ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 67–77

УДК 517.9

А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Огуленко О. П., Кічмаренко О. Д. Схема повного усереднення рівнянь на часових шкалах. Доведено аналог теореми Боголюбова для динамічних рівнянь на часових шкалах. Одержано оцінку близкості розв'язків заданої та усередненої систем рівнянь.
Ключові слова: метод усереднення, динамічні рівняння на часових шкалах.

Огуленко А. П., Кичмаренко О. Д. Схема полного усреднения уравнений на временных шкалах. Доказан аналог теоремы Боголюбова для динамических уравнений на временных шкалах. Получена оценка близости решений заданной и усредненной систем уравнений.
Ключевые слова: метод усреднения, динамические уравнения на временных шкалах.

Ogulenko O. P., Kichmarenko O. D. Full averaging scheme for equations on time scales. An analogue of Bogolubov's theorem prooved for dynamical equations on a time scale. An estimation for proximity of solutions of given and averaged system of equations was obtained.
Key words: averaging Method, Dynamic Aquation on Time Scales.

Введение. Метод усреднения является важным методом асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. Он зародился во второй половине XVIII века в работах А. Клеро, Ж. Лагранжа и С. Лапласа по небесной механике. В начале XX века Б. Ван-Дер-Поль применил метод усреднения к дифференциальным уравнениям, описывающим колебания в системах с одной степенью свободы. Однако вопросы строгого обоснования метода усреднения оставались открытыми.

В теории усреднения дифференциальных уравнений основополагающими являются работы Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [1]. Позже этот подход был развит Н. Н. Боголюбовым и его учениками [2]. С развитием теории оптимального управления во второй половине XX века метод усреднения приобрел еще большую важность, так как он позволил эффективно применять вычислительную технику для решения практических и фундаментальных задач, которые ранее считались безнадежными.

Метод усреднения был обоснован для большого числа различных классов динамических систем: дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [3], для дифференциальных включений [4], квазидифференциальных уравнений, включений и динамических систем с запаздыванием и импульсами [5, 6, 7, 8], уравнений с запаздыванием и максимумом в правой части [9, 10], уравнений с производной Хукухары [11, 12, 14], уравнений с нечеткой правой частью [13, 15].

Основное направление этих исследований заключалось в расширении понятия динамической системы и, соответственно, понятия решения такой системы.

В последнее время был осуществлен перенос метода усреднения на дискретные динамические системы, например, [16, 17, 18].

С другой стороны, во многом изменился подход к пониманию природы времени в динамических системах. Понятие временной шкалы, впервые введенное S. Hilger в 1988 году [19], позволило построить общую теорию динамических систем, одним языком описывающую и непрерывные системы, и дискретные, и — что особенно важно — смешанные случаи. Подробное изложение теории динамических систем на временных шкалах можно найти в [20, 21].

Вопросы устойчивости динамических систем на временных шкалах изучались в [22, 23], а непосредственно задача усреднения, насколько нам известно, впервые была рассмотрена в [24, 25]. В этих работах рассматривался вопрос близости решения исходной системы на временной шкале и решения усредненного обобщенного дифференциального уравнения. Таким образом, операция усреднения не обеспечивала замкнутости множества решений.

Цель нашей работы заключается в построении метода усреднения динамических систем на временных шкалах, в котором усредненная система имела бы ту же природу, что и исходная.

Ниже мы приведем основные сведения о временных шкалах, которые необходимы для изложения полученных результатов.

Временная шкала — непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, обозначается символом $\mathbb{T}$. Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператор перехода вперед:

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\};$$

2) оператор перехода назад:

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\},$$

(при этом полагается $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ и $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$);

3) функция зернистости

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет тип этой точки. Соответствующая классификация точек представлена в таблице .

