

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

(повне найменування інституту, назва факультету (відділення))

Кафедра вищої математики

(повна назва кафедри (предметної, циклової комісії))

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

Задача Рімана у просторі узагальнених функцій

(назва українською)

Riemann problem in generalized functions space

(назва англійською)

Виконав: студент заочної форми навчання
спеціальності 111 Математика

(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

Колесникова Ольга Ігорівна

(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник канд. фіз-мат н., доц. Керекеша Д.П.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент канд. фіз-мат н., доц. Кореновський Ар. О.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ від « » 2022 р.

Завідувач кафедри

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №
протокол № від « » 2022р.

Оцінка / /

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Вступ

У цій роботі основним математичним знаряддям є дискретне і інтегральне перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є були і залишаються одним з найбільш потужних і ефективних засобів дослідження завдань математичної фізики і теорії інтегральних рівнянь. Вони з'явилися на початку 19-го століття в працях класиків математичного аналізу Лейбніца, Д. Бернуллі, Лагранжа, Лапласа, Ейлера, Фур'є, Пуассона, Коши, Даламбера.

Найбільш вагомий внесок в розвиток інтегральних перетворень з точки зору теорії і застосування внесли Фур'є і Лаплас. Їх іменами по справедливості названі відомі інтегральні перетворення.

В кінці 19-го століття англійський інженер-електрик Хевісайд при розв'язуванні завдань по теорії електрики став застосовувати так зване операційне або символічне числення*. За допомогою свого числення він вирішував звичайні лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами, а також лінійні інтегро-дифференційні з вольтерівським оператором. Ідея символічного числення була досить проста: аналітичній операції диференціювання або інтеграції ставиться у відповідність символ. Такий підхід приводив до дії операції алгебри. Результати були вражаючими. Багато рівнянь було розв'язано просто і ефективно. І головний критерій коректності хевісайдівських формальних правил полягав в їх правильності, тобто в отриманні розв'язків, які задовольняють початковим рівнянням. Але при усьому цьому позитивному ефекті, обґрунтування операційного числення тривалий час не було. І лише на початку 20-х років 19-го століття зусиллями багатьох математиків обґрунтування з'явилося. Виявилось, що в основі операційного числення лежать інтегральні перетворення. Відтоді

* Віддаючи належне Хевісайду слідє, проте відмітити, що основоположні результати були отримані професором Київського університету М. Е. Ващенко-Захарченко. Але у той час його результати не були помічені, напевно, через відсутність застосувань.

починається усебічне і плідне застосування інтегральних перетворень при розв'язуванні завдань математичної фізики. Перші результати в цьому напрямі були отримані при дослідженні завдань теплопровідності.

Нагадаємо, що в нашій роботі «перетворенням Фур'є» називається оператор, що ставить у відповідність «Фур'є-оригіналу», - функції $f(x)$ – її «Фур'є образ» $F(x)$. Річ у тому, що в літературі, на жаль, в наявності різнобій в термінології. Так, часто говорять про «інтегральну формулу Фур'є», але в деяких довідниках ця формула називається «інтегралом Фур'є»; треті інтегралом Фур'є називають і образ, і оригінал Фур'є. Причина такого різнобою, можливо, пов'язана з численними додатками методів інтегральних перетворень і операційного числення в різних областях сучасного природознавства: (математична фізика, інтегральні рівняння, теорія спеціальних функцій, автоматика, електро- радіотехніка, теорія регулювання, теорія ризику і т. д).

До теперішнього часу теорія перетворення Фур'є розвинена широко і глибоко, але ще не знайшла повного відображення в новій книзі.

У третю главу [1] поміщені нові результати одного із співавторів, пов'язані з областями аналітичної Фур'є - оригіналів і Фур'є-образу. Крім того, з учбовою метою детальніше викладається відомий матеріал з деякими модифікаціями і доповненнями, пов'язаними з теорією Планшереля і перетворенням згортки.

У третій главі [1] викладаються також елементи дискретного перетворення Фур'є. Виклад проведений коротко і в основному з метою застосування її до рішення нових інтегральних рівнянь з періодичними ядрами.

І в третій главі [1] наводяться результати роботи, у якій встановлений зв'язок між рядами Фур'є і відповідними образами Фур'є.

Історія постановки і етапів розв'язку задачі Римана непроста. Риман, Гільберт, Племель, Карлеман, Вінер і Хопф - кожен вніс свій внесок. Сам Риман не зробив ніяких спроб розв'язати поставлене ним завдання. Перше рішення однорідної крайової задачі Римана дав Гільберт. Особливо близькі до мети були в 1931 році Вінер і Хопф, але у них поняття індексу було відсутнє. Але якісний стрибок в розвитку методів її розв'язку розпочатий з роботи Ф. Д. Гахова [4]. У вказаній роботі Ф. Д. Гахов ввів дуже важливе поняття індексу функції. Завдяки введеному поняттю індексу крайова задача Римана в її первинному варіанті була вирішена в замкнутому виді. Повний розв'язок задачі Римана для однозв'язної області отримане в 1936 році Ф. Д. Гаховим «Як мені прийшло в голову використати множник t^{-x} ?! – пізніше згадував він). Починаючи з цього моменту крайова задача Римана досліджувалася в різних напрямках: функціонально-теоретичних, конструктивних, прикладних. Слід зазначити, що методи розв'язку крайової задачі Римана удосконалюються і розвиваються досі і в першу чергу за рахунок численних додатків задачі Римана при розв'язанні важливих прикладних завдань природознавства. Цей процес триває.

Про багатосторонній розвиток теорії задачі Римана і її додатків сказане в монографії Ф. Д. Гахова « Краевые задачи» [4] .

Відповідні розділи книги [4] послужили основою для написання вищевикладеної четвертої глави. Тут доречно відмітити, що неопубліковані раніше результати, викладені в п.4.3 [1], належать Керекеші Д. П.

У теорії інтегральних рівнянь досить важливу роль грають інтегральні рівняння з різницевиими ядрами (інтегральні рівняння типу згортка). Для їх вирішення застосовується потужний апарат інтегрального перетворення Фур'є. Як відомо, для дії цього апарату необхідно, по-перше, щоб інтегральне рівняння було задане на усій дійсній вісі. По-друге інтегральне рівняння

повинне містити тільки різницеві ядра. У третіх - межі інтегрування беруться від $-\infty$ до ∞ . Тоді за допомогою інтегрального перетворення Фур'є відповідне рівняння зводиться до простого рівняння алгебри відносно образу Фур'є шуканої функції. Подальше дослідження пов'язане з умовами вирішуваності розглянутого рівняння в різних просторах.

Якщо ж в розглянутому рівнянні не виконується хоч би одна з умов, описаних вище, то для їх розв'язку виникають проблеми принципового характеру. До таких рівнянь, передусім, відносяться наступні

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x > 0,$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x < 0 \quad (2)$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 k_2(x-t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (3)$$

Однорідне рівняння (1) в окремому випадку було вивчене в 1931 році Вінером і Хопфом. Згідно з вищеописаними вимогами застосувати безпосередньо інтегральне перетворення Фур'є до рівняння (1) не можна. Тому при побудові розв'язання рівняння виду (1) авторами була запропонована принципово нова схема: введення нових невідомих функцій, рівних нулю при $x < 0$ (вони позначаються+внизу), наприклад $\varphi_+(x)$ і функцій $\varphi_-(x)$, рівних нулю при $x > 0$. Оскільки було відомо, що образи Фур'є $\Phi^{\pm}(x)$ є аналітичними функціями у верхній і нижній напівплощині відповідно, то застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівняння (1) ще не розв'язувало рівняння, а лише зводило його до рішення одного рівняння з двома невідомими функціями, що мають чудові властивості аналітичності. Подальший розв'язок пов'язаний з методом факторизації, який

на ранніх етапах свого розвитку полягав в зображенні довільною аналітичною в смузі $a < |\operatorname{Im} z| < b$ функції $A(z)$ у виді $A(z) = A^+(z)A^-(z)$, де функції $A^\pm(z)$ відповідно аналітично продовжені в напівплощині $|\operatorname{Im} z| > a$ і $|\operatorname{Im} z| < b$. Необхідна умова аналітичної функції $A(z)$ у смузі $a < |\operatorname{Im} z| < b$ було забезпечено розглядом ядер спеціального класу - що убивають, як показова функція (таке припущення пов'язане з конкретним практичним завданням променистої рівноваги). Ці припущення дозволили Вінеру і Хопфу отримати точний розв'язок окремого випадку рівняння (1). При цьому слід зазначити, що незважаючи на недосконалість цитованої роботи, вона зіграла велику роль в розвитку запропонованого дослідниками прийому, причому у різних напрямках. Відмітимо основні: 1) застосування методу для розв'язку змішаних завдань математичної фізики шляхом зведення до інтегральних рівнянь типу згортка (1) (2); 2) дослідження відповідних інтегральних рівнянь в різноманітних просторах .

