

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів факультету математики,
фізики та інформаційних технологій
спеціальності 111 Математика

ОДЕСА
ОНУ
2024

УДК 515.172.2(072)
Г615

Укладачі:

І. М. Курбатова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології;

Н. В. Шарай, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології.

Рецензенти:

В. М. Євтухов, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Н. В. Вашипанова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізико-математичних наук Одеської державної академії будівництва та архітектури.

*Рекомендовано вченою радою факультету математики, фізики
та інформаційних технологій ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 6 від 22 березня 2024 р.*

Г615 **Голоморфно-проективні** відображення келерових просторів
[Електронний ресурс] : електрон. метод. посіб. для студ. ф-ту матем.,
фізики та інформ. технологій, спец. 111 Матем. / уклад.: І. М. Курбатова,
Н. В. Шарай. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 72 с. –
2,5 МБ.

Пропонований методичний посібник з курсу «Голоморфно-проективні відображення келерових просторів» розрахований для студентів другого (магістерського) рівня підготовки спеціальності 111 Математика і покликаний надати допомогу в освоєнні методів дослідження в сучасній диференціальній геометрії.

УДК 515.172.2(072)

ЗМІСТ

Вступ	5
 Тема 1. Келерові простори	
1.1. Основні поняття і визначення	7
1.2. Означення і основні властивості келерових просторів	11
Контрольні питання до Теми 1	17
Вправи до Теми 1	17
 Тема 2. Гедезичні відображення келерових просторів	
2.1. Гедезичні відображення ріманових просторів	19
2.2. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно гедезичних відображень ріманових просторів	22
2.3. Гедезичні відображення келерових просторів	27
2.4. Ріманові простори з майже комплексною структурою, які є узагальненням келерових просторів	30
2.5. Новий геометричний об'єкт, інваріантний відносно гедезичного відображення майже комплексних многовидів	31
2.6. Зв'язок між об'єктом S_{ij}^h і типом майже комплексного многовиду	33
2.7. Узагальнення теореми Яно-Вестлейка	41
Контрольні питання до Теми 2	42
Контрольні питання до Теми 2	43

Тема 3. Голоморфно-проективні відображення келерових просторів

3.1. Поняття голоморфно-проективного відображення келерових просторів	45
3.2. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно голоморфно-проективних відображень келерових просторів	50
3.3. Нова форма основних рівнянь теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів	55
3.4. Основні теореми теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів	58
Контрольні питання до теми 3	64
Вправи до теми 3	66

Тестові завдання до модулів

Змістовий модуль 1. Основні рівняння голоморфно- проективних відображень келерових просторів	68
Змістовий модуль 2. Основні теореми теорії голоморфно- проективних відображень келерових просторів	69

Список рекомендованої літератури	71
---	-----------

Вступ

Відомо, що прямі лінії в евклідових просторах можна визначити як найкоротший шлях між двома точками або як найпряміші з кривих ліній. В афіннозв'язних і ріманових просторах аналогічні з локальної точки зору властивості мають геодезичні лінії. В той же час рух багатьох типів механічних систем за відсутністю зовнішніх сил, пробних тіл в полі гравітації, рух некогерентної рідини відбувається по траєкторіях, які є геодезичними лініями деякого афіннозв'язного або ріманового простору.

Структура ріманового простору V_n цілком визначається його метричним тензором, структура афіннозв'язного простору A_n - його об'єктом зв'язності. У зв'язку з цим *виникає важливе з геометричної та прикладної точки зору питання: яку інформацію ми можемо отримати щодо простору $\bar{V}_n(\bar{A}_n)$, якщо відомий простір $V_n(A_n)$ і між цими просторами може бути встановлена взаємно-однозначна точкова відповідність, в результаті якої кожна геодезична лінія одного простору переходить в геодезичну лінію іншого.* Це питання є головною метою дослідження в теорії геодезичних відображень.

З прикладної точки зору два ріманові простори, які допускають геодезичне відображення один на одного, описують процеси, що протікають при еквівалентних зовнішніх навантаженнях по одним і тим же траєкторіям, але при різних енергетичних режимах. Тому один з цих процесів можна моделювати іншим.

В даний час теорія геодезичних відображень є важливим розділом сучасної диференціальної геометрії, багатим на фундаментальні результати.

В теорії узагальнених диференціально-геометричних просторів, яка інтенсивно розвивається в останні десятиріччя, поряд з геодезични-

ми лініями виділяються деякі типи більш загальних кривих, що мають певні чудові геометричні властивості, зокрема аналітично планарні криві майже комплексних многовидів і келерових просторів. З прикладної точки зору ці криві інтерпретуються як траєкторії руху механічних систем, тіл або часток в гравітаційних і електромагнітних полях, в суцільному середовищі під впливом зовнішніх сил певного типу.

Відображення одного келерового простору на інший, при якому всі аналітично планарні криві одного простору переходять в аналітично планарні лінії іншого, називають голоморфно-проективним. Воно дає можливість моделювати процеси, що протікають при одних енергетичних режимах за відсутністю зовнішніх сил, процесами, які протікають при інших енергетичних режимах під впливом сил певного типу.

Дослідження носить локальний характер і проводиться в класі достатньо гладких функцій .

Для зручності пошуку формул, на які зроблено посилання, в посібнику використано двозначну нумерацію формул, де перша цифра (перед крапкою) – це номер теми, а друга (після крапки) – номер формули в темі.

Методичний посібник призначений для магістрів і аспірантів спеціальності 111 Математика.

Тема 1. Келерові простори

1.1. Основні поняття і визначення

Простором A_n афінної зв'язності називається дійсний многовид X_n класу C^r , в якому визначено об'єкт афінної зв'язності Γ . Це означає, що в кожній локальній системі координат $(x^i), i = 1, 2, \dots, n$, на X_n задана сукупність функцій $\Gamma_{ij}^h(x)$, що змінюються при будь-якому перетворенні координат виду:

$$x'^i = x'^i(x^j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

згідно із законом:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} \Gamma_{ij}^\alpha(x') = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j} + \Gamma_{\beta\gamma}^k(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j}.$$

Якщо $\Gamma_{ij}^h \equiv \Gamma_{ji}^h$, то A_n називається **простором афінної зв'язності без скруту**.

Рімановим простором V_n називається дійсний многовид X_n класу C^r , в якому визначено поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензора g_{ij} , який називається метричним тензором простору. У кожній локальній системі координат на X_n системі координат на X_n його компоненти є відомими функціями класу C^{r-1} від координат поточної точки $M \in X_n$, що задовольняють умовам:

$$g_{ij}(x) \equiv g_{ji}(x), \quad g = \det \|g_{ij}\| \neq 0$$

і при переході до нової системи координат $x'^i = x'^i(x^j)$ змінюються таким чином:

$$g'_{ij}(x') = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

На V_n за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma_{ij}^h = g^{h\alpha} \Gamma_{ij,\alpha},$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

визначаються *символи Крістофеля другого роду*, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають *рімановою зв'язністю*).

За допомогою об'єкта зв'язності Γ на V_n будується тензор Рімана типу $\binom{1}{3}$:

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h,$$

що задовольняє умовам:

$$R_{ijk}^h + R_{ikj}^h \equiv 0,$$

$$R_{ijk}^h + R_{jki}^h + R_{kij}^h \equiv 0, \quad (1.1)$$

$$R_{ijk,m}^h + R_{ikm,j}^h + R_{imj,k}^h \equiv 0,$$

де «, $\rangle$ » - знак коваріантної похідної відносно зв'язності Γ .

Тензор типу $\binom{0}{4}$

$$R_{hijk} = g_{h\alpha} R^{\alpha}_{ijk}$$

називається **тензором кривини** V_n , який окрім (1.1) задовольняє співвідношенням:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk},$$

$$R_{hijk} = R_{jkhi}.$$

Тензор типу $\binom{0}{2}$

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{i j \alpha}$$

називається **тензором Річчі** простору V_n . Він за необхідністю симетричний:

$$R_{ij} = R_{ji},$$

а його слід:

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

називається **скалярною кривиною** V_n .

Надалі нам знадобиться **тотожність Річчі** для тензора типу $\binom{1}{1}$, що виражає в тензорній формі незалежність змішаних частинних похідних другого порядку компонент тензора від порядку диференціювання

$$F^h_{i,[jk]} = -F^h_{i,jk} + F^h_{i,kj} = -F^{\alpha}_i R^h_{\alpha jk} + F^h_{\alpha} R^{\alpha}_{ijk} .$$

Секційна кривизна V_n в даному двовимірному напрямку $E_2\{\lambda_1, \lambda_2\}$ задається формулою:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_1^\gamma \lambda_2^\delta}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_1^\gamma \lambda_2^\delta}$$

Рімановий простір V_n називається **простором сталої кривини**, якщо в кожній точці $M(x) \in V_n$ секційна кривина стала, тобто $K(x) = const$.

Для того, щоб рімановий простір мав сталу кривину, необхідно і достатньо, щоб його тензор Рімана мав вигляд:

$$R_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) . \quad (1.2)$$

Дійсний диференційований многовид X_n класу C^r вважається наділеним **афінорною структурою** [6], якщо на ньому задано поле F тензора типу $\binom{1}{1}$.

Афінорна структура F називається **інтегровною** (локально), якщо в деякому околі кожної точки многовиду існує така система координат, щодо якої всі компоненти F_i^h в цій області є сталими. Відомо, що необхідною і достатньою ознакою локальної інтегровності F_i^h є існування на X_n симетричної афінної зв'язності Γ , щодо якої ця структура абсолютно паралельна, тобто

$$F_{i,j}^h \equiv 0 .$$

В літературі, як правило, розглядаються афінорні структури при різних алгебраїчних і диференціальних умовах. Так, наприклад, структура F_i^h така, що

$$F_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = e \delta_i^h,$$

називається *e-структурою* (*еліптичного типу* при $e = -1$, *параболічного типу* при $e = 0$, структурою *гіперболічного типу* - при $e = 1$).

В сучасній літературі, присвяченій вивченню афінорних структур на рімановому просторі, як правило, афінорна структура узгоджується з метрикою у вигляді

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^{\alpha}.$$

Таку структуру називають *майже ермітовою*.

1.2. Означення і основні властивості келерових просторів

1°. **Означення 1.** *Келеровим простором K_n* називають рімановий простір, в якому окрім метричного тензора $g_{ij}(x)$ існує афінорна структура $F_i^h(x)$, яка задовольняє умовам:

$$F_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = e \delta_i^h; \quad e = \pm 1, 0; \quad (1.3)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^{\alpha}; \quad (1.4)$$

$$F_{i,j}^h \equiv 0, \quad (1.5)$$

де $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n$. Тут $''$ – знак коваріантної похідної в K_n .

При $e = -1$ структуру називають *еліптично келеровою*, при $e = 0$ - *параболічно келеровою*, при $e = 1$) *гіперболічно келеровою*.

Домовимось далі розглядати тільки еліптично келерову структуру і називати її просто келеровою.

