УДК 517.94

В. В. Никоненко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРИ $t \longrightarrow +\infty$ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Нiконенко В. В. Асимптотика розв'язкiв двомiрної лiнiйної однорiдної системи диференцiальних рiвнянь у випадку асимптотично еквiвалентних при $(t \longrightarrow +\infty)$ коренiв характеристичного рiвняння. Лiнiйна однорiдна система (ЛОС) диференцiальних рiвнянь (1) розглядається у випадку, який є особливим для вiдомих методiв.
Ключовi слова: лiнiйнi однорiднi системи диференцiальних рiвнянь, асимптотика розв'язкiв, асимптотично еквiвалентнi $(t \longrightarrow +\infty)$ коренi характеристичного рiвняння.

Никоненко В. В. Асимптотика решений двумерной линейной однородной системы дифференциальных уравнений в случае асимптотически эквивалентных при $(t \longrightarrow +\infty)$ корней характеристического уравнения. Линейная однородная система (ЛОС) дифференциальных уравнений (1) рассматривается в случае, который является особым для известных методов.
Ключевые слова: линейные однородные системы дифференциальных уравнений, асимптотика решений, асимптотически эквивалентные $(t \longrightarrow +\infty)$ корни характеристического уравнения.

Nikonenko V. V. The asymptotics of the solutions of the two-dimention linear homogeneous system of the differential equations in case where roots of the characteristic equation are asymptotic equivalent $(t \longrightarrow +\infty)$. The linear homogeneous system of the differential equations is considered in case which is singular for the known methods.
Key words: linear homogeneous system of the differential equations, asymptotics of the solutions, asymptotic equivalent $(t \longrightarrow +\infty)$ roots of the characteristic equation.

Введение. Асимптотика решений n-мерных $(n \geq 2)$ ЛОС вида

$$\varepsilon(t)Y' = (P_0 + P_1(t))Y, \tag{1}$$

где: аргумент $t \in I = [t_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, скалярная функция $\varepsilon(t)$ и $n \times n$ матрицы P_0 (постоянная матрица), $P_1(t)$ в общем случае комплексные, $\varepsilon(t) \in C(I)$, $\varepsilon(t) \neq \neq 0 (t \in I)$, $\int_{t_0}^{+\infty} |\varepsilon^{-1}(t)| dt = +\infty$, $Y = (y_1, ..., y_n)^T$, собственные значения $\lambda_i (i = = \overline{1, n})$ матрицы P_0 простые, $P_1(t) = o(1)(t \longrightarrow +\infty)$, $P_1(t) \in C^1(I), P'(t) \in L_1(I)$ исследована достаточно полно методом теории L-диагональных систем [1], [2].

Случай наличия среди $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ кратных корней является особым и изучен недостаточно за исключением случая, когда матрица $P_0 + P_1(t)$ мало отличается от жордановой матрицы с переменными диагональными элементами [1], [3]-[6].

Учитывая сложность изучения указанного особого случая, мы ограничились здесь рассмотрением двумерной системы вида (1), где матрица $P_0 = D^{-1}\Lambda D$, где Λ — Жорданова матрица, D — постоянная 2×2 матрица, $detD \neq 0$ (такое представление всегда возможно и не уменьшает общности). Матрица Λ может быть треугольной или диагональной. Эти случаи рассматриваются отдельно. Матрица $P_1(t)$ рассматривается в форме $P_1(t) = \alpha(t)B + Q(t)\,(*)$, где $\alpha(t)$ — скалярная функция, B — постоянная матрица, $\|Q(t)\| = o(|\alpha(t)|)$ (см. далее условия 1)–7)). Представление $(*)$ существенно для изучения решений системы (1), т. к. дает возможность использовать преобразование 3(обобщенное срезающее преобразование, такие преобразования мы использовали в [7] в связи с изучением задач другого типа). Срезающие преобразования степенного типа (частный случай) применялись в монографии [8].