Новизну в теорії інтегральних рівнянь, яку внесли автори роботи певним чином відмічено математиками: до теперішнього часу рівняння (1) називається рівнянням Вінера-Хопфа. Більше того, метод факторизації іноді називають методом Вінера-Хопфа.

Рівняння (2) називають парним рівнянням. Метод розв'язку парного рівняння пов'язаний також з методом факторизації.

В процесі розвитку першого напряму стали виникати випадки, коли відсутня смуга аналітичної факторизованої функції. Розгляд таких випадків привів до того, що проблема факторизації звелася до проблеми розв'язку задачі Римана (завдання сполучення кусочно-аналітичної функції), добре розробленої на той час. Вказаний зв'язок був встановлений завдяки ряду теоретичних робіт. Слід особливо відмітити роботу Рапопорта, який ще в

1948 році вказав на еквівалентність інтегральних рівнянь і відповідної задачі Римана.

Наступним кроком для розвитку теорії рівнянь типу згортки була робота Ю. И. Черського. У ній уперше введено рівняння з двома ядрами (3). Це рівняння також зводиться до задачі Римана.

Дослідження рівнянь (1) - (3) за допомогою задачі Римана виявилось дуже плідним не лише з точки зору побудови рішення, але і строгого введення просторів розв'язків аж до простору узагальнених функцій.

З одного боку можна застосовувати потужний апарат інтегрального перетворення Фур'є (аж до його застосування в просторі узагальнених функцій). З іншого боку можна користуватися широко розробленим методом задачі Римана в просторі узагальнених функцій).

Подальший розвиток теорії інтегральних рівнянь, які по своїй структурі близькі до рівнянь типу згортки пов'язані з роботами Раковщика Л.С., у яких розглянуто інтегральне рівняння виду

$$\lambda\varphi - \sum_{j=1}^n b_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x-t) c_j(t) \varphi(t) dt = f(x), x \in R. \quad (4)$$

Рівняння (4) автор назвав інтегральним рівнянням з майже різницевиими ядрами. Цей термін ми також використовується в книзі [1].

Відразу відмітимо, що доки ще не існує конструктивного методу розв'язку рівняння в загальному вигляді. Відомі тільки окремі випадки, у яких отримано в квадратурі розв'язки рівняння (4). Відмітимо, що рівняння (1) - (3) також є окремими випадками інтегральних рівнянь з майже різницевиими ядрами.

Інтегральні рівняння з майже різницевиими ядрами останніми роками мають численні застосування. Зокрема, при дослідженні стохастичних процесів в теорії ризику (див. гл. XIV [1]) і у фінансовій математиці.

Відмітимо ще один частковий випадок рівняння (4), який дозволяє побудувати його розв'язок. Це рівняння виду

$$e^{-x}\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), x > 0. \quad (5)$$

За допомогою інтегрального перетворення Фур'є воно зводиться до задачі Карлемана для смуги з аналітичним продовженням в напівплощину (див. гл. IV [1]).

У п. 8.1 [1] формулюються і доводяться дві теореми, належні Керекеші Д.П.

У цій главі приведені і інші дослідження. Вони зафіксовані в роботах Карапетянца Н. К., Самко С. Г., Керекеші П. В., Керекеші Д. П., Песчанського А. І., Шевчика В. А. і Черського Ю. І.

У цій главі вивчений також ряд нових рівнянь (п.п. 8.6, 8.7 [1]). Отримані у вказаних пунктах результати належать Керекеші Д. П. і публікуються уперше.

1. Елементарні властивості перетворення Фур'є.

Відмітимо найбільш вживані властивості інтегрального перетворення Фур'є.

1.1. Зсув в оригіналі. Якщо λ - позитивне дійсне число, то

$$V\varphi(x \pm \lambda) = e^{\pm i\lambda x} \Phi(x) \quad \text{или} \quad V^{-1}[e^{\pm i\lambda x} \Phi] = \varphi(x \pm \lambda), \quad (1.1)$$

$$V\varphi(x \pm i\lambda) = e^{-\lambda x} \Phi(x) \quad \text{или} \quad V^{-1}[e^{\pm \lambda x} \Phi] = \varphi(x \pm i\lambda). \quad (1.2)$$

1.2. Зсув в зображенні. Якщо λ - відмінне від нуля дійсне число, то

$$V[e^{\pm \lambda x} \varphi(x)] = \Phi(x \mp i\lambda) \quad \text{или} \quad V^{-1}[\Phi(x \mp i\lambda)] = e^{\pm \lambda x} \varphi(x), \quad (1.3)$$

$$V[e^{\pm i\lambda x} \varphi(x)] = \Phi(x \pm \lambda) \quad \text{или} \quad V^{-1}[\Phi(x \pm \lambda)] = e^{\pm i\lambda x} \varphi(x). \quad (1.4)$$

1.3. Формули подібності. Якщо λ - відмінне від нуля дійсне число, то

$$V\varphi(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \Phi\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (1.5)$$

1.4. Образ Фур'є від зображення

$$V\Phi(x) = \varphi(-x), \quad (V^2\varphi(x)) = \varphi(-x). \quad (1.6)$$

З а у в а ж е н н я . Властивості 1.1, 1.4 досить прості. Для їх встановлення використовуються елементарні властивості певних інтегралів. При цьому передбачається, що образи відповідних оригіналів існують.

Відмітимо, що при строгому обґрунтуванні наступних властивостей необхідно накладати істотні обмеження на оригінали. Зокрема, одна з формул (1.1) справедлива лише за умови, що разом з образом Фур'є функції $\varphi(x)$ існує образ Фур'є функції $\varphi(x) \cdot e^{-\lambda x}$. Ці умови призводять до того, що образ Фур'є функції $\varphi(x)$ аналітичний в смугі $0 < \text{Im}z < \lambda$. Про це детальніше буде викладено в гл. V [1].

1.5. Перетворення похідної оригіналу з L_1 .

1.5.1. Нехай $f(t), f'(t)$ належать L_1 і $f(t)$ абсолютно неперервна на кожному кінцевому інтервалі. Тоді справедлива формула

$$(Vf')(x) = -ixF(x), \quad (1.7)$$

де $F(x) = (Vf)(x)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки функція абсолютно неперервна, то її можна представити у виді

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

З того, що $f'(t) \in L_1$ слідує: права частина рівності (1.8) має межу при $|t| \rightarrow \infty$. Очевидно, що ця межа обов'язково дорівнює нулю, інакше функція $f(t)$ не належала б простору L_1 . Враховуючи цей факт, за допомогою інтегрування по частинах легко встановлюється рівність (1.7). Дійсно

$$\begin{aligned} (Vf')(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(t) e^{ixt} \Big|_{-\infty}^{\infty} - ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt \right] = \\ &= -ixF(x), F(x) = (Vf)(x). \end{aligned}$$

Отже, при наведених вище обмеженнях встановлена формула (1.7).

Узагальненням її є така

$$(Vf^{(n)})(x) = (-ix)^n F(x). \quad (1.9)$$

При її встановленні природно передбачається, що $f^{(k)}(t) \in L_1, k = \overline{0, n}$ і $f^{(n-1)}(t)$ абсолютно неперервна.

1.5.2. Якщо $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ неперервні, прямують до нуля при $|t| \rightarrow \infty$ а $f^{(n)}(t)$ належить L_1 , то шляхом n -кратного інтегрування по частинах встановлюється формула (1.9). При цьому, згідно з теоремою Римана-Лебега має місце асимптотика $x^n F(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Існує також зв'язок між убуттям функції $f(t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ і гладкістю її образу, а саме: чим швидше убиває $f(t)$ на нескінченності, тим гладшим виходить її образ Фур'є.

1.6. Множення оригіналу на t^k , $k \in \mathbb{N}$. Нехай спочатку функції $f(t), tf(t)$ належать L_1 . Тоді $F(x) = (Vf)(x)$ диференційована і справедлива формула

$$F'(x) = (V(-itf(t)))(x). \quad (1.10)$$

Д о в е д е н н я. В силу інтегрованості функції $tf(t)$ інтеграл $\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{ix} dt$ сходиться рівномірно по змінній x , тому згідно п.1.1.3 [1] функцію $F(x) = (Vf)(x)$ можна диференціювати по x звідки слідує рівність (1.10).

Нехай тепер функція $f(t)$ така, що $t^k f(t) \in L_1, k = \overline{0, n}$. Тоді функція $F(x) = (Vf)(x)$ має n безперервних похідних, причому справедлива формула

$$(-i)^k \cdot F^{(k)}(x) = (V(t^k f(t)))(x), k = \overline{0, n}. \quad (1.11)$$

1.7. Перетворення похідної оригіналу з L_2 . Якщо одночасно $f(t)$ і $f'(t)$ належать простору L_2 , то одночасно $F(x)$ і $x F(x)$ належать тому ж простору L_2 . Тут $F(x) = (Vf)(x)$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо вірну рівність

$$[f(t)]^2 - [f(0)]^2 = 2 \int_0^x f(\xi) f'(\xi) d\xi. \quad (1.12)$$

В силу заданих умов права частина рівності (1.12) прямує до кінцевої межі при $|t| \rightarrow \infty$. Отже і ліва частина рівності (1.12) також прямує до кінцевої межі при $f(t)$. Але оскільки функція $[f(t)]^2$ належить простору L_1 , то вона не може прямувати до межі, відмінної від нуля. Таким чином $f(t)$ прямує до нуля при $|t| \rightarrow \infty$.

