

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: « **Наближення другого порядку для поверхні  
постійної гаусової кривини в  $E_3$ .**»

«Approximation of the second order for the surface of a constant Gaussian curvature in  $E_3$ .»

Виконала: студентка денної форми навчання  
спеціальності 111 Математика

Гур'єва Валерія Володимирівна

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц.  
Покась С. М.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Курба-  
това І. Н.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

## ЗМІСТ

<b>1</b>	<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Рімановий простір другого наближення</b>	<b>4</b>
2.1	Розгляд ріманового простору . . . . .	4
2.2	Деякі властивості простору . . . . .	8
<b>3</b>	<b><math>V_n</math>- Простір постійної кривини</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Поверхня другого наближення для сфери у <math>E_3</math></b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Поверхня другого наближення для псевдосфери у <math>E_3</math></b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Висновок</b>	<b>33</b>
	<b>Список літератури</b>	<b>35</b>

# РОЗДІЛ 1

## ВСТУП

Актуальність розробки в диференціальній геометрії інваріантних щодо вибору системи координат наближених методів пояснюється наступними міркуваннями.

Основні геометричні об'єкти диференціальної геометрії виникають в результаті розгляду різних геометричних образів в диференціальній околі першого, другого або більш високого порядку, а стало бути наближено, з деякою, що не піддається більш-менш суворій оцінці, точністю. Однак при вивченні геометричних об'єктів зазначений принцип, як правило, віддається забуттю, що є неприродним з теоретичної точки зору і перешкоджає використанню досягнень сучасної диференціальної геометрії в додатках.

Ідея вивчення геометричних об'єктів в околі довільної точки з точністю того чи іншого порядку досить часто застосовувалася в геометрії і приводила до більш глибокому вивченню цих об'єктів. Так, наприклад, в теорії кривих у диференціальній околі 1-го порядку виникає інваріантний вектор дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої і вибрати її в якості параметра кривої. У диференціальній околі 2-го порядку будується вектор головної нормалі і кривина кривої. І, нарешті, при розгляді диференціального окола 3-го порядку отримуємо скрут кривої.

Використання наближених методів у рімановій геометрії пов'язано з формулою Тейлора. Вперше цю формулу для метричного тензора симетричного ріманова простору, віднесеного до нормальної системи координат, застосував П. А. Широков. Відзначимо, що наближені методи застосовуються в різних розділах математики: в теорії диференціальних рівнянь, в крайових задачах і рівняннях математичної фізики, в деяких областях теоретичної фізики: прикладної астрономії і атмосферної оптики.

## РОЗДІЛ 2

# РІМАНОВИЙ ПРОСТІР ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ

### Розгляд ріманового простору

1. Розглянемо рімановий простір  $V_n$ , який віднесен до ріманової системи координат з початком у точці  $M_0$ , та розкладемо його метричний тензор  $g_{ij}$  у ряд Тейлора в околі даної точки

$$g_{ij}(M_0) = g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(M_0)x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(M_0)x^k x^l + \dots \quad (2.1)$$

Скористаємося умовами, яким повинні задовольняти об'єкти зв'язності  $\Gamma_{ij}^h(x_0)$  в даній системі координат ([4])

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^h(M_0) &= 0, \\ \Gamma_{(ijk)}^h(M_0) &= 0, \\ \Gamma_{(ijkl)}^h(M_0) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

де

$$\Gamma_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k}, \Gamma_{ijkl}^h = \frac{\partial^2 \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k \partial x^l}, \dots$$

а круглі дужки означають операцію циклування за індексами, які стоять в дужках.

З  $\Gamma_{ij}^h(M_0) = 0$  випливає, що  $\Gamma_{ij,k}(M_0) = 0$ , а тому

$$(\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i})(M_0) = 0$$

Але

$$\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

Тому

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(M_0) = 0 \quad (2.3)$$

Розглянемо розклад метричного тензора  $g_{ij}$  у ряд Тейлора в околі точки  $M_0$ . На підставі (2.3) другий доданок дорівнює нулю.

Розглянемо очевидну рівність

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(x) = \Gamma_{ik,j}(x) + \Gamma_{kj,i}(x)$$

Продиференціюємо її за  $x^l$ :

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(x) = \frac{\partial \Gamma_{ik,j}(x)}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{kj,i}(x)}{\partial x^l} \quad (2.4)$$

Знайдемо вираз частинних похідних символів Кристофеля I роду через об'єкти тензорного характера

$$\frac{\partial \Gamma_{ik,j}(x)}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \left( g_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha \right) (x) = \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^l} (x) \Gamma_{ik}^\alpha (x) + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha (x)}{\partial x^l} g_{\alpha j} (x)$$

Другий доданок дорівнює нулю у точці  $M_0$ , тому

$$\frac{\partial \Gamma_{ik,j}(M_0)}{\partial x^l} = \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^l} g_{\alpha j} \right) (M_0)$$

Аналогічно отримуємо, що

$$\frac{\partial \Gamma_{jk,i}(M_0)}{\partial x^l} = \left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^l} g_{\alpha i} \right) (M_0)$$

Роблячи підстановку двох останніх рівностей у (2.4), маємо:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} (M_0) = \left( g_{\alpha j} \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^l} + g_{\alpha i} \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^l} \right) (M_0) \quad (2.5)$$