З огляду на (3.3) афінорна структура $F_i^h(x)$ в K_n завжди інтегрована, отже в деякому околі кожної точки K_n існує така система координат, щодо якої всі компоненти F_i^h в цій області є сталими. З (3.1) для випадку $\epsilon = -1$ маємо в цій системі координат (адаптованої до афінора) такий канонічний вид $F_i^h(x)$:

$$\left(F_i^h(x)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$$

або

$$F_b^{a+m} = -F_{b+m}^a = \delta_b^a; \quad F_b^a = -F_{b+m}^{a+m} = 0, \quad (1.6)$$

$$a, b, \dots = 1, 2, 3, \dots, m; \quad m = \frac{n}{2}.$$

Як бачимо, (еліптично) келеровий простір має парну розмірність $n = 2m$.

З огляду на (1.4) і (1.6) метричний тензор K_n в адаптованій системі координат задовольняє умовам

$$g_{a+mb+m} = g_{ab}, \quad g_{ab+m} = -g_{a+mb}. \quad (1.7)$$

2°. Домовимося операцію згортання з афінором позначати наступним чином:

$$A_{\bar{j}} = A_{\alpha} F_j^{\alpha}, \quad B^{\bar{j}} = B^{\alpha} F_{\alpha}^j.$$

Відповідно до (1.3) і (1.5) ця операція має такі властивості:

$$A_{\bar{j}} = -A_j, \quad B^{\bar{j}} = -B^j, \quad A_{\bar{\alpha}} B^{\alpha} = A_{\alpha} B^{\bar{\alpha}}, \quad (A_{\bar{i}})_{,j} = A_{\bar{i},j}. \quad (1.8)$$

Зауважимо, що

$$\delta_{\bar{i}}^h = \delta_i^{\bar{h}} = F_i^h \quad (1.9)$$

Формули (1.4) можна тепер записати таким чином:

$$g_{\bar{i}j} + g_{i\bar{j}} = 0. \quad (1.10)$$

Після згортання цього співвідношення з F_k^j за індексом j маємо:

$$g_{\bar{i}\bar{j}} - g_{ij} = 0. \quad (1.11)$$

Для матриці $\|g^{ij}\|$, оберненої до $\|g_{ij}\|$, мають місце тотожності:

$$g^{\bar{i}j} + g^{i\bar{j}} = 0, \quad g^{\bar{i}\bar{j}} - g^{ij} = 0. \quad (1.12)$$

Умови інтегровності рівняння (1.5) дають нам

$$F_{\alpha}^h R_{ijk}^{\alpha} - F_i^{\alpha} R_{\alpha jk}^h = 0$$

або

$$R_{ijk}^{\bar{h}} - R_{\bar{i}jk}^h = 0. \quad (1.13)$$

Тут R_{ijk}^h — компоненти тензора Рімана простору K_n . Співвідношення (1.13) еквівалентні таким:

$$R_{\bar{h}ijk} + R_{h\bar{i}jk} = 0, \quad (1.14)$$

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} - R_{hijk} = 0,$$

$$R_{\bar{h}\bar{i}\bar{j}\bar{k}} - R_{hijk} = 0.$$

Згортаючи останню формулу з g^{hk} , отримуємо

$$R_{\bar{i}j} = R_{ij} \quad (1.15)$$

Отже,

$$R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}}$$

В рімановому просторі, як відомо, справедлива тотожність Біанкі

$$R_{ijk}^h + R_{jki}^h + R_{kij}^h = 0,$$

а тому маємо

$$R_{ijk}^{\bar{h}} + R_{jki}^{\bar{h}} + R_{kij}^{\bar{h}} = 0.$$

Згортаючи тут за індексами h, i , знаходимо

$$R_{ijk}^{\bar{h}} = 2R_{\bar{j}k}. \quad (1.16)$$

3°. В келеровому просторі K_n поряд з класичною кривиною ріманового простору в даній точці в даному 2-вимірному напрямі розглядається **голоморфна кривина**, яка є кривиною в точці $M(x_0)$ для 2-вимірного напрямку, що визначається векторами λ^h і $\lambda^{\bar{h}} = F_\alpha^h \lambda^\alpha$:

$$k = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda^\alpha \lambda^{\bar{\beta}} \lambda^\gamma \lambda^{\bar{\delta}}}{(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) \lambda^\alpha \lambda^{\bar{\beta}} \lambda^\gamma \lambda^{\bar{\delta}}}. \quad (1.17)$$

Келеровий простір називається **простором сталої голоморфної кривини**, якщо його голоморфна кривина не залежить ні від точки $M(x_0)$, ні від напрямку λ^h . За допомогою (3.15) можна довести, що K_n ($n > 2$) є простором сталої голоморфної кривини k тоді й тільки тоді, коли його тензор кривини має вигляд:

$$R_{hijk} = \frac{k}{4} (g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} + F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}). \quad (1.18)$$

Згортаючи (1.18) з g^{hk} , легко довести, що келеровий простір сталої голоморфної кривини є простором Ейнштейна, який характеризується рівняннями

$$R_{ij} = \rho g_{ij}$$

(наразі $\rho = -\frac{k}{4}(n+2)$). Оскільки інваріант ρ для просторів Ейнштейна при $n > 2$ є сталим, k також стала. Таким чином з (1.18) витікає, що тензор Рімана простору сталої голоморфної кривини є коваріантно сталим:

$$R_{ijk,l}^h = 0. \quad (1.19)$$

Ріманові простори, в яких виконується (1.19), називаються **симетричними просторами**.

Для симетричних просторів П.О.Широков отримав формулу для відновлення метричного тензора в околі деякої точки $M(x_0)$ простору V_n

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} m_{ij}^s$$

$$\overset{1}{m}_{ij} = m_{ij},$$

$$\overset{k+1}{m}_{ij} = \overset{k}{m}_{\alpha i} m_{\beta j} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$$

$$m_{ij} = \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta,$$

де $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}^{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$ – значення компонент метричного і зворотнього до нього тензорів, а також тензора Рімана в точці $M(x_0)$, (y^h) – ріманові координати з началом в точці $M(x_0)$.

Підставляючи в цю формулу вираз компонент тензора Рімана (1.18) і враховуючи властивості афінора (1.3), (1.4), отримуємо метричний тензор келерового простору сталої голоморфної кривини у вигляді:

$$\begin{aligned} g_{ij}(y) = & \\ = & \frac{2}{ky} \overset{\circ}{g}_{ij} \left(1 - \cos(ky)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{y} y_i y_j \left(1 - \frac{2}{ky} \left(1 - \cos(ky)^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \\ & \frac{1}{ky^2} y_i y_j \left(3 + \cos 2(ky)^{\frac{1}{2}} - 4\cos(ky)^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

де $y = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta$, $y_i = \overset{\circ}{g}_{\alpha i} y^\alpha$, $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$ – компоненти тензорів g_{ij} , F_{ij} в точці $M(x_0)$, y^h – ріманові координати з початком в точці $M(x_0)$.

Примітка. Якщо в (1.20) $ky < 0$, використовуємо відому формулу, яка пов'язує косинус та гіперболічний косинус: $\cos i\varphi = \cosh\varphi$.

Легко переконатися, що келеровий простір K_n ($n > 2$) є простором сталої кривини тоді і тільки тоді, коли він є евклідовим.

Контрольні питання до Теми 1

1. Символи Кристофеля I і II роду ріманового простору.
2. Тензор Рімана ріманового простору та його властивості.
3. Тензор кривини ріманового простору та його властивості.
4. Тензор Річчі ріманового простору та його властивості. Скалярна кривина.
5. Афірна структура на диференційовному многовиді.
6. e -структура (еліптичного, гіперболічного, параболічного типу).
7. Диференційовна афірна структура.
8. Келерові простори.
9. Вид афінора келерової структури в адаптованій системі координат.
10. Властивості тензорів Рімана і Річчі келерових просторів.
11. Голоморфна секційна кривина (кривина в 2-мірному аналітичному напрямку) келерового простору.
12. Простори сталої голоморфної кривини.
13. Вид тензора Рімана простору сталої голоморфної кривини.

Вправи до Теми 1

1. Знайти канонічний вид афінора еліптично-келерової структури в адаптованій системі координат.
2. Вивести властивості метричного тензора келерового простору в адаптованій системі координат.
3. Доведіть властивості тензора Рімана келерового простору:
 - a) $R_{\bar{h}ijk} + R_{h\bar{i}jk} = 0$,
 - б) $R_{\bar{h}\bar{i}jk} - R_{hijk} = 0$,
 - с) $R_{\bar{h}\bar{i}\bar{j}\bar{k}} - R_{hijk} = 0$.
4. Доведіть властивості тензора Річчі келерового простору:
 - a) $R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij}$,
 - б) $R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}}$.

5. Довести, що тензор Рімана келерового простору сталої голоморфної кривини

має вигляд

$$R_{hijk} = \frac{k}{4} (g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} + F_{hj}F_{ik} - F_{hk}F_{ij} + 2F_{hi}F_{jk}).$$

6. Довести, що келеровий простір сталої голоморфної кривини є простором Ейнштейна, тобто його тензор Річчі задовольняє умові

$$R_{ij} = \rho g_{ij}.$$

7. Довести, що келеровий простір сталої голоморфної кривини є симетричним простором, тобто його тензор Рімана задовольняє умові

$$R_{ijk,l}^h = 0.$$

8. Відновити компоненти метричного тензора келерового простору сталої голоморфної кривини в околиці деякої точки $M(x_0)$ за формулою П.О.Широкова:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s 2^s}{(2s+2)!} m_{ij}^s$$

9. Довести, що келеровий простір K_n ($n > 2$) є простором сталої кривини тоді і тільки тоді, коли він є евклідовим.

Тема 2. Гедезичні відображення келерових просторів

2.1. Гедезичні відображення ріманових просторів

1°. **Означення.** Криву L в рімановому просторі V_n , задану рівняннями

$$x^h = x^h(t), \quad \lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} (\neq 0) \quad (h=1,2,\dots,n), \quad (2.1)$$

де t - параметр, назвемо *гедезичною*, якщо її дотичний вектор $\lambda^h(t)$ вздовж неї є рекурентним.

Відповідно до цього визначення L є гедезичною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lambda^h_{,\alpha} \lambda^\alpha = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = \rho(t) \lambda^h, \quad (2.2)$$

де ρ - деяка (довільна) функція параметра t , комою позначається коваріантна похідна за зв'язністю V_n . З огляду на (4.1) рівняння (2.2) можна переписати наступним чином:

$$\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = \rho(t) \frac{dx^h}{dt}$$

Параметр t в (2.2) можна замінити на $t(\tau)$ таким чином, щоб після цієї заміни $\rho(t(\tau)) = 0$. Тоді рівняння гедезичної лінії, віднесеної до параметру τ , буде виглядати так:

$$\frac{d\lambda^h}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = 0$$

або

$$\frac{d^2 x^h}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Такий параметр називають канонічним. З теорії диференціальних рівнянь витікає, що остання система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку має єдиний розв'язок для будь-якого набору початкових значень

$$x^h(\tau_0) = x_0^h, \quad \frac{dx^h}{d\tau}(\tau_0) = \lambda^h(\tau_0) = \lambda_0^h.$$

З точки зору геометрії це означає, що через будь-яку точку $M(x_0^h)$ ріманового простору V_n в кожному напрямку λ_0^h проходить одна і тільки одна геодезична лінія.

