ОСАДКИ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРИ ВДАВЛИВАНИИ В КОРОБЧАТУЮ ОБОЛОЧКУ

В. А. Гришин, В. А. Гришина, О. В. Реут, В. В. Реут
Одесский национальний университет имени И. И. Мечникова,
Одесса, Украина
grishin@onu.edu.ua

Решается задача о нахождении осадок двух тонких абсолютно жестких включений, вдавливаемых в бесконечную коробчатую оболочку прямоугольного профиля. Включения располагаются на противоположных гранях симметрично относительно осей симметрии.

Задача сводится к совместному плоскоизгибному напряженному состоянию полосовидной пластины с дефектами, роль которых играют включение и ребро оболочки. Математическая постановка задачи описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{c} D\Delta^2 w\left(x,y\right) = Z\left(x,y\right) \\ \Delta^2 \sigma_x(x,y) = \Phi(x,y) \end{array} \quad -a < x < b, x \neq 0, \left|y\right| < l$$

$$\Phi(x,y) = \partial / \partial x\left[\Delta + (1+\nu)\partial^2 / \partial y^2\right]X + \partial / \partial y\left[\Delta - (1+\nu)\partial^2 / \partial y^2\right]Y$$

удовлетворяющих условиям на ребре оболочки:

$$\langle v\rangle = \langle \tau_{xy}\rangle = \langle \varphi_{xy}\rangle = \langle M_{xy}\rangle = 0$$

$$\langle u\rangle = -(w_+ + w_-); \langle w\rangle = u_+ + u_-$$

$$\langle \sigma_x\rangle = -h^{-1}\left[(V_x)_+ + (V_y)_-\right];$$

$$\langle V_x\rangle = h\left[(\sigma_x)_+ + (\sigma_y)_-\right]$$

условиям симметрии:

$$V_y = \varphi_y = v = \tau_{xy} = 0, -a < x < b; y = 0$$

$$V_x = \varphi_x = u = \tau_{xy} = 0, x = -a, b; \left|y\right| > c$$

условиям на включении:

$$u(-a,y) = \varphi_x(-a,y) = 0; w(-a,y) = \delta \ \left|y\right| < c$$

при выполнении условий равновесия на включении:

$$\int_{-c}^{c} V_x(-a,y)dy = -\frac{P}{2}$$

Здесь P — нагрузка, действующая на включение; δ — осадка включения; $2c$ — длина включения; u, v, w — перемещения вдоль осей x, y, z; $\varphi_x, M_x, V_x, \sigma_x, \tau_{xy}$ — угол поворота, изгибающий момент, обобщенная поперечная сила, нормальное и касательные напряжения; $X(x,y), Y(x,y), Z(x,y)$ — нагрузка действующая на оболочку вдоль осей x, y, z соответственно.

В силу симметрии условия равновесия для касательных напряжений выполняются автоматически, а смещение включения δ — заранее неизвестно.

Введем функции $\chi(y)$ и $\mu(y)$, представляющие собой неизвестные поперечную силу и касательные напряжения на включении:

$$\chi(y) = V_x(-a,y); \mu(y) = \tau_{xy}(-a,y)$$

и которые тождественно равны нулю вне включения.

Применяя интегральное преобразование Фурье и решая задачу в трансформантах, при выделении слабосходящихся частей ядер в обратном преобразовании Фурье приходим к системе интегральных уравнений вида:

$$\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (y-\eta)^2 \ln|y-\eta| & 0 \\ 0 & -\ln|y-\eta| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta + \\ + \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} K_{11} K_{12} \\ K_{21} K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\eta) \\ \mu(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} \delta_\chi(y) \\ \delta_\mu(y) \end{bmatrix}$$

где $K_{ij}(y,\eta)$ — бесконечно дифференцируемые функции, а $\delta_\chi(y), \delta_\mu(y)$ осадки включений, вызванные нагрузками χ, μ соответственно.

Первое из интегральных уравнений не имеет решения в классе интегрируемых функций и его решение следует искать в пространстве функций, имеющих неинтегрируемые особенности вида $(1-y^2)^{-3/2}$ с применением аппарата регуляризации расходящихся интегралов (Онищук и др., 1986).

Для решения системы интегральных уравнений использовался метод ортогональных многочленов и решение разыскивалось для $\mu(y)$ в виде разложения в ряд по многочленам Чебышева первого рода $T_{2m+1}(s)$ и для $\chi(y)$ в виде разложения в ряд по многочленам специального вида $\pi_k(y)$, образующих полную ортогональную систему и получаемых как модификация многочленов Якоби (Попов, 1982).

Получаемая бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $\{\chi_{2k}, \mu_{2k+1}\}$ вида:

$$\begin{pmatrix} \chi_{2l} \\ \mu_{2l+1} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{11}^{k,l} & A_{12}^{k,l} \\ A_{21}^{k,l} & A_{22}^{k,l} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{2k} \\ \mu_{2k+1} \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} c_l \\ 0 \end{pmatrix}, \ k,l = \overline{0,\infty}$$

решалась методом редукции. Здесь коэффициенты системы

$$A_{ij}^{k,l} \, (i,j = 1,2)$$

и правых частей c_l выражаются через быстросходящиеся интегралы, в которые входят функции Бесселя и гамма-функции для различных $k, l = \overline{0, \infty}$.

Для определения осадки δ были проведены численные расчеты в случае, когда оболочка загружена силами P, приложенными к серединам включений. При этом система линейных алгебраических уравнений решалась методом редукции с сохранением пяти членов разложения, обеспечивающего точность не менее трех значащих цифр. Отметим, что при стягивании длины включения в точку, то есть при $c \to 0$ значения осадки совпадают со значениями прогиба под точкой приложения сосредоточенной силы задачи о нагружении оболочки двумя симметрично расположенными силами.

Полученные результаты вычислений позволяют проанализировать зависимость величин осадки включений от их длин и зависимость от соотношений геометрических размеров сечения оболочки. Для примера приведем значения осадки:

$$\delta = 4{,}75;\ 3{,}30;\ 2{,}37;\ 1{,}82;\ 1{,}45$$

подсчитанные для четырех безразмерных значений длин включений:

$$\frac{c}{a} = 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5$$

соответственно. Значения подсчитаны при

$$\nu = 0{,}3;\ \frac{h}{a} = 0{,}01;\ \frac{a}{b} = 1$$

в безразмерном виде. При переводе в абсолютные значения их следует умножать на коэффициент $10^4 \cdot P \,/\, Eh$.

Список литературы

Гришин, В. А., Реут, В. В., Попов, Г. Я. (1990). Расчет коробчатых оболочек прямоугольного сечения. *ПММ, 54* (4), 605—612.

Онищук, О. В., Попов, Г. Я., Фаршайт, П. Г. (1986). Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями. *ПММ, 50* (2), 293—302.

Попов, Г. Я. (1982). *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений*. Москва: Наука.