Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 75–78.

УДК 517.911

А. Н. Витюк
Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Диференціальні включення і оптимальне керування" ОНУ 28.09.2000

Розглядається питання про існування розв'язків диференціального включення $D_0^\alpha y(x) \in F(x, y(x))$, $y_{1-\alpha}(0) = \gamma$, де $\alpha \in (0,1)$, а $D_0^\alpha y(x)$ – похідна Рімана-Ліувілля порядку α.

Рассматривается вопрос о существовании решений дифференциального включения $D_0^\alpha y(x) \in F(x, y(x))$, $y_{1-\alpha}(0) = \gamma$, где $\alpha \in (0,1)$, а $D_0^\alpha y(x)$ – производная Римана-Лиувилля порядка α.

Problem of existence of solutions of the differential inclusion $D_0^\alpha y(x) \in F(x, y(x))$, $y_{1-\alpha}(0) = \gamma$, where $\alpha \in (0,1)$ and $D_0^\alpha y(x)$ is the Riemann-Liouville derivative of order α, is considered.

Известно ряд работ, посвященных изучению дифференциальных уравнений дробного порядка [1].

В данной работе рассматриваются дифференциальные уравнения с многозначной правой частью (дифференциальные включения) порядка $\alpha \in (0,1)$.

Условимся в таких обозначениях. Пусть E^n – пространство векторов размерности n с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ; $C(P,Y)$, $AC(P,Y)$, $L(P,Y)$– пространства непрерывных, абсолютно непрерывных, суммируемых функций $f: P \to Y$; $\operatorname{comp} E^n$ $(\operatorname{conv} E^n)$ – пространство непустых и компактных (выпуклых и компактных) подмножеств E^n с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$; $\rho(\cdot,\cdot)$ – расстояние между точкой и множеством в E^n; $R_+ = [0,+\infty)$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция; $\overline{A}$ – замыкание множества A.

Пусть $f(x) \in L((0,a), E^1)$. Левосторонним интегралом Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$ называем [1, с.41] функцию

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt,\ x \in (0,a), \quad \left(I_0^1 f(x) = \int_0^x f(t)dt \right).$$

Если $f(x) \in L((0,a), E^1)$, то функция $I_0^\alpha f(x)$ определена [1, с.42] почти всюду (п.в.) на $(0,a)$ и является суммируемой.

Пусть $f_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt$. Если для $f(x)$ п.в. на $(0,a)$ существует функция

$$D_0^\alpha f_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx}\left(I_0^{1-\alpha} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt,$$

то эту функцию называем [1, с.43] левосторонней производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$. В частности $D_0^\alpha f(x) = 0$ для $f(x) = x^{\alpha-1}$. Если $f(x) \in AC([0,a], E^1)$, то [1, с.40] $f_{1-\alpha}(x) \in AC([0,a], E^1)$ и, следовательно, $D_0^\alpha f(x)$ существует для п.в. $x \in [0,a]$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$D_0^\alpha y(x) \in F(x, y(x)),\ \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

решения которого удовлетворяют начальному условию

$$y_{1-\alpha}(0) = \gamma, \tag{2}$$

где $F(x,y): J \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$, $J = (0,a]$.

Определение 1. *Под решением задачи* (1), (2) *понимаем такую функцию* $y(x): (0,a] \to E^n$, *что: (а)* $y(x) \in C(J, E^n)$; *(б)* $y_{1-\alpha}(x) \in AC(\bar{J}, E^n)$; *(в)* $y_{1-\alpha}(0) = \gamma$; *(г)* $D_0^\alpha y(x) \in F(x, y(x))$ *для п.в.* $x \in J$.

Скажем, что $y(x) \in A(\alpha, J)$, если $y(x)$ удовлетворяет условиям: (*а*), (*б*), (*в*).

Пусть многозначное отображение $F(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) $F(\cdot, y): J \to \operatorname{comp} E^n$ измеримо для $y \in E^n$;
2) $h(F(x,y), F(x,u)) \le K\|y-u\|$ для п.в. $x \in J$ и любых $y, u \in E^n$;
3) $|F(x,y)| = h(F(x,y), \theta) \le M$.

Лемма. *Пусть* $\varphi(x) \in L(J, E^n)$ *такая, что* $I_0^\alpha \varphi(x) \in C(J, E^n)$. *Тогда единственным решением задачи*

$$D_0^\alpha u(x) = \varphi(x),\ u_{1-\alpha}(0) = \gamma \tag{3}$$

является функция $u(x) = (\gamma x^{\alpha-1})/\Gamma(\alpha) + I_0^\alpha \varphi(x)$.