Означення. Нехай задано два ріманові простори (V_n, g_{ij}) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ з метричними тензорами g_{ij} і $\bar{g}_{ij}$. Відображення $f: V_n \rightarrow \bar{V}_n$ називають **геодезичним**, якщо в результаті його будь-яка геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$.

Простір V_n допускає геодезичне відображення на $\bar{V}_n$ тоді і тільки тоді, коли в загальній за відображенням системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ виконуються рівняння

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x), \quad (2.3)$$

де $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ – символи Кристофеля другого роду V_n і $\bar{V}_n$, $\psi_i(x) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}$ – деякий градієнтний вектор. Рівняння (2.3) називають **основними рівняннями геодезичного відображення**.

З огляду на те, що $\bar{g}_{ij|k} = 0$, де “|” – знак коваріантної похідної в просторі $\bar{V}_n$, (2.3) можна переписати в еквівалентній формі:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}. \quad (2.4)$$

Рівняння (2.3) і (2.4) отримав Т.Леві-Чівіта.

Геодезичне відображення називають **нетривіальним**, якщо $\psi_i \neq 0$ (в протилежному випадку – **тривіальним**).

Основною задачею теорії геодезичних відображень ріманових просторів є розробка регулярних методів, які б давали можливість:

- 1) для просторів V_n і $\bar{V}_n$, які задано, встановити, чи належать вони одному й тому ж геодезичному класу, чи ні (тобто чи існує нетривіальне геодезичне відображення V_n на $\bar{V}_n$);
- 2) для даного простору з’ясувати, допускає воно нетривіальне геодезичне відображення взагалі чи ні, а якщо допускає, то і знайти всі простори, які належать тому ж геодезичному класу.

В деякій мірі відповісти на ці питання допомагають геометричні об’єкти, які зберігаються при геодезичних відображеннях.

2.2. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно геодезичних відображень ріманових просторів

1°. Припустимо, що існує геодезичне відображення $f: V_n \rightarrow \bar{V}_n$ ріманових просторів (V_n, g_{ij}) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ з метричними тензорами g_{ij} і $\bar{g}_{ij}$. Тоді в загальній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h \quad (2.5)$$

Відомо, що в кожному рімановому просторі виконуються формули Фосса-Вейля

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^i}, \quad g = \det \|g_{ij}\|.$$

Згортання (2.5) по індексах h, j дає нам

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha + (n+1)\psi_i, \quad (2.6)$$

отже з урахуванням формул Фосса-Вейля маємо:

$$2(n+1)\psi_i = \frac{\partial \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right|}{\partial x^i}.$$

Таким чином, ψ_i є градієнтним вектором, тобто $\psi_i = \psi_{,i}$.

2°. Виключимо з рівнянь (2.5) вектор ψ_i з урахуванням (2.6) і представимо їх у вигляді

$$\bar{T}_{ij}^h(x) = T_{ij}^h(x), \quad (2.7)$$

$$T_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n-2} (\delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha + \delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha). \quad (2.8)$$

Так само виражаються в $\bar{K}_n$ компоненти об'єкта $\bar{T}_{ij}^h$.

Співвідношення (2.7) свідчать про те, що геометричний об'єкт T_{ij}^h зберігається при геодезичному відображенні ріманових просторів. В теорії геодезичних відображень ріманових просторів його називають **проективними параметрами Томаса**. Збереження цього об'єкта при деякому відображенні ріманових просторів є **необхідним і достатнім** для того, щоб вказане відображення було геодезичним. В цьому полягає позитивне значення $T_{ij}^h(x)$. Негативним при цьому є те, що $T_{ij}^h(x)$ є нетензорним об'єктом, отже його дослідження тензорними методами неможливо.

3°. Є можливість будування тензорного геометричного об'єкта, який зберігається при геодезичному відображенні ріманових просторів. Для цього запишемо зв'язок між тензорами Рімана просторів V_n і $\bar{V}_n$, які знаходяться в геодезичному відображенні. Для цього скористаємося відомою формулою зв'язку між тензорами Рімана ріманових просторів (V_n, g_{ij}) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, які знаходяться в будь-якому відображенні з основними рівняннями

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x):$$

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + P_{ik,j}^h - P_{ij,k}^h + P_{ik}^\alpha P_{\alpha j}^h - P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h.$$

Згідно з (5.1) маємо:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}, \quad (2.9)$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j. \quad (2.10)$$

Після згортання (2.9) по h, k знаходимо:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n - 1)\psi_{ij}. \quad (2.11)$$

Тут R_{ij} і $\bar{R}_{ij}$ — тензори Річчі просторів V_n і $\bar{V}_n$.

Виключимо ψ_{ij} за допомогою (2.11) з (2.9) і запишемо останні таким чином:

$$\bar{W}_{ijk}^h = W_{ijk}^h, \quad (2.12)$$

де

$$W_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}). \quad (2.13)$$

Так само виражаються в $\bar{V}_n$ компоненти об'єкта $\bar{W}_{ijk}^h$. Співвідношення (2.12) свідчать про те, що геометричний об'єкт W_{ijk}^h , який називають **тензором Вейля**, зберігається при геодезичному відображенні ріманових просторів. Збереження цього об'єкта при деякому відображенні ріманових просторів є лише **необхідним (але не достатнім)** для того, щоб вказане відображення було геодезичним. В цьому полягає недолік

$W_{ijk}^h(x)$. Позитивним при цьому є те, що $W_{ijk}^h(x)$ є тензорним об'єктом, отже допускає ефективне дослідження тензорними методами.

Справедлива

Теорема 2.1. *Проективні параметри Томаса і тензор Вейля є інваріантними відносно геодезичних відображень ріманових просторів.*

4°. Рімановий простір V_n , який допускає геодезичне відображення на евклідовий простір $\bar{V}_n = E_n$, називають **проективно-плоским**. Легко перевірити, що тензор Вейля проективно-плоского простору дорівнює нулю. Для простору V_n , в якому $W_{ijk}^h = 0$, з (2.13) після опускання індекса h маємо

$$(n-1)R_{hijk} = g_{hk}R_{ij} - g_{hj}R_{ik}$$

Згортаючи тут обидві частини з g^{ij} по індексах i, j та використовуючи (2.11), отримаємо

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk},$$

де $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ – скалярна кривина.

Тому попередні співвідношення набувають вигляду

$$R_{hijk} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) \quad (2.14)$$

Порівняння (2.14) з (1.2) свідчить про те, що розглядуваний простір є простором сталої секційної кривини

$$K = \frac{R}{n(n-1)}.$$

З іншого боку, з (2.14) витікає $W_{ijk}^h = 0$.

Таким чином простори $V_n (n > 2)$ сталої секційної кривини характеризуються тотожною рівністю нулю тензора Вейля.

Оскільки тензор Вейля є інваріантним відносно геодезичних відображень, має місце

Теорема 2.2. *Якщо рімановий простір $V_n (n > 2)$ допускає геодезичне відображення на $\bar{V}_n$ сталої секційної кривини, то V_n також є простором сталої секційної кривини. Кожний рімановий простір $V_n (n > 2)$ сталої секційної кривини K допускає геодезичне відображення на будь-який рімановий простір $\bar{K}_n$ сталої секційної кривини $\bar{K}$.*

Доведення. Припустимо, що рімановий простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$ нам задано. Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}, \quad (2.15)$$

$$\psi_{i,j} = \psi_i \psi_j + (\bar{K} \bar{g}_{ij} - K g_{ij}), \quad (2.16)$$

де $\bar{K}$ —деяка довільна стала.

Ця система є системою Коші в коваріантних похідних першого порядку в V_n відносно невідомих тензорів $\bar{g}_{ij}(x)$ і $\psi_i(x)$.

Система (2.15), (2.16) на підставі (2.14) є цілком інтегровною, тобто її умови інтегровності в V_n виконуються тотожно. Тому для будь-яких початкових значень

$$\bar{g}_{ij}(x_0) = \bar{g}_{ij}^0 \left(\bar{g}_{ij}^0 = \bar{g}_{ji}^0, \quad \left| \bar{g}_{ij}^0 \right| \neq 0 \right), \quad \psi_i(x_0) = \psi_i^0 (\neq 0),$$

існує розв'язок $\bar{g}_{ij}(x)$ і $\psi_i(x)$. З урахуванням (2.9), (2.10), (2.14) легко переконатися, що $\bar{g}_{ij}(x)$ визначає рімановий простір $\bar{V}_n$ сталої секційної кривини $\bar{K}$.

Отже робимо висновок, що будь-який рімановий простір V_n сталої секційної кривини K допускає нетривіальне геодезичне відображення на будь-який інший рімановий простір $\bar{V}_n$ будь-якої сталої секційної кривини $\bar{K}$.

Теорему 2.2 в теорії геодезичних відображень називають **теоремою Бельтрамі**.

2.3. Геодезичні відображення келерових просторів

В.Вестлейк, К.Яно і Т.Нагано вивчали геодезичне відображення келерових просторів.

Має місце

Теорема 2.3. *Келерові простори K_n не допускають нетривіальні геодезичні відображення на келерові простори $\bar{K}_n$, якщо при цьому відображенні зберігається структура.*

Доведення. Розглянемо келерові простори (K_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ з метричними тензорами $g_{ij}, \bar{g}_{ij}$ і афінорними структурами $F_i^h, \bar{F}_i^h$, відповідно. Припустимо, що (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускає нетривіальне геодезичне відображення на $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, яке зберігає афінорну структуру. Тоді в загальній за відображенням системі координат (x) основні рівняння розглядуваного відображення мають вигляд:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x), \quad (2.17)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (2.18)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h, \quad (2.19)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; \quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \quad (2.20)$$

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha; \quad \bar{F}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha$$

$$F_{i,j}^h \equiv 0, \quad F_{i|j}^h \equiv 0 \quad (2.21)$$

Тут позначено коваріантну похідну в просторі $\bar{K}_n$ знаком “|”. Запишемо коваріантну похідну афінора F_i^h в $\bar{K}_n$:

$$F_{i|j}^h = \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha.$$

Замінімо тут символи Крістофеля $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ через Γ_{ij}^h , використовуючи (2.17):

$$\begin{aligned} F_{i|j}^h &= \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha (\Gamma_{\alpha j}^h + \delta_\alpha^h \psi_j + \delta_j^h \psi_\alpha) \\ &\quad - F_\alpha^h (\Gamma_{ij}^\alpha + \delta_i^\alpha \psi_j(x) + \delta_j^\alpha \psi_i) = \\ &= \left(\frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha \right) + \psi_j F_i^h + \psi_{\bar{i}} \delta_j^h - \psi_j F_i^h \\ &\quad - \psi_i F_j^h = F_{i,j}^h + \psi_{\bar{i}} \delta_j^h - \psi_i F_j^h \end{aligned}$$

З огляду на (2.17), (2.18), (2.21) звідси маємо

$$\psi_{\bar{i}}\delta_j^h - \psi_i F_j^h = 0.$$

Згорнемо цю рівність за індексами h, j , зважаючи на те, що

$$\delta_{\alpha}^{\alpha} = n,$$

отримаємо

$$(n - 1)\psi_{\bar{i}} = 0,$$

отже

$$\psi_{\bar{i}} = 0.$$

Враховуючи (2.19), згорнемо отриману рівність з афінором F_j^i по індексу i . Тоді виявляється, що

$$\psi_{\bar{i}} = -\psi_i = 0,$$

а це протирічить нашому припущенню про нетривіальність геодезичного відображення між келеровими просторами (K_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Таким чином теорему доведено.