Тепер, використовуючи інтегрування по частинах, отримаємо, що

$$\int_{-N}^N f'(t)e^{ixt} dt = [f(t)e^{ixt}]_{-N}^N - ix \int_{-N}^N f(t)e^{ixt} dt. \quad (1.13)$$

При $N \rightarrow \infty$ ліва частина рівності (1.13) сходиться в середньому квадратичному до $\sqrt{2\pi}\Phi(x)$, де $\Phi(x)$ – образ Фур'є функції $\varphi(t) = f'(t)$. Що ж до правої частини рівності (1.13), то по раніше доведеному перший член рівномірно прямує до нуля, а другий член прямує в середньому квадратичному до $-\sqrt{2\pi} \cdot ix F(x)$. Таким чином $\Phi(x) = -ix F(x)$ і необхідний результат виходить тепер з того, що по теоремі Планшереля $\Phi(x)$ належить простору L_2 .

Назад, нехай функція $x F(x)$ належить L_2 і $\varphi(x)$ – її образ. Тоді, оскільки $F(x)$ і $x F(x)$ належать L_2 , то функція $F(x)$ належить не лише простору L_2 , але і простору L_1 . Дійсно, згідно з нерівністю Коши-Буняковського матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(x)(x+i)}{x+i} \right| dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)(x+i)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \|F(x)(x+i)\|_2.$$

Далі, використовуючи наступний ланцюжок рівності, ми отримаємо, що майже усюди

$$\int_0^x \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u F(u) \frac{e^{-ixu} - 1}{-iu} du - C = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ixu} du = if(x) - C.$$

У цьому ланцюжку рівності ми послідовно використали формулу $(V^{-1}F)(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\sigma} - 1}{(-i\sigma)} F(\sigma) d\sigma$ і те, що в просторі L_2 зворотне перетворення Фур'є функції $F(x)$ майже усюди визначає оригінал $f(x)$. Цей оригінал також визначається із зворотного перетворення функції $F(x)$, що

належить простору L_1 . По теоремі Римана-Лебега він неперервний на усій дійсній вісі. Це дозволяє нам записати остаточно рівність у виді

$$\int_0^x \varphi(u) du = if(x) - C,$$

яке буде справедливим для усіх x .

Нарешті, з останньої рівності отримуємо, що $\varphi(x) = if'(x)$. Цей факт і завершує доказ властивості 1.7.

1.8. Перетворення похідної по параметру. Нехай оригінал залежить від параметра λ , $f = f(t, \lambda)$. Тоді зображення також буде функцією двох змінних: $F = F(x, \lambda)$. При дотриманні умов, вказаних в п.1.1.3 [1], має місце формула

$$\left(V \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \right) \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda} F(x, \lambda)$$

чи в загальнішому вигляді

$$\left(V \left(\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} f(t, \lambda) \right) \right) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} F(x, \lambda).$$

На закінчення глави відмітимо, що властивості, розглянуті вище, поширюються (безпосередньо або з деякими обмеженнями) на ширші простори - аж до простору узагальнених функцій.

2. Задача Римана на дійсній вісі

2.1. Задача Римана на дійсній вісі в просторі L_2 .

У цьому пункті центральне місце займає викладання важливої для багатьох застосувань теорії крайової задачі Римана. Ця задача полягає в побудуванні двох функцій, одна з яких аналітична в заданій області, а інша - аналітична в іншій області, доповнююча першу область до усієї комплексної площини. На загальній межі областей шукані аналітичні функції повинні задовольняти лінійному рівнянню, яке називають «крайовою умовою» [3].

У цьому пункті областями аналітичної будуть напівплощини $\text{Im}z > 0$ і $\text{Im}z < 0$, так що крайова умова буде записана на усій дійсній вісі. Буде доцільно записати цю умову для функцій належних L_2 .

2.1.1. *Окремі випадки задачі Римана в просторі L_2 .* Нехай дана крайова умова

$$F^+(x) = A(x)F^-(x) + G(x), -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.1)$$

де функції $A(x)$ і $G(x)$ - відомі. При цьому функцію $A(x)$ називають коефіцієнтом задачі Римана. Припустимо, що $G(x) \in L_2$, а $A(x) = 1 + K(x)$, де

$$K(x) \in L_2. \quad (2.1.2)$$

Крім того, припустимо також, що на усій зімкнутій вісі функція $K(x)$ задовольняє умові Гельдера і що

$$A(x) = 1 + K(x) \neq 0. \quad (2.1.3)$$

Розв'язок F^+ і F^- задачі Римана (2.1.1) - (2.1.3) шукатимемо в просторах L_2^+ і L_2^- , тобто припускатимемо, що

$$F^+(x) \in L_2^+, F^-(x) \in L_2^-. \quad (2.1.4)$$

Конструктивна побудова розв'язку задачі (2.1.1) - (2.1.4) розпочнемо з простих випадків:

Випадок 1. $A(x) \equiv 1, G(x) = 0$. Таким чином, пропонується розв'язати просте завдання

$$F^+(x) = F^-(x). \quad (2.1.5)$$

Застосовуючи до рівності (2.1.5) оператор V^{-1} і враховуючи (2.1.2) - (2.1.3) отримаємо $f_+(x) \equiv f_-(x) \equiv 0$ при $x > 0$ і при $x < 0$. Звідси

$$F^+(x) = F^-(x) \equiv 0. \quad (2.1.6)$$

Отже, має місце наступний результат: якщо функція одночасно належить просторам L_2^+ і L_2^- то вона тотожно дорівнює 0.

Випадок 2. $A(x) = 1$, функція $G(x) \in L_2$ і відмінна від нуля. Тоді крайова умова (2.1.1) набуває вигляду

$$F^+(x) = F^-(x) + G(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.7)$$

Ця ж умова є завданням про "стрибок", тобто ми повинні знайти функції $F^+(z)$ і $F^-(z)$, які під час переходу через дійсну вісь мають стрибок, рівний $G(x)$.

Завдання (2.1.7), (2.1.4) розв'язуються без зусиль. Дійсно, застосовуючи оператор V^{-1} до обох частин рівності (2.1.7) отримаємо:

$$f_+(x) = f_-(x) + g(x) \quad (2.1.8)$$

де $g(x) \in L_2, f_+(x) \in L_{2+},$ а $f_-(x) \in L_{2-}$.

З властивостей функцій $f_{\pm}(x)$ і (2.1.8) витікає, що

$$f_+(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = g_+(x); f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -g(x), & x < 0. \end{cases} = g_-(x). \quad (2.1.9)$$

Отже, завдання про "скачку" при будь-якій функції $G(x)$ з L_2 має єдиний розв'язок

$$F^+(x) = (Vg_+)(x), F^-(x) = (Vg_-)(x), \quad (2.1.10)$$

де функції $g(x)$ визначені рівністю (2.1.9). Іншими словами, отриманий результат можна сформулювати так: всяку функцію $G(x)$ з L_2 можна єдиним чином представити у вигляді різниці:

$$G(x) = G^+(x) - G^-(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.11)$$

де $G^+(x) \in L_2^+$, а $G^-(x) \in L_2^-$. При цьому функції $G^\pm(x)$ визначається рівністю (2.1.10) або що те ж

$$G^+(x) = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x), \quad G^-(x) = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x). \quad (2.1.12)$$

Рівність (2.1.12) називатимемо формулами Ю.В.Сохоцького.

З а у в а ж е н н я . У разі, коли $G(x)$ має громіздкий вигляд, замість позначень $G^+(x)$ і $G^-(x)$ користуватимемося такими: $[G(x)]^+$ і $[G(x)]^-$, де

$$[G(x)]^\pm = \left(V \left\{ \frac{\operatorname{sign} x \pm 1}{2} V^{-1} G \right\} \right)(x). \quad (2.1.13)$$

Випадок 3. $A(x) = \frac{x-i}{x+i}$, $G(x) \equiv 0$. Маємо завдання:

$$F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right) F^-(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.1.14)$$

Один розв'язок цієї задачі очевидний:

$$F_1^+(x) = \frac{1}{x+i} \in L_2^+, \quad F_1^-(x) = \frac{1}{x-i} \in L_2^-. \quad (2.1.15)$$

Покажемо, що будь-яке інший розв'язок $F^+(x)$ $F^-(x)$ завдання (2.1.14), (2.1.4) відрізняється від розв'язку (2.1.15) лише постійним множником. Дійсно, при будь-якій постійній C маємо тотожність:

$$\left(F^+(x) + \frac{C}{x+i} \right) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \left(F^-(x) + \frac{C}{x-i} \right). \quad (2.1.16)$$

Твердження буде доведено, якщо нам вдасться знайти таку постійну C при якій обидві частини рівності (2.1.16) перетворяться на тотожний нуль.