Тепер розглянемо тензор Рімана:

$$R_{ijk}^h(x) = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h(x)}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h(x)}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^h(x).$$

Так як за умовою (2.2) , останні два доданка у точці  $M_0$

дорівнюють нулю, то отримуємо:

$$R_{ijk}^h(M_0) = \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} \right) (M_0)$$

Просиметруємо останій вираз за індексами  $i$  и  $j$

$$\begin{aligned} R_{(ij)k}^h(M_0) &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} \right) (M_0) = \\ &= \left( \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} - 2 \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} \right) (M_0) \end{aligned}$$

Так як

$$\Gamma_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k}$$

$$\Gamma_{(ijk)}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j},$$

та на основі визначення ріманової системи координат

$$\Gamma_{(ijk)}^h(M_0) = \left( \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j} \right) (M_0) = 0,$$

Ми можемо отримати:

$$\left( \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j} \right) (M_0) = - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} (M_0).$$

Таким чином

$$R_{(ij)k}^h(M_0) = -3 \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} (M_0),$$

З цього слідує

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k}(M_0) = -\frac{1}{3}R_{(ij)k}^h(M_0)$$

Зробимо підстановку останнього виразу до (2.5), отримуємо

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(M_0) = -\frac{1}{3} \left( g_{\alpha j} R_{(ik)l}^\alpha + g_{\alpha i} R_{(jk)l}^\alpha \right) (M_0)$$

Або

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(M_0) = -\frac{1}{3} \left( R_{j(ik)l} + (R_{i(jk)l}) \right) (M_0)$$

Остаточно

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(M_0) = \frac{1}{3} R_{k(ij)l}(M_0) \quad (2.6)$$

Тоді наш розклад (2.1) компонент метричного тензора у ряд Тейлора має наступний вигляд:

$$g_{ij}(x) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{kijl} x^k x^l \dots \quad (2.7)$$

## Деякі властивості простору

Розглянемо рімановий простір  $V_n$ , віднесений до довільної системи координат  $\{x^h\}$ . В околі будь-якої її довільно-фіксованої точки  $M_0(x_0^h)$  побудуємо простір 2-го порядку  $\tilde{V}_n^2$ , визначивши його метричний тензор  $\tilde{g}_{ij}(y)$  наступним чином ([4]):

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2} \quad (2.8)$$

де  $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$ ,  $R_{il_1l_2j} = R_{il_1l_2j}(M_0)$ .

Порівнюючи (2.1) з (2.7) бачимо, що простір  $\tilde{V}_n^2$  реалізує наближення другого порядку для  $V_n^2$  в околі точки  $M_0$  і тому відображає його геометричні властивості з певним ступенем точності. Відзначимо деякі властивості простору  $\tilde{V}_n^2$ . ([5])

**Теорема 1.1** *Якщо простір  $V_n$  піддається ізометричному перетворенню, то наближення  $\tilde{V}_n^2$  також піддається лише ізометричному перетворенню.*

**Доведення.** Дійсно, з (2.8) та  $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta$  можна побачити, що

$$\tilde{ds}^2 = \left[ g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta \right] dy^i dy^j \quad (2.9)$$

У просторі  $V_n$  від координат  $\{x^h\}$  перейдемо до нових координат  $\{x'^h\}$ . Відомо, що при цьому

$$\tilde{ds}'^2 = \left[ g'_{ij} + \frac{1}{3} R'_{i\alpha\beta j} y'^\alpha y'^\beta \right] dy'^i dy'^j \quad (2.10)$$

$$g'_{ij}(x') = g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j}, \quad (2.11)$$

де

$$R'_{i\alpha\beta j} = R_{\nu\delta\lambda\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j}$$

Введемо наступні позначення

$$y^h = \frac{\partial x^h}{\partial x'^\alpha} \Big|_0 y'^\alpha,$$

Тоді

$$dy^h = \left. \frac{\partial x^h}{\partial x'^\alpha} \right|_0 dy'^\alpha,$$

Підставимо значення (2.11), у праву частину (2.10) та використовуючи данну заміну отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} \tilde{ds}^2 &= \left[ g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} + \frac{1}{3} R_{\nu\delta\lambda\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} y'^\beta \right] dy'^i dy'^j = \\ &= g_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} dy'^i dy'^j + \frac{1}{3} R_{\nu\delta\lambda\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^j} y^\delta y^\lambda dy'^i dy'^j = \\ &= g_{mn} dy^m dy^n + \frac{1}{3} R_{\nu\delta\lambda\mu} y^\delta y^\lambda dy^\nu dy^\mu \end{aligned}$$

Переобозначив індекси  $m$  і  $n$  на  $\nu$  і  $\mu$  відповідно, у першому доданку, маємо, що:

$$\tilde{ds}^2 = g_{\nu\mu} dy^\nu dy^\mu + \frac{1}{3} R_{\nu\delta\lambda\mu} y^\delta y^\lambda dy^\nu dy^\mu = \left( g_{\nu\mu} + \frac{1}{3} R_{\nu\delta\lambda\mu} y^\delta y^\lambda \right) dy^\nu dy^\mu$$

Звідси ми маємо

$$\tilde{ds}^2 = \tilde{ds}^2$$

Таким чином, ми переконалися, що простір  $\tilde{V}_n^2$  інваріантно зв'язано з початковим простором  $V_n$  відносно вибору системи координат у  $V_n$ .