В теорії геодезичних відображень келерових просторів Теорему 2.3 називають **теоремою Яно-Вестлейка**.

2.4. Ріманові простори з майже комплексною структурою, які є узагальненням келерових просторів

Американський геометр А.Грей в 1980 році побудував класифікацію майже комплексних ріманових просторів ($e = -1$). Він довів, що існують 16 класів майже комплексних многовидів, які характеризуються властивостями

$$F_{\alpha}^h F_i^{\alpha} = -\delta_i^h;$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^{\alpha}$$

i відрізняються один від одного різними властивостями диференціального характеру, причому келерові простори виділяються найбільш жорсткими умовами.

Ми наводимо лише ті класи просторів з класифікації А.Грея, для яких нам вдалося отримати узагальнення теореми Яно-Вестлейка:

- **келеровий простір:**

$$F_{ij,k} = 0;$$

- **K -простір:**

$$F_{i(j,k)} = 0;$$

- **H -простір:**

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0;$$

- **O -простір:**

$$F_{ij,k} - F_{\bar{i}\bar{j},\bar{k}} = 0;$$

- O^* -простір:

$$F_{ij,k} + F_{\bar{i}j,\bar{k}} = 0;$$

- G_1 -простір:

$$F_{ij,k} + F_{kj,i} - F_{\bar{i}j,\bar{k}} - F_{\bar{k}j,\bar{i}} = 0.$$

2.5. Новий геометричний об'єкт, інваріантний відносно геодезичного відображення майже комплексних многовидів

1°. Розглянемо ріманові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ з метричними тензорами g_{ij} , $\bar{g}_{ij}$ і афінорними структурами F_i^h і $\bar{F}_i^h$, які знаходяться в геодезичному відображенні

$$f: (V_n, g_{ij}, F_i^h) \rightarrow (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h),$$

зі збереженням структури. Тоді в загальній за відображенням системі координат (x^i) виконуються умови:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x), \quad (2.22)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (2.23)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h, \quad (2.24)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; \quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0, \quad (2.25)$$

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha; \quad \bar{F}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha$$

Зауважимо, що з огляду на (2.25) маємо $F_\alpha^\alpha = 0$.

2°. Побудуємо новий геометричний об'єкт, інваріантний відносно геодезичного відображення майже комплексних многовидів, який містить коваріантну похідну афінора. Це дасть нам можливість враховувати диференціальні властивості афінора при дослідженні геодезичного відображення.

З урахуванням (2.22) залежність між коваріантними похідними афінора в просторах $\bar{V}_n$ і V_n має вигляд:

$$F_{i|j}^h = F_{i,j}^h + \psi_{\bar{i}} \delta_j^h - \psi_i F_j^h. \quad (2.26)$$

Проведемо згортання (2.26) за індексами h, j :

$$F_{i\alpha}^\alpha = F_{i,\alpha}^\alpha + n\psi_{\bar{i}}.$$

Звідси

$$\psi_{\bar{i}} = \frac{1}{n} (F_{i\alpha}^\alpha - F_{i,\alpha}^\alpha),$$

або з урахуванням (2.24)

$$\psi_i = \frac{-1}{n} (F_{\bar{i}|\alpha}^\alpha - F_{\bar{i},\alpha}^\alpha). \quad (2.27)$$

Підставляючи співвідношення (2.27) в (2.26), запишемо їх у вигляді

$$\bar{S}_{ij}^h = S_{ij}^h,$$

де

$$S_{ij}^h = F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h). \quad (2.28)$$

Аналогічно представляються в $\bar{V}_n$ компоненти $\bar{S}_{ij}^h$.

Доведена

Теорема 2.4. *Тензор S_{ij}^h , визначений формулами (2.28), є інваріантним відносно геодезичних відображень майже комплексних ріманових просторів зі збереженням структури.*

2.6. Зв'язок між об'єктом S_{ij}^h і типом майже комплексного многовиду

1°. Нашою метою буде встановлення зв'язку між властивостями тензора S_{ij}^h і типом майже комплексного ріманового простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) .

Розглянемо (V_n, g_{ij}, F_i^h) , в якому $S_{ij}^h \equiv 0$, тобто

$$F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h) = 0. \quad (2.29)$$

Опустимо в (2.29) індекс h в V_n :

$$F_{hi,j} - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{hj} + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{hj}) = 0.$$

Після згортання цього співвідношення з g^{ij} по індексах i, j з урахуванням (2.25) маємо

$$F_{h,\alpha}^\alpha = 0$$

і

$$F_{i,j}^h = 0,$$

отже V_n -келеровий простір.

Зворотнє також має місце: якщо V_n -келеровий простір, тобто

$$F_{i,j}^h = 0, \text{ то } F_{h,\alpha}^\alpha = 0 \text{ і отже із (2.28) витікає } S_{ij}^h = 0.$$

Доведено

Твердження 1. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{ij}^h = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли

V_n — келеровий простір, тобто

$$F_{i,j}^h = 0.$$

2°. Розглянемо (V_n, g_{ij}, F_i^h) , в якому $S_{(ij)}^h \equiv 0$, тобто

$$F_{(i,j)}^h - \frac{1}{n}(F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h) - \frac{1}{n}(F_{j,\alpha}^\alpha \delta_i^h + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_i^h) = 0. \quad (2.30)$$

Опустимо в (2.30) індекс h в V_n і згорнемо по індексах h, j . Результат дає нам

$$F_{h,\alpha}^\alpha = 0.$$

Тоді з (2.30) витікає

$$F_{i,j}^h + F_{i,j}^h = 0,$$

отже $V_n \in K$ -простором.

Зворотнє твердження також має місце: якщо $V_n \in K$ -простором, тобто

$$F_{(i,j)}^h = 0, \text{ то } F_{h,\alpha}^\alpha = 0 \text{ і отже із (2.28) витікає } S_{(ij)}^h = 0.$$

Твердження 2. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{(ij)}^h = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли V_n — K -простір, тобто

$$F_{(i,j)}^h = 0.$$

3°. Розглянемо (V_n, g_{ij}, F_i^h) , в якому $S_{[i j]}^h \equiv 0$, тобто

$$F_{[i,j]}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{i,\alpha}^\alpha F_j^h) + \frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha \delta_i^h + F_{j,\alpha}^\alpha F_i^h) = 0. \quad (2.31)$$

Опустимо в (2.31) індекс h в V_n і проциклюємо по індексах h, j, i :

$$F_{k[i,j]} - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{kj} + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{kj}) + \frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha g_{ki} + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_{ki}) = 0 ; (2.32)$$

$$\begin{aligned} & F_{k[i,j]} - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{kj} + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{kj}) + \frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha g_{ki} + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_{ki}) + \\ & + F_{i[j,k]} - \frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha g_{ik} + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_{ik}) + \frac{1}{n} (F_{k,\alpha}^\alpha g_{ij} + F_{\bar{k},\alpha}^\alpha F_{ij}) + \\ & + F_{j[k,i]} - \frac{1}{n} (F_{k,\alpha}^\alpha g_{ji} + F_{\bar{k},\alpha}^\alpha F_{ji}) + \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{jk} + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{jk}) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Після зведення подібних (2.33) набувають вигляду:

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} - \frac{1}{n} (F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{kj} + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_{ik} + F_{\bar{k},\alpha}^\alpha F_{ji}) = 0 \quad (2.34)$$

Згорання цього співвідношення з g^{ij} по індексах h, j дає нам

$$F_{h,\alpha}^\alpha = 0.$$

Тоді з (2.32) і (2.34) витікає

$$F_{ij,k} = 0,$$

отже V_n є келеровим простором.

Зворотнє також має місце: якщо V_n є келеровим, тобто

$$F_{ij,k} = 0, \text{ то } F_{h,\alpha}^\alpha = 0 \quad \text{і отже із (2.24) витікає } S_{[i j]}^h \equiv 0.$$

Твердження 3. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{[i j]}^h \equiv 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли

V_n – келеровий простір, тобто

$$F_{i,j}^h = 0.$$

4°. Нехай в V_n виконуються співвідношення:

$$S_{(ijh)} = 0,$$

де

$$S_{ijh} = S_{ij}^\alpha g_{\alpha h},$$

а дужками позначено циклювання. Тоді

$$S_{ijh} = F_{hi,j} - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{hj} + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{hj})$$

і

$$\begin{aligned} S_{(ijh)} = F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha g_{hj} + F_{j,\alpha}^\alpha g_{ih} + F_{h,\alpha}^\alpha g_{ji}) - \\ - \frac{1}{n} (F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_{hj} + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_{ih} + F_{\bar{h},\alpha}^\alpha F_{ji}) = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Згортання цього співвідношення з g^{ij} по індексах h, j дає нам

$$F_{h,\alpha}^\alpha = 0.$$

Тоді із (2.35) маємо:

$$F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0,$$

тобто $V_n \in H$ - простором.

Зворотне також має місце: якщо $V_n \in H$ - простором, тобто

$$F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0, \text{ то } F_{h,\alpha}^\alpha = 0 \text{ і отже із (2.35) витікає}$$

$$S_{(ijh)} = 0.$$

Твердження 4. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{(ijh)} = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли

$V_n - H$ -простір, тобто

$$F_{(hi,j)} = 0.$$

5°. Виходячи з тих же міркувань, що в попередніх пунктах, можна довести твердження:

Твердження 5. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{ij}^h - S_{i\bar{j}}^h = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли V_n — O -простір, тобто

$$F_{ij,k} - F_{\bar{i}\bar{j},\bar{k}} = 0.$$

Твердження 6. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{ij}^h + S_{\bar{i}\bar{j}}^h = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли V_n — O^* -простір, тобто

$$F_{ij,k} + F_{\bar{i}\bar{j},\bar{k}} = 0.$$

Твердження 7. Тензор S_{ij}^h задовольняє умовам

$$S_{(ij)}^h - S_{(\bar{i}\bar{j})}^h = 0$$

в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли V_n — G_1 -простір, тобто

$$F_{hi,j} + F_{hj,i} - F_{h\bar{i},\bar{j}} - F_{h\bar{j},\bar{i}} = 0.$$

6°. Зведемо результати **Тверджень 1-7** до теореми:

Теорема 2.5. Нехай (V_n, g_{ij}, F_i^h) — майже комплексний простір з метричним тензором g_{ij} і афінором F_i^h . Тоді зв'язок між тензором S_{ij}^h , що

визначається формулами (2.28), і типом майже комплексного многови-
ду V_n витікає з тверджень:

1) $S_{ij}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – келеровий простір, тобто

$$F_{i,j}^h = 0;$$

2) $S_{(ij)}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – К-простір, тобто

$$F_{(i,j)}^h = 0;$$

3) $S_{[ij]}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – келеровий простір, тобто

$$F_{i,j}^h = 0;$$

4) $S_{(ijh)} = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – Н-простір, тобто

$$F_{(hi,j)} = 0.$$

5) $S_{ij}^h - S_{\bar{i}\bar{j}}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – О-простір, тобто

$$F_{hi,j} - F_{h\bar{i},\bar{j}} = 0.$$

6) $S_{ij}^h + S_{\bar{i}\bar{j}}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – O^* -простір, тобто

$$F_{hi,j} + F_{h\bar{i},\bar{j}} = 0.$$

7) $S_{(ij)}^h - S_{(\bar{i}\bar{j})}^h = 0$ тоді і тільки тоді, коли V_n – G_1 -простір, тоб-
то

$$F_{hi,j} + F_{hj,i} - F_{h\bar{i},\bar{j}} - F_{h\bar{j},\bar{i}} = 0.$$

2.7. Узагальнення теореми Яно-Вестлейка

Розглянемо ріманові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$ з майже комплексною структурою F_i^h , які знаходяться в геодезичному відображенні.