Покладемо $C = 2iF^-(-i)$ (при цьому значенні C у правій частині рівності (2.1.16) ліквідуємо полюс в точці $z = -i$). Очевидно, що

$$F^+(x) + \frac{C}{x+i} \in L_2^+ . \quad (2.1.17)$$

Крім того

$$\Omega(x) \equiv \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \left(F^-(x) + \frac{C}{x-i} \right) \in L_2^- . \quad (2.1.18)$$

У силу (2.1.16)-(2.1.18) функція $\Omega(x)$ належить одночасно просторам L_2^- і L_2^+ отже $\Omega(x) \equiv 0$ (див. (2.1.5)-(2.1.6.)). Твердження доведене.

Випадок 4. $A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi$, де χ - ціле число, більше нуля $G(x) \equiv 0$.

Покажемо, що однорідне завдання

$$F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi F^-(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1.19)$$

має в класах (2.1.4) рівно χ незалежних розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд:

$$F^+(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi \frac{1}{x+i}, \quad F^-(x) = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{\chi-k} \frac{1}{x+i}, \quad (2.1.20)$$

де C_k - постійні. Випадок $\chi=1$ розглянутий вище. Застосовуючи метод математичної індукції, припускаємо, що твердження справедливе при $\chi = n-1$ і доведемо його для $\chi = n$ ($n > 1$). Підставимо в (2.1.19) $\chi = n$. В результаті матимемо рівність

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{n-1} F^-(x) . \quad (2.1.21)$$

Далі, згідно з формулами Ю.В. Сохоцького (2.1.13) ліву частину рівності (2.1.21) представимо у виді

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x). \quad (2.1.22)$$

При цьому представлення (2.1.22) дозволяє надати рівності (2.1.21) форми (2.1.19)

$$\Psi^+(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{n-1} \left[F^-(x) + \Psi^-(x) \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n-1} \right]. \quad (2.1.23)$$

У рівності (2.1.23) ліва частина належить простору L_2^+ , а квадратна дужка - L_2^- . Згідно з припущенням $\Psi^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{k-1} \frac{1}{x+i}$, де C_k - постійні.

Підставляємо $\Psi^+(x)$ у (2.1.22). В результаті матимемо рівність

$$\frac{x+i}{x-i} F^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{k-1} \frac{1}{x+i} - \Psi^-(x)$$

чи

$$F^+(x) - \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \cdot \frac{1}{x+i} = - \left(\frac{x-i}{x+i} \right) \Psi^-(x). \quad (2.1.24)$$

Рівність (2.1.24) є завданням (2.1.14). Як було доведено $\Psi^-(x) = \frac{C_0}{x-i}$, де C_0 - постійна. Отже, формула (2.1.24) встановлена при $\chi = n$, що і вимагалось довести.

2.1.2. Індекс. Основна схема рішення задачі Римана. При дослідженні завдання Римана дуже важливу роль грає індекс коефіцієнта завдання Римана. Визначення індексу відоме [1]. Але зважаючи на специфіку розв'язку задачі Римана для напівплощини в просторах L_2^\pm ми ще раз зупинимося на питанні визначення індексу коефіцієнта $A(x)$. При фіксованому x величина $A(x)$ є комплексним числом, зображеним точкою на комплексній площині. При зміні x від $-\infty$ до $+\infty$ вказана точка опише на комплексній площині криву, яка в силу зроблених раніше припущень буде неперервною і замкнутою.

Крім того, ця крива проходить через точку 1, коли $x = \pm\infty$ і не проходить через початок координат (в силу умови (2.1.3)).

Визначення 2.1.1. Число χ завивок вказаної вище кривої навколо початку координат, відлічуваних проти годинникової стрілки, називається індексом функції $A(x)$ і позначається $\chi = \text{Ind}A(x)$.

$$\text{Відомі формули: } \chi = \text{Ind}A(x) = \frac{1}{2\pi} [\arg A(x)] \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d \text{Ln}A(x).$$

Вирішування задачі Римана і безліч її розв'язків залежить від індексу. Основна схема розв'язку не складна. Проілюструємо цю схему на найпростішому випадку - випадку нульового індексу.

Нехай $\chi = 0$. Приведемо крайову умову (2.1.1) до виду (2.1.11). Припустимо, що нам відоме представлення

$$A(x) = X^+(x) [X^-(x)]^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.25)$$

де функції $X^\pm(x)$ аналітично подовжені відповідно у верхню і нижню напівплощині і не мають там нулів.

Тоді (2.1.1) набуває вигляду:

$$\frac{F^+(x)}{X^+(x)} = \frac{F^-(x)}{X^-(x)} + \frac{G(x)}{X^+(x)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.1.26)$$

Введемо позначення

$$F^+(x) [X^+(x)]^{-1} = F_1^+(x),$$

$$F^-(x) [X^-(x)]^{-1} = F_1^-(x),$$

$$G_1(x) = G(x) [X^+(x)]^{-1}$$

і приходимо до завдання про "стрибок": $F_1^+(x) = F_1^-(x) + G_1(x)$.

Отже, залишилося розв'язати завдання (2.1.14) про "факторизацію" функції $A(x)$. Порівнюючи (2.1.7) і (2.1.25) неважко здогадатися, що для визначення функції $X^+(x)$ і $X^-(x)$ треба прологарифмувати рівність (2.1.25) і розв'язати отримане завдання про "стрибок"

$$\ln X^+(x) = \ln X^-(x) + \ln A(x).$$

З а у в а ж е н н я . У випадку $\chi \neq 0$ реалізація кінцевої схеми виявляється не такою гладкою, оскільки функції $X^+(z)$ і $X^-(z)$ матимуть нулі.

2.1.3. Факторизація функції $A(x)$ у загальному випадку. Нехай функція $A(x) = 1 + K(x)$ задовольняє умовам попереднього пункту. Потрібно її представлення у виді (2.1.25.). Нехай $\chi = \text{Ind}A(x)$. Тоді індекс функції

$$A(x) \cdot \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{\chi} \equiv 1 + C(x) \quad (2.1.30)$$

дорівнює нулю. Очевидно, що функція $C(x)$ належить простору L_2 і задовольняє умові Гельдера. Далі, можна вибрати гілку логарифма так, що функція

$$B(x) = \ln[1 + C(x)] \quad (2.1.31)$$

буде неперервною, причому $B(\pm\infty) = 0$. Більше того, неважко перевірити, що $B(x)$ задовольняє умові Гельдера і належить простору L_2 .

Для функції $B(x)$ застосуємо формулу Ю.В. Сохоцького (2.1.12.)

$$B(x) = B^+(x) - B^-(x) \quad (2.1.32)$$

$$B^+(x) = V \left\{ \frac{\text{sgn } x + 1}{2} V^{-1} B \right\}, \quad B^-(x) = V \left\{ \frac{\text{sgn } x - 1}{2} V^{-1} B \right\}. \quad (2.1.33)$$

Тут $B^+(x) \in L_2^+$ і $B^-(x) \in L_2^-$. Відомо, крім того, що ці функції задовольняють умові Гельдера.

Отримані формули (2.1.19)-(2.1.22) дають шукану факторизацію:

$$A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\chi} e^{B^+(x)} e^{-B^-(x)}. \quad (2.1.34)$$

Доведемо тепер, що функція, визначена рівністю (2.1.31) належить простору L_2 . В силу неперервності функції $C(x)$ і прямуванні її до нуля на

нескінченності, по заданому числу q , $0 < q < 1$ знайдеться число N таке, що $|C(x)| \leq q$ при $|x| \geq N$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{-N} |B(x)|^2 dx + \int_{-N}^N |B(x)|^2 dx + \int_N^{+\infty} |\ln(1 + C(x))|^2 dx$$

Інтеграл в межах $(-N, N)$ очевидно існує. Покажемо, що існують і два інших. Використовуючи нерівність

$$|\ln(1 + C(x))| = \left| C - \frac{C^2}{2} + \frac{C^3}{3} - \dots \right| \leq |C| + |C^2| + \dots \leq \frac{|C|}{1-q},$$

отримаємо, наприклад, для інтервалу в межах (N, ∞)

$$\int_N^{\infty} |\ln(1 + C(x))|^2 dx \leq \frac{1}{(1-q)^2} \int_N^{\infty} |C(x)|^2 dx < \infty.$$

Функції $\exp B^+(x)$ і $\exp B^-(x)$ аналітично подовжені на верхню і нижню напівплощину відповідно і не мають в цих областях нулів, також мають місце властивості:

$$e^{B^+(x)} F^+(x) \in L_2^+, \quad e^{-B^+(x)} F^+(x) \in L_2^+, \quad \text{якщо } F^+(x) \in L_2^+, \quad (2.1.35)$$

$$e^{B^-(x)} F^-(x) \in L_2^-, \quad e^{-B^-(x)} F^-(x) \in L_2^-, \quad \text{якщо } F^-(x) \in L_2^-. \quad (2.1.36)$$

Крім того

$$e^{B^+(\pm\infty)} = 1, \quad e^{B^-(\pm\infty)} = 1. \quad (2.1.37)$$

Отже, факторизація функції $A(x)$ можлива за умов (2.1.24)-(2.1.26) і вона єдина.

