Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Умови існування зникаючих розв’язків у систем квазілінійних диференціальних рівнянь»
«Conditions for the existence of vanishing solutions in systems of quasilinear differential equations»

Виконала: здобувач заочної форми навчання
Спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Сумка Юлія віталіївна
Керівник: Д. фіз.-мат наук, проф.

Євтухов В.М.____________________________

Рецензент: Шарай Н.В. ____________________

Рекомендовано до захисту: №________________

Протокол засідання кафедри

№ ___ від _____________2025 р.

ECTS, бали)

Завідувач кафедри
________ ___________________

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК

протокол № ____ від ________ 2025 р.

Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою

Голова ЕК
________ ___________________

(підпис) (прізвище, ініціали).

Одеса - 2025

Зміст:

Вступ:

У роботах В.М. Євтухова, його учнів, та багатьох інших авторів [1]-[12], при вивченні асимптотичної поведінки розв’язків диференціальних рівнянь вищих порядків з нелінійностями типу Емдена-Фаулера та експоненційними нелінійностями на одному з етапів дослідження використовувались результати з робіт про існування зникаючих у нескінченності розв’язків у систем квазілінійних диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами та з майже трикутною лінійною частиною.

Дещо іншого типу результати використовувалися в монографії І.Т. Кігурадзе та Т.А. Чантурія [12] при встановленні асимптотичних властивостей розв’язків узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера.

Однак при дослідженні диференціальних рівнянь з нелінійностями більш складної структури зазначені вище результати ефективно вже використані бути не можуть.

Так, наприклад, для вивчення асимптотичного поведінки розв’язків диференційного рівняння другого порядку з нелінійністю в певному сенсі близькими до експоненційної виникла потреба отримати новий результат про існування зникаючих у нескінченності розв’язків у квазілінійної системи двох диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами.

Метою цієї роботи є поширення результатів з вказаних вище робіт на системи квазілінійних диференціальних рівнянь більш загального виду.

1. Системи з майже трикутною лінійною частиною.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j + g_i(x) Y_i(x, y_1, \dots, y_n), \tag{1.1}$$

$i = 1, \dots, n,$

де

$Y_i(x, 0, \dots, 0) \equiv 0 (i = 1, \dots, n)$ на проміжку [a, + ∞],

$f_i, g_i, p_{ij} : [a, +\infty[\to R \quad (i, j = 1, \dots, n)$ і $Y_i : \Omega_{ab}^n \to R (i = 1, \dots, n)$ - неперервні функції,

$$\Omega_{ab}^n = [a, +\infty[\times R_b^n, \qquad R_b^n = \{(y_1, \dots, y_n) \in R^n : |y_i| \le b, i = 1, \dots, n\}. \tag{1.2}$$

При цьому припускається, що функції $Y_i (i = 1, \dots, n)$ задовольняють на множині Ω_{ab}^n нерівності

$$|Y_i(x, y_1, \dots, y_n)| \le l \sum_{j=1}^{n} |y_j| (i = 1, \dots, n), \tag{1.3}$$

де l - деяка додатна стала.

Уведемо для даної системи рівнянь допоміжні позначення:

$$\boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c_i}\,\boldsymbol{exp}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{p_{ii}}(\boldsymbol{s})\,ds + \int_{\boldsymbol{\alpha_i}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f_i}(\tau)\exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(\mathrm{s})\,ds d\tau,$$

$$\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\beta_i}^{\boldsymbol{x}} |g_i(\tau)| \exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(\mathrm{s})\,ds d\tau,\ i = 1,\dots, n \qquad (1.4)$$

$$P_{ij}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{\alpha_{ij}}}^{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{p_{ij}}(\tau)| \exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(\mathrm{s})\,ds d\tau,\ (j\neq i),\ i,j = 1,\dots,n$$

де кожна межа інтегрування $\alpha_i, \beta_i, \alpha_{ij}$ дорівнює або a, або $+\infty$, а

c_i - дійсна стала, яку можна обрати відмінною від нуля лише в тому разі, коли

$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^x p_{ii}(s)ds = -\infty \qquad (1.5)$$

За допомогою функцій (1.4) визначимо рекурентні співвідношення функції $A_i, B_i\ (i = 1,\dots,n)$, припускаючи

$$A_n(x) = |F_n(x)|,\ B_n(x) = nl|G_n(x)| + \sum_{j=1}^{n-1}|P_{nj}(x)| \qquad (1.6_n)$$

і

$$A_i(x) = F_i(x) + \sum_{j=i+1}^{n}\left|\int_{\beta_{ij}}^{x}|p_{ij}(\tau)|A_j(\tau)\exp\int_{\tau}^{x}p_{ii}(s)dsd\tau\right|$$

$$B_i(x) = nl|G_i(x)| + \sum_{j=1}^{i-1}|p_{ij}(\tau)| + \sum_{\tau}^{x}\left|\int_{\beta_{ij}}^{x}|p_{ij}(\tau)|B_j(\tau)\exp\int_{\tau}^{x}p_{ii}(s)dsd\tau\right| \qquad (1.6_i)$$

при $i = 1,\dots,n-1$,

де кожна із меж інтегрування $\beta_{ij}(1 \le i < j \le n)$ дорівнює або а, або $+\infty$.