Доказательство. Очевидно, что $u(x) \in C(J, E^n)$. Так как $u_{1-\alpha}(x) = \gamma + I_0^1 \varphi(x)$, то $u(x)$ удовлетворяет остальным условиям определения 1. Если $z(x)$ – другое решение задачи (3), а $v(x) = u(x) - z(x)$, то $D_0^\alpha v(x) = \theta$, $v_{1-\alpha}(0) = \theta$. Следовательно $v_{1-\alpha}(x) = \theta$. Тогда интегральное уравнение $I_0^{1-\alpha} v(x) = \theta$ имеет [1] единственное решение $v(x) = \theta$, $x \in J$.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение* $F(\cdot,\cdot): J \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ *удовлетворяет условиям* 1)-3), *а функция* $\omega(x) \in A(\alpha, J)$ *такая, что* $\rho(D_0^\alpha \omega(x), F(x, \omega(x))) \le \lambda$ *для п.в.* $x \in J$.

Тогда существует такое решение $y(x)$ *задачи* (1), (2), *что для* $x \in J$

$$\| y(x) - \omega(x) \| \le \lambda K^{-1}(E_\alpha(Kx^\alpha) - 1),$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(1+\alpha i)}$ *– функция Миттаг-Леффлера.*

Доказательство. Построим последовательность $u^{(k)}(x) \in A(\alpha, J)$, $k \ge 0$, полагая $u^{(0)}(x) = \omega(x)$. Пусть $v^{(0)}(x) = D_0^\alpha \omega(x)$, а $v_1(x)$ такой измеримый селектор многозначного отображения $F(x, u^{(0)}(x))$, что для п.в. $x \in J$

$$\|v_1(x) - v_0(x)\| = \rho(v_0(x), F(x, u^{(0)}(x))).$$

Определим $u^{(1)}(x)$ как решение задачи $D_0^\alpha u^{(1)}(x) = v_1(x)$, $u_{1-\alpha}^{(1)}(0) = \gamma$, которое в силу условия 3) и леммы существует и единственно. Для $x \in J$ имеем оценку

$$\left\| u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x) \right\| \le \frac{\lambda\, x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Пусть $v_2(x)$ – такой измеримый селектор многозначного отображения $F\left(x, u^{(1)}(x)\right)$, что для п. в. $x \in J$

$$\left\| v_2(x) - v_1(x) \right\| = \rho\left(v_1(x), F\left(x, u^{(1)}(x)\right)\right) \le h\left(F\left(x, u^{(0)}(x)\right), F\left(x, u^{(1)}(x)\right)\right) \le,$$

$$\le \mathrm{K}\left\| u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x) \right\| \le \frac{\lambda\, \mathrm{K} x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Если $u^{(2)}(x)$ – решение задачи $D_0^{\alpha} u^{(2)}(x) = v_2(x)$, $u_{1-\alpha}^{(2)}(0) = \gamma$, то

$$\left\| u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x) \right\| \le \frac{\lambda}{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{K}^2\, x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)},\ x \in J.$$

Продолжая аналогично далее и используя индукцию, получим, что

$$\left\| v_{m+1}(x) - v_m(x) \right\| \le \frac{\lambda\, \mathrm{K}^m\, x^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)},\ \text{п.в. } x \in J, \tag{4}$$

$$\left\| u^{(m+1)}(x) - u^{(m)}(x) \right\| \le \frac{\lambda}{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{K}^{m+1}\, x^{(m+1)\alpha}}{\Gamma\left(1+(m+1)\alpha\right)},\ x \in J. \tag{5}$$

В силу (4) последовательность $v_m(x)$, $m \ge 0$ является фундаментальной в $L\left(J, E^n\right)$ и пусть $v(x) = L\left(J, E^n\right)$ – ее сильный предел. Тогда существует ее подпоследовательность, которая п.в. на J сходится к $v(x)$.

Пусть $g_m(x) = x^{1-\alpha} u^{(m)}(x), m \ge 1$. Так как $\left\| v_m(x) \right\| \le M$ для п.в. $x \in J$, то $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1-\alpha} I_0^{\alpha} v_m(x) = \theta$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_m(x) = \gamma / \Gamma(\alpha)$. Полагаем $g_m(0) = \gamma / \Gamma(\alpha)$.

Тогда $g_m(x) \in C\left(\bar{J}, E^n\right)$. Аналогично как в [2] доказываем, что $g_m(x)$, $m \ge 1$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела, согласно которой существует подпоследовательность, которая равномерно на $\bar{J}$ сходится к $g(x) \in C\left(\bar{J}, E^n\right)$. Теперь для каждого $x \in J$

$$\lim_{m \to \infty} u^{(m)}(x) = \lim_{m \to \infty} x^{\alpha-1} g_m(x) = x^{\alpha-1} g(x) = y(x).$$

Так как $u^{(m)}(x) = \dfrac{\gamma\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + I_0^{\alpha} v_m(x)$ и $\left\| v_m(x) \right\| \le M$ п.в. $x \in J$, то согласно теореме Лебега о мажорантной сходимости имеем $y(x) = \dfrac{\gamma\, x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + I_0^{\alpha} v(x)$, $x \in J$

Докажем, что $y(x)$ удовлетворяет условию (2) определения 1.

