Mathematical Subject Classification: 34C29, 49J15, 70K70
УДК 517.93

І. А. Бойцова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УЗАГАЛЬНЕННЯ УМОВ УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗІ ШВИДКИМИ ТА ПОВІЛЬНИМИ ЗМІННИМИ

Бойцова І. А. Узагальнення умов усереднення в задачах оптимального керування зі швидкими та повільними змінними. Задача оптимального керування складається з системи диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними та термінального крітерію якості. Визначаються узагальнені умови, що дозволяють провести процедуру усереднення. Доводиться, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням точної задачі.
Ключові слова: задача оптимального керування, система диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними, метод усереднення, асимптотично оптимальне керування.

Бойцова И. А. Обобщение условий усреднения в задачах оптимального управления с быстрыми и медленными переменными. Задача оптимального управления описывается системой дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными и терминальным критерием качества. Приводятся обобщенные условия, позволяющие провести процедуру усреднения. Доказывается, что оптимальное управление усредненной задачи является асимптотически оптимальным управлением точной задачи.
Ключевые слова: задача оптимального управления, система дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, метод усреднения, асимптотически оптимальное управление.

Boitsova I. A. Generalization of averaging conditions in the optimal control problem with fast and slow variables. The optimal control problem is described by the system of differential equations with fast and slow variables and by the terminal criterion of quality. There is a generalization of averaging conditions. There is proved that the optimal control of averaging problem is asymptotically optimal control of initial problem.
Key words: optimal control problem, system of differential equations with fast and slow variables, averaging method, asymptotically optimal control.

Вступ. Особливість застосування методу усереднення до систем диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними полягає у необхідності враховувати вплив швидкої підсистеми на поведінку повільної підсистеми. Тому для побудови усередненої задачі використовується схема М. М. Хапаєва [1–3], у якій усереднення повільної підсистеми проводиться вздовж швидких розв'язків виродженої задачі.

Метод усереднення досить успішно використовується при дослідженні задач оптимального керування. Повне та часткове усереднення рівнянь керованого руху для систем стандартного виду обґрунтовано у роботах В. О. Плотнікова та його учнів [4–6]. В них запропоновано різноманітні алгоритми відновлення керування даної задачі, якщо знайдено оптимальне керування усередненої задачі. Крім того, в усіх цих роботах вважається, що множина допустимих керувань даної задачі повинна бути компактною.

У роботах А. М. Самойленка, О. М. Станжицкого, Т. В. Добродзій [7–9] розглядаються нелінійні та лінійні за керуванням задачі оптимального керування у стандартному виді. В них доводиться, що оптимальне керування усередненої задачі за зазначеними умовами буде асимптотично оптимальним керуванням для даної задачі.

Запропонована робота присвячена узагальненню умов усереднення в задачах оптимального керування зі швидкими та повільними змінними. Крім того, як і в работах [7–9] вважається, що множина допустимих керувань не є компактною. Доводиться, що оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням даної задачі.

Основні результати. Розглянемо задачу оптимального керування, що описується системою диференціальних рівнянь зі швидкими та повільними змінними та термінальним критерієм якості

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f\left(t,x,y,u,\varepsilon\right), \quad x\left(0\right)=x_0, \\ \dot{y} &= g\left(t,x,y,\varepsilon\right), \qquad y\left(0\right)=y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$J\left[u\right] = \varphi\left(x\left(T\right)\right) \to \min_{u\in U}, \tag{2}$$

де час $t \in [0,T]$, $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$ – задана стала, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $x\left(t\right) \in D_x \subset R^n$ – повільні змінні, $y\left(t\right) \in D_y \subset R^m$ – швидкі змінні, $f\left(t,x,y,u,\varepsilon\right)$ – задана вектор-функція размірності n, $g\left(t,x,y,\varepsilon\right)$ – задана вектор-функція размірності m, $u\left(t\right) \in U \subset R^r$ – керування системою, x_0, y_0 – задані початкові умови задачі.