Т е о р е м а 1.1 *Нехай функції* $Y_i(i=1,...,n)$ *задовільняють на множині* Ω_{ab}^n *нерівності (1.3) і при певному виборі меж інтегрування* $\alpha_i, \beta_i \in \{a,+\infty\}$ $(i=1,...,n), \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \{a,+\infty\}$ $(1 \le j < i \le n)$ *виконуються умови*

$$\lim_{x \to +\infty} A_i(x) = 0, \ \overline{\lim_{x\to+\infty}} B_i(x) < 1 \ \ (i=1,...,n) \qquad (1.7)$$

Тоді система рівнянь (1.1) має хоча б один розв'язок:

$(y_i)_{j=1}^n : [x_0,+\infty[\to R_b^n(x_0 \ge a)$, *що прямує до нуля* $\left(0=(0,...,0)\in R^n\right)$ *при* $x \to +\infty$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи умови (1.7), оберемо числа $q \in]0,1[$ і $x_0 \ge a$ такі, щоб для будь-якого $i \in \{1,...,n\}$ виконувались нерівності

$$\overline{B_i}(x) \le q, \quad \overline{A_i}(x) \le b(1-q) \ \text{ при } x \ge x_0, \qquad (1.8)$$

де $\overline{B_i}, \overline{A_i}$ - функції, отримані з B_i, A_i заміною меж інтегрування $\beta_i, \alpha_{ij}(j=1,...,n; j \ne i), \beta_{ij}(i < j \le n)$ відповідно на $\overline{\beta_i}, \alpha_{ij}(j=1,...,n; j \ne i), \overline{\beta}_{ij}(i < j \le n)$,

кожен з яких дорівнює або x_0, або $+\infty$, і обраний таким чином, як у наведеній нижче лемі 1.2 (при цьому межі інтегрування $\alpha_j(j=1,...,n)$ залишаємо незмінними).

Нехай $C([x_0;+\infty[;R^n)$ - банаховий простір неперервних та обмежених вектор-функцій $y=(y_i)_{i=1}^n : [x_0;+\infty[\to R^n$ з нормою

$$\|y\| = \sup\left\{\max_{1\le i\le n}|y_i(x)| : x\in[x_0,+\infty[\right\},$$

а S – підмножина тих, для яких $\|y\|\le b.$

Розглянемо оператор $\Phi=(\Phi_i)_{i=1}^n : S\to C([x_0;+\infty[;R^n)$, визначений («знизу-уверх») рекурентними співвідношеннями:[1]

$$\Phi_i(y)(x) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{i-1}\int_{\alpha_{ij}}^{x} p_{ij}(\tau)y_j(\tau)\exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(s)ds d\tau +$$

$$+\sum_{j=i+1}^{n}\int_{\beta_{ij}}^{x} p_{ij}(\tau)\Phi_j(y)(\tau)\exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(s)ds d\tau +$$

$$+\int_{\beta_{ij}}^{x} g_i(\tau, y_1(\tau),\dots,y_n(\tau))Y_j(\tau)\exp\int_{\tau}^{x} p_{ii}(s)ds d\tau,$$

$$i=1,\dots,n$$

Вважаючи уведені позначення, умови (1.3) і (1.8),

для будь-якого $y\in S$ одержимо

$$|\Phi_i(y)(x)| \le \overline{A}_i(x) + b\overline{B}_x(x) \le b\,,\ i=1,\dots,n \text{ при } x\ge x_0.$$

Звідси випливає, що $\Phi(S)\subset S$.

Далі, встановимо неперервність оператора Φ.

Нехай $y_k=(y_{jk})_{j=1}^n\in S$ $(k=0,1,\dots,n)$ і $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k(x)=y_0(x)$ рівномірно за x на $[x_0,+\infty[$.

---

[1] Тут и всюди надалі вважаємо, що $\sum_{i=k}^{m} a_i = 0$ при $m<k$.

Тоді згідно з (1.3), очевидно, що і $\lim\limits_{k\to+\infty} Y_i(x, y_{1k}(x),\ldots, y_{nk}(x)) = Y_i(x, y_{10}(x),\ldots, y_{n0}(x))$ $i = 1,\ldots,n$ рівномірно за x на цьому проміжку.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, а K оберемо настільки великим, щоб на проміжку $\lfloor x_0, +\infty\lfloor$ виконувались при $k > K$ нерівності:

$$\left|y_k(x) - y_0(x)\right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

$$\left|Y_i(x, y_{1k}(x),\ldots, y_{nk}(x)) - Y_i(x, y_{10}(x),\ldots, y_{n0}(x))\right| < \frac{nl\varepsilon}{q} \quad (i = 1,\ldots,n).$$

В силу цих нерівностей і (1.8)

$$\left|\Phi_i(y_k)(x) - \Phi_i(y_0)(x)\right| < \frac{\varepsilon}{q}\overline{B}_i(x) \le \varepsilon \quad (i = 1,\ldots,n)$$

при $k > K$ і $x \in \lfloor x_0, +\infty\lfloor$.

Тому $\lim\limits_{k\to+\infty} \Phi(y_k)(x) = \Phi(y_0)(x)$ рівномірно за x на $\lfloor x_0, +\infty\lfloor$.

А це і означає неперервність оператора Φ.

Нехай тепер $y \in S, x^* > x_* \ge x_0, x_1, x_2 \in \lfloor x_*, x^*\rfloor$ і $x_2 > x_1$.

