

УДК 517.925.7

В. В. Никоненко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Теорія стійкості, теорія коливань у диференціальних рівняннях,
крайові задачі рівнянь математичної фізики” ОНУ 17.04.2003 р.

Одержані нові достатні ознаки існування о-розв’язків при $z \rightarrow 0$ у сингулярних у точці $z = 0$ квазілінійних диференціальних систем типу (1).

Получены новые достаточные признаки существования о-решений при $z \rightarrow 0$ у сингулярных в точке $z = 0$ квазилинейных дифференциальных систем типа (1).

The new sufficient indications of existence o-solutions under $z \rightarrow 0$ of singular in point $z = 0$ of quasilinear differential systems (1) are obtained.

Проблема существования о-решений сингулярных в точке $x = 0$ (или $x = +\infty$) вещественных систем ОДУ достаточно полно исследована в работах [1]–[4]. В случае комплексных систем с комплексным аргументом классические результаты получены Мальмквистом (см. [5, гл. IV, §14]) для систем ОДУ, правые части которых имеют особую точку $z = \infty$ типа полюс. Несмотря на имеющиеся работы по изучению комплексных систем (см. [6], библиография), задача об обобщении метода Мальмквиста на системы более общего вида оставалась неисследованной (лишь частично этот вопрос был рассмотрен в работе автора [7]). Результаты настоящей работы применимы к системам общего вида

$$X' = Q(z) + P(z)Y + F(z, Y), \quad X = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad z \in D \quad (\text{см. систему (1)}),$$

с особенностью в точке $z = 0$, если известно преобразование $X = U(z)Y$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, где $U(z)$ аналитична в D и $\det U(z) \neq 0$, приводящее указанную систему к системе типа (1). Построение преобразований типа $U(z)$ рассмотрено в [8] ($z \in R$), а также в работах автора (см. [7]).

1. Объект исследования. В дальнейшем исследуется комплексная система

$$\frac{dy_k}{dz} = q_k(z) + \lambda_k(z)y_k + \sum_{s=1}^n p_{ks}(z)y_s + F_k(z, y_1, \dots, y_n) \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1)$$

где

$$1) \quad z \in D = \{z \mid z = r \exp i\varphi, r \in I = (0, R], R \in (0, +\infty] = R_+, \varphi_1(r) < \varphi < \varphi_2(r) \quad (r \in I)\},$$

$$\varphi_j(r) \in C(\bar{I}) \cap C^1(I) \quad (\bar{I} = [0, R]), \quad R \exp i\varphi_j(R) = z_0 \quad (j = 1, 2),$$

$$2) \quad Y = (y_1, \dots, y_n) \in G = \left\{ Y \mid \|Y\| = \max \left\{ |y_k| \mid (k = \overline{1, n}) \right\} \leq b \in R_+ \right\},$$

$$3) \quad \text{функции } q_k(z), \lambda_k(z) = u_k(z) + i v_k(z), \quad p_{ks}(z) \in C^\infty(D) \quad (k, s = \overline{1, n}),$$

$$(u_k(z) = \operatorname{Re} \lambda_k(z), \quad v_k(z) = \operatorname{Im} \lambda_k(z), \quad (k = \overline{1, n})),$$

4) $F_k(z, Y) \in C_{(z, Y)}^\infty(D \times G)$ ($k = \overline{1, n}$), $F_k(z, 0) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n}$) и выполняется условие Липшица ($r = |z|$)

$$\|F_k(z, Y_2) - F_k(z, Y_1)\| \leq L_k(r, b) \|Y_2 - Y_1\|, \quad (z, Y_k) \in D \times G \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$L_k(r, b) \in C(I) : I \rightarrow R_+ \quad (k = \overline{1, n}),$$

5) функции $\Lambda_k(z, z_0) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \lambda_k(\tau) d\tau$ ($k = \overline{1, n}; z \in D$) таковы, что:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Lambda_k(z, z_0) > -\infty \quad (k \in K_1 = \{1, \dots, v_1\}), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Lambda_k(z, z_0) = -\infty \quad (k \in K_2 = \{v_1 + 1, \dots, n\})$$

($v_1 \leq n; K_2 = \emptyset$, если $v_1 = n$), $\forall k \in K_1$ ($\forall k \in K_2$) и $\forall z \in D$ $\exists$ линия $\mathcal{L}_k = l_{0, z}^k$ ($\mathcal{L}_k = l_{z_0, z}^k$),