Основные результаты. Рассматривается двумерная ЛОС вида

$$\varepsilon(t)Y^{'} = (D^{-1}\Lambda D + \alpha(t)B + Q(t))Y, \tag{1}$$

где $t \in I = [t_0, +\infty), Y = (y_1, y_2)^T$, скалярные функции $\varepsilon(t), \alpha(t)$, постоянные матрицы D, Λ, B и матрица $Q(t)$ в общем случае комплексные и выполнены такие условия:

1) $\varepsilon(t) \in C^1(I),\ \varepsilon(t) \neq 0\,(t \in I),\ \displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} |\varepsilon^{-1}(t)|dt = +\infty;$

2) $D(t) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},\ detD \neq 0,\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & e \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0,\ e \in \{1, 0\},$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\ |b_{11}| + |b_{12}| + |b_{21}| + |b_{22}| > 0,$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{pmatrix} \in C(I);$$

3) $\alpha(t) \in C^1(I),\ \alpha(t) \neq 0\,(t \in I),\ \alpha(+\infty) = 0,\ \|Q(t)\| = o(|\alpha(t)|)$, где

$$\|Q(t)\| = \max_{i,k}\{|q_{ik}(t)|\,(i, k = 1, 2)\};$$

4) $\exists$ конечный или бесконечный предел $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} \varepsilon\frac{w^{'}}{w^2} = a$, где $w = w(t) = = \alpha^{\frac{1}{2}}(t)$ (при определенном выборе корня $\alpha^{\frac{1}{2}}(t)$).

В дальнейшем к условиям 1)-4) добавляются условия 5)-7)(случай 1), 5_1) – 6_1)(случай 2).

1. Случай $e = 1, a \neq \infty$**.**

С целью приведения системы (1) к L-диагональному виду [1], проделаем над столбцом неизвестных функций Y ряд преобразований.

Преобразование 1: $Y = DZ$, где $Z = (z_1, z_2)^T$ — столбец новых неизвестных функций, приводит систему (1) к системе вида:

$$\varepsilon(t)Z^{'} = (\Lambda + \alpha(t)A + P(t))Z, \tag{2}$$

где

$$A = D^{-1}BD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in C^{2\times 2},$$

$$P(t) = D^{-1}Q(t)D = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \in C(I), \ \ \|P(t)\| = o(|\alpha(t)|).$$

Преобразование 2: $Z = \widetilde{Y} \exp \int_{t_0}^{t} \dfrac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} d\tau$, $\widetilde{Y} = (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2})^T$ — столбец новых неизвестных функций. Тогда вместо (2) получим систему

$$\varepsilon(t)\widetilde{Y}' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha(t)A + P(t) \right) \widetilde{Y},$$

которую можно записать в форме

$$\varepsilon(t)\widetilde{Y}' = \left(\begin{pmatrix} \alpha(t)a_{11} & 1 + \alpha(t)a_{12} \\ \alpha(t)a_{21} & \alpha(t)a_{22} \end{pmatrix} + P(t) \right) \widetilde{Y} = (A_1(t) + P(t))\widetilde{Y},$$

где структура матрицы $A_1(t)$ очевидна.

Преобразование 3(срезающее): положим

$$\widetilde{y_1} = \xi_1, \ \ \widetilde{y_2} = w(t)\xi_2,$$

где $\xi_i (i = 1, 2)$ — новые неизвестные функции, $w(t) = \alpha^{\frac{1}{2}}(t)$ (см. условие 4)).

Относительно неизвестных $\xi_i (i = 1, 2)$ получим систему

$$\varepsilon(t) \begin{pmatrix} \xi_1' \\ w(t)' \xi_2 + w(t)\xi_2' \end{pmatrix} = (A_1(t) + P(t)) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ w(t)\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

которую последовательно преобразуем к виду(4)-(6):