неважко помітити, що

$$\left|\Phi_i(y_k)(x)-\Phi_i(y_0)(x)\right|\le\left|F(x_2)-F(x_1)\right|+$$
$$+nlb\int_{x_1}^{x_2}\left|g_i(\tau)\right|\exp\int_{\tau}^{x_2}p_{ii}(s)dsd\tau+b\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_1}^{x_2}\left|p_{ii}(\tau)\right|\exp\int_{\tau}^{x_2}p_{ii}(s)dsd\tau+$$
$$+\sum_{j=i+1}^{n}\int_{x_1}^{x_2}\left|p_{ij}(\tau)\right|\left[\overline{A_j(\tau)}+b\overline{B_j(\tau)}\right]\exp\int_{\tau}^{x_2}p_{ii}(s)dsd\tau+$$
$$+\left|\exp\int_{x_1}^{x_2}p_{ii}(s)ds-1\right|\left[\overline{A_i(x_1)}+b\overline{B_i(x_1)}\right]\ (i=1,\ldots,n)$$

З цих нерівностей випливає, що функції з множини $\Phi(S)$ є рівномірно неперервними на кожному скінченному відрізку проміжка $\lfloor x_0,+\infty\lfloor$.

Оскільки, крім того, множина S є замкнутою та опуклою, то в силу принципа Шаудера існує $y\in S$ таке, що $y=\Phi(y)$.

Дана вектор-функція $y:[x_0,+\infty[\to R_b^n$, очевидно, є розв'язком системи рівнянь (2.1).

Покажемо тепер, що цей розв'язок прагне до нуля при $x\to+\infty$.

Припустимо супротивне. Тоді:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \max_{1\le i\le n}\left|y_i(s)\right|=c_0>0\ (c_0\le b)$$

і тому для деякої послідовності $\{x_k\}$ ($x_k\ge x_0$), що збігається до $+\infty$

$$\lim_{k\to+\infty}\ \max_{1\le i\le n}\left|y_i(x_k)\right|=c_0.$$

Враховуючи ці два граничні співвідношення, підберемо для числа $\varepsilon\in\left(0,\frac{c_0(1-q)}{1+q}\right)$ номер N(ε) таким, щоб:

$$\begin{aligned}&\max_{1\le i\le n}\left|y_i(x_k)\right|>c_0-\varepsilon\quad при\quad k\ge N\\&\max_{1\le i\le n}\left|y_i(x_k)\right|<c_0+\varepsilon\quad при\quad x\ge x_n\end{aligned}\qquad(1.9)$$

Далі, в рівностях $y_i(x)=\Phi_i(y)(x)$, i=1,...,n кожний інтеграл, у якого нижня межа інтегрування або $\overline{\beta}_i$, або $\overline{\alpha}_{ij}(j\in\{1,...,n\}; j\neq i)$, або $\overline{\beta}_{ij}(i<j\le n)$ дорівнює x_0 , запишемо у виді суми двох інтегралів $\int\limits_{x_0}^{x_n}+\int\limits_{x_n}^{x}$.

Так як при їх наявності, в силу (1.7), виконується умова (1.5), то з урахуванням нерівності $\|y\|\le b$ і другого із нерівностей (1.9) отримаємо

$$|y_i(x)|< A_{i1}(x)+(c_0+\varepsilon)\overline{B_i(x)}\le A_{i1}(x)+(c_0+\varepsilon)q(i=1,...,n)$$ при $x\ge x_0$,

де кожна функція A_{i1} (i=1,...,n) відрізняється від функції A_i лише тим, що в ній замість F_i стоїть функція виду

$$F_{i1}(x)=c_{i1}\exp\int\limits_a^x p_{ii}(s)ds+\int\limits_{\alpha_i}^x f_i(\tau)\exp\int\limits_\tau^x p_{ii}(s)dsd\tau$$

в якій стала $c_{i1} = c_i$ в разі виконання умови (1.5) і дорівнює нулю в іншому випадку.

Тому в силу (1.7) задовільняється умова $\lim\limits_{x\to+\infty}A_{i1}(x)=0$.

Звідси з урахуванням першої із нерівностей (1.9) знаходимо, що

$c_0(1-q)-\varepsilon(1+q)<\max\limits_{1\le i\le n}A_{i1}(x_k)$ при $k\ge N$

Однак цього бути не може оскільки тут ліворуч, через вибір числа ε, стоїть додатне число, а права частина нерівності прямує до нуля при $k\to+\infty$. Отримане протиріччя доводить, що розв'язок рівняння $y=\Phi(y)$ прямує до нуля при $x\to+\infty$.

Теорему повністю доведено.

З а у в а ж е н н я 1.1. Якщо поряд з (1.3) і (1.7) для k значень $i \in \{1,\ldots,n\}$ дотримується умова (1.5), то, як бачимо із доведення теореми 1.1, система (1.1) має k - параметричне сім'я розв'язків, що прямують до нуля при $x \to +\infty$

Наведемо тепер ряд тверджень про властивості інтегральних виразів виду

$$J_A(x) = \int_A^x |q(\tau)| \exp \int_A^x p(s) ds d\tau \,, \qquad (1.10)$$

де $p, q : [\alpha, +\infty[\to R$ - неперервні функції і $A \in \{+\infty, \alpha\}$, які можуть бути використані для встановлення умов (1.7) теореми 1.1.

Л е м а 1.1. *Нехай* $\int_\alpha^{+\infty} |q(x)| dx < +\infty$, *а функція* p *така, що виконується одна з умов*

або $\sup\left\{ \int_\tau^x p(s) ds : x \ge \tau \ge \alpha \right\} < +\infty$ *і* $\lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^x p(s) ds = -\infty$, *(1.11)*

або

$$\inf\left\{ \int_x^\tau p(s) ds : \tau \ge x \ge \alpha \right\} > -\infty. \qquad (1.12)$$

Тоді при виконанні умов (1.11)

$$\lim_{x \to +\infty} J_\alpha(x) = 0,$$

а при виконанні умов (1.12)

$$\lim_{x \to +\infty} J_{+\infty}(x) = 0.$$

Справедливість першого твердження цієї леми випливає із леми 6.1 монографії [12] (див. розділ 1, §6, с. 176), а другого – з оцінки $\left|J_{+\infty}(x)\right| = \int\limits_x^{+\infty} |q(\tau)| \exp\left(-\int\limits_x^{\tau} p(s)ds \right) d\tau \le C \int\limits_x^{+\infty} |q(\tau)| d\tau$, де $C > 0$.

З а у в а ж е н н я 1.2. Одна з умов (1.10) або (1.11) свідомо виконана у разі, коли $p(x) = p_0(x) + p_1(x)$, де $p_0 : [\alpha, +\infty[\to R$ - неперервна знакостала функція, а $p_1 : [\alpha, +\infty[\to R$ - неперервна і така, що $\int\limits_{ч}^{+\infty} p_1(x)dx$ збігається (можливо умовно).

Л е м а 1.2. *Нехай в (1.9) межа інтегрування А, обрана наступним чином*

$$A = \begin{cases} \alpha, & якщо \ \int\limits_{\alpha}^{+\infty} |q(\tau)| \exp\left(-\int\limits_{\alpha}^{\tau} p(s)ds \right) d\tau = +\infty \\ +\infty, & якщо \ \int\limits_{\alpha}^{+\infty} |q(\tau)| \exp\left(-\int\limits_{\alpha}^{\tau} p(s)ds \right) d\tau < +\infty \end{cases}$$

Тоді для будь-якої неперервної функції $\xi : [\alpha, +\infty[\to R,$ *що задовольняє умову*

$$\lim_{x \to +\infty} \xi(x) = \xi_0 = const,$$

має місце асимптотичне зображення

$$\int\limits_A^{ч} \xi(\tau) |q(\tau)| \exp \int\limits_{\tau}^{x} p(s)d\tau = \left[\xi_0 + o(1) \right] J_A(x) \ \textit{при} \ x \to +\infty.$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з асимптотичних властивостей інтегралів від невід'ємних функцій (див., наприклад, [14, с.213])

Л е м а 1.3. *Нехай в інтегральному виразі (1.9) функції* p *і* q *представлені у виді:*

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x), \qquad q(x) = q_0(x) + q_1(x), \qquad (1.13)$$

де $p_i, q_i : [a, +\infty[\to R \ \ (i = 0,1)$ - *неперервні функції, що задовільняють умови:*

$$p_0(x) \neq 0, \qquad \left| \int_a^{+\infty} p_0(x)dx \right| = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_a^x p_1(\tau)dt = const, \qquad (1.14)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|q_0(x)|}{p_0(x)} = l_0 = const, \qquad \int_a^{+\infty} |q_1(x)|dx < +\infty. \qquad (1.15)$$

Нехай, крім того, A вибрано наступним чином:

$$A = \begin{cases} a, \textit{якщо } p_0(x) < 0, \\ +\infty, \textit{якщо } p_0(x) > 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Тоді

$$\lim_{x\to+\infty} J_A(x) = -l_0.$$

Д о в е д е н н я. В силу (1.12), (1.13) і (1.15)

$$\int_A^x p_0(\tau) \exp \int_\tau^x p(s)dsd\tau \sim \int_A^x p_0(\tau) \exp \int_\tau^x p_0(s)dsd\tau = -1 + o(1) \text{ при } x \to +\infty.$$

Тому, враховуючи першу з умов (1.14) та використовуючи лему 1.1, знаходимо $\int_A^x |q_0(\tau)| \exp \int_\tau^x p(s)dsd\tau = [l_0 + o(1)] \int_A^x p_0(\tau) \exp \int_\tau^x p(s)dsd\tau = -l_0 + o(1)$ при $x \to +\infty.$

Далі, враховуючи другу з умов (1.14) та використовуючи лему 1.1, знаходимо $\left|\int_A^x \left[|q(\tau)| - |q_0(\tau)|\right] \exp\int_\tau^x p(s)ds d\tau\right| \le \left|\int_A^x \left[|q_1(\tau)|\right] \exp\int_\tau^x p(s)ds d\tau\right| = o(1)$ при $x \to +\infty$.

Зі встановлених співвідношень випливає, що $\lim\limits_{x\to+\infty} J_A(x) = -l_0$.

З а у в а ж е н н я 1.3. Якщо за умов леми 1.3 $q_1(x) \equiv -l_0$, $|l_0| \le +\infty$ (або $q_0(x) \equiv 0$) і межа інтегрування А, на відміну від (1.14), визначається, як у лемі 1.2, то також $\lim\limits_{x\to+\infty} J_A(x) = -l_0$.

Згідно лем 1.1-1.3 із теореми 1.1 випливають такі два твердження.