имеющая уравнение $\zeta = \rho \exp i\varphi_\varpi(\rho) = x_\varpi(\rho) + iy_\varpi(\rho)$, где $\varpi = (k, z)$,

$\rho \in I_z = [0, |z|]$ ($k \in K_1$), $\rho \in I_z = [|z|, R]$ ($k \in K_2$), $\frac{d}{d\rho} \varphi_\varpi(\rho) - R$ -интегрируема в I_z ,

$$\Lambda_k(\zeta, z) = \operatorname{Re} \int_{\zeta}^z \lambda_k(\tau) d\tau \leq 0 \quad (\zeta, \tau \in \mathcal{L}_k) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Будем исследовать вопрос о непустоте множества W_1 аналитических в D решений $Y = (y_1(z), \dots, y_n(z))$ системы (1) с условием $Y(z) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D$).

2. Обозначения, леммы.

1. Если $f(z) \in C^\infty(D)$, то $f^*(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(r \exp i\varphi)|$ ($r = |z|$, $\varphi = \arg z$).

2. $f(z) \in R(D)$ означает в дальнейшем выполнение условий:

$$f(z) \in C^\infty(D), \quad \int_0^R f^*(r) dr < +\infty.$$

3. Через W_2 условимся обозначать множество типа W_1 для уравнения (2).

4. Если $q(z) \in C^\infty(D)$, то условимся обозначать (формально)

$$I_k(q, \lambda_k) = \int_{\mathcal{L}_k} q(\zeta) \exp \int_{\zeta}^z \lambda_k(\tau) d\tau d\zeta, \quad J_k(q, \lambda_k) = \int_{\mathcal{L}_k} q^*(|\zeta|) \exp \operatorname{Re} \int_{\zeta}^z \lambda_k(\tau) d\tau |d\zeta|,$$

$$I_k^0(q, \lambda_k) = \sup_D J_k(q, \lambda_k) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Очевидно, что $|I_k(q, \lambda_k)| \leq J_k(q, \lambda_k) \leq I_k^0(q, \lambda_k)$ ($k = \overline{1, n}$).

5. В дальнейшем $\varphi'_\varpi(\rho)$, $x'_\varpi(\rho)$, $y'_\varpi(\rho)$ означают производные по ρ .

Лемма 1. Пусть $f(z) \in R(D)$. Тогда функция $I(z) = \int_{l_{0, z}^k} f(\zeta) d\zeta \in C^\infty(D)$ ($k \in K_1$) (а),

$I(z) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D$) (б), $I'(z) \equiv f(z)$ ($z \in D$) (с).

Доказательство. Существование $I(z)$ и свойства (а), (б) следуют из оценки

$$|I(z)| \leq \int_0^{|z|} f^*(\rho) \left| e^{i\varphi_\varpi(\rho)} + \rho e^{i\varphi_\varpi(\rho)} \varphi'_\varpi(\rho) \right| d\rho \leq \left(1 + |z| \sup_{[0, |z|]} |\varphi'_\varpi(\rho)| \right) \int_0^{|z|} f^*(\rho) d\rho.$$

Пусть, далее, $z \in D$, $z + \Delta z \in D$, $z_1 \in I_{0,z}^k$, $z_2 \in I_{0,z+\Delta z}^k$, $|z_j| = r_1 > 0$ ($j=1,2$). Тогда по теореме Коши

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_2}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta + \int_{z+\Delta z}^z f(\zeta) d\zeta + \int_z^{z_1} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

где будем считать $\zeta_1 = r_1 \exp i\varphi$, $\varphi \in [\arg z_1, \arg z_2]$, а отрезок $[z, z + \Delta z]$ прямолинейным. Фиксируя z и полагая $r_1 \rightarrow 0$, в пределе получим

$$\Delta I(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+\Delta z} (f(z) + (f(\zeta) - f(z))) d\zeta = f(z)\Delta z + o(|\Delta z|)$$

откуда следует свойство (с).

Лемма 2. Для того чтобы скалярное уравнение

$$\frac{dy}{dz} = q(z) + \lambda_k(z)y \quad (k \in K_1, z \in D), \quad q(z) \in C^\infty(D), \quad (2)$$

обладало свойством $W_2 \neq \emptyset$, необходимо, чтобы $\forall z \in D \exists$ интеграл $I_k(q, \lambda_k)$ и достаточно, чтобы выполнялись свойства:

$$J_k(q, \lambda_k) = o(1) \quad (z \rightarrow 0, z \in D), \quad \varphi(z) = q(z) \exp \left(- \int_{z_0}^z \lambda_k d\tau \right) \in R(D).$$

При этом $I_k(q, \lambda_k) \in W_2$ и является единственным элементом этого множества.