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ w\xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11}\xi_1 + w(1 + \alpha a_{12})\xi_2 + p_{11}\xi_1 + p_{12}w\xi_2 \\ \alpha a_{21}\xi_1 + (w\alpha a_{22} - \varepsilon w')\xi_2 + p_{21}\xi_1 + p_{22}w\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11}\xi_1 + w(1 + \alpha a_{12})\xi_2 + p_{11}\xi_1 + p_{12}w\xi_2 \\ \dfrac{\alpha}{w} a_{21}\xi_1 + (\alpha a_{22} - \varepsilon \dfrac{w'}{w})\xi_2 + \dfrac{p_{21}}{w}\xi_1 + p_{22}\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} wa_{11}\xi_1 + (1 + \alpha a_{12})\xi_2 + \dfrac{p_{11}}{w}\xi_1 + p_{12}\xi_2 \\ a_{21}\xi_1 + (wa_{22} - \varepsilon \dfrac{w'}{w^2})\xi_2 + \dfrac{p_{21}}{w^2}\xi_1 + \dfrac{p_{22}}{w}\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

(для краткости записи аргумент t опущен). Очевидно, что в силу указанных в 3) условий:

$$wa_{11} = o(1), \ \ \alpha a_{12} = o(1), \ \ wa_{22} = o(1),$$

$$\frac{p_{11}}{w} = o(1), \ \ p_{12} = o(1), \ \ \frac{p_{21}}{w^2} = o(1), \ \ \frac{p_{22}}{w} = o(1).$$

Запишем систему (6) в следующей форме:

$$\varepsilon(t)\xi' = w(t)(\widetilde{A_1}(t)\xi + \widetilde{P}(t)\xi) = w(t)W(t)\xi, \tag{7}$$

где смысл матриц $\widetilde{A_1}(t)$ и $\widetilde{P}(t)$ очевиден. При этом очевидно также, что

$$W(+\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & -a \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы $\mu_i (i = 1, 2)$ находим, решая уравнение $\mu^2 + a\mu - a_{21} = 0$. Получаем

$$\mu_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a_{21}}.$$

Далее будем предполагать, что выполняется условие

5) $\dfrac{a^2}{4} + a_{21} \neq 0$ (т. е. $\mu_1 \neq \mu_2$);

6) $W^{'}(t) \in L_1(I)$.

Для выполнения условия 6) достаточно предположить, что выполняется условие

6_0) все функции $\alpha^{'}, w^{'}, \left(\varepsilon \dfrac{w^{'}}{w^2}\right)^{'}, \left(\dfrac{p_{11}}{w}\right)^{'}, (p_{12})^{'}, \left(\dfrac{p_{21}}{w^2}\right)^{'}, \left(\dfrac{p_{22}}{w}\right)^{'}$ принадлежат классу $L_1(I)$.

Известно, что в случае вещественной функции $f(t) \in C^1(I)$ для выполнения свойства $f^{'}(t) \in L_1(I)$ достаточно, чтобы $f^{'}(t)$ сохраняла знак при больших t в строгом или нестрогом смысле.

Известно также [1], что при выполнении условий 1)-6) систему (7) можно привести к L-диагональному виду, применяя преобразование 4.

Преобразование 4: $\xi = B(t)\widetilde{\xi}$, где $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2)^T$ — столбец новых неизвестных, $B(t)$ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $W(t)$, отвечающие собственным значениям этой матрицы $\widetilde{\mu}_1(t), \widetilde{\mu}_2(t)$, причем очевидно, что $\widetilde{\mu}_i(+\infty) = \mu_i (i = 1, 2)$ и $\widetilde{\mu}_1(t) \neq \widetilde{\mu}_2(t)$, если t_0 достаточно велико. Функции $\widetilde{\mu}_i(t) (i = 1, 2)$ являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} wa_{11} + \dfrac{p_{11}}{w} - \widetilde{\mu} & 1 + \alpha a_{12} + p_{12} \\ a_{21} + \dfrac{p_{21}}{w} & wa_{22} - \varepsilon \dfrac{w^{'}}{w^2} + \dfrac{p_{22}}{w} - \widetilde{\mu} \end{vmatrix} = 0, \qquad (\widetilde{\mu})$$

которое равносильно уравнению

$$\widetilde{\mu}^2 - \widetilde{\mu}\left(wa_{22} - \varepsilon \frac{w^{'}}{w^2} + \frac{p_{22}}{w} + wa_{11} + \frac{p_{11}}{w}\right) - \left(a_{21} + \frac{p_{21}}{w}\right)(1 + \alpha a_{12} + p_{12}) = 0.$$