Т е о р е м а 1.2. *Нехай функції* $Y_i (i = 1,\dots,n)$ *задовільняють на множині* Ω_{ab}^n *нерівностям (1.3) та при певному виборі меж інтегрування* $\alpha_i, \beta_i \in \{+\infty; a\} (i = 1,\dots,n)$ *виконується дві умови:*

$$\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} G_i(x) = G_i^0 = const \qquad (i = 1,\dots,n). \qquad (1.17)$$

Нехай також існують скінчені границі $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{ij}(x) = P_{ij}^0 = const$

при $i \ne j$ $\qquad (i, j = 1,\dots,n) \qquad$ *(1.18)*

у випадку, коли α_{ij} *обрані наступним чином:*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a, \quad якщо \displaystyle\int_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| \exp\left(-\int_a^\tau p_{ij}(s)ds\right) d\tau = +\infty \\ +\infty, \quad якщо \displaystyle\int_a^{+\infty} |p_{ij}(\tau)| \exp\left(-\int_a^\tau p_{ij}(s)ds\right) d\tau < +\infty \end{cases}, \qquad i \ne j,$$

$i, j = 1,...,n$.

Тоді, якщо сталі B_i^0, *що обрані рекурентними співвідношеннями*

$$B_i^0 = nl\left|G_i^0\right| + \sum_{j=1}^{i-1}\left|Pij^0\right| + \sum_{j=i+1}^{x} B_j^0\left|P_{ij}^0\right| \qquad (i = 1,...,n), \qquad (1.19)$$

задовільняють нерівності

$$B_i^0 < 1 \qquad (i = 1,...,n), \qquad (1.20)$$

то система диференціальних рівнянь (1.1) має хоча б один розв'язок $\left(y_j\right)_{j=1}^{n} : [x_0, +\infty[\to R_b^n \left(x_0 \geq a\right)$, *що прямує до нуля при* $x \to +\infty$.

З а у в а ж е н н я 1.4. Для виконання умов (1.20) достатньо, наприклад, щоб

$$G_i^0 = 0 \quad \text{при} \quad i = 1,...,n \quad \text{і} \quad P_{ij}^0 = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq j < i \leq n. \qquad (1.21)$$

і тут проявляється майже трикутний вид системи (1.1).

Т е о р е м а 1.3. *Нехай функції* $Y_i\left(i = 1,...,n\right)$ *задовільняють на множині* Ω_{ab}^n *нерівностям (1.3), а функції* f_i, g_i, p_{ij} $\left(i, j = 1,...,n\right)$ *представні у вигляді*

$$f_i(x) = f_{1i}(x) + f_{2i}(x), \qquad g_i(x) = g_{1i}(x) + g_{2i}(x) \qquad \left(i = 1,...,n\right),$$

$$(1.22)$$

$$p_{ij}(x) = p_{1ij}(x) + p_{2ij}(x) \qquad \left(i, j = 1,...,n\right),$$

де $f_{vi}, g_{vi}, p_{vij} : [\alpha, +\infty[\to R\left(v = 1,2; i, j = 1,...,n\right)$ - *неперервні і такі, що*

1) при будь-якому $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\int_a^{+\infty}\left|f_{2i}(x)\right|dx < +\infty, \qquad \int_a^{+\infty}\left|g_{2i}(x)\right|dx < +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left|p_{2ij}(\tau)\right|d\tau = const,$$

(1.23)

$$\int_a^{+\infty}\left|p_{2ij}(x)\right|dx < +\infty, \qquad j \neq i, \quad j = 1,\dots,n;$$

2) для деякої множини $\mathrm{M} \subset \{1,\dots,n\}$ *(можливо порожньої)*

при будь-якому $i \in M$

$p_{1ii}(x) \neq 0$ *в деякому околі* $+\infty$ $\left|\int_a^{+\infty} p_{1ii}(x)dx\right| = +\infty,$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g_{1i}(x)}{p_{1ii}(x)} = G_i^0 = const, \qquad (1.24)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p_{1ij}(x)}{p_{1ii}(x)} = P_{ij}^0 = const, \quad j \neq i \qquad (j = 1,\dots,n),$$

а при будь-якому $i \in \{1,\dots,n\} \setminus M$

$$f_{1i}(x) \equiv 0, \quad g_{1i}(x) \equiv 0, \quad p_{1ij}(x) \equiv 0 \qquad (j = 1,\dots,n). \qquad (1.25)$$

Нехай, крім того, сталі $B_i^0 (i = 1,\dots,n),$ *що визначені рекурентними співвідношеннями*

$$B_i^0 = \begin{cases} nl\,|G_i^0| + \sum_{j=1}^{i-1}|P_{ij}^0| + \sum_{j=i+1}^{x} B_j^0|P_{ij}^0|, \text{ якщо } i \in M \\ 0, \text{ якщо } \quad i \in \{1,\dots,n\} - M \end{cases} \qquad (i=1,\dots,n), \qquad (1.26)$$

задовільняють нерівностям $B_i^0 < 1$ *при всіх* $i \in M$.

Тоді система рівнянь (1.1) має хоча б один розв'язок $(y_j)_{j=1}^n : [x_0,+\infty[\to R_b^n (x_0 \ge a)$, *що прямує до нуля при* $x \to +\infty$.

При встановленні цієї теореми межі інтегрування $\alpha_i, \beta_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1,\dots,n)$ в функціях (1.4), (1.6$_i$) $(i=1,\dots,n)$ слід покласти рівними $+\infty$ у випадку, коли $i \in \{1,\dots,n\}/M$, і обрати наступним чином:

$$\alpha_i, \beta_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij} = \begin{cases} a, \quad \text{якщо} \quad p_{1ii}(x) < 0 \quad \text{в} \quad \text{околі} \quad +\infty \\ \\ +\infty, \quad \text{якщо} \quad p_{1ii}(x) > 0 \quad \text{в} \quad \text{околі} \quad +\infty \end{cases}$$

У випадку, коли $i \in \{1,\dots,n\}/M$. Такий їхній вибір дозволяє за допомогою лем 1.1 та 1.3 легко довести, що виконуються умови (1.7) теореми 1.1.