Доказательство. Общее решение уравнения (2)

$$y(z) = y(z, y(z_0)) = \exp \int_{z_0}^z \lambda_k d\tau \left(y(z_0) + \int_{z_0, z} \varphi(\zeta) d\zeta \right). \quad (3)$$

Фиксируя $z \in D$, рассмотрим вспомогательное выражение $y(z_1, y(z_0))$ ($z_1 \in I_{0,z}^k$). Полагая в последнем $z_1 \rightarrow 0$ и учитывая свойство 5), получим необходимое условие

$$y(z_0) = - \int_{I_{0,z}^k} \varphi(\zeta_1) d\zeta_1 - \int_{z_0, z} \varphi(\zeta) d\zeta \quad (4)$$

для выполнения свойства $y(z) \in W_2$. Подставляя (4) в (3), получим $y(z) = I_k(q, \lambda_k)$. Из леммы 1 легко следует, что $I_k(z, \lambda_k)$ удовлетворяет уравнению (2).

Лемма 3. Для того чтобы все решения уравнения (2), где $k \in K_2$, обладали свойством $y(z) \in W_2$, необходимо и достаточно, чтобы $I_k(q, \lambda_k) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D$), и достаточно, чтобы $J_k(q, \lambda_k) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D$).

Доказательство. Справедливость леммы непосредственно следует из формулы общего решения уравнения (2)

$$y(z, y(z_0)) = y(z_0) \exp \int_{z_0}^z \lambda_k d\tau + I_k(q, \lambda_k).$$

3. Теорема 1, леммы 4, 5, теорема 2.

Теорема 1. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1)–5) и следующим условиям:

$$6) \quad I_k^0(q_k, \lambda_k) \leq Q_0 \in R_+, \quad I_k^0 \left(\sum_{s=1}^n |p_{ks}|, \lambda_k \right) \leq P_0 \in R_+,$$

$$I_k^0(L_k(|z|, b), \lambda_k) \leq \mathcal{L}_0(b) \in R_+ \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$7) \quad P_0 + \mathcal{L}_0(b) < 1, \quad Q_0 < b(1 - P_0 - \mathcal{L}_0(b)),$$

$$8) \quad J_k \left(|q_k| + \left(\sum_{s=1}^n |p_{ks}| + \mathcal{L}_k(|z|, b) \right) |\varepsilon(z)|, \lambda_k \right) = o(1)$$

($z \rightarrow 0$, $k = \overline{1, n}$) при любой функции $\varepsilon(z) = o(1)$ ($z \rightarrow 0$, $z \in D$). Тогда множество $W_1 \neq \emptyset$ и зависит от $n - \nu_1$ произвольных постоянных $y_i(z_0)$ ($i \in K_2$), таких, что

$$(M\delta + Q_0)(1 - P_0 - \mathcal{L}_0(b))^{-1} < b \quad (5)$$

где $M = \max_{k \in K_2} \sup_D \exp \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \lambda_k d\tau$, $\delta = \max\{|y_i(z_0)| \mid (i \in K_2)\}$.

Доказательство. Каждое решение системы (1) из множества W_1 является также решением системы интегральных уравнений

$$y_k(z) = c_k \exp \int_{z_0}^z \lambda_k d\tau + I_k \left(q_k + \sum_{s=1}^n p_{ks} y_s + F_k(z, y_1, \dots, y_n), \lambda_k \right) \quad (k = \overline{1, n}), \quad (6)$$

где $c_k = 0$ ($k \in K_1$), $c_k = y_k(z_0)$ ($k \in K_2$), или в операторной форме,

$$Y(z) = I(z, Y(z)). \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательное банахово множество

$$\Omega = \{Y(z) \mid Y(z) \in C^\infty(D), Y(z) = o(1) \ (z \rightarrow 0), \|Y(z)\| \leq b\}$$

