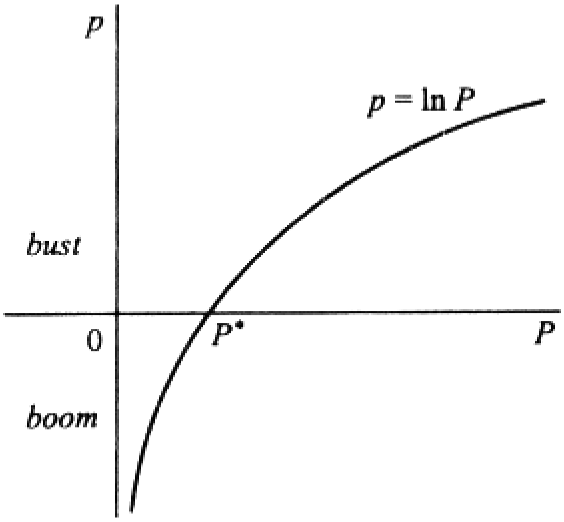
Конкуренція, змушуючи виробників використовувати ресурси найбільш ефективним чином, забезпечує споживачам можливість максимально задовольняти свої потреби і служить тим самим дієвим механізмом оптимального розподілу суспільних ресурсів.

Макроекономіка, яка розвивається як ринкова система на основі принципів конкуренції, хоч і необов'язково як система “чистої” конкуренції, є *рівноважною системою*.

Будемо називати індексом загального рівня цін в економіці $\frac{P(t)}{P^*}$ величину, наприклад, дефлятора ВВП $P = P(t)$, віднесеного до рівня P^* - дефлятора рівноважних цін, що відображають рівність агрегованих попиту та пропозиції. Функцію $P = P(t)$ будемо вважати заданою на додатній півосі, неперервною і принаймні двічі диференційовану

$$p(t) = In\frac{P(t)}{P^*} \qquad (47)$$

Надалі, будемо розуміти їх логарифм, або логівень цін або логціни (див. мал. 6).



Малюнок. 6 Функція стану макроекономіки

За визначенням, похідна логарифма індексу цін

$$p` \equiv \frac{d}{dt}p(t)\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix}0 \qquad (48)$$

- це інфляція, якщо похідна є додатною; дефляція, якщо похідна від'ємна. Рівність інфляції (дефляції) нулю природно пояснювати станом економіки, що відповідає рівновазі: рівень цін не змінюється, коли агреговані попит та пропозиція рівні між собою. Якщо агреговані попит та пропозиція рівні між собою, то макроекономічна система не має внутрішніх (ендогенних) стимулів до зміни свого стану. Інакше кажучи, індекс цін як вимірник стану системи дорівнює одиниці: $\frac{P^*}{P^*} = 1$, а логарифм одиниці - нуль.

2.2 Проста модель безінерційної інфляції

Аналіз поведінки перехідної макроекономічної системи почнемо з дослідження точки короткострокової рівноваги, яка в моделі представлена початком. У малому околі початку функція надлишкового попиту

$y(p) = In\, Y^d(p) - In\, Y^s(p) = y^d(p) - y^*$ може бути покладена в ряд Тейлора:

$$y(p) = y(0) + y'(0)p + \frac{1}{2}y''(0)p^2 + ... = y'(0)p + \frac{1}{2}y''(0)p^2 + ...$$

Перший член у цьому виразі дорівнює нулю, так як $y(0) = 0$, а перша похідна агрегованого речення за логцінами $y'(p) < 0$ від'ємна. Тому лінійним наближенням до функції надлишкового попиту в околі точки рівноваги є спадна функція