З огляду на інваріантність тензора S_{ij}^h відносно геодезичного відображення всі умови попередньої теореми, окрім 4), можуть виконуватись тільки одночасно в обох просторах, тобто якщо $S_{ij}^h = 0$, то і $\bar{S}_{ij}^h = 0$; якщо $S_{(ij)}^h = 0$, то і $\bar{S}_{(ij)}^h = 0$; якщо $S_{[ij]}^h = 0$, то і $\bar{S}_{[ij]}^h = 0$ тощо.

У випадках 1), 2), 3), 6) умови $F_{i,\alpha}^\alpha = 0$ виконуються автоматично в V_n , а отже, і $\bar{F}_{i|\alpha}^\alpha = 0$ в $\bar{V}_n$. Тоді з (2.27) витікає, що

$$\psi_i = \frac{-1}{n} (F_{\bar{i}|\alpha}^\alpha - F_{\bar{i},\alpha}^\alpha) = 0,$$

тобто геодезичне відображення V_n на $\bar{V}_n$ є тривіальним.

Виконується

Теорема 2.6. *Рімановий простір, на якому визначена майже комплексна структура F_i^h , що задовольняє однієї з умов :*

$$1) S_{ij}^h = F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h) = 0;$$

$$2) S_{(ij)}^h = F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h) + F_{j,i}^h - \frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha \delta_i^h + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_i^h) = 0;$$

$$3) S_{[i j]}^h = F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h) - F_{j,i}^h +$$

$$\frac{1}{n} (F_{j,\alpha}^\alpha \delta_i^h + F_{\bar{j},\alpha}^\alpha F_i^h) = 0;$$

$$4) S_{ij}^h + S_{\bar{i}\bar{j}}^h = F_{hi,j} + F_{h\bar{i},\bar{j}} = 0$$

не допускає нетривіальних геодезичних відображень.

З Теорем 2.5, 2.6 витікає дуже корисне

Слідство. *K-простори і O^* -простори (зокрема, келерові простори) не допускають нетривіальних геодезичних відображень, які зберігають майже комплексну структуру.*

Наведене слідство є узагальненим аналогом теореми Яно-Вестлейка.

Контрольні питання до Тем 2

1. Геодезичні лінії ріманового простору.
2. Теорема існування для геодезичної лінії ріманового простору.
3. Означення геодезичного відображення ріманових просторів та їх основні рівняння.
4. Еквівалентні форми основних рівнянь геодезичного відображення ріманових просторів.
5. Доведіть градієнтність вектора, який фігурує в основних рівняннях геодезичних відображень ріманових просторів.
6. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно геодезичних відображень ріманових просторів.
7. Параметри Томаса, їх значення в теорії геодезичних відображень.
8. Тензор Вейля, його значення в теорії геодезичних відображень.

9. *Геодезичне відображення ріманового простору на плоский простір. Проективно-плоскі простори.*
10. *Теорема Бельтрамі.*
11. *Тензор Вейля для ріманових просторів, які допускають геодезичне відображення на плоский простір.*
12. *Простори сталої кривини як приклад ріманових просторів, які допускають нетривіальні геодезичні відображення.*
13. *Геодезичні відображення келерових просторів.*
14. *Аналог теорема Бельтрамі.*
15. *Ріманові простори з майже комплексною структурою, відмінною від келерової.*
16. *Геометричний об'єкт, інваріантний відносно геодезичних відображень ріманових просторів з майже комплексною структурою.*
17. *Геодезичні відображення майже комплексних просторів зі збереженням афінорної структури.*
18. *Узагальнення теореми Яно-Вестлейка.*

Вправи до Теми 2

1. Довести, що при дифеоморфізмі ріманового простору (V_n, g_{ij}) на простір $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, який в загальній за відображенням системі координат має основні рівняння

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x),$$

кожна геодезична лінія V_n переходить в геодезичну лінію $\bar{V}_n$.

2. Довести, що рівняння геодезичних відображень

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}$$

i

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x)$$

еквівалентні.

3. Довести, що вектор ψ_i в рівняннях геодезичного відображення градієнтний.
4. Довести, що збереження проєктивних параметрів Томаса при деякому відображенні ріманових просторів є необхідним і достатнім для того, щоб вказане відображення було геодезичним.
5. Записати умови інтегровності диференціальних рівнянь

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik}$$

в просторі сталої секційної кривини.

6. Записати умови інтегровності диференціальних рівнянь

$$\psi_{i,j} = \psi_i \psi_j + (\bar{K} \bar{g}_{ij} - K g_{ij}),$$

де $\bar{K}$ —деяка довільна стала, в просторі сталої секційної кривини.

7. Довести, що в O^* - просторі виконується умова $F_{i,\alpha}^\alpha = 0$.

8. Довести, що тензор

$$S_{ij}^h = F_{i,j}^h - \frac{1}{n} (F_{i,\alpha}^\alpha \delta_j^h + F_{\bar{i},\alpha}^\alpha F_j^h)$$

задовольняє умовам $S_{ij}^h - S_{\bar{i}\bar{j}}^h = 0$ в майже комплексному просторі

(V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли V_n — O -простір.

9. Довести, що тензор S_{ij}^h задовольняє умовам $S_{ij}^h + S_{\bar{i}\bar{j}}^h = 0$ в майже комплексному просторі (V_n, g_{ij}, F_i^h) тоді і тільки тоді, коли

V_n — O^* -простір.

Тема 3. Голоморфно-проективні відображення келерових просторів

3.1. Поняття голоморфно-проективного відображення келерових просторів

Згідно з теоремою Яно-Вестлейка не існує нетривіальних геодезичних відображень келерового простору на келеровий, які зберігають структуру. Тому для келерових просторів доцільно розглядати відображення більш загального характеру. Таким є зокрема голоморфно-проективне відображення келерових просторів зі збереженням структури.

1°. Нехай (K_n, g_{ij}, F_i^h) – келеровий простір з метричним тензором g_{ij} і афінорною структурою F_i^h . Нагадаємо, що тоді в ньому виконуються умови

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0; \quad (3.1)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0; \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha; \quad (3.2)$$

$$F_{i,j}^h \equiv 0, \quad (3.3)$$

де $i, j, \dots, = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta, \dots, = 1, 2, \dots, n$.

Означення (Т.Отсуки, Я.Таширо). Криву L в келеровому просторі K_n , задану рівняннями

$$x^h = x^h(t), \quad \lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} (\neq 0) \quad (h=1, 2, \dots, n), \quad (3.4)$$

де t – дійсний параметр, називають **аналітично-планарною**, якщо її дотичний вектор $\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt}$ при паралельному перенесенні вздовж неї залишається в 2-вимірній площині $E_2\{\lambda^h(t), \lambda^{\bar{h}}(t)\}$, утворений векторами $\lambda^h(t)$ та $\lambda^{\bar{h}}(t) = \lambda^\alpha(t)F_\alpha^h$.

Відповідно до цього визначення L є аналітично-планарною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lambda^h_{, \alpha} \lambda^\alpha = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = \rho_1(t) \lambda^h + \rho_2(t) \lambda^{\bar{h}}, \quad (3.5)$$

де ρ_1, ρ_2 - деякі (довільні) функції дійсного параметра t ,

комою позначається коваріантна похідна за зв'язністю K_n . З огляду на (3.4) рівняння (3.5) можна переписати наступним чином:

$$\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = \rho_1(t) \frac{dx^h}{dt} + \rho_2(t) F_\alpha^h \frac{dx^\alpha}{dt}$$

Очевидно, через будь-яку точку в кожному напрямку проходить безліч аналітично-планарних кривих, залежних від однієї довільної функції. Клас аналітично-планарних кривих містить в собі геодезичні лінії (якщо $\rho_2 \equiv 0$).

Означення. Нехай задано два келерові простори (K_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ з метричними тензорами $g_{ij}, \bar{g}_{ij}$ і афінорними структурами $F_i^h, \bar{F}_i^h$, відповідно. Відображення $f: K_n \rightarrow \bar{K}_n$ називають **аналітично-планарним або голоморфно-проективним**, якщо в результаті його будь-яка аналітично-планарна крива K_n переходить в аналітично-планарну криву $\bar{K}_n$.

Простір K_n допускає голоморфно-проективне відображення на $\bar{K}_n$ зі збереженням структури тоді і тільки тоді, коли в загальній за відображенням системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ виконуються рівняння

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_{(i}^h \psi_{j)}(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x), \quad (3.6)$$

$$F_{(ij)} = \bar{F}_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad \bar{F}_{ij} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i}, \quad (3.7)$$

$$F_{i,j}^h = 0, \quad F_{i|j}^h = 0, \quad (3.8)$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \quad F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x). \quad (3.9)$$

де $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ — символи Кристофеля другого роду K_n і $\bar{K}_n$, $\psi_i(x), \varphi_i(x)$ — деякі вектори, “ , ” і “ | ” — знаки коваріантних похідних в просторах K_n і $\bar{K}_n$. Рівняння (3.6)-(3.9) називають **основними рівняннями голоморфно-проективного відображення келерових просторів зі збереженням структури**.