**Теорема 1.2** Система координат  $y^h$  у просторі  $\tilde{V}_n^2$  є римановою з початком у точці  $y^h = 0 (h = 1, 2, \dots, n)$ .

**Доведення** Дійсно, за визначенням символів Кристофеля I роду

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^k} \right) \quad (2.12)$$

З (2.8) слідує, що

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial y^j} = \frac{1}{3} R_{j(i)k} y^l$$

Роблячи підстановку в отримане співвідношення (2.9), отримуємо:

$$\tilde{\Gamma}_{ij,k} = -\frac{1}{9} R_{k(i)j} y^l,$$

тому  $\tilde{\Gamma}_{ij,k}(0) = 0$  и  $\Gamma_{\alpha\beta,k}(\mathbf{y}) y^\alpha y^\beta = 0$  одночасно. Але цими умовами характеризується ріманова система координат ([10]), що й завершує доведення теореми.

**2.** Розглянемо простір  $\tilde{V}_n^2$ . Для дослідження властивостей простора  $\tilde{V}_n^2$  нам знадобляться елементи зворотної матриці для  $\|\tilde{g}_{ij}(\mathbf{y})\|$ . Їх будемо шукати у вигляді аналітичних функцій від  $n$  дійсних змінних  $y^1, y^2, \dots, y^n$ :

$$\tilde{g}^{ij} = a^{ij} + a_{l_1}^{ij} y^{l_1} + a_{l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} + \dots, \quad (2.13)$$

де  $a^{ij}, a_{l_1}^{ij}, a_{l_1 l_2}^{ij}, \dots$  доки невідомі константи, симетричні за будь-якої пари нижніх індексів.

Знайдемо ці коефіцієнти, з умови

$$\tilde{g}_{i\alpha} \tilde{g}^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

Тоді

$$\left( g_{i\alpha} + \frac{1}{3} R_{im_1 m_2 \alpha} y^{m_1} y^{m_2} \right) \left( a^{ij} + a_{l_1}^{ij} y^{l_1} + a_{l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} + \dots \right) = \delta_i^j \quad (2.14)$$

З (2.14) отримуємо послідовність співвідношень:

$$\left( g_{i\alpha} a^{\alpha j} \right) \Big|_0 = \delta_i^j \quad (2.15)$$

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1}^{\alpha j} \right) \Big|_0 y^{l_1} = 0 \quad (2.16)$$

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1 l_2}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a^{\alpha j} R_{il_1 l_2 \alpha} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} = 0 \quad (2.17)$$

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1 l_2 l_3}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a_{l_3}^{\alpha j} R_{il_1 l_2 \alpha} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0 \quad (2.18)$$

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{\alpha j} + \frac{1}{3} a_{l_3 l_4}^{\alpha j} R_{il_1 l_2 \alpha} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = 0 \quad (2.19)$$

...

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1 \dots l_{2p-1}}^{\alpha j} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 \alpha} a_{l_3 \dots l_{2p-1}}^{\alpha j} \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_{2p-1}} = 0 \quad (2.20)$$

$$\left( g_{i\alpha} a_{l_1 \dots l_{2p}}^{\alpha j} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 \alpha} a_{l_3 \dots l_{2p}}^{\alpha j} \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_{2p}} = 0 \quad (2.21)$$

де  $p = 1, 2, \dots$

З (2.15) ми маємо, що

$$a_{l_1}^{ij} = g_{l_1}^{ij} \quad (2.22)$$

Роблячи підстановку з (2.22) до (2.16), ми отримуємо

$$a_{l_1}^{ij} y^{l_1} = 0 \quad (2.23)$$

Аналогічно з (2.18) та іншими за індукцією слідує, що

доданки з непарними степенями дорівнюють нулю

$$a_{l_1 \dots l_{2p-1}}^{ij} y_1^l \dots y_{2p-1}^l = 0 \quad (2.24)$$

де  $p = 1, 2, \dots$

З (2.17) слідує

$$a_{l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} = -\frac{1}{3} R_{0 l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} \quad (2.25)$$

З (2.19) на підставі (2.22), (2.25) маємо

$$a_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} = \frac{1}{9} R_{0 l_1 l_2 \alpha}^i R_{0 l_3 l_4}^{\alpha j} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} \quad (2.26)$$

Продовжуючи цей процес, одержуємо

$$a_{l_1 \dots l_{2p}}^{ij} y^{l_1} \dots y^{l_{2p}} = \frac{(-1)^p}{3^p} R_{0 l_1 l_2 \alpha}^i R_{0 l_3 l_4 \beta}^{\alpha} \cdot \dots \cdot R_{0 l_{2p-1} l_{2p}}^{\gamma j} y^{l_1} \dots y^{l_{2p}} \quad (2.27)$$

Таким чином, елементи оберненої матриці для матриці  $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$  метричного тензора простору  $\tilde{V}_n^2$  має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ij}(y) &= g^{ij} - \frac{1}{3} R_{0 l_1 l_2}^{ij} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{9} R_{0 l_1 l_2 \alpha}^i R_{0 l_3 l_4}^{\alpha j} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^k}{3^k} R_{0 l_1 l_2}^i \alpha R_{0 l_3 l_4 \beta}^{\alpha j} \cdot \dots \cdot R^{\gamma j} l_{2k-1} l_{2k} y^{l_1} \dots y^{l_{2k}} + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Введемо в (2.28) наступні позначення:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} R_{0 l_1 l_2 k}^i y^{l_1} y^{l_2} &= t_k^i \\ t_j^{(2)i} &= t_\alpha^i t_j^\alpha \\ t_j^{(p)i} &= t_\alpha^{(p-1)i} t_j^\alpha \end{aligned} \quad (2.29)$$