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T} : M = \sup \mathbb{T}, \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a,b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 1. [20] *Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Число $f^\Delta(t)$ называется Δ-производной функции f в точке t, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (то есть $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$), что*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Table 1: Классификация точек временной шкалы

t справа рассеянная	$t < \sigma(t)$
t справа плотная	$t = \sigma(t)$
t слева рассеянная	$\rho(t) < t$
t слева плотная	$\rho(t) = t$
t изолированная	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t плотная	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Определение 2. [20] *Если $f^{\Delta}(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^{\kappa}$. Функция $f^{\Delta}(t) : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^{\kappa}$.*

Если f дифференцируемая в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t).$$

Определение 3. [20] *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.*

Определение 4. [20] *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется rd-непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых rd-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Определение 5. [20] *Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D такая, что для всех $t \in D$ выполняется равенство*

$$F^{\Delta}(t) = f(t).$$

Эта функция называется пред-первообразной для $f(t)$ и определяется неоднозначно.

Неопределенный интеграл на временной шкале имеет вид:

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

где C — произвольная константа интегрирования, а $F(t)$ — пред-первообразная для $f(t)$.

Далее, если для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ выполняется $F^{\Delta}(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется первообразной функции $f(t)$. Если

$t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для всех t. Определенный Δ-интеграл для любых $r, s \in \mathbb{T}$ определяется как

$$\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r).$$

Определение 6. [20] *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:*

1) *rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t, x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;*
2) *ограниченной в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $M > 0$ такая, что $\|f(t, x)\| \leq M$ для любой точки $(t, x) \in Q$;*
3) *липшицевой в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in Q\ .$$

Сформулируем задачу Коши на временной шкале. Пусть задано уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{T}.$$

Функция $x(t)$ называется решением этого дифференциального уравнения, если $x(t) \in C^1_{rd}([t_0, +\infty) \cap \mathbb{T})$ и при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество. Если, кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет заданному начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

то она называется решением соответствующей начальной задачи или задачи Коши.

Условия существования и единственности решения задачи Коши сформулированы и доказаны в [20] (теоремы 8.16, 8.18 и 8.20).

В дальнейшем нам понадобится аналог экспоненциальной функции, построенный для произвольной временной шкалы. Вначале выделим важный класс функций:

Определение 7. [20] *Функцию $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть регрессивной, если*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Множество регрессивных и rd-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Как показано в [20], функции p из класса $\mathcal{R}$ можно поставить в соответствие экспоненту $e_p(t, s)$. В дальнейшем понадобится также неравенство Гронуолла, которое мы сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма (неравенство Гронуолла, [20]). *Пусть y — rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ функция, $p \in \mathcal{R}^+, p \geqslant 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Если справедливо неравенство*

$$y(t) \leqslant \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \qquad \tau \in \mathbb{T},$$

то

$$y(t) \leqslant \alpha e_p\left(t, t_0\right), \qquad \tau \in \mathbb{T} \ .$$

Основные результаты. Сформулируем и докажем аналог теоремы Боголюбова для динамических уравнений с малым параметром на временных шкалах. Рассмотрим динамическую систему вида

$$x^{\Delta} = \varepsilon X(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $t \in \mathbb{T}$ — время, заданное временной шкалой. Поставим ей в соответствие следующую систему:

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \overline{X}\left(\xi\right) \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где

$$\overline{X}(x) = \lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} X(t,x)\Delta t. \tag{3}$$

Эту последнюю систему мы будем называть усредненной, соответствующей исходной системе (1).

Теорема 1 (об усреднении на временной шкале). *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t,x)$ rd-непрерывна по t, регрессивна и для нее выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши, причем $\forall (t,x) \in Q$ $\|f(t,x)\| \leqslant M$, $M > 0$, $f(t,x)$ липшицева по x с константой $\lambda > 0$, то есть*

$$\|f\left(t, x_1\right) - f\left(t, x_2\right)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \qquad \forall \left(t, x_1\right), \left(t, x_2\right) \in Q \ ;$$