2.1.4. Розв'язок задачі Римана в загальному випадку. Тепер ми в змозі розв'язати задачу Римана в загальній постановці, даний в підрозділі 2.1.

Нехай $\chi = \text{Ind}A(x)$. Підставляємо в (2.1.1) замість функції $A(x)$ її факторизацію (2.1.13), отримаємо

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi F^-(x)e^{-B^-(x)} + G(x)e^{-B^+(x)} \quad (2.1.38)$$

Тут $G(x)e^{-B^+(x)}$ - відома функція, що належить простору L_2 . Представимо її у вигляді різниці (див. (2.1.11.)-(2.1.13.)) :

$$G(x)e^{-B^+(x)} = \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \quad (2.1.39)$$

Крайова умова (2.1.1) набере вигляду:

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \quad (2.1.40)$$

Випадок $\chi = 0$. Ліва частина рівності (2.1.40) належить L_2^+ (див. (2.1.14)) а права - простору L_2^- . Відповідно до (2.1.4) маємо:

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- \equiv 0.$$

Отже, у разі нульового індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) має єдиний розв'язок:

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+, \quad F^-(x) = e^{B^-(x)} \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- . \quad (2.1.41)$$

Випадок $\chi > 0$. Надамо рівності (2.1.40) вигляду (2.1.19)

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^\chi \left\{ F^-(x)e^{-B^-(x)} - \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi \left[G(x)e^{-B^-(x)} \right]^- \right\} \quad (2.1.42)$$

(Тут фігурна дужка належить простору L_2^-).

Відповідно до (2.1.20)

$$F^+(x)e^{-B^+(x)} - \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ = \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \quad (2.1.43)$$

З (2.1.43) і (2.1.42) можна знайти функції $F^+(x)$ і $F^-(x)$

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} \left\{ \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^+ + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \right\} \quad (2.1.44)$$

$$F^-(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{B^-(x)} \left\{ \left[G(x)e^{-B^+(x)} \right]^- + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i} \right\} \quad (2.1.45)$$

Неважко переконатися, що формули (2.1.44) і (2.1.45) дають нам розв'язок задачі Римана при будь-яких (комплексних) постійних C_k . Отже, у разі позитивного індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) безумовно вирішувана і однорідна задача має χ лінійно незалежних розв'язків.

Випадок $\chi < 0$. Як і у випадку $\chi = 0$, ліва частина рівності (2.1.40) належить L_2^+ , а права - L_2^- . Прирівнюючи обидві частини рівності (2.1.40) тотожно нулю, знайдемо

$$F^+(x) = e^{B^+(x)} [G(x)e^{-B^+(x)}]^+, \quad F^-(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{+B^-(x)} [G(x)e^{-B^+(x)}] \quad (2.1.46)$$

Отже, у разі негативного індексу задача Римана (2.1.1), (2.1.4) може мати лише єдиний розв'язок (2.1.46). Функція $F^+(x)$ належить простору L_2^+ . Проте функція $F^-(x)$ взагалі кажучи, не належить простору L_2^- оскільки множник $\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi$ має полюс порядку $|\chi|$ у точці $z = i$. Для компенсації цього полюса будемо вимагати, щоб аналітично подовжена в нижню напівплощину функція $[G(x)e^{-B^+(x)}] \equiv N^-(x)$ мала в точці $z = i$ нуль порядку $|\chi|$:

$$\frac{d^k}{dz^k} N^-(x) \Big|_{z=i} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\chi| - 1. \quad (2.1.47)$$

Умови (2.1.47) потрібні і достатні для розв'язку задачі (доказ надається читачеві).

Отримані в останніх трьох випадках результати про залежність від індексу χ вирішуваності задачі Римана і числа її лінійно незалежних розв'язків складає зміст теореми Гахова.

Теорема 2.1.1 (теорема Ф. Д. Гахова). Якщо індекс задачі $\chi > 0$, то однорідна задача Римана безумовно вирішувана і її розв'язок (2.1.44)-(2.1.45) залежать від χ довільних комплексних постійних. Якщо $\chi \leq 0$, то однорідна

задача має лише тривіальний нульовий розв'язок, а неоднорідна задача при дотриманні $|\chi|$ умов вирішуваної (2.1.47) має єдиний розв'язок (2.1.48).

2.2. Крайова задача Римана в просторі узагальнених функцій.

2.2.1. Постановка. Викладений вище спосіб розв'язування задачі Римана виявляється в основному, придатним для розв'язування цього завдання в ширшому просторі $L_2^+\{0, m\}$, де m - ціле позитивне число.

Тепер задача Римана ставиться таким чином. Нехай $A(x)$ - задана функція, що m раз диференціюється, представляється, у виді

$$A(x) = 1 + K(x), \quad K(x) \in L_2^+\{0, -m\}. \quad (2.2.1)$$

Припустимо також, що на зімкнутій вісі x похідна $\frac{d^m}{dx^m} K(x)$ задовольняє умові Гельдера і $A(x) = 1 + K(x) \neq 0$.

Нехай G - задана о.ф. в просторі $L_2^+\{0, m\}$. Знайти о.ф. F^+ і F^- , що задовольняють, умовам

$$F^+ = A(x)F^- + G, \quad (2.2.2)$$

$$F^+ \in L_2^+\{0, m\}, \quad F^- \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.3)$$

Простий за формою запис (2.2.2) потрібно розуміти в наступному сенсі: для будь-яких (основних) функцій $\Phi(x)$ з $L_2^+\{0, -m\}$ повинно мати місце рівність

$$(F^+, \Phi(x)) = (F^-(x), A(x)\Phi(x)) + (G, \Phi(x)).$$

(Неважко перевірити, що $A(x)\Phi(x) \in L_2^+\{0, -m\}$).

2.2.2. Окремі випадки. Як і в п. 2.1, рішення задачі (2.2.2), (2.2.3) розпочнемо з розгляду окремих випадків.

Випадок 1. $F^+ = F^-$. (2.2.4)

Також як і в п.2.1 встановлюємо, що задача (2.2.2), (2.2.3) має єдиний розв'язок:

$$F^+ = F^- = 0. \quad (2.2.5)$$

Випадок 2. $F^+ = F^- + G.$ (2.2.6)

Задача про стрибок (2.2.6), (2.2.3) розв'язується так само як і в п.2.1. Ця задача при будь-якій функції $G \in L_2^+\{0, m\}$ має єдиний розв'язок

$$F^+ = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^+\{0, m\}, \quad (2.2.7)$$

$$F^- = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.8)$$

Для функції G з $L_2^+\{0, m\}$ збережемо позначення:

$$[G]^+ = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x + 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^+\{0, m\},$$

$$[G]^- = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} V^{-1} G \right\} \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.9)$$

Звідси, зокрема

$$[G]^+ - [G]^- = G. \quad (2.2.10)$$

Випадок 3. $F^+ = \left(\frac{x-i}{x+i} \right) F^-.$ (2.2.11)

Це завдання в просторах L_2^+ , L_2^- було розв'язане в п. 2.1 (формула 2.1.15)

$$F^+ = \frac{1}{x+i}, \quad F^- = \frac{1}{x-i}. \quad (2.2.12)$$

Покажемо, що в ширших просторах завдання (2.2.11) не має інших розв'язків: будь-який інший розв'язок F^+ , F^- завдання (2.2.11), (2.2.3) відрізняється від (2.2.12) лише постійним множником.

Доказ аналогічно проведеному в п. 2.1. При будь-якій постійній C маємо тотожність

$$\left(F^+ + \frac{C}{x+i}\right) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^- + \frac{C}{x-i}\right). \quad (2.2.13)$$

Очевидно, що

$$F^+ + \frac{c}{x+i} \in L_2^+\{0, m\}. \quad (2.2.14)$$

Крім того, при

$$C = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_-(t) e^t dt \quad (2.2.15)$$

матимемо

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^+ + \frac{c}{x+i}\right) \in L_2^-\{0, m\}. \quad (2.2.16)$$

З (2.2.14), (2.2.13), (2.2.16) слідує $F^+ + \frac{1}{x+i} = F^- + \frac{1}{x-i} \equiv 0$.

Твердження доведене.

Випадок 4. $F^+ = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^\chi F^-$ (2.2.17)

Тут χ - ціле позитивне число. Завдання має рівно χ лінійно незалежних розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд (2.1.20).

$$F^+ = \sum_{k=0}^{\chi} C_k \left(\frac{x-i}{x+i}\right) \frac{1}{x+i}, \quad F^- = \sum_{k=0}^{\chi} C_k \left(\frac{x+i}{x-i}\right) \frac{1}{x+i}.$$

Д о в е д е н н я цього твердження проводиться так само, як у відповідному випадку, в.п. 2.1.