де  $p = 1, 2, 3 \dots$

Тоді (2.28) має вигляд:

$$\tilde{g}^{ij}(y) = g_0^{ij} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t^{(p)ij} \quad (2.30)$$

Досліджуємо на збіжність ряд (2.30). Згідно з першою теоремою Вейерштраса, функції  $t_p^h$  будуть обмежені на будь-якій компактній множині. Тобто існує така константа  $C$ , що  $\left| t_p^h \right| \leq \frac{c}{n}$ , тоді справедливі наступні оцінки:

$$\begin{aligned} \left| t_p^{(2)h} \right| &\leq \left| t_p^h \right| \cdot \left| t_p^h \right| \leq \frac{c}{n} \cdot \frac{c}{n} \cdot n = \frac{c^2}{n} \\ \left| t_p^{(3)h} \right| &\leq \frac{c^3}{n} \\ &\dots \\ \left| t_p^{(k)h} \right| &\leq \frac{c^k}{n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

де  $\frac{c}{n} = \max\{|t_p^h|\}$

Отже ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t^{(k)ij}$  мажорується числовим рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k}{n}$ , який збігається абсолютно при умові  $c < 1$ . Таким чином доведена теорема.

**Теорема 1.1** *Елементи оберненої матриці для матриці  $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$  простору  $V_n^2$  мають вигляд:*

$$\tilde{g}^{ij}(y) = \tilde{g}_0^{ij} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t^{(p)ij}, \quad (2.32)$$

Причому ряди (2.32) збігаються абсолютно та рівномірно на множині

$$\left| R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \right| < \frac{3}{n}.$$

## РОЗДІЛ 3

### $V_n$ - ПРОСТІР ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ

Розглянемо випадок, коли простір  $V_n$  є простором ненульової постійної кривини  $K$ . Відомо ([6]), що для цього необхідно і достатньо, щоб

$$R_{.ijp}^h = K \left( g_{ip} \delta_j^h - g_{ij} \delta_p^h \right)$$

Отримуємо:

$$t_p^h = \frac{K}{3} \left( g_{l_1 p} \delta_{l_2}^h - g_{l_1 l_2} \delta_p^h \right) y^{l_1} y^{l_2},$$

$$t_p^{(2)h} = -A t_p^h,$$

$$t_p^{(3)h} = A^2 t_p^h,$$

...

$$t_p^{(m)h} = (-1)^{m+1} A^{m-1} t_p^h,$$

$$m = 4, 5, \dots$$

де

$$A = \frac{K}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}$$

Виконуючи підстановку, отримуємо

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} - t^{ij} \sum_{p=1}^{\infty} A^p \tag{3.1}$$

Так як  $|t_p^h| \leq \frac{c}{n}$ , то  $|\frac{K}{3}(g_{l_1 p} \delta_{l_2}^h - g_{l_1 l_2} \delta_p^h) y^{l_1} y^{l_2}| \leq \frac{c}{n}$ .

Останнє співвідношення сумуємо за індексами  $h$  і  $p$ , отри-

муємо

$$\left| \frac{K}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right| \leq \frac{c}{n(n-1)} < 1$$

або

$$|A| < 1,$$

тому  $\sum_{p=1}^{\infty} A^p = \frac{A}{1-A}$  як сума членів нескінченної спадної геометричної прогресії, а співвідношення (3.1) має вигляд

$$\tilde{g}^{ij} = \frac{g^{ij} - \frac{K}{3} y^i y^j}{1 - \frac{K}{3} g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta}$$

З формул не складно отримати вираз для символів Кристофеля I та II р. простору  $\tilde{V}_n^2$ :

$$\tilde{\Gamma}_{ij,p}(y) = -\frac{1}{3} R_{p(ij)l} y^l$$

або

$$\tilde{\Gamma}_{ij,p}(y) = \frac{K}{3} \left( 2g_{ij} g_{pl} - g_{l(i} g_{j)p} \right) y^l,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}(y) = \frac{K}{3(1-A)} \left[ \left( 2g_{ij} \delta_l^h - g_{l(i} \delta_{j)}^h \right) y^l - \frac{2K}{3} (g_{ij} g_{l_1 l_2} - g_{il_1} g_{jl_2}) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \right].$$

Компоненти тензора Рімана простору  $\tilde{V}_n^2$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijp}^h(y) &= \frac{K(4A-3)}{3(1-A)} (g_{ip} \delta_j^h - g_{ij} \delta_p^h) + \\ &+ \frac{2K^2}{9(A-1)} (g_{ij} g_{pl_1} - g_{ip} g_{jl_1}) y^{l_1} y^h + \\ &+ \frac{K^2(4A-5)}{9(A-1)^2} (g_{jl_1} \delta_p^h - g_{pl_1} \delta_j^h) g_{il_2} y^{l_1} y^{l_2}. \end{aligned}$$

Отримуємо компоненти тезора Річчі простору  $\tilde{V}_n^2$ :

$$\tilde{R}_{ij}(y) = p_1 \tilde{g}_{ij}(y) + p_2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j,$$

де

$$\tilde{\lambda}_i = g_{ij} y^l,$$

а  $p_1(y)$  и  $p_2(y)$ - деякі функції, залежать від  $y^1, y^2, \dots, y^n$ .

Безпосередньою перевіркою переконаємось у тому, що:

1) тензор конформної кривини  $\tilde{C}_{.ijp}^h(y)$  простору  $\tilde{V}_n^2$  тотожно дорівнює нулю:

$$\tilde{C}_{.ijp}^h(y) = 0$$

2)

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \tilde{g}^{ij}(y) = g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \neq 0$$

**Теорема 1.2** *Наближення другого порядку для ріманого простору ненульової постійної кривини є субпроективним простором основного випадку.*

## РОЗДІЛ 4

**ПОВЕРХНЯ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ  
СФЕРИ У  $E_3$**

Розглянемо сферу - поверхню постійної кривини. Рівняння цієї поверхні має вигляд:

$$\begin{cases} x = R \cos u^1 \cos u^2 \\ y = R \cos u^1 \sin u^2 \\ z = R \sin u^1 \end{cases}$$

$$\bar{r}_1 = (-R \sin u^1 \cos u^2; -R \sin u^1 \sin u^2; R \cos u^1)$$

$$\bar{r}_2 = (-R \cos u^1 \sin u^2; -R \cos u^1 \cos u^2; 0)$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{cases} g_{11} = \overline{(r_1 r_1)} = R^2(\sin^2 u^1 \cos^2 u^2 + \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 + \cos^2 u^1) = R^2 \\ g_{12} = \overline{(r_1 r_2)} = 0 \\ g_{22} = \overline{(r_2 r_2)} = R^2(\cos^2 u^1 \sin^2 u^2 + \cos^2 u^1 \cos^2 u^2) = R^2 \cos^2 u^1 \end{cases}$$

Перша квадратична форма має вигляд:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad \text{або} \quad ds^2 = R^2 (du^1)^2 + R^2 \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

Згадаємо властивості першої квадратичної форми, а саме:

$$1) ds^2 > 0;$$

2)  $g_{11} > 0$  та  $g_{22} > 0$

Запишемо другу квадратичну форму:

$$l = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

$$\overline{r}_{11} = \frac{\partial \overline{r}_1}{\partial u^1} = \left( -R \cos u^1 \cos u^2; -R \cos u^1 \sin u^2; -R \sin u^1 \right);$$

$$\overline{r}_{22} = \frac{\partial \overline{r}_2}{\partial u^2} = \left( R \sin u^1 \sin u^2; -R \sin u^1 \cos u^2; 0 \right);$$

$$\overline{r}_{12} = \frac{\partial \overline{r}_1}{\partial u^2} = \left( R \sin u^1 \sin u^2; -R \sin u^1 \cos u^2; -R \sin u^1 \right)$$

$$b_{11} = \frac{(\overline{r}_{11}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{|\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2|} = \frac{(\overline{r}_{11}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = -R(du^1)^2$$

$$b_{12} = \frac{(\overline{r}_{12}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{|\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2|} = \frac{(\overline{r}_{12}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0$$

$$b_{22} = \frac{(\overline{r}_{22}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{|\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2|} = \frac{(\overline{r}_{22}, \overline{r}_1, \overline{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = R \cos^2 u^1 (du^2)^2$$

Введемо в розгляд символи Кристофеля I роду:

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11,1} = 0; \\ \Gamma_{11,2} = 0; \\ \Gamma_{12,1} = 0; \\ \Gamma_{12,2} = -R^2 \cos u^1 \sin u^1; \\ \Gamma_{22,1} = R^2 \cos u^1 \sin u^1; \\ \Gamma_{22,2} = -R^2 \cos u^1 \sin u^1; \end{array} \right.$$

Запишемо в загальному вигляді символи Кристофеля II роду:

$$\Gamma_{ij}^l = g^{l\beta} \Gamma_{ij,\beta}$$

Роблячи підстановку, отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = 0; \\ \Gamma_{11}^2 = 0; \\ \Gamma_{12}^2 = -\operatorname{tg} u^1; \\ \Gamma_{12}^1 = 0; \\ \Gamma_{22}^1 = \cos u^1 \sin u^1; \\ \Gamma_{22}^2 = 0; \end{array} \right.$$

Символи Рімана II роду мають вигляд ([6])

$$R_{.ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha i}^h - \Gamma_{ij}^h \Gamma_{\alpha k}^h$$

Надаючи індексам  $h, i, j, k$  значення 1,2 отримуємо:

$$R_{112}^1 = 0;$$

$$R_{121}^1 = -R_{112}^1 = 0$$

$$R_{212}^1 = \cos^2 u^1$$

$$R_{221}^1 = -R_{212}^1 = -\cos^2 u^1$$

$$R_{112}^2 = -\frac{1}{\cos^2 u^1}$$

$$R_{121}^2 = -R_{212}^2 = \frac{1}{\cos^2 u^1}$$

$$R_{212}^2 = 0$$

Компоненти тензора Рімана I роду мають вигляд

$$R_{hijk} = g_{hk} R_{ijk}^\alpha$$

Так як вони задовольняють наступним умовам:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj} = R_{jkhi} \quad \boxed{h,i,j,k = \overline{1,2}}$$