Пусть T – такое подмножество J нулевой меры, что для $x \in J \setminus \mathrm{T}$ $\lim\limits_{m \to \infty} v_m(x) = v(x)$ и $D_0^{\alpha} y(x) = v(x)$. Тогда для $x \in J \setminus \mathrm{T}$

$$\rho\left(D_0^{\alpha} y(x), F\left(x, y(x)\right)\right) \le \left\| v(x) - v_{m+1}(x) \right\| +$$

$$\rho\left(v_{m+1}(x), F\left(x, u^{(m)}(x)\right)\right) + h\left(F\left(x, u^{(m)}(x)\right), F\left(x, y(x)\right)\right). \tag{6}$$

В (6) второе слагаемое равно нулю в силу выбора $v_{m+1}(x)$, а первое и третье слагаемые стремятся к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, для п.в. $x \in J$ $D_0^{\alpha} y(x) \in F\left(x, y(x)\right)$.

Оценка для $\left\| y(x) - \omega(x) \right\|$ следует из соотношения

$$\left\|u^{(m+1)}(x)-\omega(x)\right\|\le\frac{\lambda}{K}\left[\frac{K\,x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{\left(K\,x^{\alpha}\right)^{2}}{\Gamma(1+2\alpha)}+\ldots+\frac{\left(K\,x^{\alpha}\right)^{m+1}}{\Gamma(1+(m+1)\alpha)}\right]\le\frac{\lambda}{K}\left(E_{\alpha}\left(K\,x^{\alpha}\right)-1\right),$$

которое получаем с помощью (5).

Следствие. *Если* $\omega(x)=\left(\gamma\,x^{\alpha-1}\right)/\Gamma(1+\alpha)$, *то*

$$\rho\left(D_0^{\alpha}\omega(x),F(x,\omega(x))\right)=\rho(\theta,F(x,\omega(x)))\le M$$

для п.в. $x\in J$. *Следовательно, множество решений задачи* (1), (2) *непусто.*

Теорема 2. *Пусть многозначное отображение* $F(\cdot,\cdot):J\times E^n\to\operatorname{conv}E^n$ *удовлетворяет условиям* 1)-3). *Для того чтобы функция* $u(x)\in C\left(J,E^n\right)$ *была решением включения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $x,x+\tau\in\bar{J}$, $\tau>0$

$$u_{1-\alpha}(x+\tau)-u_{1-\alpha}(x)\in\int_{x}^{x+\tau}F(t,u(t))dt\,. \tag{7}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $u(x)$ – решение (1). С учетом определения производной $D_0^{\alpha}u(x)$ и интеграла Аумана от многозначного отображения получаем

$$u_{1-\alpha}(x+\tau)-u_{1-\alpha}(x)\in\int_{x}^{x+\tau}F(t,u(t))dt\,.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из (7) силу условия 3) имеем $\left\|u_{1-\alpha}(x+\tau)-u_{1-\alpha}(x)\right\|\le M\tau$. Следовательно $u_{1-\alpha}(x)\in AC\left(\bar{J},E^n\right)$. Согласно (7)

$$\left(u_{1-\alpha}(x+\tau)-u_{1-\alpha}(x)\right)\frac{1}{\tau}\in\frac{1}{\tau}\int_{x}^{x+\tau}F(t,u(t))dt\,.$$

Отсюда при $\tau\to0^+$ для п.в. $x\in J$ $D_0^{\alpha}u(x)\in F(x,u(x))$, так как

$$\lim_{\tau\to0^+}\frac{1}{\tau}\int_{x}^{x+\tau}F(t,u(t))dt=F(x,u(x))\ \text{для п.в.}\ x\in J\,.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим включение (1) и начальное условие

$$y_{1-\alpha}(0)=\theta\,. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть отображение* $F(\cdot,\cdot):\bar{J}\times E^n\to\operatorname{conv}E^n$ *непрерывно, удовлетворяет условию Липшица по* y *и* $|F(x,y)|\le M$.

Тогда существует решение $y(x)\in C\left(\bar{J},E^n\right)$ *задачи* (1), (8), *которое удовлетворяет включению* (1) *для* $x\in\bar{J}$, *причем* $D_0^{\alpha}y(x)\in C\left(\bar{J},E^n\right)$ *и* $\left(D_0^{\alpha}y(x)\right)_{x=0}=\omega_0$ *для любого* $\omega_0\in F(0,\theta)$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

1. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. **Витюк А. Н.** Существование решений дифференциального включения дробного порядка с полунепрерывной сверху правой частью // Укр. матем. журнал. – 1999. – Т. 51, № 4.– С. 1562–1565.