Дійсно, $\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \left(F^+ + \frac{c}{x+i}\right) = F^- - \frac{2i}{x+i} F^- + \frac{C}{x+i}$. Залишилося показати,

що $F^- - \frac{2i}{x+i} F^- + \frac{C}{x+i} \in L_2^-\{0, m\}$. Далі, вважаючи $K(x) = -\frac{2i}{x+i}$ і

застосовуючи формулу згортки

$$V^{-1} \left\{ F^- - \frac{2i}{x+i} F^- + \frac{C}{x+i} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t) f_-(t) dt - c \begin{cases} -i\sqrt{2\pi} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

з обліком (2.2.15) отримаємо при $x > 0$ $2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x+t} f_-(t) dt + iC\sqrt{2\pi} e^{-x} \equiv 0$.

Необхідне твердження доведене.

2.2.3. Крайова задача Римана. Загальний випадок. Розглянемо тепер завдання (2.2.2) - (2.2.3) при довільній функції $A(x)$, що задовольняє умовам, сформульованим на початку п.2.2.1. З цих умов зокрема, витікає існування індексу функції $A(x)$ (формула (2.1.24)).

$$\chi = \text{Ind}A(x). \quad (2.2.22)$$

Далі до функції $A(x)$ застосовуємо результати п. 2.1, а саме, цю функцію можна представити у виді (2.1.38).

$$A(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\chi} e^{B^+(x)} e^{-B^-(x)},$$

при цьому, зважаючи на сильніші обмеження, накладені на $A(x)$ можна встановити, що функції $B^+(x)$ і $B^-(x)$ належать не лише просторам L_2^+ і L_2^- , але і вужчим просторам $L_2^+\{0, -m\}$ і $L_2^-\{0, -m\}$. У зв'язку з цим матимемо сильніші результати.

$$\text{Саме } \exp\{\pm B^{\pm}(x)\} \Phi(x) \in L_2\{0, -m\}, \text{ якщо } \Phi(x) \in L_2\{0, -m\}. \quad (2.2.23)$$

Властивість (2.2.23) дозволяє множити о.ф. з простору $L_2\{0, m\}$ на функції типу $\exp(B^{\mp}(x))$. При цьому $\exp\{\pm B^{\pm}(x)\} F^{\pm} \in L_2^{\pm}\{0, m\}$, якщо $F^{\pm} \in L_2^{\pm}\{0, m\}$

$$\exp\{\pm B^{\pm}(x)\} F^{\mp} \in L_2^{\mp}\{0, m\}, \text{ якщо } F^{\mp} \in L_2^{\mp}\{0, m\}.$$

Після зроблених зауважень можна прийти до висновку, що увесь хід розв'язку задачі Римана (2.2.2)-(2.2.3) за формою співпадає з процедурою вказаною в пунктах 2.1.1-2.1.3. При цьому замість просторів L_2 , L_2^+ і L_2^- тепер

будуть $L_2\{0, m\}$, $L_2\{0, m\}$ і $L_2\{0, m\}$. Зараз ми не повторюватимемо міркування з п.2.1, а обмежимося формулюванням результатів.

Випадок $\chi = 0$. Задача Римана (2.2.2), (2.2.3) має безумовний і єдиний розв'язок

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+; F^- = e^{B^-(x)}[e^{-B^-(x)}G]^-. \quad (2.2.24)$$

Випадок $\chi > 0$. Завдання (2.2.2), (2.2.3) безумовно вирішувана. Однорідне завдання має χ лінійно незалежних розв'язків. Загальний розв'язок знаходиться по формулах:

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+ + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i}, \quad (2.2.25)$$

$$F^- = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi e^{B^-(x)}[e^{-B^-(x)}G]^- + \sum_{k=0}^{\chi-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i}. \quad (2.2.26)$$

Випадок $\chi < 0$. Задача Римана (2.2.2), (2.2.3) може мати лише єдиний розв'язок

$$F^+ = e^{B^+(x)}[e^{-B^+(x)}G]^+, F^- = e^{B^-(x)} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^-(x)}G]^-. \quad (2.2.27)$$

Формули (2.2.27) будуть розв'язком задачі Римана тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^-(x)}G]^- \in L_2\{0, m\}. \quad (2.2.28)$$

Надамо умові вирішуваної (2.2.28) простішому вигляду. На основі $(F^-, \Phi^-(x)) = 0$ і правила множення узагальненої функції на звичайну функцію маємо

$$0 = \left(\left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi [e^{-B^-(x)}G]^-, \Phi^-(x) \right) = \left([e^{-B^-(x)}G]^-, \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^\chi \Phi^-(x) \right).$$

Тут $\Phi^-(x) \in L_2\{0, -m\}$. Виділимо головну частину функції $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^\chi \Phi^-(z)$,

що має при $z = -i$ полюс порядку $|\chi|$:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^\chi \Phi(x) = \frac{C_1}{x+i} + \dots + \frac{C_{-\chi}}{(x+i)^{-\chi}} + \Omega^-(x).$$

Тут C_k - постійні, а $\Omega^-(x) \in L_2\{0, m\}$. У силу $(F^-, \Phi^-(x)) = 0$ умова (2.2.28)

$$\text{рівносильно наступному } \left(\left[e^{-B^+(x)} \Gamma \right]^-, \frac{C_1}{x+i} + \dots + \frac{C_{-\chi}}{(x+i)^{-\chi}} \right) = 0$$

$$\text{чи, що те ж } \left(\left[e^{-B^+(x)} \Gamma \right]^-, \frac{1}{(x+i)^k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|,$$

Але в силу $\left(V \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t) f dt, \Phi(x) \right) = (K(x)F, \Phi(x))$ завжди маємо

$$\left(\left[e^{-B^+(x)} G \right]^+, \frac{1}{(x+i)^k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|. \text{ Тому на основі правила (2.2.5) і}$$

формули (2.2.10)

$$0 = \left(\left(\left[e^{-B^+(x)} G \right]^+ - \left[e^{-B^+(x)} G \right]^- \right), \frac{1}{(x+i)^k} \right) = \left(e^{-B^+(x)} G, \frac{1}{(x+i)^k} \right) = \left(\Gamma g, e^{-B^+(x)} \frac{1}{(x+i)^k} \right), k = 1, 2, \dots, |\chi|$$

Отже, для вирішуваної задачі Римана (2.2.2), (2.2.3) у разі негативного індексу потрібні і достатні умови:

$$\left(G, e^{-B^+(x)} (x+i)^{-k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, |\chi|. \quad (2.2.29)$$

Отриманий розв'язок задачі Римана неперервно залежить від G . Дійсно, має місце Теорема:

Теорема 2.2.1. Рішення F^+, F^- задачі Римана неперервно залежить від G . Саме, мають місце оцінки

$$\left\| e^{B^+(x)} \left[e^{-B^+(x)} G \right]^+ \right\|^{0,m} \leq C^+ \|G\|^{0,m}, \quad (2.2.30)$$

$$\left\| \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{\aleph} e^{B^-(x)} \left[e^{-B^+(x)} G \right] \right\|^{0,m} \leq C^- \|G\|^{0,m}. \quad (2.2.31)$$

Тут постійні C^+ і C^- не залежать від G .

Д о в е д е н н я. Узагальнені функції, що стоять під знаком норм в лівих частинах нерівностей (2.4.30) - (2.4.31) є результатом дії на узагальнену функцію G операторів множення і операторів типу $[..]^{\pm}$. Усі вказані оператори обмежені. Їх добуток, як відомо, також обмежений, що вимагається довести.

2.3. Особливий випадок однорідної задачі Римана на дійсній вісі в узагальнених функціях.

Розглянемо однорідну задачу Римана виду

$$F^+ D(x) = F^-(x), \quad (2.3.1)$$

де $D(x) = x D_1(x)$, а функція $D_1(x) = \frac{x+i}{x} D(x) \neq 0$ на усій дійсній вісі задовольняє умові Гельдера, причому $\chi = \text{Ind}(D_1(x))^{-1} = n$. При цьому припустимо, що

$$\frac{x}{x+i} F^+ \in L_2^+, \quad (2.3.2)$$

а

$$F^- \in L_2^-. \quad (2.3.3)$$

Запишемо задачу Римана (2.3.1)-(2.3.3) у виді $F^+ \frac{x}{x+i} = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^n D_2(x) F^-$,

де функція $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^n \cdot D_1^{-1}(x)$ має нульовий індекс. Тоді згідно п. 2.1.4

матимемо

$$F^+ \cdot \frac{x}{x+i} = X^+(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x+i},$$

$$F^-(x) = X^-(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^{n-k} \frac{1}{x+i},$$

$$X^\pm(x) = \exp \left\{ V \left(\frac{\operatorname{sgn} t \pm 1}{2} \right) (V^{-1} D_2)(t) \right\} (x).$$

При цьому узагальнена функція F^+ визначається так:

$$F^+ = X^+(x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k \frac{1}{x} + C_n \delta(x).$$

Далі ми обмежимося випадком, коли $\chi = 1$. Саме цей випадок буде надалі затребуваний. Отже, при $\chi = 1$ маємо

$$F^+ = C_0 X^+(x) \cdot \frac{1}{x} + C_1 \delta(x),$$

де функція F^+ знаходиться з факторизації функції $D_2(x) = \left(\frac{x+i}{x-i} \right) \cdot D_1(x)$, а $\delta(x)$ – функція Дираку. При цьому постійні C_0 , C_1 вибираються так, щоб оригінал функції F^+ звернувся при $x < 0$ у нуль.