Тепер зауважимо, що якщо функції $Y_i (i=1,\dots,n)$ такі, що

$$\frac{Y_i(i=1,\dots,n)}{\sum_{i=1}^{n}|y_1|} \to 0 \qquad (i=1,\dots,n) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n}|y_1| > 0 \qquad (1.27)$$

рівномірно по $x \in [a,+\infty[$, то для будь-якого $l > 0$ знайдеться $\delta \in]0,b]$ таке, що на множині Ω_{ab}^{n} (див. Формулу (1.2)) функції $Y_i\,(i = 1,\dots,n)$ будуть задовільнять нерівностям (1.3), тобто в даному випадку за рахунок звуження множини R_b^n можна скільки завгодно зменшити постійну l в (1.3).

З огляду на цей факт з теорем 1.2 і 1.3 випливає наступні два твердження.

Т е о р е м а 1.4. *Нехай функції* $Y_i\,(i = 1,\dots,n)$ *задовільняють умовам (1.26) рівномірно по* $x \in [a;+\infty[$. *Нехай, крім того, при певному виборі меж інтегрування* $\alpha_i, \beta_i \in (a;+\infty)$ $(i = 1,\dots,n)$ *дотримуються умов (1.16), а при зазначеному в теоремі 1.2 виборі меж* $\alpha_{ij}(i, j = 1,\dots,n; i = j)$ *існують кінцеві межі (1.17). Тоді, якщо сталі* $\widetilde{B}_i^0(i = 1,\dots,n)$, *обумовлені рекурентними співвідношеннями*

$$\widetilde{B}_i^0 = \sum_{j=1}^{i-1}\left|Pij^0\right| + \sum_{j=i+1}^{x}\widetilde{B}_j^0\left|P_{ij}^0\right| \qquad (i = 1,\dots,n), \qquad (1.18)$$

задовольняють нерівності $\widetilde{B}_i^0 < 1$ $(i = 1,\dots,n)$,

(1.19)

то система диференціальних рівнянь (1.2) має хоча один розв'язок $(y_j)_{j=1}^{n} : [x_0,+\infty[\to R_b^n(x_0 \ge a)$, *що прагне до нуля при* $x \to +\infty$.

З а у в а ж е н н я 1.5. Для виконання умов (1.28) достатньо (на відміну від (1.20)), щоб $P_{ij}^{0} = 0$ *при* $1 \le j < i \le n$.

Т е о р е м а 1.5. *Нехай функції* $Y_i\,(i = 1,\ldots,n)$ *задовільняють умовам (1.27) рівномірно* $x \in [a;+\infty[$. *Нехай, крім того, функції* f_i, g_i, p_{ij} $(i, j = 1,\ldots,n)$ *допускають подання виду (1.21), де* $f_{vi}, g_i, p_{vij} : [a;+\infty[\to R(v = 1,2; i, j = 1,\ldots,n)$ *неперервні і такі, що:*

1) *при будь-якому* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *дотримуються умов (1.22);*
2) *2) для деякої множини* $M \in \{1,\ldots,n\}$ *(можливо порожньої) виконані умови (1.23) при* $i \in M$ *и умова (2.24) при* $i \in \{1,\ldots,n\} \setminus M$.

Нехай крім того, постійні $\widetilde{B}_i^{0}(i = 1,\ldots,n)$, *що визначаються рекурентними співвідношеннями*

$$\widetilde{B}_i^{0} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{i-1} P \begin{vmatrix} 0 \\ ij \end{vmatrix} + \sum\limits_{j=i+1}^{x} \widetilde{B}_j^{0} \left| P_{ij}^{0} \right|, & \text{если} \quad i \in M \\ 0, \quad \text{якщо} \quad i \in \{1,\ldots,\} \setminus M \end{cases} \qquad (1.30)$$

$$(i = 1,\ldots,n),$$

задовольняють нерівності $\widetilde{B}_i^{0} < 1$ *при всіх* $i \in M$. *Тоді система рівнянь (1.1)*

має хоча один розв'язок $\left(y_j\right)_{j=1}^{n} : [x_0,+\infty[\to R_b^n(x_0 \ge a)$,

що прямує до нуля при $x \to +\infty$.

З а у в а ж е н н я 1.6. Умови (1.27) свідомо виконані, якщо функції $Y_i\,(i = 1,\ldots,n)$ мають неперервні частині похідні першого порядку за змінними $y_1,\ldots,y_n$ в Ω_{ab}^{n} і

$$\frac{\partial Y_i(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j} \to 0 \qquad (i, j = 1, \dots, n) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} |y_i| \to 0$$

рівномірно по $x \in [a; +\infty[$.

2. Системи із майже сталими коефіцієнтами при лінійній частині.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dx} = q(x) + [A + B(x)]z + Z(x,z), \qquad Z(x,z) \equiv 0, \qquad (2.1)$$

де A – стала $n \times n$ матриця з дійсними елементами, $B_i : [a, +\infty[\to R^{n\times n}$, $q_i : [a, +\infty[\to R^n$, $Z : \Omega^n_{ac} \to R^n$ - мала, в певному сенсі, неперервна матриця-функція та вектор-функції, $\Omega^n_{ac} = [a, +\infty[\times R^n_c$, $R^n_c = \{z \in R^n : \|z\| \le c\}$[2] $\left(a \ge 1, \quad c > 0 \right)$.

