

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки

(повне найменування інституту/факультету)

Кафедра диференціальних рівнянь

(повна назва кафедри)

Д и п л о м н а р о б о т а

бакалавра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Асимптотичні властивості роз’язків одного класу лінійних
диференціальних рівнянь четвертого порядку»

Виконала: студентка IV курсу
денної форми навчання
спеціальності 6.040201 «Математика»

Борисенко Л. Ю.

Керівник кандидат фіз.-матем. наук
доцент Шарай Н.В.

Рецензент доктор фіз.-матем.наук
професор Євтухов В.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ _____ від _____ р.

Захищено на засіданні ДЕК № _____

протокол № _____ від _____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ДЕК

(підпис)

(прізвище, ініціали)

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2017 року

ВСТУП	2
РОЗДІЛ 1	4
ДЕЯКІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ L -ДІАГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	4
§ 1. Системи лінійних диференціальних рівнянь, асимптотично близьких до діагональних	4
§2. Приведення постійних матриць до діагонального виду	18
§3. Розгляд коренів багаточленів з майже сталими коефіцієнтами.....	22
§4. Лема о діагоналізації майже сталої матриці.....	32
§5. Приведення систем лінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами до L -діагонального виду	38
§6. Висновки.....	48
РОЗДІЛ 2	50
АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ	50
§ 1. Постановлення задачі	50
§ 2. Перший етап дослідження	50
§ 3. Властивості матриць Λ і $T^{-1}T'$ при виконанні основних умов.....	56
§ 4. Дослідження системи $Z' = [\Lambda(t) - T^{-1}(t)T'(t)]Z$	59
§ 5. Основний результат про асимптотику	62
ВИСНОВКИ.....	65
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	66

Вступ

Опублікована в 1948 році робота Н. Левінсона [10] послужила новим поштовхом до розвитку асимптотичної теорії лінійних диференціальних рівнянь. Суть наведених у цій роботі результатів полягала в наступному. Тут була встановлена теорема про асимптотику, так званих, L -діагональних систем лінійних диференціальних рівнянь, і було з'ясовано питання про приведення систем лінійних диференціальних рівнянь з "майже сталими" коефіцієнтами до L -діагонального вигляду.

Починаючи з 1948 року в напрямку приведення систем до L -діагонального вигляду було виконано велику кількість досліджень. Серед них особливо слід відзначити монографії І.М. Рапопорта [6], М.В. Федорюка [5], М. Істхама [7], а також роботи Ф. Хартмана і А. Уїтнера, А. Девінатца і Ж. Каплана, Ж. Харріса і Д. Лутца, і багатьох інших авторів.

Отримані при цьому результати ефективно використовувалися для встановлення асимптотики різних класів систем лінійних диференціальних рівнянь і лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Зокрема, в монографії І.Т. Кігурадзе і Т.А. Чантурія [3] були встановлені асимптотичні подання для фундаментальних систем розв'язків досить широких класів лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Тут основний результат формулюється в термінах двох функцій, що задовольняють деяким умовам. За рахунок вибору цих функцій отримані асимптотичні подання для фундаментальних систем розв'язків диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами, диференціальних рівнянь з асимптотично малими коефіцієнтами і диференціальних рівнянь, асимптотично еквівалентних двочленним.

Незважаючи на досягнутий значний прогрес у вивченні асимптотики розв'язків лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків, такі рівняння продовжують привертати до себе увагу багатьох дослідників, оскільки при їх

вивченні виникають випадки, що вимагають уточнення і узагальнення встановлених раніше результатів.

Дипломна робота присвячена встановленню асимптотики розв'язків одного класу лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку типу Ейлера. Вона складається з вступу і двох глав, розбитих на параграфи.

У першому розділі роботи наведені основні відомості з теорії L-діагональних систем лінійних диференціальних рівнянь. Тут доводиться відома теорема Мателля-Левінсона про асимптотику L-діагональних систем і вказуються умови, при виконанні яких система лінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами за допомогою невиродженого перетворення може бути приведена до L-діагонального вигляду. Крім того, виділяються випадки, коли може бути побудована матриця перетворення, яка припускає легко для неї побудувати зворотню матрицю.

У другому розділі розглядається диференціальне рівняння четвертого порядку:

$$(p_0 y''')'' + (p_1 y')' + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 \left[(q_{2-j} \cdot y^{(j)})^{(j+1)} + (q_{2-j} \cdot y^{(j+1)})^{(j)} \right] - p_2 y = 0,$$

де функції $p_j, 0 \leq j \leq 2$ і $q_i, i = 1, 2$ означені на інтервалі $[a, \infty)$ і не обов'язково дійсні, в той час як p_0 ніде не обертається в нуль на цьому інтервалі.

Висновки

В першому параграфі першого розділу викладаються важливі результати про асимптотику фундаментальних систем розв'язків систем диференціальних рівнянь, близьких до діагональних. В другому приводяться факти про приведення постійних матриць до діагонального виду. В третьому встановлюються деякі властивості коренів алгебраїчного рівняння з майже сталими неперервними і неперервно-диференційованими на проміжку $[a, \infty)$ коефіцієнтами. В п'ятому-основний результат про асимптотику систем розв'язків систем диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами.

В другому розділі проводиться процес уточнення коренів рівняння (2.2.3) за рахунок використання результатів з роботи В. М. Євтухова. В подальшому використання цих даних дасть гарний вид для асимптотичних уявлень фундаментального сімейства розв'язків диференційного рівняння виду (2.1.1) Результат ілюструється на прикладі.

Список літератури

- [1] A. S. A. AL-Hammadi. Asymptotic formulae of Liouville-Green type for a general fourth-order differential equation – Journal of mathematics: 801-811 p.
- [2] Кігурадзе І.Т. Про асимптотичне уявлення розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. – Тр.Тбіліс. унів-ту. – 149-167 с.
- [3] Кігурадзе І.Т., Чантурія Т.А. Асимптотичні властивості розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.– М.: Наука, 1990. – 430 с.
- [4] Євтухов В.М. Деякі питання асимптотичної теорії лінійних диференціальних рівнянь. – Укр. Мат. Ж. – 2002. – 20-42 с.
- [5] Привалов В.С. Введення в теорію функцій комплексної змінної. М.: Наука. - 1977. - 444с.
- [6] Рапопорт І.М. Про деякі асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь. Вид. АН УРСР, Київ. - 1954. - 290с.
- [7] Федорюк М.В. Асимптотичні методи для лінійних звичайних диференціальних рівнянь. М.: Наука. - 1983. - 352с.
- [8] Eastham M.S.P. The asymptotic solution of linear differential systems. Applications of the Levinson theorem. Clarendon Press. Oksford. - 1989. - 240p.
- [9] Eastham M.S.P. On the eigenvectors for a class of matrices arising from quasi-derivatives// Proc. Roy. Soc. Edin. - 1984. - 97A. - P. 73-78.
- [10] Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations// Duke Math. J. - 1948.- 15. - P. 111-126.
- [11] Hartman P., Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations. // Am. J. Math. - 1955. - 77 - P. 48-86 and 932.