Визначимо структуру отриманого розв'язку. З цією метою функцію $F^+(x)$ представимо у виді.

$$F^+(x) = C_0 E^+(x) + \frac{C_0 X^+(0)}{x} + C_1 \delta(x), \quad (2.3.4)$$

де

$$E^+(x) = \frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}. \quad (2.3.5)$$

Застосуємо тепер до обох частин рівності (2.3.5) зворотне перетворення Фур'є. в результаті матимемо

$$f_+(t) = \begin{cases} C_0 X^+(0) \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, t < 0 \\ -C_0 \cdot e_+(u) - C_0 X^+(0) \cdot i \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}}, t > 0 \end{cases}, \quad (2.3.6)$$

де

$$e_+(u) = (V^{-1} E^+)(u). \quad (2.3.7)$$

Оскільки функція $f_+(t)$ повинна перетворюватися на нуль при $t < 0$, то з рівності (2.3.6) негайно витікає, що постійні C_0 і C_1 пов'язані між собою таким чином

$$C_1 = -\pi i C_0 X^+(0). \quad (2.3.8)$$

Цей факт дозволяє стверджувати, що однорідна задача Римана (2.3.1) - (2.3.3) при $\chi = 1$ має одне лінійно незалежний розв'язок. При цьому функція F^+ визначається з (2.3.4) з урахуванням співвідношення, а функція F^- через крайову умову (2.3.1). З обліком (2.3.8) остаточний розв'язок буде такий:

$$F^+(x) = C_0 \cdot \left(E^+(x) + \frac{X^+(0)}{x^+} \right), F^-(x) = \frac{C_0 X^+(0) \cdot X^-(x)}{x - i},$$

де C_0 – довільна комплексна постійна. При цьому відмітимо, що знайдені функції дійсно задовольняють умовам (2.3.2)-(2.3.3). Цей факт встановлюється безпосередньо.

3. Постановка узагальненої задачі теорії ризику .

Нехай u - початковий капітал страхової компанії; $T_i, U_i, i \geq 1$ - послідовність моментів і розмірів виплат відповідно; N_t - число страхових виплат за проміжок часу $[0, t]$.

Визначимо процес ризику $R_t, t \geq 0$, рівнянням балансу

$$R_t = u + S(t) - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

де U_i послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $B(t) = P(U_1 < t)$. При цьому в моделі, яку ми розглядаємо, передбачається, що випадкові величини $\theta_i = T_i - T_{i-1}, i \geq 1$ також незалежні, однаково розподілені величини з функцією розподілу $K(t) = P(\theta_1 < t)$, $S(t) \geq 0$ - зростаюча неперервна функція.

Передбачається також, що два набори випадкових величин $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ і $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots\}$ взаємно незалежні; N_t і $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ також взаємно незалежні.

Ймовірність не банкрутства страхової компанії визначається так:

$$\varphi(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} R_t > 0 \mid R_0 = u\right). \quad (3.1)$$

3.1. Методи розв'язку узагальненої задачі теорії ризику .

Теорема 3.1. Нехай рівняння балансу має вигляд

$$R_t = u + S(t) - A_t \left(A_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right), \quad \text{де } S(t) \geq 0 (S(0) = 0, S(\infty) = \infty) \quad - \text{ зростаюча}$$

неперервна функція. Тоді ця функція задовольняє рівнянню

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{u+S(\tau)} \varphi(u + S(\tau) - x) dB(x) dK(\tau). \quad (3.2)$$

Теорема 3.2. Рівняння (3.2) еквівалентно задачі сполучення, яке представляє собою однорідну задачу Римана для напівплощини

$$\Phi^+(x)D(x) = \Phi^-(x) \quad (3.4)$$

де $D(x) = 1 - R(x) \cdot \varphi_B(x)$, $R(x) = \int_0^{\infty} e^{-ixS(t)} dK(t)$,

$$\varphi_B(x) = \int_0^{\infty} e^{ixt} dB(t), \quad (3.5)$$

а шукані функції $\Phi^{\pm}(x)$ належать відповідно до просторів узагальнених функцій, а саме

$$\Phi^{\pm}(x) \in L_2^{\pm}\{0,1\} \quad (3.6)$$

Теорема 3.3. (про структуру розв'язку узагальненого рівняння теорії ризику).

Нехай виконуються такі умови:

1) \tilde{K} має щільність розподілу; 2) $\nu > \mu$; 3) $\chi = \text{Ind}(D_1^{-1}(x)) = 1$, де функція $D_1(x) = \frac{x+i}{x} D(x)$. Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi X^+(0)}} e_+(u). \quad (3.7)$$

Тут функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = \exp\left\{V\left(\frac{\text{sgn}t + 1}{2}\right)(V^{-1}D_1^{-1}\left(\frac{x+i}{x-i}\right))(t)\right\}(x),$$

$$E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u).$$

3.2. Приклади точних розв'язків.

Розглянемо конкретні приклади розв'язків рівняння (3.2) у разі, коли U_i послідовність однаково розподілених ненегативних випадкових функцій.

Приклад 3.1. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$, $b(t) = \mu e^{-\mu t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{2}{\beta_0} > \frac{1}{\mu}. \quad (3.8)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння балансу (3.2) еквівалентне задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)(x-i\beta_0)^2}{(x-i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.9)$$

де

$$\delta_2 = \frac{\mu - 2\beta_0 + \sqrt{(2\beta_0 - \mu)^2 + 4(2\beta_0\mu - \beta_0^2)}}{2} > 0.$$

Умова (3.9) дозволяє стверджувати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ (3.9) задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.9) дорівнює 1.

Далі, відповідно до теореми 3.3. отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{(\mu - \delta_2)}{\mu} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.2. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \mu e^{-\mu t}$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)(x-i\beta_0)}{(x+i\mu-i\beta_0)(x+i)} \Phi^-(x) \quad (3.10)$$

у якої індекс коефіцієнта дорівнює 1, а постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність $\frac{1}{\beta_0} > \frac{1}{\mu}$.

Розв'язуючи задачу Римана (3.10) за схемою, вказаною при доведенні теореми 3.3 і застосовуючи зворотне перетворення Фур'є для функції $\Phi^+(x)$ матимемо

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\beta_0}{\mu} e^{-(\mu-\beta_0)u}.$$

Приклад 3.3. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{1}{\beta_0} > \frac{2}{\mu}. \quad (3.11)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)^2(x-i\beta_0)}{(x+i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.12)$$

де

$$\delta_{1,2} = \frac{2\mu - \beta_0 \pm \sqrt{(2\mu - \beta_0)^2 + 4(2\beta_0\mu - \mu^2)}}{2}.$$

Як і раніше, можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовільняють нерівності: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана дорівнює 1. Ці факти витікають з нерівності (3.11).

Далі, відповідно до теореми 3.3 отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{\mu^2} \frac{(\delta_1 - \mu)^2}{\delta_2 - \delta_1} e^{-\delta_1 u} - \frac{\delta_1}{\mu^2} \frac{(\delta_2 - \mu)^2}{\delta_1 - \delta_2} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.4. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}$, $k(t) = \beta^2 e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому

виконується нерівність

$$\frac{2}{\beta_0} > \frac{2}{\mu}. \quad (3.13)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння балансу (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+i\mu)^2 (x-i\beta_0)^2}{(x-i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i(\mu-\beta_0))(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.14)$$

де

$$\delta_1 = \frac{-\mu + \beta_0 + \sqrt{(\mu - \beta_0)^2 + 8\beta_0\mu}}{2} > 0,$$

$$\delta_2 = \frac{\mu - \beta_0 + \sqrt{(\mu - \beta_0)^2 + 8\beta_0\mu}}{2} > 0.$$

Знову ж таки можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.14) дорівнює 1. Ці твердження витікають з нерівності (3.13).