Маємо тільки одну компоненту, яка не буде дорівнювати нулю, а саме  $R_{1212} = R^2 \cos^2 u^1$

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta \quad \boxed{i,j = \overline{1,2}}$$

$$\tilde{g}_{11} = R^2 \cos^2 u^1 \left( 1 + \frac{1}{3} (y^2)^2 \right)$$

$$\tilde{g}_{12} = \frac{1}{3} R^2 \cos^2 u^1 y^1 y^2$$

$$\tilde{g}_{22} = R^2 \sin^2 u^1 - \frac{1}{3} R^2 \cos^2 u^1 (y^1)^2$$

$$\tilde{g}_{21} = \frac{1}{3} R^2 \cos^2 u^1 y^1 y^2$$

Коефіцієнти I квадратичної форми поверхні II наближення для сфери в околі точки  $M_0 \left( \frac{\Pi}{4}; \frac{\Pi}{4} \right)$  мають вигляд:

$$\tilde{g}_{11} = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^2(y^2)^2$$

$$\tilde{g}_{12} = \frac{1}{6}R^2y^1y^2$$

$$\tilde{g}_{22} = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}R^2(y^1)^2$$

$$\tilde{g}_{21} = \frac{1}{6}R^2y^1y^2$$

$$\left( \tilde{g}_{ij}(y) \right) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{6}R^2(y^2)^2 & \frac{1}{6}R^2y^1y^2 \\ \frac{1}{6}R^2y^2y^1 & \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}R^2(y^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \tilde{g}_{ij}(y^1, y^2) \right) = \frac{R^2}{36} \begin{pmatrix} 3 + (y^2)^2 & y^1y^2 \\ y^1y^2 & 3 - (y^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \|\tilde{g}_{ij}\| = \frac{R^2}{36} \left[ (3 + (y^2)^2) \cdot (3 - (y^1)^2) - (y^1y^2)^2 \right] = \frac{R^2}{36} \left[ 9 - 3(y^1)^2 + \right. \\ \left. + 3(y^2)^2 + (y^1y^2)^2 - (y^1y^2)^2 \right] = \frac{R^2}{12} \left( 3 - (y^1)^2 + (y^2)^2 \right)$$

$$\det \|\tilde{g}_{ij}\| = \frac{R^2}{12} \left( 3 - (y^1)^2 + (y^2)^2 \right)$$

$$\left( \tilde{g}^{ij}(y) \right) = \frac{12}{R^2 \left( 3 - (y^1)^2 + (y^2)^2 \right)} = \begin{pmatrix} 3 - (y^1)^2 & -y^1y^2 \\ -y^1y^2 & 3 + (y^2)^2 \end{pmatrix}$$

Оскільки

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{g}^{1\alpha} \tilde{\Gamma}_{11,\alpha} = \tilde{g}^{11} \tilde{\Gamma}_{11,1} + \tilde{g}^{11} \tilde{\Gamma}_{11,1} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^1 = -\frac{1}{12}R^4 y^1 y^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^1 = \frac{1}{4}R^4 \left( 1 + \frac{1}{3}(y^2)^2 \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^2 = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{1}{4}R^4 \left( \frac{1}{3}(y^1)^2 - 1 \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{1}{4}R^4 \left( -1 + \frac{1}{3}(y^1)^2 \right)$$

Підрахуємо кривину наближення II порядку для сфери за наступною формулою:

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{R}_{1212}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2}$$

$$\tilde{R}_{1212} = \frac{1}{3}R^2 y^1 y^2$$

$$\tilde{K} = \frac{y^1 y^2}{R^2 \left( (y^2)^2 + \frac{5}{2}(y^1)^2 \right)}$$

## РОЗДІЛ 5

**ПОВЕРХНЯ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ  
ПСЕВДОСФЕРИ У  $E_3$**

Розглянемо псевдосферу у  $E_3$  - поверхню постійної від'ємної кривини у  $E_3$ . Її рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} x = a \sin u^1 \cos u^2 \\ y = a \sin u^1 \sin u^2 \\ z = a(\ln \operatorname{tg} \frac{u^1}{2} + \cos u^1) \end{cases}$$

$$\bar{r}_1 = (a \cos u^1 \cos u^2; a \cos u^1 \sin u^2; a \operatorname{ctg} u^1)$$

$$\bar{r}_2 = (-a \sin u^1 \sin u^2; a \sin u^1 \cos u^2; 0)$$

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{cases} g_{11} = \overline{(r_1 r_1)} = a^2(\operatorname{ctg}^2 u^1) \\ g_{12} = \overline{(r_1 r_2)} = 0 \\ g_{22} = \overline{(r_2 r_2)} = a^2(\sin^2 u^1) \end{cases}$$