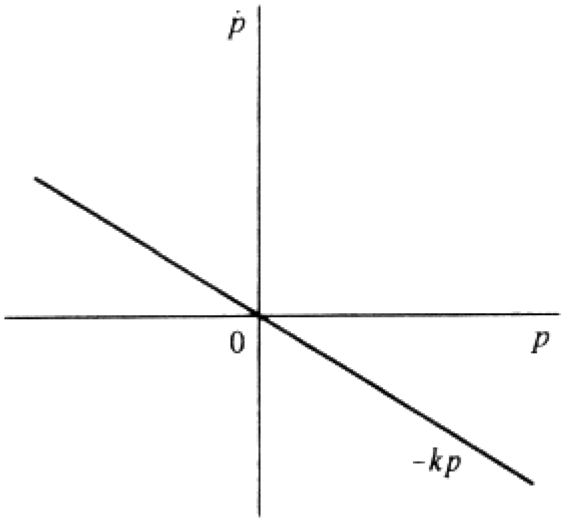
$$y(p) = y'(0)p,\ y'(0) < 0 \qquad (49)$$

Зробимо найпростіше припущення про функцію надлишкового попиту $y(p)$, покладемо її лінійною спадною функцією рівня логцін і припустимо, що інфляція (дефляція) пропорційна величині розголошення попиту та пропозиції для кожного значення цін. У цьому випадку найпростіша модель інфляції може бути записана як лінійне диференційне рівняння

$$p` =- kp,\ k > 0 \qquad (50)$$

Природна *економічна інтерпретація* моделі інфляції (50) полягає у тому, що у досить малому околі точки макроекономічного рівноваги існує пропорційна залежність між силою конкуренції та інфляцією. Інфляція, розуміючи її передусім інфляцію попиту, - це зростання цін внаслідок того, що агрегований попит перевищує пропозицію, зафіксований на рівноважному рівні. Чим більше агрегований попит за пропозицію, тим вище відхилення цін від рівноважного рівня. Силою F, що врівноважує неузгодженість агрегованих попиту та пропозиції, є конкуренція $F \equiv y(p) =- kp$, яка в даному випадку пропорційна величині відхилення цін від рівноважних.

Рівняння (50) означає, що з цінами нижче рівноважних $(p < 0)$ економіка перебуває у стані буму, $y(p) =- kp > 0$, оскільки низькі ціни стимулюють попит. Коли ж надлишковий попит додатній або агрегований попит перевищує пропозицію, то для відновлення макроекономічної рівноваги ціни повинні зрости, що зменшить попит і збільшить пропозицію, в умовах інфляції ($p` > 0$). Розглядаючи навпаки, для цін, що перевищують рівноважний рівень, агрегований попит менший за пропозицію, отже, ціни мають знизитися, щоб рівновага відновилася. Динаміка системи представлена траєкторіями розв'язку системи, розташованими вздовж осі абсцисс: на мал. 8 видно, що макроекономіка завжди тяжіє під впливом конкуренції до свого стану ринкової рівноваги, тобто рівності агрегованих попиту та пропозиції, яке має місце на початку координат.



Малюнок. 8. Представлення конкуренції

Рівняння (50) автономне, оскільки його права частина не залежить явно від часу і його розв'язком є функція

$$p(t) = p_0 exp(-\ kt),$$

яка при $t \to \infty$ прямує до нуля. Таким чином, для будь-якого початкового рівня цін $p(0) = p_0$ система, представлена рівнянням (50), за досить тривалі періоди часу відновлює порушену рівновагу між агрегованим попитом та пропозицією. Точка рівноваги макроекономіки на початку стійка, оскільки похідна, яка стоїть у правій частині рівняння (50), за цінами від'ємна.

Зазначимо, що для даної найпростішої макроекономічної моделі стан фазової або ринкової рівноваги, в якій агрегований попит дорівнює пропозиції, а ціни рівноважні $(p = 0)$, збігаються зі станом міжчасової, або динамічної рівноваги, в якій ціни не змінюються у часі (p`=0). Іншими словами, у моделі першого порядку, коли ціни врівноважують ринок, вони не змінюються у часі та інфляція відсутня.

2.3 Загальний випадок безінерційної інфляції

У загальному випадку динамічна рівновага макроекономічної системи може збігатися з точкою ринкового рівноваги. Наприклад, за рівності агрегованих попиту та пропозиції інфляція може дорівнювати деякій додатній величині. Економічно додатня інфляція при збалансованості реального ринку (рівність агрегованих попиту та пропозиції) може мати місце, якщо фінансовий ринок незбалансований.

Уявімо величину перевищення пропозиції грошей над грошовим попитом як

$$m = m^s = m^d \qquad (51)$$

нехай для визначеності ця величина є додатною $(m > 0)$, тобто, є монетарним чинником інфляції. Динаміка зміни цін для лінійної моделі є в цьому випадку лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням

$$p` = m - kp;\ m, k > 0. \qquad (52)$$

Розв'яжемо рівняння (52):

$$\frac{dp}{dt} = m - kp$$

$$\frac{dp}{dt} + kp = m$$

У нашому випадку, використаємо $\mu(t) = e^{kt}$:

$$e^{kt}\frac{dp}{dt} + ke^{kt}p = me^{kt}$$

$$\frac{d}{dt}e^{kt}p = me^{kt}$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int(\frac{d}{dt}e^{kt}p)dt = \int me^{kt}dt$$

$$e^{kt}p = \frac{m}{k}e^{kt} + C$$

$$p(t) = \frac{m}{k} + Ce^{-kt}$$

де $C = p(0) - \frac{m}{k}$

В цій формулі $p(0)$ представляє початковий рівень цін у момент часу $t = 0$.

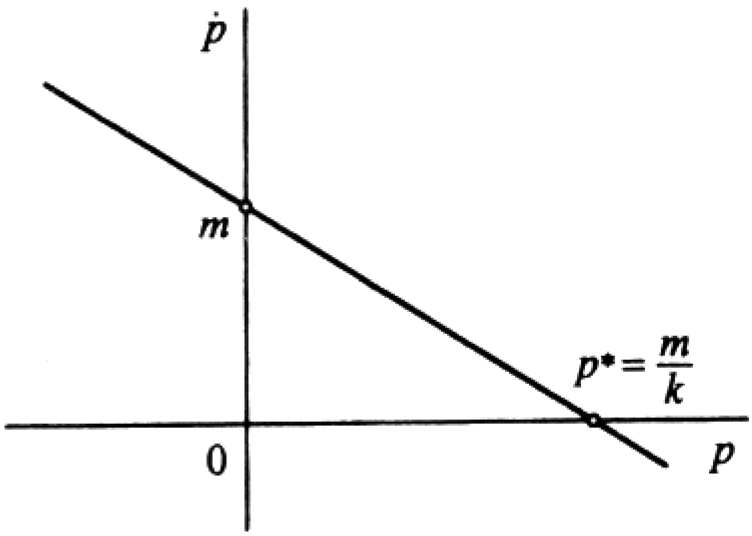
Таким чином, розв'язок диференціального рівняння для лінійної моделі інфляції буде:

$$p(t) = \frac{m}{k} + (p(0) - \frac{m}{k})e^{-kt}$$

Макроекономічна інтерпретація цього рівняння така. Інфляція розглядається як наслідок зовнішньої сили (у разі сталої) $F_{ex}(t) = m$ і внутрішньої, чи власної, відновлюючої сили $F(p) =- kp$. Остання ототожнена з дією конкуренції, що відображає вплив на ціни всіх факторів немонетарного характеру, інакше – сил, що призводять до відновлення рівноважних цін завдяки рівності агрегованих попиту та пропозиції. Отже, це конкуренція реальному ринку. Другим найважливішим макроекономічним ринком є ринок грошей, який у цій моделі розглядається як зовнішнє доповнення до реального ринку і представлений силою $F_{ex}(t) = m$. Таким чином, модель макроекономіки є однорідним диференціальним рівнянням, якщо розглядається тільки реальний ринок або перехідна система, в якій дія фінансового ринку малозначима. Модель

(50), окремий випадок моделі (52), яка відображає взаємодію реального та монетарного ринків.

Фазову діаграму неоднорідного рівняння (52) представлено на мал.9. З неї видно, що у точці $p = 0$ інфляція дорівнює величині $m > 0$, а отже, ціни зростають, незважаючи на рівність агрегованого попиту та пропозиції. Це, оскільки макроекономіка, представлена рівнянням (52), є взаємодія ринків товарів хороших і грошей, і збалансованості реальних чинників недостатньо відновлення макроекономічного рівноваги (нульова точка недосяжна). Початок може інтерпретуватися як макроекономічна рівновага для збалансованості грошового ринку або для зневажливо малого впливу фінансового ринку на макроекономічні пропорції. Якщо ж фінансовий (грошовий) ринок незбалансований ($m > 0$), то рівновага системи в міжчасовому або динамічному сенсі досягається в точці $p^* = \frac{m}{k}$, в якій інфляція дорівнює нулю. Економічно уявлення системи за допомогою неоднорідного диференціального рівняння (52) спирається на припущення про інфляційність макроекономічного процесу: у точці ринкової рівноваги інфляція нульова, але діють монетарні фактори інфляції, оскільки грошова пропозиція перевищує попит на гроші.



Малюнок. 9. Модель лінійної інфляції

Зі сказаного видно, що розбалансований у зазначеному сенсі грошовий ринок, наприклад через спроби центрального банку стимулювати виробництво, зрушує точку макроекономічної рівноваги та ситуації буму та рецесії повинні розташовуватися на мал. 9 відповідно зліва та справа від точки $p^* = \frac{m}{k}$. Зрушення по фазі у разі це результат врахування незбалансованості фінансового ринку.

Загальний розв'язок рівняння (52) знаходиться у такому вигляді:

$$p(t) = [p(0) - \frac{m}{k}]exp(- kt) + \frac{m}{k} \qquad (53)$$

компонента якого, відповідна загальному розв'язку однорідного рівняння, прагне нулю при $t \to \infty$, отже, $p(t) \to \frac{m}{k}$. В рамках монетарної концепції інфляції у довгостроковій перспективі основним чинником зростання цін є грошова маса, а рівень цін можна як вартість всіх реальних активів. Режим розвитку макроекономічної системи (52), що встановився, представляє, таким чином, стаціонарний рівень цін як "капіталізацію" надмірної пропозиції грошей. Ця інтерпретація неодноразово використовуватиметься надалі.

Точка динамічної рівноваги p^* стійка, оскільки похідна за цінами функції $y(p)$ є від'ємною. Отже, з будь-якого положення (буму чи спаду) траєкторія макроекономічної системи тяжіє до точки рівноваги: за досить тривалий проміжок часу система звільняється від впливу початкових умов - значення рівня цін у вихідний момент $p(0) = p_0$.

Таким чином, лінійні системи першого порядку типу (50) або (52) показують повільну еволюцію макроекономіки з довільного початкового стану до точки рівноваги, *не можуть* мати коливань, що породжуються внутрішніми силами у самій системі.

Якщо моделювати інфляцію як динамічну систему першого порядку, то врахувати коливання можна лише через дію зовнішньої сили. Для моделі (52), якщо збалансованість монетарного ринку представлена функцією, що містить гармоніки, вона може бути подана як так звані вимушені коливання системи.

Нехай модель взаємодії реального та фінансового ринків представлена рівнянням

$$p` + km = m(t),\ p(0) = p_0,\ k > 0, \qquad (54)$$

де $m(t)$ - неперервна функція, надмірна пропозиція грошей, що відображає, наприклад, невипадкові коливання економічної кон'юнктури. Розв'язок (54) шукаємо у вигляді

$$p(t) = c(t)exp(-\ kp) \qquad (55)$$

методом варіації довільної сталої. Диференціюємо (55):

$$p` = c`exp(-\ kp) - ck\,exp(-\ kp)$$

та підставляємо в рівняння (54):

$$c`exp(-\ kp) - ck\,exp(-\ kp) + ck\,exp(-\ kp) = m(t).$$

З урахуванням виду довільної сталої:

$$c(t) = \int_0^t m(\tau)exp(k\tau)d\tau + p_0$$

розв'язок (61) остаточно набуває вигляду:

$$p(t) = p_0 exp(-\ kt) + \int_0^t m(\tau)e^{k(\tau-1)}d\tau. \qquad (56)$$

У випадку коли підінтегральна функція містить гармонійні складові, рівень логцін змінюється циклічно, але природа цих циклів “зовнішня” в тому сенсі, що їх виникнення та присутність пояснюються дією кон'юнктури фінансового ринку, а не реальною конкуренцією виробників і споживачів на ринку товарів та послуг.

ВИСНОВОК

У сучасній теорії проблема макроекономічної стабілізації розглядається у багатьох випадках як завдання оптимального вибору між соціально прийнятними рівнями інфляції та безробіття. Досить широкий клас макроекономічних проблем подібного типу може бути зведений до розв'язання диференціальних рівнянь як лінійних, так і нелінійних. Найкращі в певному сенсі рівні інфляції та безробіття як дві ключові цілі макроекономічної стабілізації повинні гарантовано перебувати на заданому інтервалі значень за різних впливів зовнішніх шоків випадкового чи детермінованого характеру.

В даній роботі розглянуто моделі пропозиції та виробництва, лінійні моделі інфляції. Процеси інфляції та фінансування бюджетного дефіциту тісно пов'язані через взаємодію уряду та центрального банку. У сучасній ринковій економіці найважливішим інституційним елементом макроекономічного регулювання в ринковій економіці є фінансовий ринок, який координує дії всіх основних макроекономічних агентів.

Гірованих попиту та пропозиції викликає підвищення цін чи їх зниження. Моделі інфляції характеризують залежність між силою конкуренції та інфляцією в досить малому околі точки макроекономічної рівноваги. Загалом динамічна рівновага макроекономічної системи може не збігатися з точкою ринкової рівноваги.

Фінансування бюджетного дефіциту представляється як компроміс між двома конфліктуючими цілями: мінімізацією поточного дефіциту та стабілізацією інфляційних очікувань. Розв'язання завдання залежить від двох параметрів, що визначають положення кривої бюджетного дефіциту, оскільки крива інфляційного податку інваріантно залежить лише від очікуваних інфляційних очікувань.

Рівноважним станом системи є точка нульових змін інфляції, де бюджетний дефіцит повністю профінансовано за рахунок інфляційного податку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коломієць О. О., Гаврилюк О. М. Моделювання інфляційних процесів у ринковій економіці: підхід, методи, інструменти. - Київ: Центр учбової літератури, 2011.
2. Базилевич В. Д., Кірєєва Л. В. Моделювання динаміки інфляції в умовах фінансової кризи. - Київ: Друк, 2012.
3. Пархоменко Н. Ю., Чернушенко Т. В. Математичне моделювання інфляційних процесів в Україні. - Київ: Видавництво Київського університету, 2012.
4. Іваненко О. Л., Малікова В. В., Тимошенко І. О. Моделювання фінансових ризиків та інфляційних процесів в економіці. - Київ: НТУ "ХПІ", 2013.
5. Гресь О. В., Козіна О. В. Інфляція та інфляційні процеси в Україні: моделювання та аналіз. - Київ: Науковий світ, 2014.
6. Доманський В. В., Козіна О. В. Дослідження інфляційних процесів в Україні: методологія, моделювання, прогнозування. - Київ: Центр учбової літератури, 2015.
7. Матяш М. В., Корнійчук О. С. Моделювання інфляційних процесів у межах економіки змішаного типу. - Київ: Видавництво Київського університету, 2016.
8. Вишнівський В. В., Захарченко В. М. Інфляційні процеси в умовах зміни курсу національної валюти. - Київ: Центр навчальної літератури, 2017.
9. "Математичні моделі економічних процесів" - Андрущак Г. М., Яценко Т. О., Заблоцький В. І.
10. "Математичні моделі економічних процесів та систем" - Карпенко В. М., Савицька Л. В.