З огляду на те, що $\bar{g}_{ij|k} = 0$, (3.6) можна переписати в еквівалентній формі:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik} \quad (3.10)$$

Голоморфно-проективне відображення називають **тривіальним**, якщо

$$\psi_i = \varphi_i = 0.$$

2°. Доведемо, що в основних рівняннях голоморфно-проективних відображень (3.6) вектори ψ_i і φ_i пов'язані. Для цього запишемо коваріантну похідну афінора F_i^h в $\bar{K}_n$:

$$F_{i|j}^h = \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha.$$

Замінімо тут символи Крістофеля $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ через Γ_{ij}^h , використовуючи (3.6):

$$\begin{aligned} F_{i|j}^h &= \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha (\Gamma_{\alpha j}^h + \delta_\alpha^h \psi_j + \delta_j^h \psi_\alpha + F_\alpha^h \varphi_j + F_j^h \varphi_\alpha) \\ &\quad - F_\alpha^h (\Gamma_{ij}^\alpha + \delta_i^\alpha \psi_j(x) + \delta_j^\alpha \psi_i + F_i^\alpha \varphi_j(x) + F_j^\alpha \varphi_i) \\ &= \left(\frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha \right) + \psi_j F_i^h + \psi_{\bar{i}} \delta_j^h - \delta_i^h \varphi_j \\ &\quad + \varphi_{\bar{i}} F_j^h - \psi_j F_i^h - \psi_i F_j^h + \delta_i^h \varphi_j + \delta_j^h \varphi_i \\ &= F_{i,j}^h + (\varphi_i + \psi_{\bar{i}}) \delta_j^h + (\varphi_{\bar{i}} - \psi_i) F_j^h \end{aligned}$$

З огляду на (3.8) останні співвідношення дають нам

$$(\varphi_i + \psi_{\bar{i}}) \delta_j^h + (\varphi_{\bar{i}} - \psi_i) F_j^h = 0.$$

Зауважимо, з (3.7) витікає, що афінор F_i^h має нульовий слід:

$$F_\alpha^\alpha = F_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} g^{\beta\alpha} = 0.$$

Згорнемо попередню рівність за індексами h, j , зважаючи на те, що

$$\delta_\alpha^\alpha = n, \text{ і отримаємо}$$

$$\varphi_i + \psi_{\bar{i}} = 0,$$

отже

$$\varphi_i = -\psi_{\bar{i}} \quad (3.11)$$

Враховуючи (3.9), згорнемо отриману рівність з афіном F_j^i по індексу i . Тоді виявляється, що

$$\psi_{\bar{i}} = -\psi_i = -\varphi_{\bar{i}}. \quad (3.12)$$

3°. Доведемо, що вектор ψ_i – градієнтний.

Дійсно, відомо, що в кожному рімановому просторі виконуються формули Фосса-Вейля

$$\Gamma_{i\alpha}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^i}, \quad g = \det \|g_{ij}\|.$$

Згорання (3.6) за h, j за умови (3.12) дає нам

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\alpha + (n+2)\psi_i, \quad (3.13)$$

отже з урахуванням формул Фосса-Вейля маємо:

$$2(n+2)\psi_i = \frac{\partial \ln \left| \frac{\bar{g}}{g} \right|}{\partial x^i}.$$

Таким чином, ψ_i є градієнтним вектором, тобто $\psi_i = \psi_{,i}$.

3.2. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно голоморфно-проективних відображень келерових просторів

1°. Виключимо з рівнянь (3.6) вектор ψ_i з урахуванням (3.13) і представимо їх у вигляді

$$\bar{T}_{ij}^h(x) = T_{ij}^h(x), \quad (3.14)$$

$$T_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n-2} (\delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha + \delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha - F_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha - F_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha). \quad (3.15)$$

Так само виражаються в $\bar{K}_n$ компоненти об'єкта $\bar{T}_{ij}^h$.

Співвідношення (3.14) свідчать про те, що геометричний об'єкт T_{ij}^h зберігається при голоморфно-проективному відображенні келерових просторів. Він є подібним до параметрів Томаса в теорії геодезичних відображень ріманових просторів. Збереження цього об'єкта при деякому відображенні келерових просторів є **необхідним і достатнім** для того, щоб вказане відображення було голоморфно-проективним. В цьому полягає позитивне значення $T_{ij}^h(x)$. Негативним при цьому є те, що $T_{ij}^h(x)$ є нетензорним об'єктом, отже його дослідження тензорними методами неможливо.

2°. Є можливість будування тензорного геометричного об'єкта, який зберігається при голоморфно-проективному відображенні келерових просторів. Для цього запишемо зв'язок між тензорами Рімана просторів K_n і $\bar{K}_n$, які знаходяться в голоморфно-проективному відображенні. Для цього скористаємося відомою формулою зв'язку між тензорами Рімана ріманових просторів (V_n, g_{ij}) і $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$, які знаходяться в будь-якому відображенні з основними рівняннями

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x):$$

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + P_{ik,j}^h - P_{ij,k}^h + P_{ik}^\alpha P_{\alpha j}^h - P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h.$$

Згідно з (3.6)-(3.9) маємо:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \\ + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik} + F_i^h (\psi_{\bar{j}k} - \psi_{\bar{k}j}) - F_k^h \psi_{\bar{i}j} + F_j^h \psi_{\bar{i}k}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j + \psi_{\bar{i}} \psi_{\bar{j}}. \quad (3.17)$$

Завдяки градієнтності вектора ψ_i тензор ψ_{ij} є симетричним, тому після згортання (3.16) по h, k знаходимо:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + n\psi_{ij} + 2\psi_{\bar{i}\bar{j}}. \quad (3.18)$$

Тут R_{ij} і $\bar{R}_{ij}$ — тензори Річчі просторів K_n і $\bar{K}_n$. Якщо до цього співвідношення застосувати спряження по індексах i, j , то згідно з (1.8) і (1.15) отримаємо:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + n\psi_{\bar{i}\bar{j}} + 2\psi_{ij},$$

тому робимо висновок, що

$$\psi_{\bar{i}\bar{j}} = \psi_{ij}, \quad (3.19)$$

а (3.18) набуває вигляду

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n + 2)\psi_{ij}. \quad (3.20)$$

Виключимо ψ_{ij} за допомогою (3.20) з (3.16) і запишемо останні таким чином:

$$\bar{P}_{ijk}^h = P_{ijk}^h, \quad (3.21)$$

де

$$P_{ijk}^h = R_{ijk}^h - \frac{1}{n+2} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik} - F_k^h R_{\bar{i}j} + F_j^h R_{\bar{i}k} + 2F_i^h R_{\bar{j}k}). \quad (3.22)$$

Так само виражаються в $\bar{K}_n$ компоненти об'єкта $\bar{P}_{ijk}^h$. Співвідношення (3.21) свідчать про те, що геометричний об'єкт P_{ijk}^h , який називають **тензором голоморфно-проективної кривини**, зберігається при голоморфно-проективному відображенні келерових просторів. Він є подібним до тензора Вейля в теорії геодезичних відображень ріманових просторів. Збереження цього об'єкта при деякому відображенні келерових просторів є лише **необхідним (але не достатнім)** для того, щоб вказане відображення було голоморфно-проективним. В цьому полягає недолік $P_{ijk}^h(x)$. Позитивним при цьому є те, що $P_{ijk}^h(x)$ є тензорним об'єктом, отже допускає ефективне дослідження тензорними методами.

Справедлива

Теорема 3.1. *Геометричні об'єкти (12.2) і (12.9) є інваріантними відносно голоморфно-проективних відображень келерових просторів, які зберігають структуру.*

Для простору K_n , в якому тензор голоморфно-проективної кривини тотожно дорівнює нулю, з (3.22) після опускання індекса h маємо

$$(n+2)R_{hijk} = g_{hk}R_{ij} - g_{hj}R_{ik} - F_{hk}R_{\bar{i}j} + F_{hj}R_{\bar{i}k} + 2F_{hi}R_{\bar{j}k}.$$

Згортаючи тут обидві частини з g^{ij} по індексах i, j та використовуючи (11.7), отримаємо

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk},$$

де $R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ — скалярна кривина.

Тому попередні співвідношення набувають вигляду

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= \\ &= \frac{R}{n(n+2)} (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik} + F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Порівняння (3.23) з (1.18) свідчить про те, що розглядуваний простір є простором сталої голоморфно-проективної кривини $k = \frac{4R}{n(n+2)}$.

З іншого боку, з (3.23) витікає $P_{ijk}^h = 0$.

Таким чином простори $K_n (n > 2)$ сталої голоморфної кривини характеризуються тотожною рівністю нулю тензора голоморфної кривини.

Оскільки тензор голоморфно-проективної кривини є інваріантним відносно голоморфно-проективних відображень, має місце

Теорема 3.2. *Якщо келеровий простір K_n ($n > 2$) допускає голоморфно-проективне відображення на $\bar{K}_n$ сталої голоморфної кривини, то K_n також є простором сталої голоморфної кривини.*

Має місце також

Теорема 3.3. *Між будь-якими келеровими просторами сталої голоморфної кривини K_n і $\bar{K}_n$ можна встановити нетривіальне голоморфно-проективне відображення.*

Доведення. Припустимо, що келеровий простір K_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і структурою $F_i^h(x)$ нам задано. Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik}, \quad (3.24)$$

$$\psi_{i,j} = \psi_i \psi_j - \psi_{\bar{i}} \psi_{\bar{j}} + 4(\bar{k} \bar{g}_{ij} - k g_{ij}), \quad (3.25)$$

де $\bar{k}$ — деяка довільна стала.

Ця система є системою Коші в коваріантних похідних першого порядку в K_n відносно невідомих тензорів $\bar{g}_{ij}(x)$ і $\psi_i(x)$. Далі вимагаємо, щоб виконувалися співвідношення

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}, \quad \bar{F}_{ij} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i}. \quad (3.26)$$

Система (3.24), (3.25), (3.26) на підставі (3.23) є цілком інтегрованою, тобто її умови інтегровності в K_n виконуються тотожно. Диференціальні продовження (3.26) також виконуються тотожно. Тому для будь-яких початкових значень

$$\bar{g}_{ij}(x_0) = \overset{0}{g}_{ij} \left(\overset{0}{g}_{ij} = \overset{0}{g}_{ji}, \quad \left| \overset{0}{g}_{ij} \right| \neq 0 \right), \quad \psi_i(x_0) = \overset{0}{\psi}_i (\neq 0),$$

що задовольняють умовам (3.26), існує розв'язок $\bar{g}_{ij}(x)$ і $\psi_i(x)$. З урахуванням (3.16), (3.17), (3.23) і (3.25) легко переконатися, що $\bar{g}_{ij}(x)$ визначає келеровий простір $\bar{K}_n$ сталої голоморфної кривини $\bar{k}$.

Отже робимо висновок, що будь-який келеровий простір K_n сталої голоморфної кривини k допускає нетривіальне голоморфно-проективне відображення зі збереженням структури на будь-який інший келеровий простір $\bar{K}_n$ будь-якої сталої голоморфної кривини $\bar{k}$.

3.3. Нова форма основних рівнянь теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів

Рівняння (3.6) і (3.10) є еквівалентними формами основних рівнянь голоморфно-проективних відображень келерових просторів. В даному келеровому просторі (K_n, g_{ij}, F_i^h) вони є системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку відносно компонент тензора $\bar{g}_{ij}(x)$ і вектора $\psi_i(x)$. Для дослідження умов існування і єдиності цієї системи скористаємося методами, розробленими в теорії геодезичних відображень і доведемо, що їх можна звести до принципово іншого вигляду, який дозволяє відкрити нові загальні закономірності теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

1°. Нехай (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускає голоморфно-проективне відображення на $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$. Тоді в загальній за відображенням системі координат виконуються рівняння (3.10).