и отображение $Y_2(z) = I(z, Y_1(z))$ ($Y_1(z) \in \Omega$). Оператор J отображает Ω в себя. Действительно,

$$\|Y_2(z)\| \leq M\delta + Q_0 + P_0 b + \mathcal{L}_0(b)b < b$$

в силу неравенства (5). Свойства $Y_2(z) \in C^\infty(D)$, $Y_2(z) = o(1)$ ($z \rightarrow 0$) вытекают из лемм 2, 3 и условия 8). Оператор Ω обладает свойством сжатия, т.к. если $Y_1(z)$, $Y_3(z)$ – образы, а $Y_2(z)$, $Y_4(z)$ – их прообразы соответственно, то очевидно, что

$$\|Y_2(z) - Y_4(z)\| \leq (P_0 + \mathcal{L}_0(b)) \|Y_1(z) - Y_3(z)\|.$$

Поэтому при фиксированных $y_i(z_0)$ ($i \in K_2$) система (6) допускает единственное решение $Y(z) \in \Omega$. Теорема доказана.

Приведем леммы, позволяющие получать оценки для постоянных Q_0 , P_0 и проверять выполнимость свойства 8).

Лемма 4. Если $k \in K_1$ и при этом $\Lambda_k(\zeta, z) \leq 0$ ($\zeta \in l_{0,z}^k$), $q(z) \in R(D)$, то

$$|I_k(q, \lambda_k)| \leq \int_0^{|z|} q^*(r_1) dr_1 = S(|z|), \quad I_k^0(q, \lambda_k) \leq \int_0^R q^*(r_1) dr_1.$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Введём дополнительно к 5) обозначения: $\bar{V}_1 = (u_\omega(\rho), -v_\omega(\rho))$, $\bar{V}_2 = (x'_\omega(\rho), y'_\omega(\rho))$, ($\rho \in I_z$), $A_\omega(\rho) = (\bar{V}_1, \bar{V}_2)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и фиксировано, $\lambda_k(\zeta) = u_\omega(\rho) + i v_\omega(\rho)$ ($\zeta \in \mathcal{L}_k$, $\zeta = x_\omega(\rho) + i y_\omega(\rho)$, $\omega = (k, z)$, $\rho = |\zeta|$) и существует не зависящая от z функция $\beta_k(\rho)$ ($\rho \in [0, R]$) такая, что

$$|(\bar{V}_1, \bar{V}_2)| \geq \beta_k(\rho) > o(\rho \in I_z), \quad \int_0^R \beta_k(\rho_1) d\rho_1 = +\infty, \quad \sup_{[0, R]} \frac{q^*(\rho) |\bar{V}_2(\rho)|}{\beta_k(\rho)} = S^0(q, \lambda_k).$$

Тогда $I_k^0(q, \lambda_k) \leq S^0(q, \lambda_k)$. Если $q^*(\rho) |\bar{V}_2(\rho)| = o(\beta_k(\rho))$ ($\rho \rightarrow 0$), то $I_k(q, \lambda_k) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D$).

Доказательство. Пусть для определенности $k \in K_1$, $z \in D$ и фиксировано, $\zeta \in I_{z_0, z}^k$, $\tau \in I_{z_0, z}^k$. Тогда

$$\begin{aligned} |I_k(q, \lambda_k)| &\leq \int_{I_{z_0, z}^k} q^*(\rho) \exp \operatorname{Re} \int_{\zeta}^z \lambda_k d\tau |d\zeta| \leq \left| \int_{|z_0|}^{|z|} q^*(\rho) |\bar{V}_2(\rho)| \exp \int_{\rho}^{|z|} A_\omega(\rho_1) d\rho_1 d\rho \right| = \\ &= \left| \int_{|z_0|}^{|z|} S(\rho, |z|) d\rho \right| = S_k(|z|). \end{aligned}$$

Функция $S_k(|z|)$ является вещественной функцией типа $\int_{x_0}^x q(t) \exp \int_t^x p(\tau) d\tau dt$ ($0 < x \leq x_0$), к которой применимы оценки, рассмотренные, например, в [3, гл. II] в случае $x \rightarrow +\infty$. Последнее различие несущественно, оценки и метод их получения остаются в силе и при $x \rightarrow +0$. Случай $k \in K_2$ рассматривается аналогично. Отличие от случая $k \in K_1$ состоит в том, что $S_k(|z|)$ будет выражаться в виде $\int_0^{|z|} S(\rho, |z|) d\rho$.

В этом случае также применимы результаты из [3].

Из лемм 4, 5 и теоремы 1 вытекает справедливость такого утверждения.