Перша квадратична форма матиме вигляд:

$$ds^2 = a^2(\operatorname{ctg}^2 u^1 (du^1)^2 + \sin^2 u^1 (du^2)^2)$$

Згадаємо властивості першої квадратичної форми, а саме:

$$1) ds^2 > 0;$$

$$2) g_{11} > 0 \text{ та } g_{22} > 0$$

Запишемо другу квадратичну форму:

$$l = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

$$\bar{r}_{11} = \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u^1} = \left( -a \sin u^1 \cos u^2; -a \sin u^1 \sin u^2; -\frac{a}{\sin^2 u^1} \right);$$

$$\bar{r}_{22} = \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial u^2} = \left( -a \sin u^1 \cos u^2; -a \sin u^1 \sin u^2; 0 \right);$$

$$\bar{r}_{12} = \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u^2} = \left( -a \cos u^1 \sin u^2; a \cos u^1 \cos u^2; 0 \right)$$

$$b_{11} = \frac{(\bar{r}_{11}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{|\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2|} = \frac{(\bar{r}_{11}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = -a \operatorname{ctg} u^1 (du^2)$$

$$b_{12} = \frac{(\bar{r}_{12}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{|\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2|} = \frac{(\bar{r}_{12}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0$$

$$b_{22} = \frac{(\bar{r}_{22}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{|\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2|} = \frac{(\bar{r}_{22}, \bar{r}_1, \bar{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = a \sin^2 u^1 (du^2) \operatorname{ctg} u^1 (du^2)$$

Розглянемо символи Кристофеля I роду:

$$\Gamma_{ik,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11,1} &= -\frac{a^2 \operatorname{ctg} u^1}{\sin^2 u^1} \\ \Gamma_{11,2} &= 0; \\ \Gamma_{12,1} &= 0; \\ \Gamma_{12,2} &= a^2 \sin u^1 \cos u^1; \\ \Gamma_{21,2} &= \frac{a^2 \cos^2 u^1}{2}; \\ \Gamma_{22,1} &= a^2 \sin u^1 \cos u^1; \\ \Gamma_{22,2} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11,1} &= -\frac{a^2 \operatorname{ctg} u^1}{\sin^2 u^1}; \\ \Gamma_{12,2} &= a^2 \sin u^1 \cos u^1; \\ \Gamma_{21,2} &= \frac{a^2 \cos^2 u^1}{2}; \\ \Gamma_{22,1} &= a^2 \sin u^1 \cos u^1\end{aligned}$$

Запишемо в загальному вигляді символи Кристофеля II роду:

$$\Gamma_{ij}^l = g^{l\beta} \Gamma_{ij,\beta}$$

Роблячи підстановку, отримуємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{\cos u^1 \sin u^1}; \\ \Gamma_{11}^2 = 0; \\ \Gamma_{12}^2 = \operatorname{ctg} u^1; \\ \Gamma_{12}^1 = 0; \\ \Gamma_{22}^1 = \operatorname{tg} u^1 \sin^2 u^1; \\ \Gamma_{22}^2 = 0; \end{array} \right.$$

Ненульові компоненти випишемо ще раз:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{\cos u^1 \sin u^1};$$

$$\Gamma_{12}^2 = \operatorname{ctg} u^1;$$

$$\Gamma_{22}^1 = \operatorname{tg} u^1 \sin^2 u^1;$$

Запишемо символи Рімана I роду наступним чином:

$$R_{hikj} = g_{h\beta} R_{ikj}^\beta$$

Тоді даний вираз має вид:

$$b_{hj}b_{ik} - b_{hk}b_{ij} = R_{hijk}$$

Індекси  $i, j, k$  набувають значення 1, 2  $\implies$ , але з урахуванням символів коефіцієнтів II квадратичної форми ( $b_{12} = b_{21}$ ), отримаємо на виході лише одне:

$$\mathbf{b}_{11}\mathbf{b}_{22} - \mathbf{b}_{12}^2 = \mathbf{R}_{1212} \quad (5.1)$$

Виявляється, що з усіх інших груп рівнянь, суттєвих тільки 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u^1} = b_{\alpha 1} \Gamma_{12}^\alpha - b_{\alpha 2} \Gamma_{11}^\alpha \\ \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = b_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\alpha - b_{\alpha 2} \Gamma_{21}^\alpha \end{cases} \quad (5.2)$$

Рівняння (5.1) - рівняння Гаусса.

Рівняння (5.2) - рівняння Петерсона-Кодацци.

Ці рівняння отримані, як умова інтегрування дериваційних формул I, II груп.

Гауссова кривина поверхні виразим через коефіцієнти I квадратичної форми

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

Пам'ятаючи про рівняння Гаусса, можемо знайти символи Рімана наступним чином:

$$R_{1212} = k \cdot (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$$

Рахуючи  $k$ , маємо  $k = -\frac{1}{a^2}$

$$R_{1212} = -\frac{1}{a^2} \cdot a^4 \cos^2 u^1 \Rightarrow R_{1212} = -a^2 \cos^2 u^1$$

Компоненти тензора Рімана I роду мають наступні властивості:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj} = R_{jkhi}$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta \quad \boxed{i, j = \overline{1, 2}}$$

$$\tilde{g}_{11} = -a^2 \operatorname{ctg} u^1 - \frac{1}{3} a^2 \cos^2 u^1 (y^2)^2$$

$$\tilde{g}_{12} = -\frac{1}{3} a^2 \cos^2 u^1 (y^1 y^2)$$

$$\tilde{g}_{22} = a^2 \sin^2 u^1 - \frac{1}{3} a^2 \cos^2 u^1 (y^1)^2$$

$$\tilde{g}_{21} = -\frac{1}{3} a^2 \cos^2 u^1 (y^1 y^2)$$

Коефіцієнти I квадратичної форми поверхні II наближення для псевдосфери в околі точки  $M_0\left(\frac{\Pi}{4}; \frac{\Pi}{4}\right)$  мають вигляд:

$$g_{11}^{\sim} = -a^2 - \frac{1}{6}a^2(y^2)^2$$

$$g_{12}^{\sim} = -\frac{1}{6}a^2(y^1 y^2)$$

$$g_{22}^{\sim} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2(y^1)^2$$

$$g_{21}^{\sim} = -\frac{1}{6}a^2(y^1 y^2)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{ij}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^{\sim} & g_{12}^{\sim} \\ g_{21}^{\sim} & g_{22}^{\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 - \frac{1}{6}a^2(y^2)^2 & -\frac{1}{6}a^2 y^1 y^2 \\ -\frac{1}{6}a^2 y^1 y^2 & \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^2(y^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{ij}(u) \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -1 - \frac{(y^2)^2}{6} & -\frac{y^1 y^2}{6} \\ -\frac{y^1 y^2}{6} & \frac{1}{2} - \frac{(y^1)^2}{6} \end{pmatrix} = \frac{a^2}{6} \begin{pmatrix} -6 - (y^2)^2 & -y^1 y^2 \\ -y^1 y^2 & 3 - (y^1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \|\tilde{g}_{ij}\| &= \frac{a^2}{6} \left[ \left( -6 - (y^2)^2 \right) \cdot \left( 3 - (y^1)^2 \right) - \left( -y^1 y^2 \right)^2 \right] = \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ -6 + 3(y^1)^2 - (y^2)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\left(\tilde{g}^{ij}(u)\right) = \frac{2}{a^2 \left(-6 + 3(y^1)^2 - (y^2)^2\right)} = \begin{pmatrix} 3 - (y^1)^2 & y^1 y^2 \\ y^1 y^2 & -6 - (y^2)^2 \end{pmatrix}$$

Оскільки

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = 2a^4 + \frac{1}{3}a^4(y^2)^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^1 = -\frac{1}{12}a^4 y^1 y^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^1 = -\frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{12}a^4(y^2)^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^2 = \frac{1}{3}a^4 y^1 y^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = -\frac{1}{12}a^4 y^1 y^2$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \frac{1}{4}a^4 \left( 1 - \frac{1}{3}(y^1)^2 \right)$$

Підрахуємо кривину наближення II порядку для псевдо-сфери за наступною формулою:

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{R}_{1212}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2}$$

$$\tilde{R}_{1212} = -\frac{23a^2y^1y^2}{12}$$

$$\tilde{K} = -\frac{23y^1y^2}{a^2\left(-6+2(y^1)^2-(y^2)^2\right)}$$

## РОЗДІЛ 6

### ВИСНОВОК

У своїй роботі я розглядала основні геометричні об'єкти диференціальної геометрії, а саме сферу та псевдосферу в диференціальної околі другого порядку.

Якщо розглядати більш детально, то, наприклад, в теорії кривих у диференціальній околиці 1-го порядку виникає інваріантний вектор дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої і вибрати її в якості параметра кривої; а також кут між двома вихідними з однієї точки  $A$  кривими; об'єм  $V_n$  області  $G$  ріманова простору. У диференціальної околиці 2-го порядку будується вектор головної нормалі і кривизна кривої. І, нарешті, при розгляді диференціальної околиці 3-го порядку отримуємо кручення кривої.

А ще, згадаємо декілька слів стосовно ріманової геометрії в цілому та її основних властивостей: якщо в кожній точці ріманова простору кривина не залежить від напрямку двовимірної поверхні, то вона не змінюється і від точки до точки, тобто простір має постійну кривину. Представляють інтерес також ріманові простору зі спеціальною структурою тензора кривини; вони по суті є узагальненням просторів постійної кривини і мають досить велику групу рухів. Такі, наприклад, симетричні простору, що характеризуються тим, що їх тензор кривини не змінюється при паралельному перенесенні, субпроективні простору, що характеризуються спеціальною координатної си-

стемою, в якій геодезичні описуються лінійними рівняннями, і ін. Ріманова кривина відіграє важливу роль в геометричних доповненнях ріманової геометрії, тим більше, що на всякому різноманітті можна ввести деяку ріманову метрику.

Оскільки ріманова геометрія визначається завданням двічі коваріантного симетричного тензора, остільки всяку фізичну задачу, що зводиться до вивчення такого тензорного поля, можна формулювати як задачу ріманової геометрії зокрема, до тензорних полів такого типу відносяться різні фізичні величини, що характеризують пружні, оптичні, термодинамічні, діелектричні, п'єзомагнітні та інші властивості анізотропних тіл. Інший шлях узагальнення ріманової геометрії пов'язаний з розглядом більш загальних законів визначення відстаней, що задаються у вигляді лінійного елемента  $ds$ , і більш загальних законів паралельного перенесення, а також з відмовою від вимог регулярності.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. С. М. Покась. "Геометрія риманового простору другого наближення." International Conference of Young Mathematicians, June 3-6, 2015, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
2. С. М. Покась. "Про один клас ріманових просторів." Рукопись депонирована в ВИНТИ. Одеський університет. Одеса. 1977.- №1833-77.- 21 с.
3. С. М. Покась. "Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения." Труды международного геометрического центра. - 2014. - т. 7, № 2. - С. 36-50
4. Велика радянська енциклопедія. Ріманова геометрія.
5. А. С. Феденко. "Сборник задач по дифференциальной геометрии" Москва "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. - 1979.
6. Л. П. Эйзенхарт. "Риманова геометрия." М, ИЛ. - 1948