2) *предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$;*

3) *решение $\xi(t)$ усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*

4) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0\left(\eta, L\right) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ , \tag{4}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Покажем вначале, что функция $\overline{X}(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Действительно, согласно условию 2) для любого заданного $\delta > 0$ можно указать такое $T_1(\delta)$, что при всех $T > T_1(\delta)$ справедлива оценка

$$\left\|\overline{X}(x') - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant + \left\|\overline{X}(x') - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} X(t,x')\Delta t\right\| +$$
$$+ \left\|\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} \left[X(t,x') - X(t,x'')\right]\Delta t\right\| + \left\|\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} X(t,x'')\Delta t - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \delta + \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{T} \|X(t,x') - X(t,x'')\|\,\Delta t \leqslant \delta + \lambda\,\|x' - x''\|\ .$$

Поскольку значение δ выбирается произвольным образом, то в пределе получаем

$$\left\|\overline{X}(x') - \overline{X}(x'')\right\| \leqslant \lambda\,\|x' - x''\|\ .$$

Таким образом, из условий 1) и 2) следует, что и исходная, и усредненная системы будут иметь единственные решения, продолжаемые по времени до тех пор, пока $x(t) \in D$ (соответственно, $\xi(t) \in D$).

Запишем теперь эти системы в интегральной форме:

$$\begin{aligned} x(t) = &\quad x_0 + \varepsilon\int_{t_0}^{t} X(s,x(s))\Delta s,\\ \xi(t) = &\quad x_0 + \varepsilon\int_{t_0}^{t} \overline{X}(\xi(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Оценим норму разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \xi(t)\| &= \left\|\varepsilon\int_{t_0}^{t}\left[X(s,x(s)) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| = \\ &= \varepsilon\left\|\int_{t_0}^{t}\left[X(s,x(s) - X(s,\xi(s))\right]\Delta s + \int_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\int_{t_0}^{t}\|X(s,x(s) - X(s,\xi(s))\|\,\Delta s + \varepsilon\left\|\int_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\| \leqslant \\ &\leqslant \lambda\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x(s) - \xi(s)\|\,\Delta s + \varepsilon\left\|\int_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s))\right]\Delta s\right\|\ . \end{aligned}$$

Оценим последнее слагаемое на промежутке временной шкалы $\left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]\ \cap\ \mathbb{T}$.

Построим разбиение промежутка следующим образом: зададимся диаметром разбиения δ, положим первую точку разбиения равной t_0, а дальнейшие точки определим по формуле

$$t_i = \begin{cases} \sup\,(t_{i-1}, t_{i-1}+\delta], & \text{если} \quad t_{i-1}+\delta \in \mathbb{T}^{\kappa}, \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{если} \quad t_{i-1}+\delta \notin \mathbb{T}^{\kappa}. \end{cases}$$

Можно показать ([21], с. 120) , что построенное таким образом разбиение обладает следующим свойством: для любого i либо $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$ (будем считать, что в этом случае $i \in I_\delta$), либо $t_i - t_{i-1} > \delta$ и $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ (тогда $i \in I_\sigma$). Пусть $N = |I_\delta| + |I_\sigma|$.

Далее, обозначим функцию $\varphi(t, \xi(t)) = X(t, \xi(t)) - \overline{X}(\xi(t))$. По свойствам интегралов имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| &= \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\varphi(s, \xi(s)) - \varphi(s, \xi_i)\right) \Delta s \right\| &+ \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\|. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу условия 2) существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s, \xi(s)) \Delta s \right\| \leqslant t f(t) \ .$$

Тогда

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s - \int\limits_{t_0}^{t_{i-1}} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_{i-1}} \varphi(s, \xi_i) \Delta s \right\| \leqslant \varepsilon t_i f(t_i) + \varepsilon t_{i-1} f(t_i) \leqslant 2F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, причем супремум берется по $\tau \in \left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$. Нетрудно видеть, что $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Итак, в оценке (5) вторая сумма мажорируется выражением $2NF(\varepsilon)$.

Рассмотрим подробнее первую сумму в (5). Во-первых, легко показать, что функция $\varphi(t,\xi)$ липшицева по ξ с константой 2λ. Во-вторых,

$$\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s=\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|x_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{s}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau-x_0-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_i}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s=$$
$$=\varepsilon^2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\overline{X}(\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s\leqslant\varepsilon^2\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}M\int\limits_{t_i}^{s}\Delta\tau\Delta s=$$
$$=\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Итак, получили оценку

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\right)\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\cdot\varepsilon\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Пусть $i\in I_\sigma$. Тогда

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\right)\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s=2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{\sigma(t_{i-1})}(s-t_i)\,\Delta s=$$
$$=2\lambda\varepsilon^2 M\mu(t_{i-1})\,(t_i-t_i)=0\ .$$

Пусть теперь $i\in I_\delta$. Тогда

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\right)\Delta s\right\|\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}(s-t_i)\,\Delta s=2\lambda\varepsilon^2 M\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\delta\Delta s\leqslant$$
$$\leqslant 2\lambda\varepsilon^2 M\delta^2\ .$$

Итак, мы получили, что

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\right)\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{N}\varepsilon\left\|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i\in I_\delta}2\lambda\varepsilon^2 M\delta^2.$$

Чтобы оценить последнюю сумму, воспользуемся условием теоремы 4). Именно, положим $\delta<\mu_0$. Легко видеть, что тогда $|I_\delta|<\dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0=\dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Значит, для всех $N>N_0$ и $\delta=\dfrac{L}{N\varepsilon}$ имеем $\delta<\mu_0$, и оценка примет вид:

$$\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\varphi(s,\xi(s))-\varphi(s,\xi_i)\right)\Delta s\right\|\leqslant\sum_{i\in I_\delta}2\lambda\varepsilon^2 M\frac{L^2}{\varepsilon^2N^2}=\sum_{i\in I_\delta}\frac{2\lambda ML^2}{N^2}<\frac{2\lambda ML^2}{N}\ .$$

В итоге получаем

$$\varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \varphi(s,\xi(s))\Delta s \right\| \leqslant \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon) \ .$$

Вернемся к оценке разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned} \|x(t)-\xi(t)\| = \left\| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[X(s,x(s)) - \overline{X}(\xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \lambda\varepsilon \int_{t_0}^{t} \|x(s)-\xi(s)\| \, \Delta s + \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \left[X(s,\xi(s) - \overline{X}(\xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \lambda\varepsilon \int_{t_0}^{t} \|x(s)-\xi(s)\| \, \Delta s + \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon). \end{aligned}$$

Тогда, вследствие неравенства Гронуолла, имеем:

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \left(\frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon) \right) \cdot e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) \ .$$

Исходя из свойств экспоненциальной функции ([20], теорема 2.36, пункт ii), $e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) < < e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)$. Далее, так как $1+\lambda\varepsilon\mu(t) > 0$, то по определению экспоненты [20] имеем:

$$e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right) = \exp\left(\int_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\ln(1+\lambda\varepsilon\mu(\tau))}{\mu(\tau)} \Delta\tau \right) < \exp\left(\int_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}} \frac{\lambda\varepsilon\mu(\tau)}{\mu(\tau)} \Delta\tau \right) < e^{\lambda L}.$$

Выберем теперь N достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2\lambda M L^2}{N} e^{\lambda L} \leqslant \frac{\eta}{2} \ .$$

Зафиксируем это значение и выберем ε_0 достаточно малым, чтобы при всех $\varepsilon \in \in (0,\varepsilon_0]$ выполнялось

$$2NF(\varepsilon)e^{\lambda L} \leqslant \frac{\eta}{2} \ .$$

Тогда

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \eta, \qquad t \in \left[t_0, \frac{L}{\varepsilon} \right] \cap \mathbb{T},$$

что и требовалось доказать.

■

Заключение. В работе обоснована схема полного усреднения системы уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. Этот вопрос рассматривался ранее в работах A. Slavík [24, 25], причем в качестве усредненной системы использовалась система обобщенных дифференциальных уравнений. Нами при весьма общих условиях доказан аналог теоремы Боголюбова, получена оценка близости решения исходной системы и решения усредненной системы, поставленной ей в соответствие, причем усредненная система определяется на той же временной шкале, что и исходная система.

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику [текст] / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – Киев : Изд-во АН СССР, 1937. – 363 с.
2. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления [текст] / В. А. Плотников. – Изд-во Лыбидь, Киев-Одесса, 1992. – 188 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса, Астропринт, 1999. – 356 с.
5. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами [текст] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 11. – С. 1526–1532.
6. **Плотников В. А.** Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами [текст] / В. А. Плотников, П. М. Китанов // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 45, № 1. – С. 140–142.
7. **Plotnikov V. A.** Asymptotic methods for quasidifferential equations in the metric space [text] / V. A. Plotnikov, L. I. Plotnikova // Functional Differential Equations, Israel. – 1996. – V. 3. – P. 185–205.
8. **Plotnikov V. A.** Method of averaging for impulsive differential inclusions [text] / V. A. Plotnikov, R. P. Ivanov, N. M. Kitanov // Pliska Stud. Math. Bulgar. – 1998. – № 12. – P. 43–55.
9. **Kichmarenko O. D.** Quazidifferential equations with delay [text] / O. D. Kichmarenko // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 100–105.
10. **Плотников В. А.** Усереднення диференціальних рівнянь із максимумом [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 78–82.
11. **Плотников В. А.** Усреднение управляемых уравнений с производной Хукухары [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Нелінійні коливання. – 2006, № 3. – С. 376–385.
12. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений с производной Хукухары, многозначным управлением и запаздыванием [текст] / В. А. Плотников, О. Д. Кичмаренко // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т. 12. – Вип. 7. – С. 130–139.
13. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение нечетких дифференциальных уравнений с запаздыванием [текст] / О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 316–328.

14. **Kichmarenko O. D.** Averaging of differential equations with Hukuhara derivative with maxima [text] // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2009. – V. 57, № 3. – P. 447–457.

15. **Kichmarenko O. D.** One scheme of averaging of fuzzy differential equations with maxima [text] / O. D. Kichamrenko, N. V. Skripnik // J. Advanced Research in Applied Mathematics. – 2011. – V. 3, № 1. – P. 94–103.

16. **Плотников В. А.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления [text] / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелинейные колебания. – 2004. – Т. 7. – № 2. – С. 241–254.

17. **Бойцова И. А.** Метод усреднения в системах дискретных уравнений с быстрыми и медленными переменными [текст] / И. А. Бойцова // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2008. – Т. 13. – Вип. 18. – С. 7–22.

18. **Кiчмаренко О. Д.** Усереднення керованих систем з постiйним запiзненням на дисретному часi [текст] / О. Д. Кiчмаренко, М. Л. Карпичева // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2012. – Т. 17. – Вип. 12 (13-14). – С. 54–69.

19. **Hilger S.** Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten [text] / S. Hilger. – Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.

20. **Bohner M.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications [text] / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhäuser Basel, 2001. – 358 p.

21. **Advances** in Dynamic Equations on Time Scales [text] / M. Bohner, A. Peterson et al. – Springer, 2002. – 368 p.

22. **Бохнер М.** Элементы теории устойчивости А. М. Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале [текст] / М. Бохнер, А. А. Мартынюк // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, №. 2. – С. 3–26.

23. **Martynyuk-Chernienko Yu. A.** On the stability of dynamical systems on a time scale [text] / Yu. A. Martynyuk-Chernienko // Dokl. Acad. Nauk. – 2007. – V. 413. – P. 1–5. [Russian].

24. **Mesquita J. G.** Periodic averaging theorems for various types of equations [text] / Jaqueline Godoy Mesquit, Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 387, No. 2. – P. 862–877.

25. **Slavík A.** Averaging dynamic equations on time scales [text] / Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2012. – V. 388, No. 2. – P. 996–1012.