Для системи диференціальних рівнянь (2.1) мають місце такі дві теореми.

Т е о р е м а 2.1. *Нехай матриця A не має власних значень з нульовою дійсною частиною, а вектор – функція q і матриця-функція B представні у вигляді*

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x), \qquad B(x) = B_1(x) + B_2(x), \qquad (2.2')$$

де $q_i : [a, +\infty[\to R^n \quad (i = 1,2)$, $B_i : [a, +\infty[\to R^{n\times n}$

$(i = 1,2)$ - *неперервні та задовольняють умови*

$$\lim_{x\to+\infty} \|q_1(x)\| = 0, \qquad \int_a^{+\infty} \|q_2(x)\| dx < +\infty,$$

[2] Тут і надалі під нормою (матриці) розуміємо суму всіх його компонентів (її елементів).

(2.3)

$$\lim_{x\to+\infty}\|B_1(x)\| = 0, \qquad \int_a^{+\infty}\|B_2(x)\|dx < +\infty$$

Нехай, крім того,

$$\lim_{\|z\|\to 0}\frac{\|Z(x,z)\|}{\|z\|} = 0 \quad \textit{рівномірно по} \quad x \in [a,+\infty[.$$

Тоді система диференціальних рівнянь (2.1) має хоча один розв'язок $z:[x_0,+\infty[\to R_c^n \ (x_0 \ge a)$, *що прямує до нуля при* $x \to +\infty.$

Т е о р е м а 2.2. *Нехай матриця А має власні значення з нульовою дійсною частиною і r - максимальна зі степенів елементарних дільників, що відповідають цим власним значенням. Нехай для деякого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\|z\|\to 0}\frac{x^{r+\varepsilon}\left\|Z\left(x,\frac{z}{x^{\varepsilon}}\right)\right\|}{\|z\|} = 0 \quad \textit{рівномірно по} \quad x \in [a,+\infty[.$$

вектор – функція q і матриця-функція У представлені у вигляді (2.2)

де $q_i:[a,+\infty[\to R^n$ $\quad (i=1,2),$ $\quad B_i:[a,+\infty[\to R^{n\times n}$ $\quad (i=1,2)$ - *неперервні і задовільняють умови*

$$\lim_{x\to+\infty}x^{r+\varepsilon}\|q_1(x)\| = 0, \qquad \int_a^{+\infty}x^{r+\varepsilon-1}\|q_2(x)\|dx < +\infty,$$

(2.4)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^r \|B_1(x)\| = 0,$ $\int\limits_a^{+\infty} x^{r-1} \|B_2(x)\| dx < +\infty.$

(2.5)

Тоді система диференціальних рівнянь (2.1) має хоча один розв'язок $z : [x_0, +\infty[\to R_c^n \quad (x_0 \geq a)$, *що задовільняє асимптотичне співвідношення*

$$z(x) = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right) \qquad \textit{при} \qquad x \to +\infty.$$

Д о в е д е н н я теореми 2.1.: Нехай

$$J = [J_1(\lambda_1), \dots, J_{2k}(\lambda_{2k}), J_{2k+1}(\lambda_{k+1}), \dots, J_{2k+d}(\lambda_{k+d})]$$

Жорданова нормальна форма матриці А, де

$J_1(\lambda_1), \dots, J_{2k}(\lambda_{2k})$,- жорданові клітини, що відповідають комплексним власним значенням $\lambda_{1,\dots,}\ \lambda_{k,\dots,}\ \bar{\lambda}_{1,\dots,}\bar{\lambda}_{k},$ ($Im\ \lambda_i \neq 0$ при $i=1,\dots,k$,

а $J_{2k+1}(\lambda_{2k+1}), \dots, J_{2k+d}(\lambda_{k+d})$- дійсним власним значенням $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+d}$

і нехай n_i (і$\in \{1, \dots, k\}$-порядок клітин Жордана $J_i\ J_{i+k}$, а m_i (і$\in \{1, \dots, d\}$-порядок клітини Жордана J_{2k+i}. Відомо (див., наприклад ,[14], стор.372, що у цьому випадку для матриці А існує дійсна невироджена матриця Т така, що

$$T^{-1}AT = D,$$

де

$$D = diag[D_1(\lambda_1\ ), \dots, D_k(\lambda_k), J_{2k+1}\,(\lambda_{k+1}), \dots, j_{2k+d}\,(\lambda_{k+d})]$$
(2.6)

і кожна $D_i\,(\lambda_i)$ і$\in \{1, \dots, k\}$ -матриця розмірності $2n_i \times 2n_i$ виду

$$D_i\,(\lambda_i) = \begin{pmatrix} S_i(\lambda_i) & \cdots & S_i(\lambda_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_i(\lambda_i) & \cdots & S_i(\lambda_i) \end{pmatrix}, \quad S_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} Re\,\lambda_i & -Im\,\lambda_i \\ Im\,\lambda_i & Re\,\lambda_i \end{pmatrix}.$$

Враховуючи цей факт зведемо систему рівнянь (2.1) за допомогою перетворення

Z(x)=TL(x)u(x),

(2.7)