В силу условий 3), 4) последнее уравнение можно записать в форме:

$$\widetilde{\mu}^2 - \widetilde{\mu}(-a + o(1)) - (a_{21} + o(1)) = 0 \implies \widetilde{\mu}_i(+\infty) = \widetilde{\mu}_i \ (i = 1, 2).$$

Очевидно, что матрицу $B(t)$ можно взять в форме:

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha a_{12} + p_{12} & 1 + \alpha a_{12} + p_{12} \\ \widetilde{\mu}_1 - wa_{11} - \dfrac{p_{11}}{w} & \widetilde{\mu}_2 - wa_{11} - \dfrac{p_{11}}{w} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+o_{11}(1) & 1+o_{12}(1) \\ \mu_1+o_{21}(1) & \mu_2+o_{22}(1) \end{pmatrix},$$

где все $o_{ik}(1)\,(i,k=1,2)$ — известные функции.

Преобразование 4 дает относительно $\widetilde{\xi}=(\widetilde{\xi}_1,\widetilde{\xi}_2)^T$ систему

$$\varepsilon(t)(B^{'}(t)\widetilde{\xi}+B(t)\widetilde{\xi}^{'})=w(t)W(t)B(t)\widetilde{\xi},$$

которая равносильна системе

$$\widetilde{\xi}^{'}=\left(\frac{w(t)}{\varepsilon(t)}B^{-1}(t)W(t)B(t)-B^{-1}(t)B^{'}(t)\right)\widetilde{\xi},$$

или, учитывая выбор матрицы $B(t)$, системе

$$\widetilde{\xi}^{'}=\left(\begin{pmatrix} v_1(t) & 0 \\ 0 & v_2(t) \end{pmatrix}-B^{-1}(t)B^{'}(t)\right)\widetilde{\xi}, \tag{8}$$

где $v_i(t)=\dfrac{w(t)}{\varepsilon(t)}\widetilde{\mu}_i(t)\,(i=1,2), B^{-1}(t)B^{'}(t)\in L_1(I)$ в силу условия 6).

Если выполнено также условие

7) $Re\dfrac{w(t)}{\varepsilon(t)}(\widetilde{\mu}_1(t)-\widetilde{\mu}_2(t))$ сохраняет знак (≥ 0 или ≤ 0) при больших t, то система (8) является L-диагональной ([1], гл. 1) и допускает ФСР вида

$$\widetilde{W}(t)=\begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^{t} v_1(\tau)d\tau}(1+\delta_{11}(t)) & e^{\int_{t_0}^{t} v_2(\tau)d\tau}\delta_{12}(t) \\ e^{\int_{t_0}^{t} v_1(\tau)d\tau}\delta_{21}(t) & e^{\int_{t_0}^{t} v_2(\tau)d\tau}(1+\delta_{22}(t)) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\delta_{ik}(t)=o(1)\,(t\longrightarrow+\infty, i,k=(1,2))$ и эти функции допускают представление в виде равномерно сходящихся функциональных рядов в некотором промежутке $[t_1,+\infty)\subset I$, причем элементы всех указанных рядов являются бесконечно малыми функциями при $t\longrightarrow+\infty$ (более детально асимптотика этих функций не изучается в [1], [2]).

В итоге находим ФСР системы (1) в форме

$$Y(t)=(Y_1(t),Y_2(t))=D\exp\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)}d\tau\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w(t) \end{pmatrix}B(t)\widetilde{W}(t), \tag{10}$$

где $Y_i(t)\,(i=1,2)$ — линейно независимые решения системы (1). Рассмотрим подробно решения $Y_1(t)$, полагая $\beta_1(t)=\frac{\lambda}{\varepsilon(t)}+v_1(t)$, $u_1(t)==\exp\displaystyle\int_{t_0}^{t}\beta_1(\tau)d\tau$.

$$Y_1(t)=$$

$$=u_1(t)\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+o_{11} & 1+o_{12} \\ \mu_1+o_{21} & \mu_2+o_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix}=$$

$$=u_1(t)\begin{pmatrix} d_{11}(1+o_{11})+d_{12}w(\mu_1+o_{21}) & d_{11}(1+o_{12})+d_{12}w(\mu_2+o_{22}) \\ d_{21}(1+o_{11})+d_{22}w(\mu_1+o_{21}) & d_{21}(1+o_{12})+d_{22}w(\mu_2+o_{22}) \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1+\delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix} = u_1(t) \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\delta_{11}(t) \\ \delta_{21}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= u_1(t) \begin{pmatrix} g_{11}(t)(1+\delta_{11}(t)) + g_{12}(t)\delta_{21}(t) \\ g_{21}(t)(1+\delta_{11}(t)) + g_{22}(t)\delta_{21}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \exp \int_{t_0}^{t} \beta_1(\tau) d\tau \begin{pmatrix} d_{11} + \gamma_{11}(t) \\ d_{21} + \gamma_{21}(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где смысл функций $g_{ik}(t)\,(i,k=1,2)$, введенных для краткости записи, очевиден, эти функции известны, причем $g_{ik}(+\infty) = d_{i1}\,(i,k=1,2)$,

$$\gamma_{11}(t) = g_{11}(t)\delta_{11}(t) + g_{12}(t)\delta_{21}(t) - d_{11} = o(1),$$

$$\gamma_{21}(t) = g_{21}(t)\delta_{11}(t) + g_{22}(t)\delta_{21}(t) - d_{21} = o(1).$$

Если $d_{11} \neq 0, d_{21} \neq 0$, то (см. (11)) для $Y_1(t)$ получена точная асимптотика. Аналогичный вывод можно сделать для $Y_2(t)$ если $d_{12} \neq 0, d_{22} \neq 0$. В итоге доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия 1)-7), то система (1) имеет два линейно независимых решения вида*

$$Y_1(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} + \frac{w(\tau)}{\varepsilon(\tau)}\widetilde{\mu}_1(\tau)\right) d\tau} \begin{pmatrix} d_{11} + o(1) \\ d_{22} + o(1) \end{pmatrix},$$

$$Y_2(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)} + \frac{w(\tau)}{\varepsilon(\tau)}\widetilde{\mu}_2(\tau)\right) d\tau} \begin{pmatrix} d_{12} + o(1) \\ d_{22} + o(1) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mu}_i(t)\,(i=1,2)$ являются корнями квадратного уравнения $(\widetilde{\mu})$, причем $\widetilde{\mu}_i(t) = = \mu_i + o_i(1)$, $(i=1,2)$, $\mu_1 \neq \mu_2$; если $d_{11}d_{21}d_{12}d_{22} \neq 0$, то полученные асимптотики являются точными.

Рассмотрим дополнительно тот случай, когда, например, для $Y_1(t)$ точная асимптотика не получена за счет того, что среди постоянных d_{11}, d_{21} есть одна равная нулю (условия $d_{11} = 0, d_{21} = 0$ одновременно выполняться не могут, т. к. $detD \neq 0$). Пусть, например, $d_{11} = 0, d_{21} \neq 0$. Рассмотрим случай, когда дополнительное исследование несложно проделать. Изучим подробнее L-диагональную систему (8). Матрица $B^{-1}(t)B^{'}(t) \in L_1(I)$ известна и может быть записана следующим образом

$$B^{-1}(t)B^{'}(t) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(t) & \beta_{12}(t) \\ \beta_{21}(t) & \beta_{22}(t) \end{pmatrix}, \ \beta_{ik}(t) \in L_1(I)\,(i,k=1,2),$$