Умова 1. *Нехай для функцій $f\left(t,x,y,u,\varepsilon\right)$, $g\left(t,x,y,\varepsilon\right)$ з системи (1) існують сумовані функції $M(t)$, $H(t)$, сталі $M_0 > 0$, $H_0 > 0$, $\lambda > 0$, існують неспадаючі функції $\psi_j(a)$, $j = 1, 2, ..., 5$, для яких $\lim\limits_{a\to 0} \psi_j(a) = 0$, що для усіх $t \in [0,T]$ та $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$ виконуються співвідношення:*

A) $\left\|f\left(t,x^1,y^1,u^1,\varepsilon\right) - f\left(t,x^2,y^2,u^2,0\right)\right\| \leqslant$

$$\leqslant H(t)\cdot\left(\psi_1\left(\left\|x^1-x^2\right\|\right) + \psi_2\left(\left\|y^1-y^2\right\|\right) + \psi_3\left(\varepsilon\right)\right) + \lambda\left\|u^1-u^2\right\|;$$

B) $\left\|g\left(t,x^1,y^1,\varepsilon\right) - g\left(t,x^2,y^2,0\right)\right\| \leqslant$

$$\leqslant H(t)\cdot\left(\psi_4\left(\left\|x^1-x^2\right\|\right) + \left\|y^1-y^2\right\| + \psi_5\left(\varepsilon\right)\right);$$

C) $\left\|f\left(t,x,y,u,\varepsilon\right)\right\| \leqslant M(t)$, де

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} H(t)dt \leqslant H_0\left(t_2-t_1\right); \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leqslant M_0\left(t_2-t_1\right).$$

Умова 2. *Нехай для функції $\varphi\left(x\right)$ з крітерію якості (2) виконується умова Липшиця зі сталою $\lambda > 0$*

$$\left|\varphi(x^1)-\varphi(x^2)\right| \leqslant \lambda\left\|x^1-x^2\right\|.$$

Означення 1. *Керування $u(t)$ вважаються допустимими для задачі (1), якщо вони задовольняють умовам:*

A) $u(t)$ – вимірні, локально інтегровані при $t \geqslant 0$ та $u(t) \in U$ при $t \geqslant 0$;

B) для кожного керування $u(t) \in U$ існує стала $u_c \in U$ така, що $\|u(t) - u_c\| \leqslant \alpha(t)$, де $\alpha(t)$ не залежить від $u(t)$ і $\int\limits_0^\infty \alpha(t)dt < +\infty$;

C) існує $\varepsilon_0 > 0$, яке не залежить від $u(t)$, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відповідні до цих керувань розв'язки $x(t) \in D_x$, $y(t) \in D_y$ задачі Коши для системи диференціальних рівнянь (1) визначені для усіх $t \in [0, T]$.

Означення 2. *Оптимальним керуванням задачі (1), (2) вважається таке допустиме керування $u^*(t)$, яке критерію якості (2) забезпечує мінімальне значення $J^* = J[u^*]$.*

Для системи диференціальних рівнянь (1) розглянемо відповідну вироджену задачу

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = 0, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = g(t, x, y, 0), & y(0) = y_0. \end{array} \tag{3}$$

Умова 3. *Нехай для довільного $y_0 \in D_y$ існує розв'язок $y = h(t, x, y_0, 0)$ виродженої задачі (3) для швидких змінних, визначений для усіх $t \geqslant 0$, де x вважається параметром.*

Умова 4. *Нехай рівномірно відносно $x \in D_x$, $u \in U$, $y_0 \in D_y$, $t_0 \geqslant 0$ вздовж роз'язку виродженої задачі існує функція*

$$f_0(x, u) = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f(s, x, h(s, x, y_0, 0), u, 0) ds, \tag{4}$$

яка задовольняє умову Липшиця за змінними x та u зі сталою λ.

Тоді задачі оптимального керування (1), (2) поставимо у відповідність усереднену задачу оптимального керування

$$\dot{z} = \varepsilon f_0(z, v), \quad z(0) = x_0, \tag{5}$$

$$J_0[v] = \varphi(z(T)) \to \min_{v \in U}, \tag{6}$$

де функції $v = v(t)$ – допустимі керування задачі (5), які обираються з тієї ж множини U, з якої обираються керування задачі (1), та задовольняють означенню 1, у якому умова C) виконується для розв'язків задачі (5).

За $v^*(t)$ візьмемо оптимальне керування задачі (5), (6), яке критерію якості (6) забезпечує мінімальне значення $J_0^* = J_0[v^*]$.

Доведемо, що на однакових допустимих керуваннях відповідні розв'язки систем диференціальних рівнянь (1) та (5) є близькими на асимптотично скінченному проміжку часу.

Теорема 1. *Нехай для систем диференціальних рівнянь (1) та (5) на множині $Q = \{t \geqslant 0, x \in D_x, y \in D_y, u \in U, \varepsilon \geqslant 0\}$ виконуються умови 1, 3, 4. Крім того:*

5) для кожного допустимого керування $v(t) \in U$ усередненої системи (5) відповідна траєкторія $z(t)$, $z(0) = x_0$ разом зі своїм ρ-околом належить множині D_x.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$ та $L > 0$ існує $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$ таке, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ виконується наступне:

I) будь-яке допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1) є допустимим керуванням усередненої системи (5) та відповідні траєкторії $x(t) \in D_x$ системи (1) та $z(t) \in D_x$ системи (5) за умови $x(0) = z(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють нерівність

$$\|x(t) - z(t)\| \leqslant \eta; \tag{7}$$

II) будь-яке допустиме керування $v(t) \in U$ усередненної системи (5) є допустимим керуванням системи (1) та відповідні траєкторії $z(t) \in D_x$ системи (5) та $x(t) \in D_x$ системи (1) за умови $z(0) = x(0) = x_0 \in D_0 \subset D_x$ задовольняють нерівність (7).

Доведення. Для доведення першої частини теореми оберемо допустиме керування $u(t) \in U$ системи (1), тоді $x(t)$, $y(t, x_0, y_0, \varepsilon)$ – відповідна траєкторія системи, що визначена для будь-яких $t \geqslant 0$, $h(t, x, y_0, 0)$ – розв'язок виродженої задачі (3) для швидких змінних, який існує та визначений для будь-яких $t \geq 0$, а $z(t)$ – відповідна до того ж керування траєкторія системи (5). Керування $u(t) \in U$ повинно обиратися так, щоб виконувалося умова 5) теореми, тобто повинно бути допустимим і для системи (5).

Оберемо довільне $\eta > 0$ таке, що $\eta < \rho$, та зафіксуємо його. Оцінимо різницю між відповідними розв'язками систем (1) та (5), враховуючи виконання умов 1 та 4:

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z(t)\| &\leqslant \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0, \varepsilon), u(s), \varepsilon) - f_0(z(s), u(s)) \right] ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0, \varepsilon), u(s), \varepsilon) - f(s, x(s), y(s, x_0, y_0, \varepsilon), u_0, \varepsilon) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0, \varepsilon), u_0, \varepsilon) - f_0(x(s), u_0) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f_0(x(s), u_0) - f_0(z(s), u(s)) \right] ds \right\| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s, x_0, y_0, \varepsilon), u_0, \varepsilon) - f_0(x(s), u_0) \right] ds \right\| + \\
&+ \varepsilon\lambda \int_0^t \|x(s) - z(s)\| ds + 2\varepsilon\lambda \int_0^t \|u(s) - u_0\| ds,
\end{aligned}$$

де u_0 –деяке стале керування, яке є допустимим для систем (1) та (5).

Допустиме керування $u(t) \in U$ задовольняє умову В) означення 1, тому існує стала $K > 0$ така, що

$$\int_0^t \|u(s) - u_0\| ds \leqslant \int_0^t \|u(s) - u_c\| ds + \int_0^t \|u_c - u_0\| ds \leqslant 2 \int_0^\infty \alpha(s) ds = K,$$

тому останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\|x(t)-z(t)\| \leqslant I+2\varepsilon\lambda K+\varepsilon\lambda\int\limits_0^t \|x(s)-z(s)\|\,ds, \tag{8}$$

де

$$I=\varepsilon\left\|\int\limits_0^t \left[f\left(s,x(s),y\left(s,x_0,y_0,\varepsilon\right),u_0,\varepsilon\right)-f_0\left(x(s),u_0\right)\right]ds\right\|. \tag{9}$$

Для того, щоб оцінити вираз (9), розглянемо різницю між швидкими роз'язками системи (1) та виродженої системи (3). При виконанні умови 1 отримаємо

$$\begin{gathered}
\|y(t,x_0,y_0,\varepsilon)-h(t,x_0,y_0,0)\| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^t \|g(s,x(s),y(s,x_0,y_0,\varepsilon),\varepsilon)-g(s,x_0,h(s,x_0,y_0,0),0)\|ds \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\left(\psi_4\left(\|x(s)-x_0\|\right)+\psi_5(\varepsilon)\right)\right]ds+ \\
+\int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\|y(s,x_0,y_0,\varepsilon)-h(s,x_0,y_0,0)\|\right]ds \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^t \left[H(s)\left(\psi_4\left(\left\|\varepsilon\int\limits_0^s f(\tau,x,y(\tau,x_0,y_0,\varepsilon),u,\varepsilon)d\tau\right\|\right)+\psi_5(\varepsilon)\right)\right]ds+ \\
+\int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\|y(s,x_0,y_0,\varepsilon)-h(s,x_0,y_0,0)\|\right]ds \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\left(\psi_4\left(\|\varepsilon M_0 s\|\right)+\psi_5(\varepsilon)\right)\right]ds+ \\
+\int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\|y(s,x_0,y_0,\varepsilon)-h(s,x_0,y_0,0)\|\right]ds,
\end{gathered}$$

звідки за лемою Гронуолла-Беллмана буде

$$\begin{gathered}
\|y(t,x_0,y_0,\varepsilon)-h(t,x_0,y_0,0)\| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_0^t \left[H(s)\cdot\left(\psi_4\left(\|\varepsilon M_0 s\|\right)+\psi_5(\varepsilon)\right)\right]ds\cdot e^{H_0 t}=\beta(t,\varepsilon).
\end{gathered} \tag{10}$$

Отримана функція $\beta(t,\varepsilon)$ при кожному фіксованому ε є зростаючою за змінною t , а при кожному фіксованому t її $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta(t,\varepsilon)=0$. Тоді знайдеться $t^*(\varepsilon)$ – корінь рівняння $\beta(t,\varepsilon)=C\sqrt{\varepsilon}$, де C – деяка стала.

Визначимо функцію

$$\Delta(\varepsilon)=\min\left\{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}};t^*(\varepsilon)\right\}, \tag{11}$$

що задовольняє властивостям

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta(\varepsilon)=+\infty,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Delta(\varepsilon)=0. \tag{12}$$

Разіб'ємо проміжок часу $[0,T]$ на відрізки довжиною Δ точками розбиття $t_i = i\Delta$, $i = 0,1,...,N$, $N = \left\lfloor \frac{T}{\Delta} \right\rfloor$, $\lfloor a \rfloor$ – ціла частина числа a. Зафіксуємо довільний момент часу $t \in [0,T]$, для якого знайдеться відрізок $[t_k, t_{k+1})$ такий, що $t \in [t_k, t_{k+1})$. При цьому k буде найбільшим значенням номеру, при якому $t_k \leqslant t$.

Повернемося до виразу (9), враховуючи, що $t \in [t_k, t_{k+1})$.

$$\begin{gathered}
\varepsilon\left\|\int\limits_0^t [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| + \\
+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^t [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| + 2\varepsilon M_0\Delta.
\end{gathered} \tag{13}$$

Перший доданок у (13) перетворимо наступним чином

$$\begin{gathered}
\varepsilon\left\|\int\limits_0^{t_k} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - \right. \\
\left. - f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right), \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right)]ds\right\| + \\
+\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right), \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - \right. \\
\left. - f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right), 0\right), u_0, 0\right)]ds\right\| + \\
+\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f\left(s, x\left(t_i\right), h\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right), 0\right), u_0, 0\right) - f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right)]ds\right\| + \\
+\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f_0\left(x\left(t_i\right), u_0\right) - f_0\left(x\left(s\right), u_0\right)]ds\right\|,
\end{gathered} \tag{14}$$

де оцінимо послідовно кожний доданок. Для першого доданку з (14) при виконанні умови 1 отримаємо

$$\begin{gathered}
\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [f\left(s, x\left(s\right), y\left(s, x_0, y_0, \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right) - \right. \\
\left. - f\left(s, x\left(t_i\right), y\left(s, x\left(t_i\right), y\left(t_i\right), \varepsilon\right), u_0, \varepsilon\right)]ds\right\| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [H(s)\cdot\psi_1\left(\left\|x\left(s\right) - x\left(t_i\right)\right\|\right)]ds \leqslant \\
\leqslant \varepsilon k\Delta H_0\cdot\psi_1\left(\varepsilon M_0\Delta\right) \leqslant LH_0\cdot\psi_1\left(\varepsilon M_0\Delta\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Для другого доданку з (14) при виконанні умов 1, 3 та (10) отримаємо

$$\begin{gathered}\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f\left(s,x\left(t_i\right),y\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),\varepsilon\right),u_0,\varepsilon\right)-\right.\right.\\ \left.-\;f\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),0\right),u_0,0\right)]ds\right\|\leqslant\\ \leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[H(s)\cdot\psi_2\left(\left\|y\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),\varepsilon\right)-h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),0\right)\right\|\right)+\right.\\ \left.+\;H(s)\cdot\psi_3\left(\varepsilon\right)\right]ds\leqslant LH_0\left(\psi_2\left(\beta\left(\Delta,\varepsilon\right)\right)+\psi_3\left(\varepsilon\right)\right).\end{gathered}\tag{16}$$

Якщо виконується умова 4, то існує така монотонно спадаюча функція $\gamma=\gamma\left(\Delta\right)$, що $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\gamma\left(\Delta\right)=0$, та для третього доданку з (14) буде справедливою оцінка

$$\begin{gathered}\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),0\right),u_0,0\right)-f_0\left(x\left(t_i\right),u_0\right)\right]ds\right\|\leqslant\\ \leqslant\varepsilon\Delta\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}}f\left(s,x\left(t_i\right),h\left(s,x\left(t_i\right),y\left(t_i\right),0\right),u_0,0\right)ds-f_0\left(x\left(t_i\right),u_0\right)\right)\right\|\leqslant\\ \leqslant\varepsilon k\Delta\cdot\gamma\left(\Delta\right)\leqslant L\gamma\left(\Delta\right).\end{gathered}\tag{17}$$

Для останнього доданку з (14) при виконанні умов 1, 4 отримаємо

$$\begin{gathered}\varepsilon\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f_0\left(x\left(t_i\right),u_0\right)-f_0\left(x\left(s\right),u_0\right)\right]ds\right\|\leqslant\\ \leqslant\varepsilon\lambda\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|x\left(t_i\right)-x\left(s\right)\right\|ds\leqslant\varepsilon\lambda k\Delta\cdot\varepsilon M_0\Delta\leqslant\varepsilon\Delta\lambda LM_0.\end{gathered}\tag{18}$$

Враховуючи оцінки (15) – (18) для доданків з нерівності (14) та співвідношення (13), для представлення (9) отримаємо

$$\begin{gathered}I\leqslant LH_0\cdot\left(\psi_1\left(\varepsilon M_0\Delta\right)+\psi_2\left(\beta(\Delta,\varepsilon)\right)+\psi_3(\varepsilon)\right)+\\ +L\gamma(\Delta)+\varepsilon M_0\Delta\cdot\left(2+\lambda L\right).\end{gathered}\tag{19}$$

Оцінку різниці розв'язків системи (1) та відповідної до неї усередненої системи (5) отримаємо з нерівності (8) та леми Гронуолла-Беллмана

$$\begin{gathered}\left\|x\left(t\right)-z\left(t\right)\right\|\leqslant\left[LH_0\cdot\left(\psi_1\left(\varepsilon M_0\Delta\right)+\psi_2\left(\beta(\Delta,\varepsilon)\right)+\psi_3(\varepsilon)\right)+\right.\\ \left.+L\gamma(\Delta)+\varepsilon M_0\Delta\cdot\left(2+\lambda L\right)+2\varepsilon\lambda K\right]e^{\lambda L}.\end{gathered}\tag{20}$$

Враховуючи поведінку всіх функцій, що знаходяться у квадратних дужках (20), отримаємо

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to0}\left[LH_0\cdot\left(\psi_1\left(\varepsilon M_0\Delta\right)+\psi_2\left(\beta(\Delta,\varepsilon)\right)+\psi_3(\varepsilon)\right)\right.\\ \left.+L\gamma(\Delta)+\varepsilon M_0\Delta\cdot\left(2+\lambda L\right)+2\varepsilon\lambda K\right]=0,\end{gathered}$$

звідки для будь-якого $0<\eta<\rho$ та $L>0$ знайдеться $\varepsilon_0>0$ таке, що для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ та $t\in[0,T]$, $T=L\varepsilon^{-1}$ з нерівності (20) буде

$$\left\|x\left(t\right)-z\left(t\right)\right\|\leqslant\eta<\rho.$$

Отримана оцінка $\|x(t) - z(t)\| < \rho$ для усіх $t \in [0, T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $u(t)$ та розв'язку $x(t)$, $y(t)$ системи (1) відповідний до цього ж керування розв'язок $z(t)$ усередненої системи (5) знаходиться у ρ-околі розв'язку $x(t)$ системи (1) і не виходить на границу множини D_x ні для якого моменту часу. Тому обране керування $u(t)$ системи (1) дійсно є допустимим і для системи (5). Тобто, для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ справедливою є оцінка (7). Перша частина теореми доведена.

Доведення другої частини теореми проводиться аналогічно. При цьому отримана оцінка $\|x(t) - z(t)\| < \rho$ для усіх $t \in [0, T]$ означає, що для будь-якого допустимого керування $v(t)$ та розв'язку $z(t)$ усередненої системи (5) відповідний до цього ж керування розв'язок $x(t)$ системи (1) знаходиться у ρ-околі розв'язку $z(t)$ усередненої системи (5), яка у наслідок виконання умови 5) теореми повністю належить множині D_x. Тому обране допустиме керування $v(t)$ усередненої системи (5) дійсно є допустимим і для системи (1). Тобто, для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, T]$ справедливою є оцінка (7).

Теорема доведена.

Встановимо відповідність між оптимальним розв'язком задачі (1), (2) та оптимальним розв'язком усередненої задачі (5), (6), якщо вони існують.

Теорема 2. *Нехай для задач оптимального керування (1), (2) та (5), (6) на множині* $Q = \{t \geqslant 0, x \in D_x, y \in D_y, u \in U, \varepsilon \geqslant 0\}$ *виконуються умови 1 – 4 та умова 5) теореми 1. Крім того:*

6) існує оптимальне керування $v^*(t) \in U$ *усередненої задачі (5), (6).*

Тоді оптимальний розв'язок усередненої задачі (5), (6) є асимптотично оптимальним розв'язком задачі (1), (2), тобто для будь-яких $\eta > 0$ *та* $L > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$*, що для усіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливо*

$$|J_0^* - J^*| \leqslant \eta, \qquad J[v^*] - J^* \leqslant \eta, \tag{21}$$

де J_0^* *и* J^* *– оптимальні значення критеріїв якості усередненої задачі (5), (6) і задачі (1), (2) відповідно,* $J[v^*]$ *– значення критерію якості задачі (1), (2) на оптимальному керуванні усередненої задачі.*

Доведення. Допустимі керування задачі (1), (2) повинні задовольняти умови означення 1. Проте керування, на якому критерій якості досягає свого мінімального значення, може не завжди існувати. Однак саме оптимальне значення критерію якості J^* задачі (1), (2) завжди існує та скінченне [9].

Якщо оптимальне керування задачі (1), (2) існує, то його і візьмемо у якості $u^*(t)$, на цьому керуванні критерій приймає мінімальне значення $J^* = J[u^*(t)] = \min\limits_{u \in U} J[u(t)]$. Якщо оптимальне керування задачі (1), (2) не існує, то знайдеться допустиме керування $u^o(t)$, що $J[u^o] - J^* \leqslant \eta/2$, яке назвемо η-оптимальним та візьмемо у якості керування $u^*(t)$, при цьому $J^* = \inf\limits_{u \in U} J[u(t)]$. Отримання оцінок (21) проводиться, як і у роботі [10].

Теорема доведена.

Висновки. Усереднення заданої задачі здійснюється за часом, що явно входить у праві частини системи, вздовж швидких розв'язків виродженої задачі, вважаючи керування u параметром. Отримана усереднена задача є автономною та складається тільки з повільної підсистеми, тому більш проста за задану. При розв'язуванні усередненої системи розглядаються ті ж керування, що і для заданої системи. Таким чином, множина керувань U для заданої та усередненої систем співпадає, при цьому не вимагається, щоб множина U була компактом на відміну з вимогами у роботах [4–6]. Крім того, оптимальне керування усередненої задачі може бути узято в якості асимптотично оптимального керування заданої задачі. При цьому відповідні траєкторії та значення критеріїв якості є асимптотично близькими.

1. **Хапаев М. М.** Усреднение в теории устойчивости / М. М. Хапаев. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
2. **Хапаев М. М.** Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М. Хапаев. – М.: Высш. шк., 1988. – 184 с.
3. **Хапаев М. М.** Усреднение и устойчивость / М. М. Хапаев. – М.: Знание, 1991. – 48 с.
4. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. **Плотников В. А.** Усреднение уравнений управляемого движения / В. А. Плотников, Т. В. Бенумерова, И. А. Бойцова, О. Д. Кичмаренко // Междун. конф. по управлению "Автоматика - 2000". – Львов, 2000. – Том 1. – С. 189–193.
6. **Плотников В. А.** Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными / В. А. Плотников, И. А. Бойцова // Проблемы управления и информатики. – 2000. – No. 5. – С. 152–156.
7. **Самойленко А. М.** Об усреднении дифференциальных уравнений на бесконечном интервале / А. М. Самойленко, А. Н. Станжицкий // Диф. уравнения. – 2006. – Том 42, No 4. – С. 476-–482.
8. **Добродзій Т. В.** Метод усереднення в задачах керування періодичними системами / Т. В. Добродзій // Нелінійні коливання. – 2010. – Том 13, No. 2. – С. 147–154.
9. **Станжицкий А. Н.** Исследование задач оптимального управления на полуоси методом усреднения / А. Н. Станжицкий, Т. В. Добродзий // Диф. уравнения. – 2011. – Том 47, No. 2. – С. 264–277.
10. **Бойцова І. А.** Усереднення у лінійній за керуванням задачі оптимального керування зі швидкими та повільними змінними / І. А. Бойцова // Буковинський мат. журнал. – 2015. – Том 3, No 1. – С. 7–15.

Надійшла 29.11.2014