де u- нова невідома вектор-функція до системи

$\frac{dz}{dx} = T^{-1}q(x) + [D + T^{-1}B(x)T]u + T^{-1}Z(x, Tu).$

(2.8)

Далі уведемо для кожного і$\in \{1, \dots, k\}$ блочно-діагональну $2n_i \times 2n_i$ матрицю

$$L_i\ \ (x) = diag[L_{io}(x), \dots, L_{io}(x),$$

де

$$L_{io}(x) = \begin{pmatrix} \cos\beta_i\,x & -\sin\beta_i\,x \\ \sin\beta_i\,x & \cos\beta_i\,x \end{pmatrix}, \quad \beta_i\text{=Im}\,\lambda_i.$$

і складемо блочно-діагональну

n$\times$ n матрицюL(x)=diag[L_1(x),…,L_k(x),J_m],

в якій J_m –одинична матриця розміру m=$\sum_{j=1}^{d} m_j$.

При цьому помічаємо, що для кожної матриці $L_{i0}(x)$ (i=1,…,k) маємо

$$L_{io}^{-1}(x) S_i(\lambda_i) L_{io}(x) = diag\left[Re\lambda_i, \ Re\lambda_i\right].$$

Звідси і з (2.6) випливає, що матриця L(x) має обмежену обернену матрицю $L^{-1}(x)$ і задовольняє співвідношення

$$L^{-1}(x) D L(x) - L^{-1}(x) L'(x) = P_0, \qquad (2.9)$$

де

$$P_0 = diag[\tilde{J}_1(Re\lambda_1), \dots, \tilde{J}_k(Re\lambda_k), J_{2k+1}(\lambda_{k+1}), \dots, J_{2k+d}(\lambda_{k+d})],$$

(2.10)

$$\tilde{J}_i(Re\lambda_i) = diag\left[Re\,\lambda_i I_2, \dots, Re\,\lambda_i I_2\right] + H_{2n_i}$$

Згідно з умовами (2.6), (2.9), (2.10) і (2.2) система рівнянь (2.8) за допомогою відображення

u(x)=L(x)y(x) (2.11)

зводиться до системи рівнянь майже трикутного виду, що допускає застосування теореми 1.3

Висновки:

В даній роботі досліджується питання про умови існування зникаючих у нескінченості дійсних розв’язків у дійсних систем квазілінійних неавтономних диференціальних рівнянь. При цьому у першому параграфі досліджено систему з майже трикутною частиною(теореми 1.1-1.4), а у другому параграфі застосовано ці результати для встановлення ознак існування зникаючих розв’язків у деяких типів квазілінійних систем із майже сталими коефіцієнтами при лінійній частині (теореми 2.1-2.2). Отримані тут результати можуть бути використаними при дослідженні асимптотичної поведінки розв’язків різних типів істотно нелінійних диференціальних рівнянь зі степеневими, правильно змінними, повільно змінними та швидко змінними нелінійностями, а також систем такого типу рівнянь.

Список використаної літератури:

1. Чантурія Т.А. Про асимптотичне зображення розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Диференц. рівняння.-1970.-Т.6, N6.-С.948-961.
2. Костін О.В. Про асимптотику розв’язків рівнянь типу Емдена-Фаулера, що продовжуються. // Доп. АН СРСР-1971.-Т.200, N1.-С.28-31.
3. Костін О.В., Євтухова В.М. Асимптотика розв'язків одного нелінійного диференціального рівняння // Доп. АН СРСР.-1976.-Т.231, N5.-С.1059-1062.
4. Клебанов Л.В. Локальна поведінка розв’язків звичайних диференціальних рівнянь // Диференц.рівняння.-1977.-Т.7, N8.-С.1393-1397.
5. Євтухов В.М. Асимптотичні властивості розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Math. Nachr.-1984.-Bd. 115.-S.215-216.
6. Євтухов В.М. Асимптотичні властивості монотоних розв’язків одного класу нелинійних диференціальних рівнянь n -го порядку// Доп. розшир. засідань семінару Ін-ту прикл. мат. ім. І.Н. Векуа ТТУ. - 1988. - 3, No 3. - С. 62-65.
7. Євтухов В.М. Про асимптотику монотонних розв’язків диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера // Диференц.Рівняння.-1992.-Т.28, N6.-С.1076-1078.

8. Belohorec S. Neoscilatorcke riesenia istej nelinearnej differensialnej rovnice druheho radu // Mat. Fuz. Cas.-1962.-T.12, N4.-S.253-262.

9. Evtukhov V.M.; About one class of monotone solutions of nonlinear differential equation of the n-th order of Emden-Fowler type (Russian)/ / Soobsh. AN Gruzii. - 1992. – T. 145, N 2. – p. 269-273.
10. Evtukhov V.M., Bilozerowa M.A., Asymptotic representations of solutions of essential nonlinear nonautonomous differential equations of the second order (Russian)/ / Ukrainian Math. Journal – 2008. T. 60, N 3, p. 310-331.
11. Coppel W.A. Stability and Asymptotic: Behavior Differential Equations. Printed in USA. 1965. – 166 p.
12. Kiguradze I.T., Chanturia T.A. Asymptotik properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. Mathematics and its application (Mass volume 89), 1989, 430 p.
13. Coddington E.A., Levinson N, Theory of ordinary differential equations. New York Toronto London 1955.
14. N. Bourbaki Fonction d’une Variable reele (theorie elementaire). Paris. 424p