Далі, відповідно до теореми 3.2 отримаємо розв'язок рівняння (3.2) :

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{\mu^2} \frac{\beta_0^2}{\beta_0 + \delta_2 - \mu} e^{-(\mu-\beta_0)u} - \frac{(\mu - \beta_0)}{\mu^2} \frac{(\delta_2 - \mu)^2}{\mu - \beta_0 - \delta_2} e^{-\delta_2 u}.$$

Приклад 3.5. Нехай $S(t) = ct$, $b(t) = \alpha p_1 e^{-p_1 t} + (1 - \alpha) p_2 e^{-p_2 t}$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і

$\beta_0 = \frac{\beta}{c}$, причому виконується нерівність

$$\frac{1}{\beta_0} > \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}. \quad (3.15)$$

Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Відповідно до умов 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = \frac{(x+ip_1)(x+ip_2)(x-i\beta_0)}{(x+i\delta_1)(x+i\delta_2)(x+i)} \Phi^-(x), \quad (3.16)$$

де

$$\delta_{1,2} = \frac{p_1 + p_2 - \beta_0 \pm \sqrt{(p_1 + p_2 - \beta_0)^2 + 4((1-\alpha)\beta_0 p_1 + \alpha\beta_0 p_2 - p_1 p_2)}}{2}.$$

Можна показати, що введені постійні $\delta_{1,2}$ задовольняють нерівностям: $\delta_{1,2} > 0$, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.16) дорівнює 1. Ці факти витікають з нерівності (3.15).

Нарешті, згідно з схемою описаної вище отримаємо шуканий розв'язок

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\delta_2}{p_1 p_2} \frac{(p_1 - \delta_1)(p_2 - \delta_1)}{\delta_2 - \delta_1} e^{-\delta_1 u} - \frac{\delta_1}{p_1 p_2} \frac{(p_1 - \delta_2)(p_2 - \delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} e^{-\delta_2 u}. \quad (3.17)$$

Відмітимо, що при $\beta_0 = 3, p_1 = 3, p_2 = 7, \alpha = \frac{1}{2}$ формула (3.17) повністю співпадає з формулою, яка приведена в монографії Асмуссена [стор. 64].

Приклад 3.6. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \beta e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3 і умовами теореми 3.2 рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x) \quad (3.18)$$

де

$$D_1(x) = \frac{(x - i\beta_0 + i\beta_0\sqrt{2\pi\varphi_B})(x+i)}{(x - i\beta_0)x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x - i\beta_0)}{(1 - \beta_0\mu\sqrt{2\pi\varphi_{B_1}})(x+i)} = \frac{(x - i\beta_0)}{D_0^+(x)(x+i)},$$

де

$$\varphi_{B_1} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^\infty e^{ix} (1 - B(x)) dx.$$

Тут постійні μ і β_0 передбачаються такими, що виконується нерівність: $\frac{1}{\beta_0} > \mu$. При цьому очевидно, що функція $D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.18) дорівнює 1. При цих припущеннях рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi X^+(0)}} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u).$$

Приклад 3.7. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \beta^2 t e^{-\beta t}$ і $\beta_0 = \frac{\beta}{c}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к . Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2. рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x), \quad (3.19)$$

де

$$D_1(x) = \frac{((x - i\beta_0)^2 + \beta_0^2 \sqrt{2\pi\varphi_B})(x+i)}{(x - i\beta_0)^2 x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ завдання (3.19) можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x - i\beta_0)^2}{(x - is_0)(1 + D_0^+(x)\sqrt{2\pi})(x + i)},$$

де

$$D_0^+(x) = \beta_0^2 \int_0^\infty e^{ixt} G(t) dt, G(x) = \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} (1 - B(t)) dt,$$

s_0 - позитивний корінь трансцендентного рівняння :

$$L(s) = c^2 s - 2\beta c + \beta^2 \int_0^\infty e^{-st} \bar{B}(t) dt = 0, s > 0. \text{ Існування кореня виходить з}$$

властивостей функції:

$$1) L(0) = -2\beta c + \beta^2 \mu < 0;$$

$$2) \lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) = +\infty.$$

Постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність: $\frac{2}{\beta_0} > \mu$. Очевидно, що

функція $1 + \sqrt{2\pi} D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, і індекс коефіцієнта задачі Римана (3.19) дорівнює 1.

Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi} X^+(0)} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1} E^+)(u).$$

Приклад 3.8. Нехай $S(t) = ct$, $k(t) = \alpha p_1 e^{-p_1 t} + (1 - \alpha) p_2 e^{-p_2 t}$, $b(t) = \mu e^{-\mu t}$ і $q_i = \frac{p_i}{c}, i = \overline{1, 2}$. Треба знайти розв'язок рівняння (3.2).

Р о з в ' я з о к. Згідно з умовами 2) - 3) теореми 3.3. і умовами теореми 3.2 рівняння (3.2) еквівалентно задачі Римана

$$\Phi^+(x) \frac{x}{x+i} = D_1^{-1} \Phi^-(x), \quad (3.20)$$

де

$$D_1(x) = \frac{((x-iq_1)(x-iq_2) + (iq_1\alpha(x-iq_2) + iq_2(1-\alpha)(x-iq_1))\sqrt{2\pi\varphi_B})(x+i)}{(x-iq_1)(x-iq_2)x}$$

Коефіцієнт $D_1^{-1}(x)$ задача Римана (3.20) можна спростити, а саме

$$D_1^{-1} = \frac{(x-iq_1)(x-iq_2)}{(x-is_0)(1+\sqrt{2\pi}D_0^+(x))(x+i)},$$

де

$$D_0^+(x) = \int_0^\infty e^{ixt} G(t) dt, \quad G(x) = q_1 q_2 \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} (1-B(t)) dt + (q_1\alpha + q_2(1-\alpha)) \int_x^\infty e^{-s_0(t-x)} dB,$$

$$\gamma_1 = c(p_1 + p_2), \quad \gamma_2 = c(p_1\alpha + p_2(1-\alpha)).$$

s_0 - позитивний корінь трансцендентного рівняння:

$$L(s) = c^2 s - \gamma_1 + \gamma_2 \int_0^\infty e^{-st} dB + p_1 p_2 \int_0^\infty e^{-st} \bar{B}(t) dt, \quad s > 0,$$

Існування кореня виходить з властивостей функції:

$$1) L(0) = -\gamma_1 + \gamma_2 + p_1 p_2 \mu = -c(\alpha_1 p_2 + \alpha_2 p_1) + p_1 p_2 \mu < 0;$$

$$2) \lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) = +\infty.$$

Тут постійні μ і β_0 такі, що виконується нерівність: $\frac{\alpha}{q_1} + \frac{1-\alpha}{q_2} > \mu$. При

цих припущеннях функція $D_0^+(x)$ не має нулів у верхній напівплощині, а індекс коефіцієнта задачі Римана (3.20) дорівнює 1. Тоді рівняння (3.2) має єдиний розв'язок і його структура така:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{i}{\sqrt{2\pi} X^+(0)} e_+(u),$$

де функція $e_+(x)$ послідовно будується по формулах

$$X^+(x) = D_0^+, E^+(x) = -\frac{(X^+(x) - X^+(0))}{x}, e_+(u) = (V^{-1}E^+)(u).$$

З а у в а ж е н н я 1. Якщо ввести ймовірність розорення $\psi(u)$ рівну $1 - \varphi(u)$, то враховуючи останню рівність рівняння (3.2) можна записати у такому вигляді:

$$\psi(u) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{u+S(\tau)} \psi(u+S(\tau)-x) dB(x) dK(\tau) + \int_0^{\infty} (1 - B(u+S(\tau))) dK(\tau). \quad (3.21)$$

З а у в а ж е н н я 2. За допомогою перетворення Фур'є рівняння (3.21) можна звести до неоднорідної задачі Римана.

Враховуючи ймовірнісний сенс функції $\psi(u)$ її потрібно шукати в просторі L_2^+ .

Висновок

Слід зазначити, що в теорії ймовірності, при дослідженні інтегральних рівнянь відновлення, зокрема в теорії ризику плідно використовується метод факторизації. У оглядовій статті про це досить детально написано.

У теорії ризику застосування перетворення Фур'є (Лапласа), видно, належить Крамеру Г. Досить повна інформація про розвиток класичної теорії ризику і застосування для цієї мети перетворення Фур'є або Лапласа викладено у статті Калашникова В. В., Констандиниса Д.

До 2000 року дослідження по теорії ризику проводилися з використанням інтегральних або інтегро-дифференціальних рівнянь вольтерівського типу з постійними коефіцієнтами. І ось в 2000 році з'явилася стаття Асмунсена, в якій він, при вивченні узагальненої теорії ризику, уперше розглянув рівняння

$$p(x)g(x) = \gamma_0 k(x) + \int_0^x k(x-t)g(t)dt,$$

$$\text{де } \gamma_0 = 1 - \int_0^{\infty} g(t)dt.$$

Сам Асмунсен, при довільному ядрі, обмежився випадком, коли $p(x) = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases}$.

Подальше дослідження рівняння, пов'язані з роботами Керекеші Д.П. Вказані роботи і раніше неопубліковані ним результати, що відносяться до узагальненої теорії ризику, стали змістом глави 3.

Література

- 1) Черский Ю. И., Керекеша П. В., Керекеша Д. П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями. – М.: Астропринт, 2010 – 551 с.
- 2) Справочник по теории вероятностей и математической статистике / под ред. В. С. Королюка / Наукова думка., 1978. – 582 с.
- 3) Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнение типа свёртки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
- 4) Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
- 5) Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 738 с.