Оберемо в K_n тензор

$$a_{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}. \quad (3.27)$$

Знайдемо його коваріантну похідну в K_n :

$$a_{ij,k} = e^{2\psi} (2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} + \bar{g}^{\alpha\beta}_{,k} g_{\alpha i} g_{\beta j})$$

З того, що

$$\bar{g}_{i\alpha} \bar{g}^{\alpha h} = \delta_i^h,$$

витікає

$$\bar{g}_{i\alpha,k} \bar{g}^{\alpha h} + \bar{g}_{i\alpha} \bar{g}^{\alpha h}_{,k} = 0$$

або

$$\bar{g}^{ih}_{,k} = -\bar{g}_{\alpha\beta,k} \bar{g}^{\alpha i} \bar{g}^{\beta h}.$$

Тому з урахуванням (2.11) отримаємо:

$$\begin{aligned} a_{ij,k} &= e^{2\psi} (2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \bar{g}_{\gamma\delta,k} \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\alpha i} g_{\beta j}) = \\ &= e^{2\psi} (2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - (2\psi_k \bar{g}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha} \bar{g}_{\beta)k} + \varphi_{(\alpha} \bar{F}_{\beta)k}) \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\gamma i} g_{\delta j}) = \\ &= e^{2\psi} (-\psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{jk} - \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} g_{ik} - \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} F_{jk} - \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} F_{ik}). \end{aligned}$$

Отже

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - \lambda_{\bar{i}} F_{jk} - \lambda_{\bar{j}} F_{ik}. \quad (3.28)$$

Тут ми позначили

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \psi_\alpha \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i}. \quad (3.29)$$

2°. Для тензора a_{ij} з огляду на (3.20) виконуються умови:

$$a_{j\alpha} F_i^\alpha = -a_{i\alpha} F_j^\alpha \quad (3.30)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} a_{j\alpha} F_i^\alpha &= e^{2\psi} F_i^\alpha g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = -e^{2\psi} F_\beta^\alpha g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = \\ &= e^{2\psi} F_\beta^\delta g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\alpha} g_{\delta j} = -e^{2\psi} F_j^\delta g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\alpha} g_{\delta\beta} = -a_{i\alpha} F_j^\alpha. \end{aligned}$$

Згідно з (3.27) і (3.29) a_{ij} – деякий неособливий симетричний тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, λ_i – ковектор.

3°. Згортаючи (3.28) з g^{ij} по i і j , знаходимо:

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta,k} g^{\alpha\beta} &= 2\lambda_\alpha g_{\beta k} g^{\alpha\beta} - 2\lambda_{\bar{\alpha}} F_{\beta k} g^{\alpha\beta} = 2\lambda_\alpha \delta_k^\alpha + 2\lambda_{\bar{\alpha}} F_k^\alpha = \\ &= 2\lambda_k - 2\lambda_\alpha F_k^{\bar{\alpha}} = 4\lambda_k. \end{aligned}$$

Оскільки тензор g^{ij} коваріантно сталий, внесемо його під знак похідної і отримаємо:

$$(a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = 4\lambda_k.$$

Отже, λ_k - градієнтний вектор, причому з (3.29) видно,

що $\lambda_k \neq 0$ при $\psi_k \neq 0$ і навпаки.

Таким чином, якщо простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускає нетривіальне голоморфно-проективне відображення, в ньому існує симетричний тензор a_{ij} типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, який задовольняє умовам (3.28) і (3.30) при деякому векторі $\lambda_k \neq 0$.

Очевидно, що має місце і зворотне твердження. Отже справедлива теорема:

Теорема 3.4. *Для того, щоб келеровий простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне голоморфно-проективне відображення, необхідно и достаточно, щоб в ньому існував неособливий симетричний тензор a_{ij} типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, який задовольняє (3.28) і (3.30) при деякому векторі $\lambda_k \neq 0$.*

Рівняння (3.28) називають **новою формою основних рівнянь теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів** зі збереженням структури.

3.4. Основні теореми теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів

1°. Коли келеровий простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) задано, нам відомий його метричний тензор $g_{ij}(x)$, афінор структури $F_i^h(x)$. Для з'ясування питання, чи існує нетривіальне голоморфно-проективне відображення K_n ,

треба дослідити рівняння (3.28) відносно тензора a_{ij} . Але в правій частині рівняння (3.28) міститься також невідомий вектор λ_k , тому система не має замкнутого характеру. Для того, щоб скористатися регулярними методами, треба доповнити (3.28) рівняннями відносно коварантної похідної вектора λ_k . З цією метою розглянемо умови інтегровності рівняння (3.28) і скористаємося тотожністю Річчі:

$$a_{ij,[kl]} = a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} + a_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha} = \lambda_{i,l} g_{jk} + \lambda_{j,l} g_{ik} - \lambda_{i,k} g_{jl} - \lambda_{j,k} g_{il} - \\ - \lambda_{\bar{i},l} F_{jk} - \lambda_{\bar{j},l} F_{ik} + \lambda_{\bar{i},k} F_{jl} + \lambda_{\bar{j},k} F_{il}. \quad (3.31)$$

Згортаючи цю рівність з g^{jk} , отримаємо:

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{i\alpha} R_l^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta} - \lambda_{\bar{i},\bar{l}} + \lambda_{i,l}, \quad (3.32)$$

де $\mu = \lambda_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta}$, $R_{il}^{h\ k} = R_{il\alpha}^h g^{\alpha k}$, $R_l^h = R_{\alpha l} g^{\alpha h}$. Звідси також маємо з урахуванням (1.11), (1.13) і (3.32)

$$n\lambda_{\bar{i},\bar{l}} = \mu g_{il} + a_{i\alpha} R_l^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta} - \lambda_{i,l} + \lambda_{\bar{i},\bar{l}}.$$

З двох останніх співвідношень знаходимо:

$$\lambda_{\bar{i},\bar{l}} = \lambda_{i,l}.$$

Отже (3.32) набуває вигляду

$$n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{i\alpha} R_l^{\alpha} - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta} \quad (3.33)$$

Якщо проальтернувати це рівняння по i, l , знайдемо

$$a_{i\alpha}R_l^\alpha = a_{l\alpha}R_i^\alpha.$$

Умови інтегровності (3.33) з огляду на (3.28) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha R_{ijk}^\alpha = g_{ij}(\mu_{,k} - \lambda_\alpha R_k^\alpha) - g_{ik}(\mu_{,j} - \lambda_\alpha R_j^\alpha) + a_{\alpha i} R_{kj,\beta}^{\alpha\beta} - \\ - a_{\alpha\beta} R_{ijk,\beta}^\alpha + F_{ij}\lambda_\alpha R_{\bar{k}}^\alpha - F_{ik}\lambda_\alpha R_{\bar{j}}^\alpha + 2\lambda_{\bar{l}} R_{\bar{j}k} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Проведемо спряження останньої рівності по індексах j, k і результат віднімемо від (3.34). З урахуванням (1.15) маємо:

$$g_{ij}M_k - g_{ik}M_j - F_{ij}M_{\bar{k}} + F_{ik}M_{\bar{j}} = 0.$$

Тут $M_k = \mu_{,k} - 2\lambda_\alpha R_k^\alpha$. Після згортання з g^{ij} отримаємо:

$$\mu_{,k} = 2\lambda_\alpha R_k^\alpha. \quad (3.35)$$

Співвідношення (3.35) разом з (3.33) і (3.28) дають нам замкнену систему диференціальних рівнянь типу Коші відносно функцій $a_{ij}(x)$, $\lambda_i(x)$, $\mu(x)$.

Доведена

Теорема 3.5. *Для того, щоб келеровий простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне голоморфно-проективне відображення, необхідно і достатньо, щоб система диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} - \lambda_{\bar{l}} F_{jk} - \lambda_{\bar{j}} F_{ik}, \\ n\lambda_{i,l} = \mu g_{il} + a_{i\alpha} R_l^\alpha - a_{\alpha\beta} R_{il}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (A)$$

$$\mu_{,k} = 2\lambda_{\alpha} R_k^{\alpha}$$

мала нетривіальний розв'язок a_{ij} , $\lambda_i (\neq 0)$, μ , який задовольняє умовам

$$a_{j\alpha} F_i^{\alpha} = -a_{i\alpha} F_j^{\alpha}, \quad |a_{ij}| \neq 0.$$

Сукупність диференціальних рівнянь (А) є лінійною з коефіцієнтами внутрішнього характеру з K_n і інваріантною відносно вибору в цьому просторі системи координат.

Для початкових значень

$$a_{ij}(x_0) = a_{ij}^0, \quad \lambda_i(x_0) = \lambda_i^0, \quad \mu(x_0) = \mu^0 \quad (3.36)$$

в просторі (K_n, g_{ij}, F_i^h) , метричний тензор якого $g_{ij}(x)$ і структурний тензор $F_i^h(x)$ якого належать класу C^{ω} система має не більш як один розв'язок. З урахуванням того, що початкові значення повинні задовольняти умовам (3.30), робимо висновок, що загальний розв'язок системи (А) залежить від r суттєвих параметрів, причому

$$r \leq \frac{(n+2)^2}{4}.$$

Розв'язок системи (А), що задовольняє початковим умовам (3.36), можна знайти у вигляді ряду Тейлора в околі даної точки $M(x_0)$.

2°. Втім система (А) не завжди сумісна. Для того, щоб у системи (А) існувало рішення, необхідно, щоб виконувались її умови інтегровності. Для першої групи – рівнянь (3.28) – отримаємо їх з (3.31) (після заміни в них похідних вектора λ_i за формулами (3.33)) у вигляді

$$a_{\alpha\beta} \left(\tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} + \tilde{T}_{jikl}^{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (3.37)$$

де

$$\tilde{T}_{ijkl}^{\alpha\beta} = n\delta_i^\alpha R_{jkl}^\beta - g_{li}\tilde{T}_{jk}^{\alpha\beta} + g_{ki}\tilde{T}_{jl}^{\alpha\beta} - F_{li}\tilde{T}_{jk}^{\alpha\beta} + F_{ki}\tilde{T}_{jl}^{\alpha\beta},$$

$$\tilde{T}_{jk}^{\alpha\beta} = \delta_j^\alpha R_l^\beta - R_{jl}^{\alpha\beta}.$$

Для другої групи системи рівнянь (А) – рівнянь (3.33) – отримаємо умови інтегровності з (3.31) (після заміни в них похідних інваріанта μ за формулами (3.35)) у вигляді

$$(n+2)\lambda_\alpha P_i^{\alpha\beta}{}_{jk} + a_{\alpha i} R_{jk,\beta}^{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} R_{ijk,\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.38)$$

де

$$P_i^h{}_{jk} = g^{h\beta} g_{i\alpha} P_{\beta jk}^\alpha.$$

Нагадаємо, що $P_{\beta jk}^\alpha$ – компоненти тензора голоморфно-проективної кривини.

Нарешті, умови інтегровності останньої групи рівнянь системи (А) знайдемо у вигляді

$$a_{\alpha\beta} \left(R_l^\gamma R_{\gamma k}^{\alpha\beta} - R_k^\gamma R_{\gamma l}^{\alpha\beta} \right) + n\lambda_\alpha (R_{k,l}^\alpha - R_{l,k}^\alpha) = 0. \quad (3.39)$$

Отже, умови інтегровності системи (А) надаються сукупністю співвідношень (3.37), (3.38), (3.39). Позначимо їх разом з (3.30) через (Б). Очевидно, (Б) є системою лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij} , λ_i, μ з коефіцієнтами з (K_n, g_{ij}, F_i^h) . Вони повинні виконуватися тотожно для любого рішення системи (А), якщо воно іс-

нує. При коваріантному диференціюванні системи (Б) та використання системи (А) отримаємо перше продовження системи (Б), яке позначимо $(Б_1)$. Очевидно, $(Б_1)$ також є системою лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij} , λ_i з коефіцієнтами з (K_n, g_{ij}, F_i^h) . Диференціальне продовження $(Б_1)$ позначимо $(Б_2)$ і так далі. Оскільки кількість невідомих функцій у нас скінченна, знайдеться таке натуральне число $s \leq \frac{(n+2)^2}{4}$, при якому продовження порядку $(Б_s)$ буде наслідком $(Б)$, $(Б_1)$, $(Б_2)$, ..., $(Б_{s-1})$. З аналітичної теорії диференціальних рівнянь відомо, що для системи (А) існує нетривіальне рішення в околі точки M_0 тоді і тільки тоді, коли рівняння $(Б)$, $(Б_1)$, $(Б_2)$, ..., $(Б_{s-1})$ мають в цій точці нетривіальне рішення.