Теорема 2. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1)–5) из п. 1, а также условиям 6)–7) теоремы 1, причем оценки Q_0 , P_0 , $\mathcal{L}_0(b)$ в условиях 6)–7) получены применением лемм 4, 5, а в условие 6) добавлено требование $I_k(q_k, \lambda_k) = o(1)$ ($z \rightarrow 0, z \in D, k = \overline{1, n}$). Тогда остается в силе утверждение теоремы 1.

Доказательство этого утверждения очевидно. Условия теоремы 2 обеспечивают выполнение всех условий 1)–8) теоремы 1.

4. Комплексный аналог теоремы Мателя – Левинсона.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\frac{dy_k}{dz} = \lambda_k(z) y_k + \sum_{s=1}^n p_{ks}(z) y_s \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8)$$

где $\lambda_k(z)$, $p_{ks}(z) \in C^\infty(D)$ ($k, s = \overline{1, n}$). Ставится вопрос (задача Мателя) о существовании у системы (8) хотя бы одного частного решения вида

$$y_k = (c_k + \xi_k(z)) \exp \int_{z_0}^z \lambda_j(\tau) d\tau \quad (k = \overline{1, n}), \quad (9)$$

где $j \in \{1, \dots, n\}$ и фиксировано, $c_j = 1$, $c_k = 0$ ($k \neq j$); $\xi_k(z) \in C^\infty(D)$, $\xi_k(z) = o(1)$, ($z \rightarrow 0$, $k = \overline{1, n}$).

Система относительно $\xi_k(z)$ ($k = \overline{1, n}$) имеет вид

$$\frac{d\xi_k}{dz} = p_{kj}(z) + (\lambda_k(z) - \lambda_j(z))\xi_k + \sum_{s=1}^n p_{ks}(z)\xi_s \quad (k = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть система (10) удовлетворяет условиям 1)–3) и 5) из п. 1, $p_{ks}(z) \in R(D)$ ($k, s = \overline{1, n}$) и $p_k = \int_0^R \sum_{s=1}^n p_{ks}^*(\rho) d\rho < 1$ ($k = \overline{1, n}$). Тогда хотя бы одно решение вида (9) существует.

Доказательство. В данном случае можно взять $Q_0 = \max_k \int_0^R p_{kj}^*(\rho) d\rho$, $P_0 = \max_k p_k < 1$, $\mathcal{L}_0(b) = 0$. Условие $Q_0 < b(1 - P_0)$ выполняется, если b выбрать так, чтобы было $b > Q_0(1 - P_0)^{-1}$. Свойства $I_k(q_k, \lambda_k) = o(1)$, $I_k(|p_{ks}|, \lambda_k) = o(1)$ ($z \rightarrow 0$, $k, s = \overline{1, n}$) выполняются при выборе классов индексов K_1 и K_2 по правилам, указанным в п. 2. При этом в роли $\lambda_k(z)$ ($k = \overline{1, n}$) здесь необходимо рассматривать $\lambda_k(z) - \lambda_j(z)$ ($k = \overline{1, n}$). Теорема доказана.

Теорема 3 является комплексным аналогом теоремы Мателя – Левинсона (см. [8, гл. I, § 1]). Эта теорема дополняет соответствующий результат М. В. Федорюка (см. [6, гл. V, § 5]), сформулированный в более сложной форме (определение класса $R(D)$ заменено в [6] более сложным определением). Очевидно также, что в случае фиксированного j теорема 2 позволяет получать теоремы более общие, чем теорема 3, которые можно применять при нарушении условия $p_{ks}(z) \in R(D)$ ($k \neq j$; $s = \overline{1, n}$). Используя теоремы 1, 2, несложно сформулировать аналог теоремы 3 для квазилинейных систем.

1. **Чечик В. А.** Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Московского матем. об-ва. – 1959. – Т. 8. – С. 155–197.
2. **Кигурадзе И. Т.** О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 10. – С. 1271–1291.
3. **Костин А. В.** Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. – Одесса: Изд-во ОГУ, 1984. – 95 с.
4. **Костин А. В.** К вопросу существования у системы обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 5. – С. 585–604.
5. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
6. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
7. **Никоненко В. В.** Об асимптотических представлениях решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1988. – 189 с.
8. **Рапопорт И. М.** О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во АН УССР, 1954. – 289 с.

Получено 12.05.2003 г.