а система (8) в форме

$$\xi_1^{'} = (v_1(t) + \beta_{11}(t))\xi_1 + \beta_{12}(t)\xi_2, \tag{12_1}$$

$$\xi_2^{'} = \beta_{21}(t)\xi_1 + (v_2(t) + \beta_{22}(t))\xi_2, \tag{12_2}$$

Согласно теории L-диагональных систем ФСР этой системы имеет вид (9). Рассмотрим подробнее 1-е решение (1-й столбец) этой ФСР:

$$\widetilde{\xi}_1 = e^{\int_{t_0}^{t} v_1 d\tau}(1+\delta_{11}(t)),$$

$$\widetilde{\xi}_2 = e^{\int_{t_0}^{t} v_1 d\tau}\delta_{21}(t),$$

Для $\widetilde{\xi}_1(t)$ получена точная асимптотика, что же касается $\widetilde{\xi}_2(t)$, то пока известно только свойство $\delta_{21}(t) = o(1)\,(t \longrightarrow +\infty)$. Подставляя выражение $\widetilde{\xi}_1(t)$ в уравнение (12_2) и сокращая на $\exp\int_{t_0}^{t} v_1 d\tau$, можно взять в качестве $\delta_{21}(t)$ частное решение уравнения

$$\delta_{21}(t)^{'} = \beta_{21}(t)(1+\delta_{11}(t)) + (v_2(t) - v_1(t) + \beta_{22}(t))\delta_{21}$$

в форме

$$\delta_{21} = e^{\int_{t_0}^{t}(v_2 - v_1 + \beta_{22})d\tau}\int_{A}^{t}(\beta_{21}(\tau)(1+\delta_{11}(\tau)))e^{\int_{t_0}^{\tau}(v_1 - v_2 - \beta_{22})d\tau}d\tau, \qquad (13)$$

где A выбирается согласно [1] следующим образом

$$A = \begin{cases} t_0, \text{ если } I_0 = \int_{t_0}^{+\infty} Re(v_2 - v_1)d\tau = -\infty, \\ +\infty, \text{ если } I_0 = +\infty \vee I_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

и при этом $\delta_{21}(t) = o(1)\,(t \longrightarrow +\infty)$.

В случае вещественности всех функций в (13) (тогда $Re(v_2 - v_1) = = v_2 - v_1$) правило Лопиталя позволяет утверждать, что если $\beta_{21}(t) \neq 0$ (t большое) точную асимптотику для $\widetilde{\xi}_2$ можно получить, если в (13) положить $\beta_{22}(t) \equiv 0, \delta_{11}(t) \equiv 0$. В комплексном случае требуется дополнительное исследование. Этот факт в теории L-диагональных систем обычно не отмечается.

2. Случай $e = 1, a = \infty$.

Запишем систему (5) в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{'} \\ \xi_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\varepsilon}a_{11}\xi_1 + \frac{w}{\varepsilon}(1+\alpha a_{12})\xi_2 + \frac{p_{11}}{\varepsilon}\xi_1 + p_{12}\frac{w}{\varepsilon}\xi_2 \\ \frac{w}{\varepsilon}a_{21}\xi_1 + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}a_{22} - \frac{w^{'}}{w}\right)\xi_2 + \frac{p_{21}}{w\varepsilon}\xi_1 + \frac{p_{22}}{\varepsilon}\xi_2 \end{pmatrix}, \qquad (5_1)$$

Поскольку $\left|\frac{p_{11}}{\varepsilon}\right| = o\left(\left|\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|\right) = o\left(\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|\right)$, $\left|p_{12}\frac{w}{\varepsilon}\right| = o\left(\left|\alpha\frac{w}{\varepsilon}\right|\right) = o\left(\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|\right)$, $\left|\frac{p_{21}}{w\varepsilon}\right| = = o\left(\left|\frac{\alpha}{\varepsilon w}\right|\right) = o\left(\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|\right)$, $\left|\frac{p_{22}}{\varepsilon}\right| = o\left(\left|\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|\right) = o\left(\left|\frac{w}{\varepsilon}\right|\right)$, то система (5_1) является L-диагональной, если выполнены условия:

$5_1)$ $\left|\frac{w}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\varepsilon}\right| \in L_1(I)$;

6_1) $Re\dfrac{w'}{w}$ сохраняет знак в I (t_0 достаточно велико) хотя бы в нестрогом смысле.

В итоге справедлива следующая

Теорема 2. *Если ситема (1) удовлетворяет условиям 1)-4), 5_1), 6_1) и $a = \infty$, то система (1) с помощью преобразования*

$$Y = D\exp\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda}{\varepsilon(\tau)}d\tau\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$$

приводится к L-диагональной системе (5_1), которая допускает ФСР вида:

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+o_{11}(1) & e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{w'}{w}d\tau}o_{12}(1)\\ o_{21}(1) & e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{w'}{w}d\tau}(1+o_{22}(1))\end{pmatrix},$$

где функции $o_{ik}(1)$ $(i,k=1,2)$ допускают представление в виде равномерно сходящихся в некотором промежутке $[t_1,+\infty)\subset I$ функциональных рядов, элементы которых являются бесконечно малыми функциями при $t \longrightarrow \longrightarrow +\infty$.

В случае вещественной системы (1) для функций $o_{21}(1), o_{12}(1)$ можно получить точную асимптотику.

Дополним изложенное анализом условия 4) в случае степенных вещественных функций ε и α, удовлетворяющих условиям 1)-3):

$$\varepsilon = t^p,\ p<1,\ \alpha = \frac{1}{t^q}\ (q>0),\ w=\sqrt{\alpha}=t^{-\frac{q}{2}},$$

$$w^{-1} = t^{\dfrac{q}{2}},\ -\frac{w'}{w^2} = \frac{q}{2}\,t^{\frac{q}{2}-1},\ \varepsilon\frac{w'}{w^2} = -\frac{q}{2}\,t^{p+\frac{q}{2}-1}.$$

Случай $a\in\mathbb{R}$ выполняется, если $p+\dfrac{q}{2}-1\le 0$, т. е. $0<q\le 2(1-p)$. Поэтому ясно, что существенная малость функции $\alpha(t)$ не требуется, в отличие от известных работ. Условие $a=\infty$ получается в случае $q>2(1-p)$, т. е. условие 5_1) в случае степенных функций имеет вид $\dfrac{w}{\varepsilon} = \dfrac{1}{t^{\frac{q}{2}}t^p}\in L_1(I)$, оно выполняется, если $\dfrac{q}{2}+p>1$, т. е. $q>2(1-p)$.

Таким образом случай 2 естественно дополняет случай 1.

Замечание 1. *Случай $e=0$ в статье не рассматривается, поскольку в этом случае система (1) приводится к виду, аналогичному (1) с заменой $\varepsilon(t)$ на функцию $\dfrac{\varepsilon(t)}{\alpha(t)}$, и дальнейшее исследование можно проделать, применяя изложенные выше результаты, если $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|d\tau=\infty$. Случай $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|d\tau<+\infty$ тривиален.*

Заключение. Настоящая работа открывает возможность для дальнейших исследований в данном направлении (случай систем размерности больше 2, случай нескольких асимптотически эквивалентных корней характеристического уравнения и т. д.).

1. **Рапопорт И. М.** О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений [текст] / И. М. Рапопорт. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 289 с.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [текст] / М. В. Федорюк. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. **Devinantz A.** Pasif. I. Math. [text] / A. Devinantz. – 1965. – V. 18. – P. 75–89.
4. **Chiba K.** Comm. Math. Univ. St. Paul [text] / K. Chiba, T. Kimura. – 1970. – V. 18. – P. 62–80.
5. **Devinantz A.** Indiana Univ. Math. J. [text] / A. Devinantz, J. I. Kaplan. – 1972. – V. 22. – № 4. – P. 355–366.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений в случае квазижордановой нормальной формы главной матрицы коэффициентов [текст] / В. М. Евтухов // ДАН СССР, 1990. – Т. 314. – № 2. – С. 279–283.
7. **Никоненко В. В.** Об асимптотическом представлении решений квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Диссертация на соиск. уч. степени кан. физ.-мат. наук [текст] / В. В. Никоненко. – Тбилиси, 1988. – 169 с.
8. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений [текст] / В. Вазов. – М.: Мир, 1968. – 464 с.