Отже, справедлива

Теорема 3.6. *Келеровий простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) допускає нетривіальне голоморфно-проективне відображення зі збереження комплексної структури на келеровий простір $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ тоді і тільки тоді, коли система рівнянь $(Б)$, $(Б_1)$, $(Б_2)$, ..., $(Б_{s-1})$ має в K_n розв'язок*

$$a_{ij}(x), \quad \lambda_i(x), \quad \mu(x),$$

$$\text{причому } a_{ij} = a_{ji}, \quad |a_{ij}| \neq 0, \quad \lambda_i(x) \neq 0.$$

Коли келеровий простір (K_n, g_{ij}, F_i^h) задано, нам відомий його метричний тензор $g_{ij}(x)$, афінор структури $F_i^h(x)$. Отже ми можемо побудувати для K_n систему $(Б)$, $(Б_1)$, $(Б_2)$, ..., $(Б_{s-1})$ і з'ясувати, чи має вона нетривіальні рішення. Оскільки ця система має тензорний, а отже інваріантний відносно вибору системи координат характер, остання теорема надає необхідну і достатню внутрішню ознаку тензорного харак-

теру для келерових просторів K_n , які допускають (і не допускають) нетривіальні голоморфно-проективні відображення зі збереженням комплексної структури.

Дві останні теореми надають нам регулярний метод, який дозволяє для будь-якого келерового простору K_n , незалежно до того, яка в ньому система координат обрана, з'ясувати, допускає чи ні він нетривіальне голоморфно-проективне відображення, що зберігає структуру. А якщо допускає, завдяки двом останнім теоремам можна знайти всі ті простори, на які K_n може бути відображено. Тому останні дві теореми називають *основними теоремами теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів зі збереженням структури*.

Але варто зауважити, що при розв'язуванні системи рівнянь (Б), (Б₁), (Б₂), ..., (Б_{s-1}) для великих значень n , а тим більше при розв'язуванні системи диференціальних рівнянь (А), виникають значні складності технічного характеру. Тому в теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів розроблено й інші методи дослідження, які дозволяють знаходити класи келерових просторів, що допускають (або не допускають) голоморфно-проективні відображення.

Контрольні питання до Теми 3

1. *Аналітично-планарні лінії келерового простору.*
2. *Теорема існування для аналітично-планарної лінії келерового простору.*
3. *Означення голоморфно-проективного відображення келерових просторів та їх основні рівняння.*
4. *Еквівалентні форми основних рівнянь голоморфно-проективного відображення келерових просторів.*

5. Зв'язок між векторами, які фігурують в основних рівняннях голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
6. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
7. Аналог параметрів Томаса, їх значення в теорії голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
8. Тензор голоморфно-проективної кривини, його значення в теорії голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
9. Голоморфно-проективне відображення келерових просторів на плоский простір.
10. Проективно-плоскі простори.
11. Аналог теореми Бельтрамі.
12. Тензор голоморфно-проективної кривини для келерових просторів, які допускають голоморфно-проективне відображення на плоский простір.
13. Простори сталої голоморфної кривини як приклад келерових просторів, які допускають нетривіальні голоморфно-проективні відображення.
14. Довести, що голоморфно -проективно-плоский простір є симетричним.
15. Метрики проективно-плоского простору в спеціальній системі координат.
16. Нова форма основних рівнянь голоморфно-проективних відображень келерових просторів.
17. I основна теорема теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.
18. II основна теорема теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Вправи до Теми 3

1. Довести, що при дифеоморфізмі келерового простору (K_n, g_{ij}, F_i^h) на келеровий простір $(\bar{K}_n, \bar{g}_{ij}, F_i^h)$, який в загальній за відображенням системі координат має основні рівняння

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_{(i}^h \psi_{j)}(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x),$$

кожна аналітично-планарна крива K_n переходить в аналітично-планарну криву $\bar{K}_n$.

2. Довести, що рівняння голоморфно-проективних відображень

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik}$$

і

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_{(i}^h \psi_{j)}(x) + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x),$$

еквівалентні.

3. Довести, що вектор ψ_i в рівняннях голоморфно-проективного відображення келерових просторів градієнтний.
4. Довести, що вектори ψ_i, φ_i в рівняннях голоморфно-проективного відображення келерових просторів пов'язані співвідношенням $\varphi_i = -\psi_{\bar{i}}$.
5. Довести, що збереження геометричного об'єкта

$$T_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n-2} (\delta_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha + \delta_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha - F_i^h \Gamma_{j\alpha}^\alpha - F_j^h \Gamma_{i\alpha}^\alpha)$$

при деякому відображенні келерових просторів є необхідним і достатнім для того, щоб вказане відображення було голоморфно-проективним.

6. Записати умови інтегровності диференціальних рівнянь

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_i \bar{g}_{jk} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \varphi_i \bar{F}_{jk} + \varphi_j \bar{F}_{ik}$$

в келеровому просторі сталої голоморфно-проективної кривини.

7. Записати умови інтегровності диференціальних рівнянь

$$\psi_{i,j} = \psi_i \psi_j - \psi_{\bar{i}} \psi_{\bar{j}} + 4(\bar{k} \bar{g}_{ij} - k g_{ij}),$$

де $\bar{k}$ —деяка довільна стала, в келеровому просторі сталої голоморфно-проективної кривини.

8. Записати диференціальні продовження рівнянь $\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$ в келеровому просторі сталої голоморфно-проективної кривини.

Тестові завдання до модулів

Змістовий модуль 1

Основні рівняння голоморфно-проективних відображень келерових просторів

1. Дайте означення келерового простору. Виведіть властивості тензорів Рімана і Річчі келерових просторів.
2. Дайте означення голоморфної секційної кривини келерового простору. Виведіть вид тензора Рімана простору сталої голоморфної кривини.
3. Дайте означення голоморфно-проективного відображення келерових просторів та їх основні рівняння.
4. Виведіть еквівалентні форми основних рівнянь голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
5. Доведіть зв'язок між векторами, які фігурують в основних рівняннях голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
6. Побудувати аналог параметрів Томаса. З'ясувати їх значення в теорії голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
7. Побудувати тензор голоморфно-проективної кривини. З'ясувати його значення в теорії голоморфно-проективного відображення келерових просторів.
8. Вивести тензор Рімана келерового простору, який допускає голоморфно-проективне відображення на плоский простір.
9. Довести аналог теореми Бельтрамі.
10. Вивести тензор голоморфно-проективної кривини для келерових просторів, які допускають голоморфно-проективне відображення на плоский простір.

11. Довести, що келерові простори сталої голоморфної кривини допускають нетривіальні голоморфно-проективні відображення.
12. Довести, що голоморфно-голоморфно-проективно-плоский простір є симетричним.
13. Користуючись формулою П.О.Широкова, вивести метрики проективно-плоского простору в спеціальній системі координат.

Змістовий модуль 2
Основні теореми теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів

1. Вивести нову форму основних рівнянь голоморфно-проективних відображень келерових просторів.
2. Довести, що еквідистантні келерові простори допускають нетривіальні голоморфно-проективні відображення.
3. Довести I основну теорему теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.
4. Довести II основну теорему теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів.
5. Довести, що узагальнено-рекурентні келерові простори, відмінні від просторів сталої голоморфної кривини, не допускають нетривіальних голоморфно-проективних відображень.

Список рекомендованої літератури

1. Курбатова І. М. Диференціальна геометрія: метод. посіб. Одеса: ОНУ, 2020. 66с.
2. Josef Mikes, Elena Stepanova, Alena Vanzurova. Differential Geometry of Special Mappings: monograph. Olomouc, Palacky University Press, 2015.p.570.
3. Диференціальна геометрія: теорія кривих і поверхонь/ Ігор Гуран, Олег Гутік, Олександра Лисецька, Тарас Мокрицький, Львів, 2021. 326с
4. Ілляшенко В. Я. Диференціальна геометрія: навч. метод. посіб/ В. Я. Ілляшенко, О. П. Антонюк . Луцьк: Вежа Друк, 2020. 171с
5. Міхлін Ю. В. . Кирилова Н. О. , Марочковська І.О.. Елементи диференціальної геометрії: навч. посібник; Харків.: вид-во НТУ ХП, 2020. 44с.
6. Курбатова І. М., Лозієнко Д. В. Про канонічні квазі-геодезичні відображення рекурентно-параболічних просторів. Proceedings of the International Geometry Center, V.10, №3-4, 2017, p. 44-57
7. Коновенко Н. Г., Курбатова І. М., Цвентух К. 2F-планарні отображення відображення псевдоріманових просторів з f -структурою. Proceedings of the International Geometry Center, V.11, №1, 2018, p. 39-51
8. Коновенко Н. Г., Курбатова І. М. Спеціальні псевдоріманові простори з f -структурою, які допускають 2F-планарні відображення. Proceedings of the International Geometry Center, V. 11, №4, 2018, p. 18-34
9. Курбатова І. М., Піструїл М. І. Квазі-геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів. Proceedings of the International Geometry Center. 2020. V.13, No 3. P.18-32.
DOI <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v13i3.1770>
10. Курбатова І. М., Коновенко Н. Г. Основні теореми теорії 2F-планарних відображень псевдоріманових просторів з f -структурою.

Proceedings of the International Geometry Center. 2020. V. 13, No 1. P. 9-22.

DOI <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1707>

11. Pistruil M. I., Kurbatova I. N. On quasi-geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. Proceedings of the International Geometry Center. 2022. V.15, No 2. P. 120-137.

DOI <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2226>

12. Pistruil M. I., Kurbatova I. N. Canonical quasi-geodesic mappings of special pseudo-Riemannian spaces. Proceedings of the International Geometry Center. 2022. V.15, No 3-4. P.163-176.

DOI <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2329>

13. Pistruil M.I., Kurbatova I.N. Fundamental theorems of quasi-geodesic mappings of generalized-recurrent-parabolic spaces. Proceedings of the International Geometry Center. 2023. V.16, No 3.

DOI <https://doi.org/10.15673/pigc.v16i3.2576>

Навчальне видання

ГОЛОМОРФНО-ПРОЕКТИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ

ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів факультету математики,
фізики та інформаційних технологій
спеціальності 111 Математика

Електронне практичне видання

Укладачі:

Курбатова Ірина Миколаївна

Шарай Наталія Вікторівна

В авторській редакції

Затвердж. авт. 16.07.2024. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 2,5 МБ. Зам. № 2830.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Університетська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua