МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. А. Якімова

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ІСТОРИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Математична обробка історичної інформації»
для здобувачів спеціальності B9 Історія та археологія

ОДЕСА
ОНУ
2026

УДК 930.2+902/904]:519.22/.25(075.8)
Я453

Автор:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

В. М. Пивоварчик, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики і статистики ОНПУ імені К. Д. Ушинського;

І. С. Міронова, доктор історичних наук, професор, зав. кафедри історії Чорноморського національного університету ім. Петра Могили;

І. В. Піструіл, кандидат історичних наук, доцент, директор Одеського археологічного музею Національної академії наук України.

Рекомендовано до видання вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 3 від 3 листопада 2025 р.

Якімова Н. А.

Я453 Математична обробка історичної інформації. Статистичні методи [Електронний ресурс] : навч. посіб. з дисципліни «Математична обробка історичної інформації» для здобувачів спец. В9 Історія та археологія / Н. А. Якімова. Електронні текстові дані (1 файл : 3,9 МБ). Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2026. 123 с.

ISBN 978-966-186-404-6

У пропонованому навчальному посібнику розглядаються методологічні засади застосування математичних методів для обробки первинного історичного матеріалу. Також розглянуті основні поняття теорії ймовірностей та математичної статистики і засновані на них математичні методи обробки інформації, які можуть бути застосовані для дослідження, в першу чергу, історичних процесів та явищ. Весь викладений матеріал ілюструється дуже докладними прикладами, схемами та алгоритмами, що полегшує розуміння студентами як самого теоретичного матеріалу, так і його значення для обраної ними спеціальності.

Навчальний посібник складений для студентів другого (магістерського) рівня освіти спеціальностей В9 «Історія та археологія».

УДК 930.2+902/904]:519.22/.25(075.8)

ISBN 978-966-186-404-6

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Суспільне життя неможливе без вивчення минулого. Як відомо, «народ, що не знає свого минулого, не має майбутнього». Саме тому історичні дослідження були затребуваними в усі часи становлення людства. Інтерес до свого минулого і можливості на цій основі в якійсь спосіб передбачити своє майбутнє не вщухав ніколи. Будь-які висновки в цій галузі завжди засновувалися на попередньому накопиченні доволі великого обсягу інформації, тобто на накопиченні певної «статистики». Висновки робилися інтуїтивно, їх математичне обґрунтування на розгляд широкої спільноти не надавалося. В давнину тих, хто був здатний обробити цю інформацію «в умі» та зробити висновок-передбачення, яке до того ж ще й здійснювалося, вважали за ворожок і чаклунів. Ставилися до таких людей з острахом. Поступово менталітет суспільства змінювався. На відміну від середньовічних науковців сучасні вчені, на щастя, користуються повагою і живуть в безпеці. Завдяки цьому сьогодення розкриває для цих досліджень нові можливості. Бурхливий розвиток точних наук та інформаційних технологій надає усім гуманітарним галузям новий вектор прямування. Сучасний погляд на науку передбачає широке впровадження міждисциплінарних зв'язків. Застосування математичних та комп'ютерних методів обробки суто гуманітарної інформації (історичної, лінгвістичної, біологічної, економічної тощо) дозволяє проводити більш глибокий аналіз їх процесів, виявляти несподівані зв'язки між явищами із різних галузей знань. Але, що є найголовнішим, застосування математичних методів при обробці гуманітарної інформації дозволяє надавати безсумнівне наукове обґрунтування зробленим висновкам, перевіряти будь-яку інформацію на її відповідність заданим вимогам, здійснювати прогнозування перспектив розвитку досліджуваних процесів. Такого роду прогнози необхідні для визначення шляхів розвитку суспільства та економічних ресурсів (в першу чергу демографічних), що забезпечують його досягнення. В умовах сучасного стрімкого науково-технічного прогресу математичні результати обробки історичних даних стають одним із вирішальних наукових факторів формування стратегії і тактики суспільного розвитку [1].

В даному навчальному посібнику велику увагу приділено тим розділам теорії ймовірностей та математичної статистики, математичний апарат та алгоритми яких можуть бути використані при обробці результатів історичних досліджень. В цьому посібнику розглянуті методи перевірки отриманої в ході дослідження інформації з точки зору її адекватного відображення реальних фактів. Обчислення запропонованих коефіцієнтів дозволяє або допустити отриману інформацію для подальшої обробки, або запропонувати проведення певних додаткових досліджень. Також описані алгоритми перевірки отриманого експериментального матеріалу з точки зору його однорідності та, як наслідок, можливості подальшої спільної обробки та аналізу. В умовах дистанційного навчання все більшого значення набуває візуалізація викладеного теоретичного матеріалу. Тому пропонований навчальний посібник містить велику кількість кольорових ілюстрацій, таблиць та схем, які сприяють засвоєнню матеріалу навіть тими студентами, які вимушені вивчати предмет самостійно. Всі розглянуті в посібнику методи та алгоритми супроводжуються докладними практичними прикладами.

1. МАТЕМАТИЧНА МЕТОДОЛОГІЯ ІСТОРИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Становлення статистики як науки

Протягом всього свого давнього існування статистика відігравала роль головного постачальника фактів для управлінських, науково-дослідницьких та прикладних практичних потреб різноманітних структур, організацій та населення. Статистика як наука має давні корені та багатовікову історію розвитку. Вона зародилася як результат узагальнення вже достатньо розвиненої статистичної практики, покликаної задовільнити потреби суспільства [2, 3]. Однак, якщо збирання статистичних даних почалося в глибокій давнині, то їх обробка та аналіз, тобто заснування статистики саме як наукового напрямку, відносять до пізнішого періоду. Так, з плином часу, різноманітна практика обліково-статистичних досліджень зазнала теоретичного узагальнення. Почалося формування статистичної науки. Розвиток статистики як науки йшов за трьома напрямками.

1. ***Перший напрямок*** був описовий. Він виник в Німеччині в другій половині XVII століття і відомий під назвою **«*державознавство*»** або **«*описова школа*»**. Її засновником був німецький вчений Герман Конрінг (1606-1681), який розробив систему опису державного устрою. Ця школа існувала більше, ніж 150 років, не змінюючи своїх теоретичних основ. Предмет та метод цієї науки не були повністю визначені. Збирався в основному описово-інформаційний матеріал, який в подальшому майже не аналізувався. Описувався, як правило, останній період. В протилежному випадку, за думкою представників цієї школи, статистична робота втрачала сенс. Багато зробив для розвитку цієї школи та ідей Г. Конрінга його послідовник професор філософії та права Готфрід Ахенваль (1719-1722), який вперше став викладати нову навчальну дисципліну «Статистику» спочатку в Марбурському, а потім в Геттінгемському університеті. Основним змістовим наповненням цього курсу був опис політичного стану та визначних пам'яток держави [2]. Сам термін «статистика» бере своє походження від латинського слова «status», що в Середньовіччі означало політичний стан держави.

2. ***Другий напрямок*** статистики як науки виник в Англії і відомий під назвою **«*школа політичних арифметиків*»**. Цей напрямок набагато ближчий до сучасного розуміння статистики. Представники цієї школи, на відміну від прихильників державознавства, своєю головною метою вважали виявлення на основі великої кількості спостережень різноманітних закономірностей та взаємозв'язків досліджуваних явищ. Засновником школи цього напрямку був Вільям Петті (1623-1678) – відомий представник англійської політекономії. Вважається, що саме він заклав основи статистичної науки. Саме тому його називають винахідником статистики. В його працях переважав статистико-економічний напрямок на ґрунті обробки бюлетенів про природний рух лондонського населення. Він цікавився господарчими процесами, закономірностями в суспільному та економічному житті. Також він був першим, хто застосував непрямі розрахунки, вчинив спроби оцінити національне багатство та національний доход держави. Заслугою політичних арифметиків є те, що вони розуміли необхідність використання масових даних для виявлення тих чи інших закономірностей. Вони при зведенні та аналізі застосовували групування, середні та відносні величини, намагалися розглядати багато показників у взаємозв'язку. За відсутності необхідних даних вони широко застосовували саме непрямі розрахунки.

3. В першій половині XIX століття виник ***третій напрямок*** статистичної науки. Він отримав назву «***статистично-математичного***». Прихильники цього напрямку серед представників державознавства та політичних арифметиків дійшли до теоретичного узагальнення практики обліково-статистичних робіт, тобто до створення теорії статистики. Особливий внесок в розвиток цього напрямку зробив відомий бельгійський статистик Адольф Кетле (1796-1874). Математик за освітою, він багато років очолював національну статистику Бельгії. Він вважається засновником вчення про середні величини. А. Кетле називав статистику «соціальною фізикою», тобто наукою, що вивчає закони суспільної системи за допомогою кількісних методів. Найважливішою його заслугою є обґрунтування ідеї використання закономірностей, виявлених із маси випадків, в якості найважливішого засобу пізнання об'єктивного світу. Саме він дав означення предмету статистики (масові явища, пов'язані з життям держави та суспільства). Кетле, який побачив в статистиці метод соціального пізнання, зробив вагомий внесок в розробку теорії стійкості статистичних показників, розкрив сутність методів статистики. Карл Пірсон також провів багато плідних досліджень в статистиці, зробивши внесок в розробку та розвиток теорії кількісної оцінки зв'язку (теорії кореляції). В. Госсет, що працював під псевдонімом «Стьюдент», розробив теорію малої вибірки. Р. Фішер розвивав методи кількісного аналізу, М. Мітчелу належить ідея «економічного барометра». Дослідження всіх цих вчених суттєво вплинули на сучасну статистику [2].

Державознавство та політична арифметика розвивалися кожна своїм шляхом, використовуючи свої методи в дослідженнях. Але предмет вивчення у них був спільний – держава, суспільство, а також масові явища та процеси, що відбувалися в них. Можна стверджувати, що статистика, яка виникла в зв'язку з необхідністю розв'язання практичних державних та господарчих проблем, сформувалася як наука в результаті синтезу державознавства та політичної арифметики. При цьому від політичної арифметики вона взяла більше, оскільки статистика в теперішній час покликана виявляти, перш за все, різного роду закономірності в досліджуваних явищах.

Таким чином, історія розвитку статистики показує, що статистична наука склалася в результаті теоретичного збагачення накопиченого людством передового досвіду обліково-статистичних робіт, обумовлених, перш за все, потребами управління життя суспільства [2].

1.2. Історична статистика. Кліометрія та клiодинаміка

Історична статистика є допоміжним міждисциплінарним напрямком досліджень, який поєднує традиційний для історіографії аналіз письмових джерел з опрацюванням масових (кількісних або якісних) даних за допомогою методів математичної статистики [4]. В силу того, що характер та параметри статистичної (тобто числової) інформації для різних історичних періодів та регіонів інколи дуже різняться та є доволі специфічними (а в деяких окремих аспектах навіть малозначущими або відсутніми), історичну статистику досі не було виокремлено в усталену історичну дисципліну з власними предметом та метою дослідження. Через це вона на теперішній момент вважається лише допоміжним методом, використання якого може бути ситуативним, не завжди вкрай необхідним, і залежати від кількості та характеру історичних джерел, наявних у конкретного історика-дослідника. Термін «історична статистика» використовується переважно в тих випадках, коли дослідник звертається до опрацювання значного масиву числових, тобто кількісних даних з певною внутрішньою неоднорідністю (кількості різних артефактів, отриманих в ході декількох різних археологічних експедицій, архівних документів різного характеру та змісту, різноманітних демографічних відомостей, економічних та соціологічних показників тощо) і прагне визначити динаміку та певні закономірності формування досліджуваного обсягу даних, що має вплинути на формулювання висновків дослідження в необхідному контексті. В силу специфіки наявних історичних даних та особливостей джерел, з яких їх було отримано, найчастіше історичну статистику використовують при вивченні сучасних суспільних груп із розвиненими системами збирання та накопичення кількісної інформації (переписи населення, ведення поточної демографічної та економічної статистики) та економічної історії.

У галузі саме економічної історії з 1960-х років увійшла у застосування система математичних методів та алгоритмів, що отримала назву ***«кліометрія»*** (або «кліометрика»). Цей напрям історичної статистики передбачає систематичне застосування математичних методів, в своїй більшості заснованих на застосуванні електронно-обчислювальних технологій, в історичних дослідженнях. Свою назву він бере від імені давньогрецької музи історії та героїчної поезії – Кліо [5]. Дослівно «кліометрія» означає вимірювання історії. Кліометрія виходить із припущення, що деякі галузі людської діяльності можна найкраще зрозуміти як систему, в якій і самі змінні, і зв’язки між ними піддаються кількісному аналізу. Іншими словами, припускається, що якщо величина однієї із змінних змінюється, то можна обчислити, як це вплине на систему в цілому. Своє походження кліометрія як науковий напрям бере в США. Виникнення сучасної кліометрії датують 1958-м роком та пов’язують із публікацією статті американських економістів Альфреда Конрада та Джона Майєра «Економіка рабства», в якій було викладено методологічні засади кількісного аналізу в історії, а також було зроблено спробу застосування його у вивченні історії рабства в США.

Вважається, що «кліометрична революція» відбулася після друку у 1961-му році першого в області кліометрії монографічного дослідження Дугласа Норта «Економічне зростання США. 1790-1860». Ця книга отримала дуже великий розголос та викликала неабиякий резонанс в академічних кругах тодішніх американських науковців. В цій роботі кількісні методи долучалися до виявлення впливу зовнішньої торгівлі на формування економічного ринку. З 1960-го року став видаватися перший «Журнал економічної історії», присвячений кількісним методам в історичних дослідженнях. Його редакторами стали Дуглас Норт та Вільям Паркер, яких і вважають засновниками кліометрії.

Великою подією в становленні американської кліометрії стало проведення в грудні 1960-го року в університеті міста Педью семінару, на якому розглядалися можливості використання кількісних методів в дослідженнях економічної історії. Цей семінар зробив вагомий внесок в стимулювання використання математичних та статистичних моделей в історичних дослідженнях. З того часу ці зустрічі в Педью, на яких кліометристи узгоджували свої зусилля, стали щорічними [6]. В 1993-му році Роберт Фогель та Дуглас Норт отримали Нобелівську премію з економіки переважно за розвиток саме кліометрії. У постанові Нобелівського комітету було зазначено, що премію присуджено «за відродження досліджень по економічній історії із застосуванням економічної теорії та кількісних методів з метою пояснення економічних та інституційних змін». Слід зазначити, що Нобелівська премія по історії, як і по математиці, не присуджується. За всю історію її існування її лауреатами стали всього два історика. Першим був Т. Моммзен у 1902-му році, який за свою «Римську історію» отримав премію в галузі літератури. Другим, через майже століття, став Р. Фогель в галузі економіки. Можливість вимірювання історії надала нового поштовху розвитку історичної науки.

З 1980-х років кліометрія втілює в собі новий стандарт економічної історії та поширює коло свої інтересів (демографія, соціологія, політологія тощо), приділяючи все більше уваги порівнянню внесків різних чинників в економічне зростання, вивченню його зв'язків з динамікою народонаселення та добробуту, еволюцією антропометричних параметрів та стандартів у рівні життя, нерівністю в розподілі прибутків. Кліометрія створює підґрунтя для вивчення альтернативних напрямків історичного розвитку. На її основі розвиваються ретроспективні кількісні дослідження фінансових інститутів, ринків праці, впливу тарифної політики на промисловий розвиток тощо.

Іншою назвою кліометрії, але вже в рамках історичної науки, є ***квантитативна історія***, яка поряд із традиційними математичними методами використовує також весь спектр сучасних комп'ютерно-інформаційних технологій [7]. Цей напрямок називається ***історичною інформатикою***. Головна засада, на якій ґрунтується квантитативна історія – це перекладання проаналізованих та суворо верифікованих даних історичних джерел у цифровий формат. Історики, як правило, мають справу з різними видами джерел. Серед них є і наративні (описові), інформація з яких вилучається за допомогою інтерпретації тексту. Прихильник квантитативної історії, навпаки, шукає можливість подати інформацію із всіх наявних джерел, по-перше, у вигляді виключно вимірюваних числових величин, що піддаються математичному обчисленню, а по-друге, у вигляді величин, які можуть бути верифіковані. Це дозволяє математично обробляти інформацію навіть в тих галузях, в яких є неможливим досягнення точного знання традиційними історичними методами.

Квантитативна історія використовує методи дескриптивної статистики. Дескриптивна (описова) статистика [8] вирішує питання обробки, систематизації та кількісного опису емпіричних даних, їх наочним поданням у вигляді таблиць та графіків. В останні роки на засадах квантитативної історії дуже активно розвивається новий напрямок історичної науки – нова демографічна історія. Це відгалуження традиційної історії виникло на межі 1950-1960-х років. Поштовхом для його виникнення стало широке застосування в історичних демографічних дослідженнях церковно-парафіяльних книг XVII-XIX століть, завдяки чому з'явилася можливість вивчення структури та генезису різних соціумів та родинних осередків за досить тривалі проміжки часу. Французький демограф Луї Анрі в 1950-ті роки розробив метод «відновлення родин» [9]. Іншим прикладом застосування методів квантитативної історії є контент-аналіз – метод збору кількісних даних про досліджуване явище або процес, що міститься в документальних відомостях [5].

Сучасний стан історичної інформатики розкриває нові можливості в галузі обробки та зберігання великих масивів історичної інформації. Все більшого значення інформаційні технології набувають в історичному моделюванні. Такі технології широко застосовуються в археології, мистецтвознавстві та джерелознавстві, тобто в тих галузях, де виникає потреба в реконструкції матеріальних об'єктів за їх фрагментами. Дуже перспективним є комп'ютерне моделювання фортифікаційних та інших архітектурних об'єктів, розробка електронних історичних мап.

Українська кліометрія поєднала в собі напрацювання та наукові досягнення таких сфер історичної науки, як теорія та методологія історії, джерелознавство, історіографія, економічна історія. Але все ж таки більшість наукових досліджень української кліометрії присвячена історичному джерелознавству. На сьогодні сформувалися основні напрямки, в яких працюють українські представники кліометрії [5, 7]:

- теорія та методологія джерелознавчих досліджень у комп'ютерну епоху;
- моделювання розвитку теоретичної історіографії;
- математичні методи аналізу масових джерел;

- контент-аналіз історичних джерел;
- математичне моделювання історичних явищ та процесів;
- методика викладання кліометрії.

Перебіг історичного розвитку – процес надзвичайно складний та багатофакторний. Людина має свободу волі, тому поведінку окремо взятої людини в принципі передбачити неможливо. Однак з цього зовсім не випливає, що поведінка великих людських мас також є повністю непередбачуваною. Коли говорять про успіхи фізики, в перше чергу на думку спадають механіка Ньютона та пояснення руху планет. Зрозуміло, що в історичній науці такий однозначний висновок неможливий. Але і в природничих науках приклади ідеально передбачуваної динаміки також є дуже рідкісними. За останні роки сформувалася міждисциплінарна спільнота вчених, до якої увійшли історики, соціологи, антропологи, філософи, біологи та математики. Ці вчені застосовують теоретичні математичні методи (систематичне порівняння, формулювання та перевірка гіпотез, моделювання, статистична обробка даних та побудова формалізованих теорій) в історії. Цей новий напрямок в історичній науці отримав назву **«*клiодинамiки*»**. Отже, кліодинаміка – це нова міждисциплінарна галузь досліджень, що поєднує підходи історичної макросоціології, теоретичної історії, математичного моделювання довготривалих соціальних процесів, побудову та використання історичних баз даних, дослідження соціальної еволюції та історичної демографії. Задачею кліодинаміки має стати пошук об'єднуючих теорій та їх перевірка на основі різноманітних масивів – історичних, археологічних та інших [7].

1.3. Місце кількісних методів в історичних дослідженнях

Аналіз питання про місце кількісних методів в історичних дослідженнях слід починати з уточнення понять «кількісні методи» та «математичні методи». Найчастіше як в історичних, так і в інших гуманітарних дослідженнях ці поняття вживаються як тотожні. Мається на увазі будь-яке використання кількісних показників та математичних методів при аналізі досліджуваних явищ та процесів суспільного життя. Різниця між цими методами полягає в наступному. З ***кількісними методами*** в широкому сенсі ми маємо справу у всіх тих випадках, коли вивчення відповідних явищ та процесів засноване на аналізі системи кількісних показників, що характеризують ці явища та процеси. Слід зазначити, що використовується саме система кількісних показників, що розкривають основні риси явищ, а не просто якісь числові дані про них. Зрозуміло, що при цьому можуть застосовуватися і певні, як правило, найпростіші засоби математичної обробки кількісних даних (обчислення середніх значень, відсотків, коефіцієнтів тощо). Однак ці засоби не ставлять за мету розкриття сутності явищ через побудову їх кількісних моделей. Але будь-яка система кількісних показників може бути підґрунтям для побудови формально-кількісних моделей досліджуваних явищ та процесів. Для цього потрібна дещо складніша їх математична обробка. Але найголовнішим є те, що обов'язково буде потрібна попередня побудова змістової моделі досліджуваних процесів та явищ. Отже, кількісні методи – це звичайний аналіз явищ та процесів, що ґрунтується на системі кількісних показників. В той же час ***математичні методи*** – це побудова на основі системи числових даних формально-кількісних математичних моделей цих процесів та явищ.

Оскільки в обох випадках початковим підґрунтям для аналізу є система кількісних показників, для обробки яких застосовується той чи інший математичний апарат, математичні та просто кількісні методи мають схожість. Саме ця схожість і обумовила застосування цих понять як тотожних. Ця тотожність стала вже традиційною для історичної науки [9].

В теперішній час вже не існує таких галузей науки, в якій в тому чи іншому ступені не були б присутні математичні методи та комп'ютеризація. Однак процес впровадження математичних методів в окремі галузі кожної науки обумовлений, перш за все, внутрішнім розвитком цих галузей. Розвиток науки завжди містив тенденцію до виявлення кількісних характеристик досліджуваних явищ та процесів, до кількісної оцінки як окремих рис, так і загальної природи цих явищ і, як наслідок, до застосування тих чи інших математичних методів обробки та аналізу кількісних даних. Звернення до математичних методів обумовлюється, в першу чергу, станом відповідної науки та потребами в подальшому поглибленні досліджень. Сучасний стан наук, в тому числі й історичної, перетворює цю потребу у все більш нагальну необхідність.

Загальний рівень сучасної науки та потреби її подальшого розвитку обумовлюють тенденцію до інтеграції наукового пізнання. І саме зростаючою затребуваністю загальнонаукової інтеграції пояснюється невпинно зростаючий взаємозв'язок між природничими та гуманітарними науками. Досить високим рівнем такої інтеграції є міждисциплінарні дослідження, що здійснюються зусиллями та методами низки наукових галузей. Поглиблення міждисциплінарного взаємного проникнення приносить користь не лише історичній науці, а й іншим долученим до цього процесу науковим напрямкам.

Перші спроби застосування математичних методів при вивченні суспільних (в тому числі й історичних) явищ відносяться до кінця XIX – початку XX століття. Вони були пов'язані головним чином з аналізом соціально-економічних явищ та обробкою статистичних даних. Однак в першій половині XX століття це застосування не знайшло скільки-небудь значного поширення через недостатнє розвинення прикладної математики та відсутність потужної обчислювальної техніки, без якої обробка значних обсягів інформації є неможливою. Сучасний етап застосування математичних методів в історичних дослідженнях починається на межі 50-х та 60-х років минулого століття. Приблизно протягом десяти років виявлялися ті сфери історичної науки, вивчення яких може бути математизоване, а також той математичний апарат, який може бути при цьому застосований. З 70-х років почалося вже дуже активне використання математичних методів в історичній науці, що охоплює все нові її галузі і в якому використається все більший спектр цих методів.

Дозволяючи встановити ті чи інші ознаки і властивості досліджуваних об'єктів, описовий аналіз не показує їх кількісної міри. Але припускаючи можливість виявлення взаємозв'язків тих чи інших явищ або рис і властивостей певних об'єктів, він не вимірює їх тісноти та сили впливу одних чинників на інші. Через це описові методи аналізу в тих випадках, коли потрібно оцінити масштаби, питому вагу, рівень розвитку, ступінь схожості та відмінності, щільність взаємозв'язку або взаємодії тих чи інших об'єктів тощо, дають дуже неточні, приблизні та навіть невизначені оцінки типу «більший – менший», «сильно – слабо». Отже, описові методи не дають можливості виявити кількісну міру відповідних якісних ознак. Вказана обмеженість описово-оповідальних методів неминуче породжує невизначеність висновків, яка обмежує можливість подальшого отримання із них достовірної інформації.

Сутність кількісного аналізу полягає не просто в використанні при дослідженнях тих чи інших кількісних даних. Ці кількісні показники можуть вводитися і до описового аналізу. ***Кількісний аналіз*** – це виявлення і формування системи числових характеристик досліджуваних об'єктів, явищ та процесів, які при проведенні певної математичної обробки створюють основу для змістового аналізу, що призводить до розкриття кількісної міри відповідної якісної ознаки. В такий спосіб математична обробка і аналіз початкових кількісних даних дають нову інформацію, яка цими даними безпосередньо не виражається і тому логіко-описовими методами отримана бути не може. Основна перевага кількісних методів порівняно з описовими полягає в тому, що кількісний аналіз дозволяє встановити абсолютну та відносну міру розглянутих рис та властивостей об'єктів та явищ, а також виявити інтенсивність їх прояву. Таким чином, кількісний аналіз надає можливість подолати основну обмеженість описового аналізу.

При цьому слід зазначити, що перехід до кількісних та математичних методів може відбутися лише тоді, коли стає можливим вимірювання ознак досліджуваних явищ та процесів і, як наслідок, стає можливим отримати систему необхідних кількісних показників. Але справа в тому, що і проведення вимірювання, коли історичні джерела є описовими, і формування системи репрезентативних кількісних даних, коли джерела містять числові значення ознак, виявляються практично можливими та припустимими лише за умови, коли знання про явища та процеси, що вивчаються, мають теоретичний характер. Це має виражатися в тому, що змістовий аналіз розкриває якісну визначеність цих явищ та процесів. В свою чергу, якісна однорідність або однотипність явищ може бути розкритою лише на теоретичному рівні пізнання досліджуваних явищ та процесів.

Кількісні та математичні методи можуть застосовуватися в наукових дослідженнях при розв'язанні різноманітних задач, які можна звести до **трьох типів** [10].

1. ***Перший тип задач*** полягає в числовому вираженні досліджуваної проблематики для виявлення кількісної міри та границь відповідних якісних ознак.
2. ***Другий тип задач***, що розв'язується математичними методами, полягає в побудові формально-якісних математичних моделей досліджуваних явищ та процесів. Це є основним шляхом або формою математизації наукового пізнання. Моделювання є більш високим рівнем математизації наукових досліджень порівняно із задачами першого типу. В той же час, моделювання пов'язане із системним підходом до вивчення явищ та процесів і має за мету проведення аналізу структури та функцій систем. Самі ці системи та їх моделі можуть мати різну складність – від моделей окремих явищ до моделей процесів, що охоплюють дуже широкі галузі.
3. ***Третій тип задач*** пов'язаний із застосуванням математичних методів для побудови нових та вираження і аналізу вже існуючих наукових теорій, тобто з формалізацією основних підсумків самого наукового знання.

Існує дуже великий спектр явищ та процесів, вивчення яких на даному етапі розвитку історичної науки може бути ефективним лише за умови застосування кількісних та математичних методів. Перш за все, застосування математичних методів є необхідним для виявлення закономірного, внутрішньо обумовленого характеру історичного розвитку. Закономірність історичного розвитку, через складність поєднання в ньому об'єктивного та суб'єктивного, найчастіше має стохастичний, ймовірнісний характер. Є очевидним, що ці закони і тенденції можуть бути виявлені та виражені лише математично статистично-ймовірнісними методами.

Математичні методи є необхідними не лише для розкриття закономірностей історичного розвитку, що проявляються в масових процесах, але й для отримання підсумкових результатів тих окремих подій, що складаються із дій певної сукупності окремих особистостей, що переслідують свої власні цілі [4]. Такий характер мають, наприклад, багато політичних та інших суспільних подій (наприклад, виборчі кампанії або референдуми), військові операції та інші явища. Тому їх вивчення описовими методами, як правило, супроводжується долученням тих чи інших кількісних даних. Через це всебічне вивчення їх сутності неможливе без застосування кількісних та математичних методів.

Сукупність явищ суспільного життя є складним поєднанням різного роду систем. З цього випливає потреба в системному підході у вивченні структур та функцій цих систем. Розв'язання такої задачі потребує, перш за все, виявлення внутрішніх системних та міжсистемних взаємозв'язків. Вивчення взаємозв'язків взагалі є головною метою історичних досліджень. Без цього неможливо розкрити закономірності, рушійні сили, загальне та особливе в історичному розвитку. При системному підході це вивчення не може бути достатньо глибоким без застосування математичних методів.

Різноманітна сукупність історичних подій, незважаючи на всю їх індивідуальність, складається із подій певних класів та типів. Так же само відбувається і з історичними процесами. При вивченні історичного розвитку все це потребує типологічної класифікації подій, систем та процесів. Типологічна класифікація неминуче має бути багатовимірною. Здійснити ж багатовимірну класифікацію описовими методами дуже складно, а часто й взагалі неможливо. Адекватне розв'язання таких задач потребує застосування методів багатовимірних кількісного та математичного аналізу.

Історичний розвиток є внутрішньо обумовленим та детермінованим. В ньому фігурують багато причин та наслідків. Однак, при всьому їх розмаїтті, складності, а часто й випадковості прояву роль різних чинників та причин не є однаковою. Тому найважливіша задача історичних досліджень полягає в виявленні основних чинників, що визначають ті чи інші явища, процеси та їх розвиток, а також в розкритті їх порівняльної ролі та ступеня впливу на той чи інший стан історичних об'єктів та результат їх функціонування. Якщо самі ці чинники можуть бути виявлені змістовим аналізом на основі описових методів, то їх порівняльну роль та питому вагу дозволяють встановити лише математичні методи.

Отже, як можна побачити, у всіх аспектах історичного розвитку, коли він є проявом масового процесу, виникає потреба в застосуванні кількісних та математичних методів. Але ці методи можуть стати у нагоді й при вивченні індивідуальних явищ. Індивідуальні явища широко розповсюджені в політичній і особливо в духовній сферах людської діяльності. Основними при вивченні індивідуальних подій є все ж таки описові методи. Але для низки випадків вони виявляються недостатніми. Перш за все, це ті випадки, коли треба виявити сутність суперечливих поглядів, пропозицій та вимог, а також їх еволюцію, що не має чіткого прояву, а також порівняти в таких випадках позицію різних діячів. Математичні методи можуть виявитися ефективнішими порівняно з описовими і при оцінці прийнятих рішень та проведеної політики, коли існували реальні альтернативні можливості.

Інші проблеми, що потребують для свого розв'язання застосування математичних методів, це дослідницькі проблеми. Перш за все, їх застосування може бути ефективним при перевірці достовірності свідчень історичних джерел, як масових, так і індивідуальних, а також виражених як в кількісній, так і в описовій формі. Ці методи є необхідними також для збільшення інформативної віддачі джерел.

Друга важлива проблема стосується формування представницької системи фактів. Ця проблема є особливо складною в тих випадках, коли історик звертається до великих масивів даних, що охоплює всю велику сукупність даних досліджуваних об'єктів повністю (в статистиці її називають генеральною сукупністю). Суцільна обробка цих даних надзвичайно ускладнена і часто взагалі не є доцільною. Тому для формування репрезентативної вибірки даних необхідно звернутися до вибіркового методу, який вже докладно розроблений в математичній статистиці. Математичні методи можуть допомогти історику у визначенні репрезентативності так званих природних вибірок, тобто сукупності даних, об'єм яких не може бути змінений [3, 4].

Ще одна проблема виникає через те, що багато джерел містять дані про дуже велику кількість ознак, що характеризують досліджувані процеси. Для виявлення найбільш суттєвих із цих ознак для розв'язання поставленої дослідницької задачі можуть стати у нагоді саме математичні методи. У випадках, коли виокремити найсуттєвіші ознаки є надскладною задачею, але коли відбір частини ознак призводить до значної втрати інформації, виникає потреба в стиску інформації, тобто в переході до меншої кількості інтегральних ознак, отриманих на основі усієї їх початкової сукупності. Така задача може бути розв'язана лише математичними методами.

Часто при вивченні історичних явищ та процесів на основі сукупності ознак виникає потреба в отриманні одного інтегрального показника, що характеризує їх загальний стан або рівень розвитку. В цих ситуаціях також необхідно долучати математичні методи.

Сучасні комп'ютерні системи – це потужний засіб розширення інтелектуальних можливостей людини, підвищення ефективності та продуктивності інтелектуальної праці [11]. Поперше, можна сказати, що комп'ютерні системи розширюють людську пам'ять, бо створення комп'ютерних банків наукової (в тому числі й історичної) інформації звільняє вченого від необхідності тримати в пам'яті великий обсяг активних і пасивних конкретних наукових даних і витрачати основний час на їх пошук та фіксацію. По-друге, комп'ютерні системи точніше та надійніше за людину виконують більшість трудомістких пошуково-інформаційних та інших технічних дослідницьких процедур. По-третє, комп'ютерні системи, працюючи в режимі людино-машинного інтерфейсу, надзвичайно розширюють можливості наукового пошуку як основи будь-якого дослідження.

Нарешті, математичні методи сприяють уточненню понятійного апарату історичної науки і дозволяють певною мірою уніфікувати її мову, що значно полегшує включення історичних досліджень в загальний процес інтеграції наукових знань. Все це, в свою чергу, сприяє проведенню диференційованих, вузькоспеціалізованих історичних досліджень в такий спосіб, щоб вони були зведені, та їх результати можна було додати до внутрішніх дисциплінарних комплексних досліджень. Таким чином, існує широке коло історичних задач, які можуть бути ефективно розв'язані лише із застосуванням математичних методів та сучасних комп'ютерних систем. В той же час, ефективність та потужність кількісних та математичних методів не робить їх універсальним засобом історичних досліджень. По-перше, ці методи все ж таки не можуть повністю замінити описові методи. По-друге, існують межі їх ефективного застосування, обумовлені специфікою об'єкта історичного дослідження. Застосування математичних методів в історичному дослідженні стає можливим лише після того, як сформовано систему кількісних даних, що характеризують досліджувану предметну область з точки зору поставленої задачі. Але для отримання цієї системи даних історичні явища та процеси мають бути виміряні, тобто подані в якихось числових значеннях. Однак вимірювання дуже багатьох історичних явищ стикається з великими труднощами.

Таким чином, застосування кількісних та математичних методів в історичній науці не може бути вдалим без пильної уваги до теоретичних і особливо методологічних проблем історичних досліджень. Розробка цих проблем має велике практичне значення. Лише високий рівень теоретико-методологічного підходу та глибока історично-професійна підготовка можуть забезпечити можливість поглиблення історичних досліджень та дозволить уникнути помилок. Отже, всі етапи застосування математичних методів в історичній науці, починаючи з постановки дослідницької задачі, оцінки можливості її розв'язання цими методами та закінчуючи інтерпретацією результатів математичної обробки і результатів аналізу конкретних даних та формулюванням висновків, мають ґрунтуватися на чітких теоретичних положеннях. Це обумовлює необхідність спеціальної підготовки істориків, що застосовують кількісні та математичні методи. Від історика при цьому, в першу чергу, потрібно розуміння логічного підґрунтя математичних методів. Без цього неможливо вирішити питання, які саме методи слід використовувати при вивченні тих чи інших явищ та при розв'язанні тієї чи іншої задачі. Також без цієї попередньої спеціальної математичної підготовки неможливо змістовно інтерпретувати з історичної точки зору результати математичної обробки та аналізу конкретних історичних даних.

Сучасному рівню застосування математичних методів в історичних дослідженнях притаманна сумісна робота істориків та математиків в одних наукових колективах. Це є реальним проявом розвитку комплексності в історичних дослідженнях. Є очевидним, що для успішної сумісної роботи не лише історик має володіти певною математичною підготовкою, але й математик – історичною. Отже, взаємне проникнення, синтез конкретного змістового, гуманітарного та формально-логічного математичного підходів – саме той чинник, що має забезпечити успіх застосування математичних методів в історичних дослідженнях [10].

1.4. Формалізація та вимірювання історичних явищ

Вимірювання – це спосіб встановлення відношень між об'єктами (їх властивостями, зв'язками, тенденціями розвитку тощо). Будь-яке вимірювання стає можливим лише після того, як встановлено якісну однорідність об'єктів, що зіставляються. Це надає можливість відволіктися від цієї однорідності та перейти до виявлення кількісних відношень між об'єктами. Зміст історичних явищ виражається в притаманних їм різноманітних рисах та властивостях, що називаються ознаками. За своєю формою ознаки розділяються на ***кількісні*** та ***атрибутивні*** (їх, як правило, називають *якісними*). Кількісні ознаки подаються якимись числовими показниками, а атрибутивні – словесно-описово. Кількісні ознаки вказують на міру відповідної властивості, а атрибутивні – лише на наявність цієї властивості та інколи на її відносну інтенсивність.

В свою чергу, атрибутивні описові ознаки можуть бути простими та складними. ***Прості атрибутивні*** ознаки виражають однозначні або одноаспектні властивості об'єктів (стать, національність тощо). ***Складні атрибутивні*** ознаки характеризують багатоаспектні, інтегральні властивості об'єктів та явищ. До того ж складні атрибутивні ознаки, як правило, є інтегральними суб'єктивними оцінками рис та властивостей об'єктів, що склалися у результаті сприйняття цих об'єктів їх сучасниками. Тому їх ще називають ***ознаками-оцінками***.

Вимірювання починається зі змістового якісного (не плутати з якісними атрибутивними ознаками) аналізу досліджуваних явищ та процесів та визначення мети вимірювання. Сукупність тих чи інших принципів вимірювання складає певну шкалу вимірювання. Тобто ***шкалою вимірювання*** називається правило, згідно з яким певному об'єкту приписуються відповідні числа. Сучасну класифікацію шкал було запропоновано американським психологом Стенлі Смітом Стивенсом у 1946 році. Він розробив типологію вимірювальних шкал, яка дозволила систематизувати різні типи вимірювань [12]. За його класифікацією існують наступні **чотири типи шкал**.

1. ***Номінальна*** **(*класифікаційна*)**, або ***шкала найменувань***. Вже з назви цієї шкали стає зрозумілим, що ця шкала передбачає класифікацію за назвою («nomen» – латинською означає «ім'я», «назва»). Вимірювання при цьому полягає в класифікації об'єктів за тими чи іншими ознаками. Це найпростіша форма приписування чисел об'єктам. Числа в даному

випадку використовуються для позначення класів об'єктів, відіграють роль умовних символів і тому можуть бути замінені іншими числами. Наочно це ілюструє приклад, коли гравцям спортивної команди приписують деякі номери. Ці номери не несуть якогось змістового інформативного навантаження і використовуються виключно з метою якось розрізняти тих гравців. Сенс вимірювання за цією шкалою полягає в тому, що об'єкти характеризуються тотожністю всередині класу та відмінностями між класами. Отже, за шкалою найменувань встановлюється приналежність об'єкта до якого-небудь класу. Ці шкали в загальному випадку ґрунтуються на приписуванні об'єктам вимірювань довільних чисел для їх ідентифікації та класифікації. Приписування відбувається в такий спосіб, що кожному елементу із одного класу приписується одне й те ж саме число. Основною емпіричною операцією, яка визначає даний тип шкали, є визначення рівності елементів [13]. Таким чином, номінальна шкала – це спосіб класифікації об'єктів або суб'єктів шляхом їх розподілу по клітинках класифікації. Найпростішим випадком номінальної шкали є *дихотомічна шкала*, що складається лише із двох клітинок (наприклад, «іноземець – співвітчизник», проголосував «*за*» – проголосував «*проти*» тощо). Ознака, що вимірюється за дихотомічною шкалою найменувань, називаються ***альтернативною***. Вона може приймати всього два значення. Значеннями такої шкали можуть бути, наприклад, оцінки якісних ознак у вигляді логічних булевих констант $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$ (відповідь «так/ні», тобто наявність або відсутність у об'єкта вимірювання розглянутої ознаки) [14]. Більш складний варіант номінальної шкали – це класифікація із трьох та більшої кількості клітинок. Наприклад, це можуть бути такі результати голосування як «за – проти – утримався», або вибір «кандидатура *A* – кандидатура *B* – кандидатура *C* – кандидатура *D*» тощо. Розподіливши всі об'єкти за клітинками, ми отримуємо можливість від найменувань перейти до чисел, підрахувавши кількість спостережень в кожній клітинці. Тепер ми можемо оперувати цими числами, що є частотами, з якими зустрічаються різні найменування. Далі можна зіставити отриманий розподіл частот з нормальним, рівномірним або ще якимось іншим розподілом. Таким чином, номінальна шкала дозволяє обчислювати частоти різних найменувань або значень ознаки, а потім вже використовувати ці частоти при подальшій математичній обробці. Одиниця вимірювання, яка при цьому використовується – це кількість спостережень або частота. Точніше, одиниця вимірювання – це одне спостереження. Такі дані можуть бути оброблені за допомогою, наприклад, критерію $\boldsymbol{\chi}^{\mathbf{2}}$ Пірсона тощо [15].

2. ***Порядкова* (*ординальна*) *шкала*** передбачає природнє упорядкування об'єктів вимірювання відносно якоїсь властивості. Така шкала визначає інтенсивність ознаки без вказівки кількості. Тобто вимірювання за порядковою шкалою показує розташування об'єктів за інтенсивністю прояву в них певної властивості, тобто упорядковує їх за принципом «менше/більше», але без вказівки, наскільки саме менше або наскільки саме більше. Число при вимірюванні за порядковою шкалою означає місце об'єкта в упорядкованому ряду. Це місце можна вважати рангом даного об'єкта вимірювання. Ці числа можуть бути замінені іншими, але при цьому висувається вимога про відсутність порушень послідовності розташування об'єктів [9]. Тобто якщо на номінальній шкалі було байдуже, в якому порядку розташовані класифікаційні клітинки, то на порядковій шкалі вони утворюють послідовність від клітинки «найменше значення» до клітинки «найбільше значення» або навпаки. З математичної точки зору, клітинки тепер коректніше буде нази-

вати класами, бо відносно до класів вживані означення «низький», «середній» і «високий» або «1-й», «2-й» і «3-й» класи тощо. На порядковій шкалі має бути не менше, ніж три класи. Наприклад, це можуть бути вже зазначені результати голосування «за – утримався – проти». При застосуванні порядкової шкали справжня відстань між класами залишається невідомою. Відомо лише те, що вони утворюють послідовність. Наприклад, класи «низький» та «середній» можуть бути насправді ближчими один до одного, ніж клас «середній» до класу «високий». Від класів легко перейти до чисел, якщо прийняти припущення, що нижчий клас отримує ранг $\mathbf{1}$, середній клас – ранг $\mathbf{2}$, а найвищий клас – ранг $\mathbf{3}$ або навпаки. Чим більша кількість класів на шкалі, тим більше надається можливостей для математичної обробки отриманих даних та перевірки статистичних гіпотез. Наприклад, можна оцінити розбіжності між двома вибірками за переваженням у них більш високих або більш низьких рангів або обчислити коефіцієнт рангової кореляції між двома змінними, виміряними за порядковою шкалою. Таким чином, одиниця вимірювання за порядковою шкалою – це відстань в один клас або один ранг. При цьому відстані між класами та рангами можуть бути різними і взагалі досліднikові невідомими [15]. Отже, процедура упорядкування задається двома емпіричними операціями: встановлення рівності та встановлення відношення «менше/більше», «краще/гірше» тощо. Припустимо, що необхідно розташувати в певній послідовності $\boldsymbol{n}$ об'єктів за якимось критерієм (ознакою, фактором). Таке упорядкування зазвичай подається у вигляді матриці $\boldsymbol{A} = \|\boldsymbol{a_{ij}}\|$, де $\boldsymbol{i, j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$. Величини $\boldsymbol{a_{ij}}$ встановлюють співвідношення між об'єктами і можуть бути визначені в наступний спосіб [16]:

$$\boldsymbol{a_{ij}} = \begin{cases} +\mathbf{1}, & \text{якщо } \boldsymbol{i} \text{ преважніше, ніж } \boldsymbol{j}, \text{тобто } \boldsymbol{i} \succ \boldsymbol{j}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } \boldsymbol{i} \text{ та } \boldsymbol{j} \text{ еквівалентні, тобто } \boldsymbol{i} \sim \boldsymbol{j}, \\ -\mathbf{1}, & \text{якшо } \boldsymbol{i} \text{ є не більше (менше) перважним, ніж } \boldsymbol{j}, \text{тобто } \boldsymbol{i} \prec \boldsymbol{j}. \end{cases}$$

Співвідношення $\boldsymbol{a_{ij}} = +\mathbf{1}$, яке означає, що ***i** є переважнішим за **j*** ($\boldsymbol{i} \succ \boldsymbol{j}$), має наступні *властивості*:

- *асиметричність*: якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = +\mathbf{1}$, то $\boldsymbol{a_{ji}} = -\mathbf{1}$,
- *транзитивність*: якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = +\mathbf{1}$ і $\boldsymbol{a_{jk}} = +\mathbf{1}$, то $\boldsymbol{a_{ik}} = +\mathbf{1}$.

Співвідношення $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$, яке означає, що ***i** та **j** рівноцінні*, тобто еквівалентні ($\boldsymbol{i} \sim \boldsymbol{j}$), є відношенням еквівалентності та має наступні *властивості* [17]:

- *рефлексивність*: $\boldsymbol{a_{ii}} = \mathbf{0}$,
- *симетричність*: якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{a_{ji}} = \mathbf{0}$,
- *транзитивність*: якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{a_{jk}} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{a_{ik}} = \mathbf{0}$.

Крім того, ці два співвідношення мають бути *сумісними*, тобто якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = +\mathbf{1}$ і $\boldsymbol{a_{jk}} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{a_{ik}} = +\mathbf{1}$, а також якщо $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{a_{jk}} = +\mathbf{1}$, то $\boldsymbol{a_{ik}} = +\mathbf{1}$. Також це упорядкування має бути *зв'язним*, тобто для будь-яких $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ обов'язково виконується одне з трьох співвідношень: або $\boldsymbol{a_{ij}} = +\mathbf{1}$, або $\boldsymbol{a_{ji}} = -\mathbf{1}$, або $\boldsymbol{a_{ij}} = \mathbf{0}$. Використання порядкових шкал дозволяє розрізняти об'єкти і в тих випадках, коли критерій (ознака, фактор) не заданий в явному вигляді, тобто коли сама ознака порівняння невідома, але при цьому можливо частково або повністю упорядкувати об'єкти на основі системи переваг, яку має експерт [16]. Будь-яка ***множина A*** називається ***упорядкованою***, якщо для будь-яких двох її елементів $\boldsymbol{A_i}$ та $\boldsymbol{A_j}$ встановлено, що або $\boldsymbol{A_i}$ передує $\boldsymbol{A_j}$, або $\boldsymbol{A_j}$ передує $\boldsymbol{A_i}$ [17]. Інколи не вдається встановити суворе передування для всіх елементів множини, але можна здійснити «групове» упорядкування, коли упорядковуються підмножини еквівалентних (рівноцінних) елементів. Також використання порядкових шкал дозволяє проводити перетворення отриманих від експертів оцінок, що відповідають всім монотонно зростаючим функціям. Так, наприклад, додатні оцінки можуть бути замінені їх квадратами, логарифмами або будь-якою іншою монотонно зростаючою функцією [13].

Розглянуті шкали вимірювання в основному застосовуються для кількісного відображення атрибутивних (якісних) ознак. Решта шкали є метричними або кількісними, тобто використовуються вже для вимірювання кількісних ознак. Процедура вимірювання при цьому полягає у визначенні числових значень ознак за допомогою якоїсь міри або одиниці вимірювання.

3. ***Інтервальна шкала*** (***шкала інтервалів***) відрізняється від попередніх тим, що потребує встановлення не лише певної одиниці вимірювання, а й початкової точки відліку, яка не обов'язково є абсолютним нулем. Наприклад, при зазначенні історичних періодів часу прийнято розділення періоду до нашої ери та періоду нашої ери. Цей розподіл відповідає періодам перед та після народження Христа. Тобто за початкову точку відліку прийнято умовну дату – рік народження Ісуса Христа, – і весь період часу розподіляється в такий спосіб на «до» (від'ємна піввісь хронологічного проміню) та «після» (додатна піввісь хронологічного проміню). Емпірична операція припускає лише таке числове приписування, за якого рівність проміжків між двома шкальними значеннями виражає рівність інтервалів між вимірюваними елементами відносно деякої властивості. Тому інтервальна шкала, хоча вона дозволяє вимірювати лише інтенсивність властивостей, водночас показує, наскільки різною була ця інтенсивність [9]. Принцип побудови більшості інтервальних шкал спирається на правило «трьох сигм», яке буде докладно розглянуте в третьому розділі цього посібника. Інтервальні шкали мають можливість оцінки, отримані за однією шкалою, трансформувати в оцінки за іншою шкалою. Різниці між значеннями на шкалі інтервалів стають мірами на шкалі відношень [13]. Прикладами інтервальної шкали можуть бути температурні шкали за Цельсієм, Фаренгейтом тощо, а також різні шкали календарного часу: старий юліанський та новий григоріанський сонячні календарі, місячний календар тощо.
4. ***Шкала відношень*** або ***пропорціональна шкала*** передбачає, що вимірювані об'єкти характеризуються масштабом. Це означає, що ця шкала класифікує об'єкти або суб'єкти пропорційно до ступеня прояву вимірюваної властивості. На пропорційних шкалах класи позначаються числами, які пропорційні одне одному. Наприклад, число $\mathbf{2}$ так само відноситься до числа $\mathbf{4}$, як число $\mathbf{4}$ відноситься до числа $\mathbf{8}$. Саме цим пояснюється те, що шкала відношень є інтервальною шкалою з природним початком, тобто початковою нульовою точкою відліку. В зв'язку з цим шкала відношень дозволяє встановити, в скільки разів ті чи інші властивості одного об'єкта є більшими, ніж у іншого об'єкта, тобто виявити їх точне кількісне співвідношення. Звідси й походить назва «шкала відношень». Прикладом шкали відношень є температурна шкала за Кельвіном, яка передбачає точку абсолютного нуля $\mathbf{0°K}$, яка відповідає температурі $\mathbf{-273,15°C}$ за звичною нам шкалою Цельсія. Її було запропоновано в 1848 році Вільямом Томсоном (майбутнім лордом Кельвіном, який отримав свій титул саме за наукові досягнення). В якості одиниць вимірювання можуть виступати або міри простору, часу, площі, об'єму, ваги тощо, або одиниця відповідного об'єкта (якась кількість знайдених артефактів, кількість населення тощо), тобто кількість спостережень або частота. Вимірювання при цьому здійснюється через розрахунки, тобто є вимірюванням в буквальному сенсі [9]. Емпіричною операцією, яка

доповнює попередні шкальні типи, є визначення рівності відношень [16]. Таким чином, ми знову повертаємось до універсальної шкали вимірювання в частотах тієї чи іншої ознаки та к одиниці вимірювання якої є одне спостереження. Розподіливши спостереження по клітинках номінальної шкали, можна потім застосувати найвищу шкалу вимірювання – шкалу відношень між частотами [15]. В деяких випадках при формалізації експертних оцінок щодо досліджуваних ознак історичних явищ та процесів використовується властивість адитивності, яка притаманна лише шкалі відношень. Наявність *адитивності* виражається *наступними властивостями*:

- якщо $\boldsymbol{j = a}$ та $\boldsymbol{i > 0}$, то $\boldsymbol{i + j > a}$;
- $\boldsymbol{i + j = j + i}$;
- якщо $\boldsymbol{i = a}$ та $\boldsymbol{j = b}$, то $\boldsymbol{i + j = a + b}$;
- $\boldsymbol{(i + j) + k = i + (j + k)}$.

Звичайна ситуація, коли потрібно прийняти рішення з урахуванням адитивності, полягає в тому, що є декілька (принаймні, дві) якісні ознаки. За наявності декількох ознак, які характеризують конкретні об’єкти, існує безліч реальних властивостей та типів зв’язків об’єктів. В залежності від характеру та цілі досліджуваного явища чи об’єкта, ознаки, за якими розрізняються об’єкти, можуть бути кількісно порівняними або непорівняними між собою, частково порівняними (тобто не будь-який з будь-яким, а лише деякі з них), упорядковані за ступенем їх важливості тощо. Несумірність різних ознак обумовлена не лише необхідністю застосування різних одиниць вимірювання, але й тим, що кожна ознака, виражаючи певну властивість, одночасно є оцінкою відношення до даної властивості з боку особи, що приймає рішення [13]. Різновидом шкали відношень є ***абсолютна шкала***, яка не має визначеної розмірності та дозволяє порівнювати різні характеристики. Ця шкала базується на шкалі відношень, для якої вводяться нормовані (базові) характеристики:

$$\boldsymbol{f = \frac{x_i}{\widetilde{x}}, f = \frac{x_i}{\sigma_i}, f = \frac{x_i - \widetilde{x}}{\sigma_i}, f = \frac{x_{max} - x_i}{x_{max}}, f = \frac{x_{max} - x_i}{R_i}},$$

де $\boldsymbol{\widetilde{x}}$ – математичне очікування,

$\boldsymbol{\sigma_i}$ – середньоквадратичне відхилення,

$\boldsymbol{R_i}$ – розмах варіації.

Інколи шкалу відношень також називають абсолютною шкалою на відміну від шкали інтервалів (шкали різниць).

Класифікацію шкал та їх властивості наведено в таблиці 1.1 [13, 18].

Таблиця 1.1

Класифікація шкал за Стивенсом

Вид ознаки	Найменування шкали	Припустимі перетворення значення ознаки
Якісні ознаки	Номінальна *(шкала найменувань)*	Всі взаємнооднозначні функції
	Порядкова *(ординальна)*	Всі монотонно зростаючі функції
Кількісні ознаки	Інтервальна *(шкала інтервалів)*	Всі додатні афінні перетворення
	Шкала відношень	Всі лінійні перетворення з додатними коефіцієнтами
	Абсолютна	Тотожні перетворення

Широко відоме середнє арифметичне, хоч й найчастіше вживане, але не єдине можливе усереднене значення. ***Мірою центральної тенденції*** в статистиці називають таке число, що використовується для опису сукупності значень за допомогою одного єдиного числа. Наприклад, коли говорять про середню зарплатню по якійсь галузі або середнє значення якоїсь антропометричної характеристики стародавньої людини. Існує декілька мір центральної тенденції, але остаточний її вибір залишається за дослідником. Перші такі міри запропоновані ще в давнину піфагорейцями, філософія яких приймає число за першооснову світоустрою. Ними введені наступні види середніх величин.

1. *Середнє арифметичне* – сума всіх результатів спостережень, розділена на їх кількість, тобто

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}. \tag{1.1}$$

2. *Середнє геометричне* – це число, яким можна замінити кожен із результатів спостережень в такий спосіб, щоб їх добуток залишився незмінним. Середнє геометричне значення дорівнює кореню ступеня кількості спостережень із загального добутку значень всіх спостережень, тобто

$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_i \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}. \tag{1.2}$$

3. *Середнє гармонічне* – це один із засобів розуміння середнього значення деякої сукупності чисел. Його можна визначити в наступний спосіб: нехай задані додатні числа x_1, x_2, …, x_n. Тоді їх середнім гармонічним буде таке число H, для якого

$$\frac{n}{\overline{x}_H} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}.$$

З цього співвідношення можна отримати явну формулу для обчислення середнього гармонічного:

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_n}}, \tag{1.3}$$

тобто середнє гармонічне є величиною, зворотною до значення середнього арифметичного для величин, зворотних до результатів спостережень. Середнє гармонічне дійсно є «середнім» в тому сенсі, що

$$\min_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \overline{x}_H(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \max_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Більш за те, коли середнє гармонічне визначене, мають місце наступні співвідношення:

$$\overline{x}_H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\overline{x})^{-1}(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}),$$
$$\overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\overline{x}_H)^{-1}(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}).$$

Середнє гармонічне є найменшим значенням серед інших середніх. Згідно з нерівністю середніх, має місце їх наступне співвідношення:

$$\overline{x}_H \leqslant \overline{x}_G \leqslant \overline{x} \leqslant S,$$

де $\overline{x}_H$ –середнє гармонічне;

$\overline{x}_G$ – середнє геометричне;

$\overline{x}$ – середнє арифметичне;

S – середнє квадратичне відхилення.

В статистиці середнє гармонічне застосовується у тих випадках, коли результати спостережень, для яких обчислюється середнє арифметичне, задані своїми зворотними значеннями.

Але згодом до розглядання було прийнято й інші усереднені значення ряду спостережень (або ряду варіант, варіаційного ряду).

4. *<u>Медіана</u>* – це таке спостереження або його значення M_e, яке розділює упорядкований за зростанням або зменшенням варіаційний ряд навпіл з однаковою кількістю спостережень в кожній половині. Медіана є найкращою характеристикою центральної тенденції, коли границі крайніх інтервалів є відкритими. Вона є найбільш придатною характеристикою рівня розподілу і в тому випадку, коли в ряду розподілу присутні надзвичайно великі або надзвичайно малі значення, які сильно впливають на середню величину, а на медіану – ні. Крім того, медіана має *властивість лінійного мінімуму*: сума абсолютних значень відхилень величини ознаки у всіх одиниць сукупності від медіани є мінімальною, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_e) = min\,.$$

де n – кількість спостережень. Ця властивість має велике значення для розв'язання практичних задач, пов'язаних із логістикою. При обчисленні медіани перш за все визначається її порядковий номер в ряду розподілу. При непарній кількості спостережень він дорівнює

$$N_{M_e} = \frac{n+1}{2}.$$

При парній кількості спостережень він дорівнює

$$N_{M_e} = \frac{n}{2}.$$

Далі, відповідно до порядкового номера, знаходять саму медіану. В дискретному варіаційному ряду це відбувається без всіляких обчислень [19]. Наприклад, для набору значень **{1, 4, 6, 13, 5, 2, 18}** його упорядкованим варіаційним рядом буде послідовність **{1, 2, 4, 5, 6, 13, 18}**. Він містить всього 7 спостережень, отже порядковий номер медіани буде

$$N_{M_e} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4\,.$$

Відповідно, медіаною цього ряду буде число **5**, тому що воно стоїть точно в середині цього ряду (на 4-му місці). Якщо ж дискретний варіаційний ряд містить парну кількість спостережень, то медіану неможливо визначити однозначно. В цьому випадку найчастіше використовують напівсуму двох сусідніх серединних значень упорядкованого варіаційного ряду. Тобто для ряду, що містить $2k$ спостережень, в загальному випадку після його упорядкування медіану знаходять за формулою

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\,. \qquad (1.4)$$

В інтервальному варіаційному ряду, знаючи порядковий номер медіани, за накопиченими частотами інтервалу (кількість спостережень, що потрапила до конкретного інтервалу) визначається медіанний інтервал. Медіанним є інтервал, що містить варіанту з номером $\frac{n}{2}$. Далі в цьому інтервалі шляхом інтерполяції визначається значення медіани за наступною формулою [19]:

$$\boldsymbol{M_e = y_{M_e} + \frac{\frac{n}{2} - n_{M_e-1}}{n_{M_e}} \cdot h}, \tag{1.5}$$

де $\boldsymbol{y_{M_e}}$ – нижня границя медіанного інтервалу;

$\boldsymbol{h}$ – довжина інтервалів;

$\boldsymbol{n_{M_e-1}}$ – кількість спостережень, значення яких потрапили до інтервалу , що передує медіанному;

$\boldsymbol{n_{M_e}}$ – кількість спостережень, значення яких потрапили до медіанного інтервалу;

$\boldsymbol{n}$ – загальна кількість спостережень у варіаційному ряду.

Медіана використовується для знаходження того значення досліджуваної ознаки, якого досягла половина одиниць статистичної сукупності: половина робітників підприємства отримують зарплатню, вищу за медіану, половина учасників конкурсу за віком старша за значення медіани тощо [20, 21].

5. *Мода* – це таке значення $\boldsymbol{M_0}$, що найчастіше зустрічається серед спостережень, зафіксованих в ході експерименту. В загальному випадку варіаційний ряд може містити декілька мод, якщо різні значення зустрічаються однакову кількість разів. В цьому випадку підсумковою модою всього ряду буде середнє арифметичне всіх його мод. Наприклад, для дискретного варіаційного ряду $\boldsymbol{\{1, 2, 2, 8, 7, 2, 5, 7, 3, 7, 4\}}$ є дві моди – це числа $\boldsymbol{2}$ і $\boldsymbol{7}$, які мають однакову частоту, яка дорівнює трьом. Тому для цього ряду його модою буде число

$$\boldsymbol{M_0 = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2} = 4,5} \;.$$

Якщо, як в розглянутому прикладі, дві моди мають однакові найбільші частоти, то такі дві моди свідчать про бімодальний розподіл. Часто бімодальні розподіли вказують на якісну неоднорідність сукупності за досліджуваною ознакою. Можуть зустрічатися розподіли, де всі варіанти зустрічаються однаково часто, тобто моди немає взагалі або всі варіанти є однаково модальними. В інтервальних варіаційних рядах спочатку знаходять модальний (найчастотніший) інтервал. Потім вже в цьому модальному інтервалі мода обчислюється за формулою [19, 21]:

$$\boldsymbol{M_0 = y_{M_0} + \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{(n_{M_0} - n_{M_0-1})(n_{M_0} - n_{M_0+1})} \cdot h}, \tag{1.6}$$

де $\boldsymbol{y_{M_0}}$ – нижня границя модального інтервалу;

$\boldsymbol{h}$ – довжина інтервалів;

$\boldsymbol{n_{M_0-1}}$ – кількість спостережень, значення яких потрапили до інтервалу , що передує модальному;

$\boldsymbol{n_{M_0}}$ – кількість спостережень, значення яких потрапили до модального інтервалу;

$\boldsymbol{n_{M_0+1}}$ – кількість спостережень, значення яких потрапили до наступного за модальним інтервалу;

$\boldsymbol{n}$ – загальна кількість спостережень у варіаційному ряду.

Для розв’язання практичних задач найбільший інтерес представляє мода, яку подано у вигляді саме інтервалу, а не дискретного числа. Це пояснюється призначенням моди, яка має виявити найбільш поширені розміри явища. Середня величина – це величина, що є типовою для всіх одиниць однорідної сукупності. Мода – це також типова величина, але вона визначає безпосередньо розмір ознаки, притаманний хоча і значній кількості спостережень, але все ж таки не всій сукупності [19].

Медіана та мода вважаються типовими характеристиками лише для однорідної сукупності з великою кількістю спостережень [21]. На рис. 1.1 подано геометричну візуалізацію медіани, моди та середнього арифметичного.

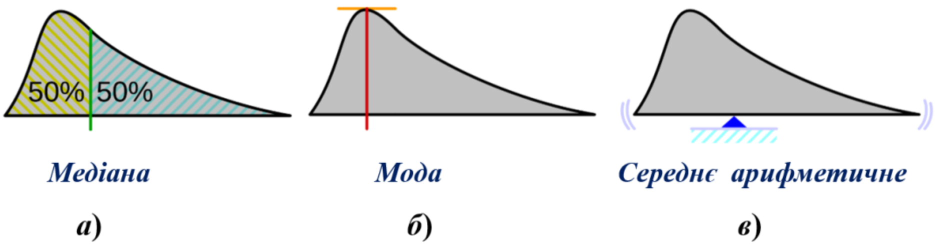


Рис. 1.1 – Геометрична візуалізація деяких середніх значень варіаційного ряду

Порівняння описаних середніх показників та виявлення співвідношень між ними допомагає з’ясувати особливості розподілу того чи іншого варіаційного ряду. В симетричних рядах мода, медіана та середнє арифметичне значення приблизно однакові. Чим більшою є розбіжність між модою та середнім арифметичним, тім більшим є ступінь асиметричності ряду. Встановлено, що для помірно асиметричних рядів різність між модою та середнім арифметичним значенням приблизно в три рази перевищує різність між медіаною та середнім арифметичним значенням:

$$\boldsymbol{M_0 - \overline{x} = 3(M_e - \overline{x})}\,.$$

Це співвідношення можна використовувати для визначення одного показника за двома відомими. Із цього випливає, що поєднання моди, медіани та середнього арифметичного значення має важливе значення для характеристики типу розподілу [19].

З урахуванням всіх введених різновидів міри центральної тенденції, можна запропонувати наступну порівняльну таблицю для розглянутих видів шкал вимірювання [22].

Таблиця 1.2

Властивості шкал вимірювання згідно з класифікацією С. С. Стивенса

Властивість \ Тип шкали		Номінальна шкала	Порядкова шкала	Інтервальна шкала	Шкала відношень
Логічні операції	$\times$; $\div$	Ні	Ні	Ні	Так
	+; −	Ні	Ні	Так	Так
	<; >	Ні	Так	Так	Так
	=; ≠	Так	Так	Так	Так
Приклади	Дихотомічні (бінарні) змінні	Стать (чоловіча / жіноча)	Стан здоров'я (здоровий / хворий)	- Дата (з 1458р. до н.е. по 2011р. н.е.); - Координаті на місцевості (від 90°північ.ш. до 50°півден.ш.); - Температура (від −10°C до +25°C)	Вік (від 0 до 99 років)
	Недихотомічні (багатозначні) змінні	Національність (француз / китаєць /… / тощо)	Думка (згоден / скоріш згоден / скоріш незгоден / цілком незгоден)		
Міра центральної тенденції		Мода	Медіана	Середнє арифметичне	Середнє геометричне
Метрична або ні		Неметрична (якісна)	Неметрична (якісна)	Метрична (кількісна)	Метрична (кількісна)

Всі ці шкали вимірювання пов'язані певною залежністю. Кожна наступна шкала містить в собі усі попередні шкали. Вимірювання за шкалою найменувань та порядковою шкалою вказує лише на відмінність або різну інтенсивність прояву властивостей об'єктів. Числові показники номінальної та порядкової шкал не припускають їх арифметичної обробки. В цьому полягає обмеженість вказаних методів вимірювання. На основі цього класифікацію та ранжування іноді не вважають вимірюванням. Але за шкалами найменування та порядку все ж таки можна встановити певні відношення між об'єктами. В цьому сенсі класифікація та ранжування все ж таки є вимірюванням. В цілому шкали вимірювання характеризуються зростанням їх метричності і, як наслідок, інформативності. Це знаходить своє відображення в показниках вимірювання [10].

Але в статистиці за наявності даних на декілька рівновіддалених дат, можна обчислити ще одне усереднене значення ознаки.

6. <u>*Середнє хронологічне*</u> – це значення середнього, яке є тотожним середньому арифметичному за умови, що інтервали часу між сусідніми датами спостереження дорівнюють один одному, [23, 24]:

$$\overline{Cr} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_x}{n-1} \quad . \tag{1.7}$$

Шкали вимірювання обумовлюють принципи та засоби вимірювання. Але будь-яке вимірювання призводить до отримання певних числових показників. ***Показник вимірювання***, тобто числове значення ознаки є формою подання кількісної інформації про об'єкт дослідження [25]. Розмаїття шкал, тобто методів вимірювання, призводить до отримання різних показників вимірювання. Існує <u>**три типи**</u> таких <u>**показників**</u>.

1. ***Асоціативні показники*** встановлюють лише схожість між об'єктами, що належать до різних сукупностей. Їх отримують при вимірюванні за шкалою найменувань.
2. ***Показники черговості*** вказують порядок розташування об'єктів в сукупності за інтенсивністю прояву тієї чи іншої властивості. Показники черговості отримують за порядковою шкалою.

3. *Показники кількості* є найбільш інформативними, тому що виражають певною мірою або в певній одиниці вимірювання масштаби об’єкта та його риси. Числові значення цих показників не можуть бути замінені (в обраній системі вимірювання) на інші. Ці показники отримують шляхом вимірювань за інтервальною та пропорційною шкалами.

Розглянуті шкали вимірювання та отримані за ними показники вимірювання перш за все вказують на істотні розбіжності в можливостях вимірювання кількісних та атрибутивних (якісних) ознак [25]. Наслідком цього є неоднаковий ступінь інформативності показників вимірювання та різні можливості їх математичної обробки. Асоціативні показники та показники черговості є описовими якісними показниками. Самі ці показники можуть бути об’єктом для вимірювання за пропорційною шкалою. Так, можна визначити кількість та частку об’єктів з тими чи іншими якісними ознаками в їх загальній сукупності, тобто на основі асоціативних показників можна встановити показники кількості. В свою чергу, показникам черговості, що виражають відмінності об’єктів за інтенсивністю прояву в них тих чи інших атрибутивних ознак, можна надати числові значення і тим самим перетворити їх в показники кількості. Це здійснюється за допомогою експертних оцінок [11].

Одиниці вимірювання є категорією історичною. Вони створювалися та випробувалися з накопиченням тривалого досвіду. Багато одиниць вимірювання, штучних та умовних, в результаті тривалого використання стали звичними та цілком природними. Наприклад, ще в давнину виник спосіб вимірювання ступні дорослого чоловіка. Ця міра отримала назву «фута» та діє по теперішній час, незважаючи на всю її умовність. Такими ж умовними були застосовані протягом багатьох століть давньослов’янські міри довжини – сажень, лікоть, пядь тощо. В процесі зростання потреби у вимірюванні та його точності розширювалася та удосконалювалася система одиниць вимірювання та напрацьовувалися вимоги, що до них висувалися. Обов’язковою умовою коректності вимірювання є однакова структура вимірюваних ознак, однаковий масштаб об’єктів вимірювання (в статистиці їх називають одиницями обліку), незмінність та однорідність одиниць вимірювання за розміром. Лише за цих умов результати вимірювання будуть зіставними в просторі та часі [1]. Ступінь дотримання всіх цих вимог визначається метою вимірювання та залежить від характеру вимірюваних ознак.

Найбільш розвинена та стабільна система еталонних одиниць вимірювання склалася в природничих науках (метр, кілограм, секунда тощо). Деякі з них застосовуються і при вимірюванні суспільних явищ. Але в цілому різноманітна сукупність історичних, в тому числі й суспільних явищ дуже обмежено може бути виміряна за допомогою одиниць вимірювання, прийнятих в природничих науках. При вимірюванні історичних явищ та процесів, що характеризуються кількісними ознаками, тобто при використанні інтервальної шкали та шкали відношень широко застосовуються різноманітні *натуральні* та *метричні* одиниці вимірювання. Ці одиниці вимірювання отримали широке застосування для характеристики демографічних явищ. Змістова неоднорідність одних і тих самих одиниць вимірювання виникає через надзвичайне розмаїття рис та властивостей історичних явищ та об’єктів, їх багатовимірним характером. В зв’язку з цим постає задача розробки таких одиниць вимірювання, що дозволяли б інтегрувати та узагальнювати натуральні та метричні одиниці вимірювання, що характеризують різні об’єкти або їх властивості і тому не піддаються прямому зіставленню. Досягти зіставності в цьому випадку можна шляхом введення *вартісних одиниць вимірювання* [26]. Вони в основному використовуються при дослідженні виробничо-технічних та соціально-економічних явищ. Іншою інтегральною одиницею вимірювання різних за змістом кількісних ознак є *індекси* [27, 28]. Їх побудова є достатньо складною процедурою, заснованою на застосуванні математичних методів обробки кількісних даних.

Незважаючи на те, що сукупність кількісних ознак, що характеризують історичні явища, об'єкти та процеси, є дуже великою, ще більш широким є спектр притаманних їм якісних атрибутивних ознак. Асоціативні показники та показники черговості не мають кількісного подання. Їх вимірювання є якісним. В зв'язку з цим постає задача напрацювання кількісних методів вимірювання якісних ознак, тобто їх вимірювання за інтервальною та пропорційною шкалами із застосуванням певних одиниць вимірювання. Найпростішим методом вимірювання будь-яких (як простих, так і складних) атрибутивних ознак є визначення чисельності об'єктів із якоюсь властивістю у відповідній сукупності об'єктів шляхом розрахунків. В такий спосіб якісні ознаки можуть бути подані показниками кількості. Але інформативність таких показників є обмеженою, бо вони не відображають розмірів відповідних властивостей. Тому вони є корисними лише при вимірюванні простих атрибутивних ознак, коли відповідна їм властивість є однозначною та очевидною [26].

Однією з найбільш актуальних проблем вимірювання історичних явищ є розробка кількісних одиниць вимірювання складних атрибутивних ознак, ознак-оцінок. Ці ознаки, як правило, є комплексними. Вони містять цілу низку властивостей. Тому потрібна одиниця вимірювання, яка буде їх синтезувати. Розробкою загальних принципів та методів вимірювання складних атрибутивних ознак займається прикладна математична дисципліна *кваліметрія*. Її представники розробили, перш за все, засоби комплексного вимірювання якості продукції. Але вони вважають, що цілком можливо дати інтегральну комплексну оцінку будь-яким якісним ознакам. Практика вимірювання складних атрибутивних ознак також призвела до виникнення такої одиниці їх кількісного вимірювання як *бали*. На практиці бали завжди визначаються на основі *експертних оцінок* [11, 13]. Але оцінка складних атрибутивних ознак балами завжди є суб'єктивною з одного боку, і залишається дуже приблизною з іншого боку. Як наслідок, бальні експертні оцінки є найбільш невизначеними та неоднорідними одиницями вимірювання. І хоч вони й піддаються математичній обробці, але все ж таки не мають тих властивостей, які є у показників кількості [29, 30].

Всі показники вимірювання розділяються на екстенсивні та інтенсивні. Для ***екстенсивних показників*** загальне значення однієї й тієї ж самої ознаки у сукупності вимірюваних об'єктів дорівнює сумі значень цього показника у кожного об'єкта. У ***інтенсивних показників*** такої властивості немає. Екстенсивними є показники, отримані за шкалою відношень та подані в натуральних або метричних одиницях вимірювання [31, 32]. Наприклад, якщо одна родина складається із трьох осіб, друга – із двох, а третя – із чотирьох, то загальна кількість населення в цих родинах буде дорівнювати дев'яти особам. Якщо ж знання одного студента оцінені на три бали, а другого – на п'ять (а це є типовим прикладом бальної експертної оцінки), то це зовсім не означає, що їх сукупні знання дорівнюють восьми балам. Але незважаючи на свою приблизність і навіть умовність, вимірювання складних атрибутивних ознак шляхом бальних експертних оцінок все ж таки дозволяє значно поглибити вивчення багатьох історичних явищ порівняно з їх описовим аналізом [33].

Все більше значення на сучасному етапі розвитку науки набуває багатовимірний аналіз суспільних, в тому числі й історичних, явищ. При вивченні багатьох історичних явищ та процесів зараз часто враховуються та вимірюються десятки ознак. В зв'язку з цим виникають труднощі при обробці та аналізі відповідних показників. Подолати їх можна шляхом «стиску» початкової системи кількісних показників, в результаті чого можна перейти до меншої кількості їх інтегральних значень типу різноманітних індексів [27, 32]. Граничним варіантом такого стиску є перехід до подання досліджуваних об'єктів у вигляді точки в багатовимірному просторі ознак. Кількість об'єктів та показників може бути будь-якою. В такий спосіб можна формалізувати результати вимірювання не лише кількісних, але й атрибутивних якісних ознак [33].

1.5. Особливості вимірювання історичних явищ

Головна особливість вимірювання історичних явищ полягає в тому, що у історика немає тієї свободи у виборі ознак, на основі яких будуть вивчатися історичні явища, статистичних одиниць обліку та одиниць вимірювання, яка є в розпорядженні, наприклад, соціолога або економіста. Можливості історика в цій галузі обмежені історичними джерелами. В подальшому будемо виходити із припущення, що достовірність даних джерел є офіційно встановленою і містить цілком надійні свідчення про досліджувані явища. Але в цьому випадку постає низка проблем, пов'язаних з вимірюванням. На першому етапі вимірювання аналізуються кількісні дані, зафіксовані в джерелах. Завжди слід мати на увазі, що їх було отримано в результаті вимірювань, які проводилися їх авторами, що переслідували певні цілі й були обмежені вимірювальними уявленнями та можливостями своєї епохи. Все це впливало на зміст вимірювання, обробку та зведення його результатів. Тому перше, що вимушені робити сучасні історики – це виявлення того, в якому ступені показники вимірювання, зафіксовані в джерелах, відповідають тій дослідницькій задачі, яку належить розв'язати. Перш за все, тут має бути з'ясована принципова можливість формування представницької в змістовому сенсі системи кількісних показників.

Система кількісних показників, що долучаються до дослідження, може мати вигляд або варіаційних, або динамічних (часових) рядів. ***Варіаційні ряди*** складаються із кількісних показників, що характеризують ту чи іншу ознаку у різних об'єктів, що належать до тієї чи іншої їх сукупності. ***Динамічні ряди*** складаються із показників, що характеризують ту чи іншу ознаку у одних і тих самих об'єктів в різні моменти часу [19, 27]. Показники варіаційних рядів за своєю природою є дискретними (перервними). Показники динамічних рядів виражають безперервну величину, яка перетворюється в процесі вимірювання в дискретну шляхом фіксування значення ознаки на певний момент часу.

Кількісні показники, що містяться в історичних джерелах, в основному, подаються варіаційними рядами. Тому при вимірюванні історичних явищ викликає великі труднощі формування динамічних рядів різних показників, особливо за порівняно довгі проміжки часу [20]. Дуже великими є і прогалини в самих даних. Тому історикам доводиться звертатися до різних джерел, в яких показники щодо одних і тих самих ознак часто отримані різними методами. Використовувати кількісні показники із різнорідних джерел часто доводиться і при формуванні системи варіаційних рядів. Все це висуває проблему можливості зведення та можливості взаємної заміни кількісних даних. Вона потребує своїх методів розв'язання, в тому числі й математичних.

Кількісні показники, що містяться в історичних джерелах, характеризують відповідні ознаки тих чи інших об'єктів. Однак суттєвим є питання про масштаби цих об'єктів, їх просторової (точніше, структурної) та часової протяжності. Вона може бути різною і на стадії початкового вимірювання, і при подальшому зведенні результатів вимірювання. Якщо матеріал зберігся лише у вигляді зведень різного масштабу, дослідник має вирішити, з якого саме з них слід взяти дані. Якщо ж є необроблені початкові дані, то може виникнути потреба їх агрегування, тобто укрупнення об'єктів вимірювання. При вивченні, наприклад, селянського господарства на території України XIX століття, об'єктом вимірювання може бути одне селянське подвір'я, селище, волость, уїзд, губернія, регіон (декілька губерній). Масштаб вимірюваних об'єктів має обиратися з урахуванням дослідницької задачі. Але при цьому він має бути таким, щоб можна було виявити найсуттєвіші типові й особливі риси, що притаманні явищам та процесам, що вивчаються. Якщо вказане селянське господарство розглядається в межах всієї території України, то агрегування показників не лише в межах селищ або волостей, а навіть уїздів буде занадто дрібним і може не дозволити виявити основні риси його структури. Потрібно буде проводити усереднення в масштабах губерній. Воно розкриє найбільш типове і, разом з тим, відобразить особливе. Якщо визначення масштабу об'єктів вимірювання викликає труднощі, слід застосовувати різні рівні агрегування кількісних даних. При цьому слід мати на увазі, що більш високі рівні агрегування показників в результаті їх усереднення, з одного боку, призводять до певної втрати початкової інформації, але з іншого боку – дозволяють виявити найбільш загальні та суттєві риси досліджуваних процесів. При застосуванні дрібніших масштабів об'єктів вимірювання його показники будуть висувати на перший план особливе.

При агрегуванні (усередненні) показників, що характеризують початкові елементи історичного процесу або явища, що можуть мати суттєві відмінності, особливо важливо враховувати основні методологічні вимоги будь-якого вимірювання [20]. Як вже зазначалося, воно полягає в тому, що вимірювання є правомірним лише в тому випадку, коли воно застосовується до якісно однорідної сукупності об'єктів. Це означає, що агрегування показників початкових елементів проводиться за умови, що ці елементи об'єднуються в деякі однорідні сукупності, що є компонентами системи більш високого рівня. Якщо розглядається соціально-економічний устрій селянського господарства окремих селищ як таких, то середні по селищах показники, наприклад, збирання хлібів в розрахунку на одне подвір'я, будуть давати спотворену картину, тому що ці подвір'я не складали якісно однорідної сукупності. До складу цієї сукупності входили як бідні, так і заможні подвір'я. Якщо ж аналізується соціально-економічний устрій селянського господарства деякого мікрорайону (наприклад, волості або уїзду), що є цілісною системою, елементами якої є окремі селища, що виконують в цій системі одні й ті ж самі функції, то розрахунок показника збирання хлібів в цьому випадку в середньому на подвір'я за селищем вже буде правомірним. Отже, в загальному випадку, агрегування показників має проводитися з урахуванням ієрархічних рівнів досліджуваної суспільної системи. Але при цьому однотипність її складових компонентів обов'язково має спеціально окремо перевірятися [23, 26].

При використанні результатів вимірювання, отриманих сучасниками подій, до них треба ставитися суворо історично. Треба обов'язково слідкувати за одноструктурністю вимірюваної ознаки, дотримання однакового масштабу об'єктів вимірювання та незмінністю одиниць вимірювання. Це має важливе значення при просторових та часових порівняннях показників. Так, наприклад, якщо об'єктом вимірювання є селянське подвір'я, що є початковим елементом в системі селянського господарства, то треба мати на увазі, що його розміри з точки зору чисельності населення були неоднаковими в різних місцевостях. Ще в більшому ступені це стосується земельних володінь або господарств, промислових підприємств, закладів та багато чого іншого. Як правило, різний масштаб мають і такі об'єкти вимірювання, що грунтуються на просторово-адміністративному принципі утворення. Однакової структури вимірюваних ознак особливо важливо дотримуватися при побудові варіаційних та динамічних рядів показників складних за своєю структурою ознак історичних явищ та процесів. Особливо це стосується випадків, коли ці процеси та явища розглядаються в широких просторових або часових межах.

Кількісні ознаки, зафіксовані в історичних джерелах, зазвичай подані в тих чи інших одиницях вимірювання (натуральних або метричних). Вони можуть бути використані дослідниками або переведені в інші одиниці. Однак важливо враховувати, що в давнину, в епоху

Середньовіччя і навіть в новий час одні й ті самі за своєю назвою одиниці вимірювання мали різний масштаб. Так, наприклад, десятина, що була основною одиницею вимірювання земельних площин на території України в дорадянський період, аж до середини XIX століття мала різний масштаб. Існувала десятина казенна, що дорівнювала 2400 квадратних сажнів (80×30) і десятина господарча, що дорівнювала 3200 квадратних сажнів (80×40). Отже, потрібна перевірка розмірності одиниць вимірювання, вказаних в джерелах, і приведення їх до одного масштабу. Таким чином, неодмінною умовою коректності вимірювання є незмінність в процесі вимірювання структури кожної з вимірюваних ознак, масштабів вимірюваних об'єктів та однозначності одиниць вимірювання.

Для будь-якого вимірювання важливе значення має точність кількісних показників. Вона багато в чому залежить від тих помилок, що виникають на різних стадіях вимірювання. Помилки вимірювання можуть бути викликані найрізноманітнішими причинами. Можна виділити **два типи** таких **причин виникнення помилок** [1].

1. Помилки виникають внаслідок неспроможності або обмеженості тих теоретико-методологічних посилок, виходячи з яких проводиться вимірювання.
2. Помилки є результатом неточності самих вимірювань (тобто помилки вимірювання).

До неадекватного відображення показниками історичної дійсності призводить не лише неспроможність соціально-економічних та суспільно-політичних теорій, а й недосконалість статистичних та математичних посилок вимірювання. Поняття, які напрацьовані в загальній теорії, що розкриває той чи інший бік дійсності, для проведення вимірювання треба перекласти на мову понять статистичних та математичних. Такий переклад є дуже непростим і може породжувати помилки навіть при правильній загальній теорії, особливо в тих випадках, коли вимірюються складні процеси та явища. Складнощі адекватного вимірювання суспільно-історичних явищ посилюються ще й тим, що в процесі вимірювання цих явищ формуються два види показників. Одні з них виступають як ***засіб відображення*** об'єктивних властивостей дійсності, а інші – як ***засіб оцінки*** цих властивостей. Таке роздвоєння показників пов'язане з тим, що результати людської діяльності, з одного боку, мають об'єктивну суспільну цінність, а з іншого боку, піддаються суб'єктивній оцінці сучасниками. При коректному вимірюванні два види показників мають знаходитися в єднанні. Але через вплив тих чи інших чинників між ними можуть виникати невідповідності. Тому важливою задачею при використанні показників вимірювання, проведеного сучасниками, є , по-перше, врахування того, з яким саме із двох вказаних видів показників має справу дослідник, і по-друге, наскільки адекватно оціночні показники відображають дійсність [9]. При недотриманні цих умов можуть бути припущені прорахунки.

Неточності самих вимірювань можуть бути породжені помилками в реєстрації кількісних значень ознак та в їх вирахуваннях. ***Помилки реєстрації*** бувають двох типів.

1. ***Систематичні помилки*** – наслідки прояву певних чинників, які в більшості випадків можуть бути встановлені. Систематичні помилки можуть бути:
   - *навмисними*, що є односпрямованими (системне заниження прибутку та завищення витрат промисловцями, заниження розмірів феодальної ренти тощо);
   - *ненавмисними*, які можуть бути викликані округленням (наприклад, віку), труднощами відновлення по пам'яті точних даних (наприклад, витрат при бюджетних обстеженнях) та іншими причинами.

2. ***Випадкові помилки*** реєстрації можуть бути викликані необережністю або неуважністю реєстраторів, несправністю вимірювальних приладів, недосконалістю методів вимірювання тощо. Випадкові помилки мають різноспрямований характер (в одних випадках показник завішується, а в інших, навпаки, занижується). При великій кількості спостережень вони мають нормальних закон розподілу та взаємопогашуються.

Помилки вирахування виникають при обробці кількісних даних в результаті багаторазових обчислювальних операцій з неточними початковими показниками, а також в результаті заміни точних розрахунків приблизними, багаторазовими округленнями тощо.

В цілому загальне відхилення результату вимірювання від справжніх розмірів ознаки складається із сукупності відхилень, що викликані різними чинниками, і часто можуть бути істотними. Таким чином, будь-яким даним вимірювання, зафіксованим в історичних джерелах, притаманна певна точність, яку називають ***реальною*** або ***фактичною точністю***. З іншого боку, в будь-якому дослідженні, заснованому на кількісних даних, для розв'язання поставленої задачі потрібна відповідна точність, яку називають ***необхідною точністю***. Стосовно історичних досліджень це обумовлює потребу перевірки того, наскільки фактична точність кількісних показників відповідає точності, необхідної для розв'язання поставленої задачі. Якщо фактична точність вища за необхідну, то кількісні показники джерела інформації мають надлишок, резерв точності. Якщо ж фактична точність нижча за необхідну, то слід, якщо це припустимо, понизити рівень необхідної точності або тієї достовірності, тобто надійності, з якою вона виходить, або відмовитися від розв'язання поставленої задачі на основі долучених кількісних даних.

Питання про рівень фактичної точності даних та її відповідності необхідній точності, що задається дослідником, за наявності початкових показників може вирішуватися ймовірнісно-статистичними методами. Якщо ж наявні лише зведені або усереднені показники, то перевірити відповідність фактичної точності необхідній можна виходячи з наступного емпіричного факту, що заснований на багатьох спостереженнях. Похибка початкових (первинних) масових кількісних даних складає 10-20 %, а зведених (агрегованих) даних – 3-5 %. Більша точність агрегованих даних порівняно з первинними обумовлена взаємним погашенням початкових помилок. Говорячи про точність кількісних даних, що містяться в історичних джерелах, слід зазначити її зростання по мірі наближення до сучасності. Використовуючи показники, що мають різний ступінь точності, та припускаючи застосування математичних методів для їх обробки та аналізу, історик має з особливою обережністю ставитися до даних із сумнівною точністю. Разом з тим, ні в якому разі не слід відкидати неточні дані та розділяти відомості джерел на придатні та непридатні для обробки та аналізу. Задача полягає в тому, щоб, ясно усвідомлюючи всі недоліки наявних даних, знайти шляхи для їх подолання.

Кількісним показникам, що характеризують масові явища і процеси історичного розвитку, притаманна важлива особливість. Похибки у вимірюваннях, перш за все, виникають при визначенні числових значень абсолютних розмірів ознак. Але неточні в цьому відношенні кількісні показники можуть бути основою для отримання дуже точних відносних порівняльних показників. Це пояснюється тим, що при однакових можливостях і методах вимірювання ступінь неточності вимірювань буде приблизно однаковим. Отже, порівняльні показники будуть мати високу точність.

Суттєвим моментом у вимірюванні сукупності об'єктів, що характеризується тим чи іншим вибором показників, є повнота даних. Справа в тому, що в історичних джерелах можуть бути прогалини. Тому виникає проблема їх заповнення. Існують різні методи заповнення прогалин в кількісних даних. Вони ґрунтуються на відповідних розрахунках. Найпростішим і в певному сенсу найбільш обґрунтованим методом заповнення прогалин в показниках є заміщення їх середнім значенням даної ознаки за всією сукупністю об'єктів, що розглядаються [13, 34]. Для заповнення прогалин також широко застосовуються і математичні методи (рівняння регресії, аналітичне вирівнювання динамічних рядів тощо) [35]. Але будь-яке заповнення прогалин розрахунковими даними знижує точність кількісних показників, тому що будь-який розрахунок є приблизним. Тому заповнення прогалин в показниках через розрахунки може бути обмеженим. Особливо обережно слід застосовувати екстраполяцію значень ознак пізніших епох на ті, що були раніше. Правомірність застосування такої екстраполяції має бути всебічно обґрунтованою [29, 35]. За необхідності отримати систему показників, що не містить прогалин, і неможливості або недоцільності заповнення прогалин розрахунковими даними, повноти даних можна досягти або виключенням тих об'єкті вимірювання, які містять багато прогалин за низкою ознак, або виключенням ознак, за якими відсутні показники по багатьом об'єктам [29, 60].

Отримана на початковому етапі вимірювання система кількісних показників характеризує загальні (абсолютні) масштаби властивостей явищ та процесів, що вивчаються. Але для розкриття їх сутності потрібно знати не лише ці властивості та їх масштаби, але й інтенсивність їх прояву. Як правило, початкові дані вимірювання її не відображають. На відміну від представників природничих наук, історики не мають в своєму розпорядженні таких суворих і точних методів виявлення інтенсивності властивостей явищ, які вони вивчають. Але все ж таки вони намагаються виявити її всіма доступними їм шляхами. В цьому полягає найважливіша задача вимірювання історичних явищ на його другому етапі.

Основним засобом, що дозволяє перейти від показників, що відображають абсолютні масштаби ознак, до показників інтенсивності їх прояву, є перерахунок абсолютних показників у відносні. Часто такий перерахунок проводився сучасниками досліджуваних історичних подій при обробці первинних матеріалів вимірювання. Його підсумки містяться в джерелах, до яких звертаються історики. В цьому випадку належить оцінити точність відносних показників джерел та відібрати ті з них, які необхідні для розв'язання поставленої задачі. В більшості випадків відносні показники розраховуються на основі абсолютних даних самим дослідником. Найважливішою та найскладнішою проблемою при цьому є вибір тієї змістової одиниці, на яку здійснюється перерахунок абсолютних показників. Дуже часто відносні показники розраховуються в долях (частках, відсотках). В цих випадках отримують безрозмірні показники. Наприклад, розміри селянської оренди землі можна розраховувати відносно всього землеволодіння, розмірів ріллі та посівів. Зарплатню робітників окремих підприємств можна співвідносити із виробничими витратами коштів, із витратами на соціальні та культурні потреби тощо. При цьому дольові (відсоткові) показники можуть розраховуватися як по горизонталі, так і по вертикалі.

Наведені приклади – це розрахунок відносних показників по горизонталі. Розрахунок по вертикалі є визначенням частки кількісного значення ознаки у даного об'єкта по відношенню до сумарного значення цієї ознаки у сукупності об'єктів, що прийняті до розглядання. При перерахунку абсолютних показників у відносні в цілому можна отримати більше метричних показників, ніж відсоткових. Але ця відмінність є вкрай відносною, тому що інформативна цінність будь-яких показників залежить від того, наскільки глибоко вона дозволяє вирішувати дослідницьку задачу.

Основною проблемою, пов'язаною з відносними показниками, є розкриття їх змісту. Кожен із цих показників характеризує певний аспект або властивість досліджуваних явищ. У виявленні того, що саме відображає даний показник, і, як наслідок, того, які саме переваги дає його включення в систему кількісних даних для аналізу, й полягає головна і часто доволі складна задача оперування із відносними показниками. Часто розв’язати її можна лише в результаті подальшої їх математичної обробки та аналізу (наприклад, виявлення взаємних зв’язків між ними). Але перш за все, успіх як відбору, так і аналізу відносних показників залежить від глибини загальноісторичного і конкретно-проблемного теоретико-методологічного підходу до досліджуваних історичних явищ та процесів [36]. Таким чином, і на другому етапі вимірювання, коли на основі абсолютних кількісних показників обчислюються відносні, історик має вирішити низку важливих проблем. Підсумком вимірювання кількісних ознак є система абсолютних та відносних показників, які в подальшому можуть піддаватися математичній обробці.

Як вже зазначалося, більшість ознак, що характеризують історичні об’єкти дослідження, є якісними, атрибутивними і не мають одиниць вимірювання, тобто відповідна властивість не може бути поданою в тих чи інших метричних показниках. Найпростішим методом вимірювання якісних ознак може бути вже описаний метод підрахунку, тобто визначення кількості об’єктів із даною властивістю в загальній сукупності цих об’єктів. Наприклад, можна підрахувати серед загальної кількості працівників робітників якогось конкретного відділу, підприємства, галузі промисловості, міста тощо. Або підрахувати серед загальної кількості працівників, наприклад, їх гендерний розподіл, одружених та самотніх, тих, що має або не має конкретну професію, з тим чи іншим рівнем освіти тощо. Сумарні кількості ознак можуть бути переведені в частотне подання, яке показує частку об’єктів з даною ознакою у всій їх сукупності. На відміну від вимірювання кількісних ознак, числове значення ознаки в цьому випадку відноситься не до кожного об’єкта (об’єкт лише має або, навпаки, не має якоїсь властивості), а лише до їх сукупності. При цьому сам кількісний показник не є метричним, тобто показує не величину властивості як такої, а лише загальну кількість і частку об’єктів з даною властивістю. Але незважаючи на це, підрахунок можна широко застосовувати при вимірюванні як простих, так і складних атрибутивних ознак.

При вивченні простих атрибутивних ознак, тобто таких властивостей, які можна розглядати як властивості із однаковою інтенсивністю у всіх об’єктів, яким ця властивість притаманна, підрахунок фактично є єдиним можливим методом вимірювання. При дослідженні таких ознак в першу чергу треба встановити частку об’єктів з тією чи іншою властивістю в загальній їх сукупності. Підрахунок – це ефективний засіб вимірювання також і складних кількісних ознак, в тому числі й ознак-оцінок. Наприклад, працівників того чи іншого підприємства можна розділити на тих, хто має, і тих, хто не має якусь конкретну професію. Це складні якісні ознаки, інтенсивність яких у працівників може бути неоднаковою, тому що ступені як «професіоналізму», так і «непрофесіоналізму» можуть бути різними. Але при розв’язанні багатьох дослідницьких задач розбіжностями в інтенсивності цих властивостей можна знехтувати. Коли ж потрібна більш детальна інформація, слід в цих складних якісних ознаках спробувати виділити їх більш прості складові частини. Так, серед працівників, що не мають зазначеної професії, можна окремо враховувати тих, хто має певний досвід роботи за цією спеціальністю, і тих, хто не має навіть його. Серед працівників, що мають зазначену професію, – тих, хто має професійну освіту, і тих, хто оволодів спеціальністю на робочому місті (наприклад, отримав якійсь сертифікат) тощо. Зрозуміло, що можливість розкладу складної якісної ознаки на декілька простіших, які збільшують обсяг інформації, визначаються станом джерельної бази, тобто наявністю відповідних відомостей.

Загалом за допомогою підрахунків можуть вимірюватися будь-які якісні ознаки в будь-яких сукупностях об’єктів, подій та явищ історичного минулого, зафіксовані як в окремих видах джерел, так і в різних їх сукупностях. При вивченні масових явищ та процесів історичного розвитку без такого вимірювання обійтися неможливо, тому що лише воно може надати не окремі приклади, а систему кількісних показників про ті чи інші властивості цих явищ та процесів. Вимірювання шляхом підрахунку може широко застосовуватися також для обліку різноманітних однотипних повторюваних простих і складних подій та явищ історичного розвитку: неврожаї, епідемії, епізоотії (епідемії серед тварин), пожежі, війни, заходи в галузі внутрішньої та зовнішньої політики тощо. Це дозволяє виявити їх просторову та часову інтенсивність і, як наслідок, їх вплив на перебіг історичного розвитку [9, 36].

Вимірювання якісних ознак підрахунком може бути ефективним також при дослідженні складних індивідуальних явищ суспільного життя, зафіксованих в наративних (описових) історичних джерелах. Вимірювання таких явищ є більш складною процедурою, ніж розрахунок об'єктів, яким притаманна чи ні якась властивість, або однотипних явищ та подій. Для можливості застосування підрахунку при вивченні тієї чи іншої індивідуальної події або явища потрібно розглянути цю подію або явище як певну систему з притаманною їх будовою та структурою, тобто її складниками та їх взаємозв'язками, які й можуть бути об'єктом підрахунку. В цьому випадку труднощі вимірювання пов'язані з виявленням початкових елементів досліджуваного явища або події. Для подолання цих труднощів потрібний попередній ретельний аналіз принципової можливості та засобів формалізації змісту відповідного явища. Припустимо, що дослідник має справу з науковим або публіцистичним трактатом, в якому викладені погляди його автора по якимось питанням. Ці погляди є складним індивідуальним явищем, яке можна розглядати як певну систему з відповідними початковими елементами та їх взаємозв'язками. В якості початкових елементів, що в сукупності й складають уявлення автора про розглянуті їм проблеми, тут виступають ті чи інші поняття, що характеризують ці уявлення. Тому може бути виявлена система понять, що розкриває змістову сутність уявлень автора. Така система створює підґрунтя для подальшого вимірювання шляхом підрахунку. Задача такого підрахунку полягає в виявленні, яку кількість разів кожне із виділених понять зустрічається в досліджуваному об'єкті і в поєднанні з якими саме із інших понять. В підсумку буде отримано сукупність кількісних показників, що характеризують зміст трактату [37].

При використанні наративних (описових) історичних джерел вимірювання можна застосувати для аналізу не лише їх змісту, але й для аналізу їх авторського стилю, що може стати підґрунтям для атрибуції анонімних творів. При такому підході як певна система розглядається граматичний устрій твору, а в якості його початкових елементів, що підлягають обліку, виступають частини мови в тих чи інших формах та поєднаннях. Виділивши систему цих форм та поєднань, можна піддати їх підрахунку та отримати числові характеристики стилю твору. Подальша їх обробка математичними методами дозволяє встановити узагальнені кількісні показники цього стилю [38, 39].

Таким чином, вимірювання якісних ознак шляхом підрахунку тих чи інших історичних об'єктів, подій та явищ самих по собі, або за наявністю у них тих чи інших властивостей, або на основі обліку початкових елементів їх внутрішніх структур може з успіхом застосовуватися в історичних дослідженнях [9, 36].

Можливість та необхідність широкого застосування вимірювання і кількісного аналізу при розгляданні якісних атрибутивних ознак суспільних явищ в минулому та в теперішній час призвели до розробки спеціального метода формалізації та вимірювання таких ознак. Цей метод отримав назву ***контент-аналізу***. Він застосовується при вивченні простих та складних якісних ознак та є особливо ефективним при обробці великих за обсягом та різноманітних за змістом видів або комплексів наративних історичних джерел (матеріали преси, різні описи та записи, всілякі анкетні та інші відомості). Контент-аналіз за зовнішніми (кількісними) характеристиками тексту на рівні слів та словосполучень дозволяє зробити правдоподібні припущення про його план змісту і, як наслідок, зробити висновок про особливості мислення та свідомість автора тексту – його намірах, бажаннях, ціннісних орієнтирах та інше [40, 59]. Контент-аналіз дозволяє досліджувати не лише лінгвістичний матеріал (книги, статті в газетах або журналах, оголошення, офіційні документи, аудіо- та відеозаписи, гасла, надписи на етикетках тощо), а й малюнки та інші витвори мистецтва. Він застосовується для підготовки дослідницького матеріалу на основі досить великого масиву різноманітних документів. Серед інших аналітичних методів контент-аналіз посідає особливе місце через те, що більше за інші є придатним для систематичного моніторингу великого обсягу інформаційних потоків завдяки своїй технологічності. До того ж, контент-аналіз є досить гнучким для того, щоб мати поширення на велику кількість конкретних типів досліджень.

Якісна, атрибутивна складова контент-аналізу є чималою, але все ж таки він залишається методом кількісним. Тому він добре піддається математичній формалізації та комп’ютерній обробці [5]. Сутність контент-аналізу полягає в тому, що виходячи із дослідницької задачі та з урахуванням можливостей використаних описових джерел, виділяють певну систему якісних ознак, що характеризують властивості об’єктів та явищ, тобто створюють певний формуляр для обробки джерел, що має вигляд анкети. Потім проводиться підрахунок об’єктів або їх елементів, які мають ці ознаки та знаходяться в певних поєднаннях [40, 59]. За потреби (наприклад, при комп’ютерній обробці) ці ознаки можуть кодуватися, тобто отримувати умовне числове позначення. В такий спосіб описову інформацію про досліджувані явища буде формалізовано та подано в системі числових значень. Ці числові значення, в свою чергу, можу бути зведені в різноманітні таблиці, тобто мати наочний та стислий вигляд, зручний для подальшої обробки [39, 40, 59]. Таким чином, ці методи можуть застосовуватися для вимірювання якісних атрибутивних ознак, зафіксованих в історичних джерелах, в тих випадках, коли не виникає потреби обліку інтенсивності прояву тих чи інших властивостей об’єктів, що відображені цими ознаками.

Отже, найскладніша проблема вимірювання суспільних явищ минулого та теперішнього часів пов’язана з оцінкою інтенсивності властивостей, що притаманні об’єктам та явищам та відображаються складними кількісними ознаками. Це є причиною того, що історики при вивченні таких ознак уникають кількісної оцінки цієї інтенсивності, обмежуючись її описовою характеристикою. Тому виникає потреба вимірювання інтенсивності властивостей, що подані складними якісними ознаками, за допомогою ***експертних оцінок***. В історичній науці таке вимірювання поки не отримало помітного розповсюдження. Але, при всій своїй обмеженості, воно дозволяє значно поглибити аналіз історичних явищ та процесів. Для цього проводиться ранжування значення інтенсивності якісної ознаки за порядковою шкалою за допомогою групи експертів. Для фахівців в досліджуваній предметній області це не складає труднощів. Складніше вирішити питання про кількісну, бальну оцінку введених ступенів інтенсивності прояву ознаки. Основна складність при цьому полягає у визначенні кількісного інтервалу між найнижчим та найвищим рівнем інтенсивності досліджуваної ознаки. Такий інтервал завжди буде мати умовний характер. Але й при цьому введення бальних оцінок має великий сенс, бо відкриває шлях, хоч і дуже приблизний, до кількісної оцінки розбіжностей в прояві складних властивостей. Це найпростіший підхід до експертного оцінювання інтенсивності складних якісних ознак історичних об’єктів та явищ.

Більш складним, але й значно точнішим є підхід, заснований на експертному оцінюванні компонентів-складників комплексних якісних ознак. Для цього складні властивості, що характеризуються цими ознаками, спочатку мають бути розділені на прості складники. Потім кожен з цих складників отримує бальну оцінку, а сума балів буде інтегральним кількісним показником інтенсивності прояву складної якісної властивості [13]. Найбільший ефект від експертного оцінювання складних атрибутивних ознак може бути отриманий в тих випадках, коли вони будуть включені в систему інших кількісних показників про досліджуване явище і разом з ними піддані математичній обробці та аналізу. Для успішного та широкого використання в історичних дослідженнях метода експертних оцінок і взагалі вимірювання складних якісних ознак потрібна, з одного боку, розробка загальних методологічних, методичних і технічних проблем такого вимірювання. А з іншого боку, потрібне більш широке та активне практично-емпіричне опанування істориками цих методів вимірювання.

Досі розглядалися можливості окремого вимірювання кількісних та якісних ознак. Але в дійсності історичні об’єкти, явища та процеси мають властивості, що характеризуються одночасно і кількісними, і атрибутивними ознаками, які необхідно враховувати при їх вивченні. Тому постає проблема їх сумісного вимірювання та введення в систему кількісних показників, що потрібні для розв’язання поставленої дослідницької задачі. Таке вимірювання може бути проведене різними методами. На практиці історики найчастіше користуються одним з них: кількісні ознаки вимірюються методами, що застосовуються для вимірювання ознак атрибутивних, тобто якісних.

Вимірювання атрибутивних ознак здійснюється істориками шляхом встановлення абсолютного числа (а потім частки) об’єктів з даною ознакою в тій їх сукупності, що підлягає вивченню. У відсоткове подання переводяться й кількісні ознаки. Для цього виділяють певні інтервали значень кількісної ознаки, а потім шляхом підрахунку встановлюється кількість об’єктів, що мають величину ознаки в межах відповідного інтервалу. Такий принцип вимірювання надає єдину систему кількісних показників про кількісні та якісні ознаки та дозволяє піддавати їх математичній обробці та аналізу однаковими методами. Переваги такого вимірювання є безсумнівними. Але воно має й недоліки. Основний з них полягає в тому, що перетворення кількісних показників у інтервальне вирахування призводить до значної втрати вже наявної в показниках інформації. Відбувається перехід від визначеного кількісного подання міри ознаки до її неточної, приблизної (інтервальній) оцінці. Насправді це означає перетворення кількісних ознак в менш інформативні – якісні. Іншим недоліком вказаного вимірювання є те, що воно, в силу того, що не є метричним, тобто не вказує кількісну міру самої ознаки, не припускає обробку показників вимірювання метричними математичними методами. Між тим останні дають можливість оцінити достовірність та точність відповідних показників математичної обробки кількісних даних, чого, як правило, не припускають методи, призначені для обробки якісних ознак.

В зв’язку з цим виникає питання про можливість такого вимірювання якісних ознак (і, як наслідок, створення системи кількісних показників, що містить кількісні та атрибутивні ознаки), яке б припускало можливість застосування метричних математичних методів для обробки показників цього вимірювання. Щоб знайти відповідь на це питання, треба знати, до обробки яких саме результатів вимірювання можна застосувати метричні математичні методи. Відповідь є очевидною: вони можуть бути застосовані до обробки будь-яких варіаційних та динамічних рядів кількісних показників. Це означає, що якісні ознаки мають бути виміряні в такий спосіб, щоб в підсумку отримати ряди показників, а не просто сумарні кількісні характеристики ознак за всією сукупністю досліджуваних об’єктів. Шлях до отримання таких рядів при вивченні масових об’єктів, що характеризуються якісними ознаками, полягає в агрегуванні, об’єднанні первинних елементів вимірювання в крупніші компоненти, в яких ці об’єкти будуть складовими елементами.

Вказаний шлях сумісного вимірювання якісних та кількісних ознак не лише є таким же правомірним, що й їх відсоткові вирахування, але й багато в чому є більш переважним, бо він не лише дозволяє усунути вказані недоліки, але й вивчати систему на більш високому її рівні. Слід зазначити, що розглянутий метод вимірювання змішаних ознак відомий вже давно. Він має місце скрізь, де історики користуються зведеними кількісними та якісними показниками, зафіксованими в долучених історичних джерелах. Відомості переписів населення та багатьох інших джерел, що містять кількісні та якісні ознаки та опубліковані у вигляді різного роду просторових зведень, є варіаційними або динамічними рядами показників, що піддаються дослідницькій обробці метричними математичними методами. Отже, існують різні методи сумісного вимірювання та подання кількісних та якісних показників у вигляді єдиної системи. Тому переважання в практиці історичних досліджень лише одного з них, найбільш типового для конкретно-соціологічних досліджень, не є виправданим, бо це обмежує аналіз суспільних систем, що підлягають розгляду, лише їх найнижчим ієрархічним рівнем, що значно збіднює цей аналіз [2, 3].

Ще одна важлива проблема вимірювання історичних явищ полягає в потребі поєднання в створюваних системах кількісних показників ***синхронних*** та ***діахронних*** даних, тобто таких, що одночасно характеризують стабільний стан системи та притаманні їй тенденції розвитку. В силу того, що вказані аспекти історичних явищ при їх вимірюванні подаються відповідно варіаційними та динамічними рядами показників, які неможливо поєднати в єдиній системі даних, ця проблема, на перший погляд, здається нерозв’язуваною. Але певні шляхи її вирішення все ж таки існують. Так, в сукупність показників варіаційних рядів, що характеризують деяку історичну систему в певний момент часу, можуть бути додані показники, що відображають динамічні зміни в тих чи інших компонентах цієї системи. Але це можуть бути не безпосередні показники динамічних рядів, а результати їх відповідної математичної обробки (наприклад, коефіцієнти їх аналітичного згладжування) [23, 29]. Уявлення про характер та темпи можливої динаміки досліджуваної історичної дійсності можна отримати й на основі структурних (синхронних) показників. Об’єктивним підґрунтям для цього є те, що будь-який розвиток може бути лише реалізацією можливостей, що містяться в дійсності. Для отримання динамічних можливостей потрібна спеціальна математична обробка структурних показників. Одним із методів такої обробки є регресійний аналіз. Коефіцієнти натурального рівняння регресії, як відомо, показують, наскільки змінюється результативна ознака при зміні відповідного чинника-причини. Тим самим ці коефіцієнти дають уяву про можливий напрямок і розміри змін одних ознак в залежності від змін інших ознак і можуть бути включені в систему структурних показників. Питання в тому, наскільки можливі зміни можуть бути реальними, має вирішуватися окремо в кожному конкретному випадку. Припустимі напрямки тих чи інших аспектів досліджуваних історичних процесів можна виявити шляхом зіставлення результату функціонування системи в той чи інший момент з тими загальними можливостями розвитку, якими володіє дана система. Важливою проблемою вимірювання історичних об’єктів також є побудова різноманітних інтегральних показників. Вони є потужним та ефективним засобом цілісного багатовимірного аналізу в історичному дослідженні.

1.6. Моделювання історичних явищ та процесів. Його цілі та етапи. Види моделей

Математична обробка та аналіз кількісних показників, отриманих в результаті вимірювання досліджуваних історичних явищ в ході розв'язання поставленої дослідницької задачі, може проводитися з різною метою та різними методами. В сенсі розкриття змісту, сутності та кількісної міри якісної визначеності досліджуваних явищ та процесів історичного розвитку, тобто в онтологічному сенсі, застосування математичних методів, як було зазначено вище, має два рівні. Перший полягає в вимірюванні тих чи інших ознак та в найпростішій обробці отриманих показників. Математичні методи такої обробки зазвичай не є складними. Це обчислення середніх та відсоткових значень та їх стандартних помилок, показників варіації значень ознак тощо. Все це має важливе значення при кількісному аналізі досліджуваних явищ і може дозволити розв'язати поставлену дослідницьку задачу. Другий, значно більш високий рівень застосування математичних методів полягає в такій математичній обробці початкової системи кількісних показників, яка розкриває сутність досліджуваної історичної дійсності у формалізованій математичній формі, тобто у вигляді її моделей. Для побудови моделі потрібний більш складний математичний апарат і, як правило, можливість комп'ютерної обробки даних. Математизація наукових знань, що є відмінною рисою сучасного розвитку науки, виражається в математичному моделюванні. Воно все ширше проникає й у вивчення явищ суспільного життя, хоч ще й не посіло тут такого місця, як в природничих та технічних науках. Математичне моделювання окремих проявів суспільного життя має давню традицію. Найбільше розповсюдження воно отримало в галузі історичної демографії та в деяких сферах економічної історії. Сучасна епоха є якісно новим етапом в моделюванні явищ суспільного життя. З одного боку, потреби науки та суспільної практики, а з іншого – успіхи у розвитку прикладної математики, кібернетики та обчислювальної техніки призвели до широкого застосування математичних методів та моделювання для оцінки функціонування та розвитку тих чи інших виробничих, економічних та соціальних систем та процесів, прийняття рішень, планування, соціального прогнозування тощо. Побудова моделей все більш помітно входить і в практику історичних досліджень. Існує велике коло проблем, вирішення яких має важливе значення для практичного моделювання історичних явищ та процесів.

Моделювання – це загальнонауковий метод пізнання об'єктивної реальності, заснований на вивченні моделей, що відображають або відтворюють цю реальність. Форми моделювання вельми різноманітні та визначаються сферами та цілями його застосування і типами використаних моделей. ***<u>За характером моделей</u>*** розрізняють два типи моделювання:

- *предметне* (матеріальне),
- *ідеальне* (знакове).

Хоча всі основні проблеми моделювання пов'язані з поняттям моделей, принципами та методами їх побудови та аналізу, а моделювання як метод пізнання має свою вже дуже довгу історію, досі немає єдиного розуміння того, що таке модель. Найбільш поширеним є означення моделі як системи, дослідження якої є засобом отримання інформації про іншу систему [20]. Уточненим стосовно поняття наукової моделі можна вважати наступне: «***Моделлю*** є створена або обрана об'єктом система, що відтворює суттєві для даної мети пізнання сторони досліджуваного об'єкта і в зв'язку з цим знаходиться з ним в такому відношенні заміщення та схожості, що її дослідження є опосередкованим способом отримання знання про цей об'єкт». Простіше кажучи, модель є абстрактним відображенням основної сутності об'єкта моделювання. Вона є його аналогом, замінником або квазі-об'єктом. Модель може мати природномовну або формалізовану в тій або іншій знаковій системі форму [39, 40]. Найбільш формалізованими видами моделей є математичні моделі. ***Математична модель*** є системою «математичних співвідношень, що описують досліджуваний процес або явище», тобто відображає сутність об'єкта моделювання у відповідній понятійно-знаковій формі (рівняння, нерівності, коефіцієнти, графи тощо [13, 41].

За способами розв'язання задач математичні моделі та методи розділяються на

- *аналітичні* (формульні),
- *чисельні* (алгоритмічні).

Для аналітичних моделей характерною ознакою є те, що процеси функціонування елементів системи, що розглядається, записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (рівнянь або нерівностей). Аналітична модель може досліджуватися або аналітично, коли намагаються отримати в загальному вигляді явні залежності (рішення) для залежних величин, або чисельно, коли, не маючи можливості розв'язати наявні рівняння в загальному вигляді, все ж таки отримуються числові результати за допомогою комп'ютера. При цьому на початковому етапі для досліджуваного об'єкта будується математична модель. Потім, на другому етапі, розробляється обчислювальний алгоритм у вигляді сукупності ланцюжків алгебраїчних формул та логічних умов. На третьому етапі здійснюється розробка комп'ютерної програми для реалізації алгоритму, яка, власне, і дозволяє обчислити розрахунки в електронному вигляді. Нарешті, на останньому етапі здійснюється обробка результатів розрахунків, які піддаються всебічному аналізу [22]. В історичній науці переважає застосування чисельних методів та моделей. Їх побудова, як правило, пов'язана з великим обсягом обчислень і тому потребує застосування комп'ютерної обробки.

Моделювання ґрунтується на теорії подоби, а можливість вивчення об'єкта за моделлю базується на принципі аналогії. Основними видами структурно-логічної аналогії є ізоморфізм та гомоморфізм. ***Ізоморфізм*** є відношенням типу однаковості, рівності двох систем (відносно моделювання – об'єкта моделювання та його моделі). Це дозволяє знання, отримані при вивченні однієї системи, переносити на іншу систему. ***Гомоморфізм*** є відношенням несиметричним, однобічним, тобто лише відношенням схожості. Тому при гомоморфізмі можливе перенесення знань з образу на прообраз, з моделі – на об'єкт моделювання [42]. Вивчення історичних явищ та процесів на основі їх математичних моделей можливе лише на принципах гомоморфізму. Наприклад, знання, отримані із адекватно складеної географічної мапи, можна переносити на відповідну місцевість, але не все наявне на місцевості відображене на мапі. Так і знання про історичні явища, отримані на основі аналізу його моделі, можна відносити до цього явища, але не всі властивості цього явища відображені в його моделі.

Сенс побудови моделі полягає в тому, щоб з її допомогою поглибити вивчення властивостей, функцій та розвитку об'єкта моделювання. Це стає можливим через дві причини. Поперше, аналіз теоретично припустимих параметрів моделі надає інформацію про діапазон можливих станів явищ та процесів, що розглядаються. По-друге, математична обробка системи кількісних показників, що характеризують конкретний стан цих явищ та процесів, дозволяє отримати нову, не відображену в початкових даних (тобто приховану, структурну), інформацію про них. Змістовий аналіз обох цих видів інформації значно поглиблює вивчення об'єктів моделювання. Є очевидним, що це стає можливим за неодмінною умовою, що модель адекватно відображає суть досліджуваних явищ і процесів та її застосування є коректним [60]. В цілому ж успіх моделювання забезпечується дотриманням основних методологічних принципів побудови моделей: чіткого розуміння цілей моделювання, його етапів, типів моделей, принципів їх побудови та аналізу. Все це визначається характером тієї теорії та методології наукового пізнання, на яких базується дослідження.

Моделювання історичних явищ, як і вивчення їх іншими методами, має свої етапи. Починається воно з вибору об'єкта дослідження та постановки дослідницької задачі. Специфіка цієї процедури полягає в необхідності чіткої логічної постановки задачі, оскільки цим визначається тип моделі та математичні методи її побудови. Серед істориків, що застосовують математичні методи, поширена думка, що для побудови моделі дослідницька задача має бути сформульована у вигляді певної гіпотези, яка в подальшому перевіряється математичними методами, побудовою відповідної моделі. В результаті висунута гіпотеза або приймається (підтверджується), або відкидається (спростовується) [35]. Застосування моделювання для перевірки тих чи інших історико-змістових гіпотез – поширена, але далеко не єдина і навіть не головна функція моделювання. Побудова моделей для перевірки гіпотез при всій її науковій ефективності все ж таки в пізнавальному сенсі доволі обмежена, тому що тут моделювання спрямоване, перш за все, на розкриття окремих рис або сторін відповідних явищ та процесів. Найважливішою задачею моделювання та найбільш високим її пізнавальним рівнем є побудова таких моделей, які дозволяють виявити саму сутність досліджуваних явищ та процесів в цілому, тобто розглянути їх як певні системи. Таке моделювання ґрунтується на дедуктивному підході до реальності, на принципі та методах пересування від абстрактного до конкретного. Потім на базі звертання до конкретної форми явищ та процесів, тобто в результаті переходу від абстрактного до конкретного, розкривається вся модифікація цієї сутності. При цьому конкретизація може бути як завгодно деталізованою. В результаті найбільш глибоко розкривається те загальне й особливе, що притаманне досліджуваним об'єктам, явищам та процесам, а також виявляється їх синтез. Поданий в математичній формі, такий шлях пізнання розкриває також і кількісну міру відповідної якісної властивості у всіх її проявах.

Зрозуміло, що моделювання, що походить із дедуктивного підходу і спрямоване на пересування від абстрактного до конкретного, є можливим лише тоді, коли теоретичний рівень пізнання явищ дозволяє сконструювати їх змістову модель. Така можливість є далеко не завжди. Але вивчення багатьох історичних явищ і процесів вже цілком досягло такого рівня. Математичне моделювання і є тут найбільш ефективним засобом їх подальшого аналізу. Однак моделювання в історичних дослідженнях можна застосовувати й тоді, коли ще немає підґрунтя ані для дедуктивного підходу, ані для висування гіпотези. В цих випадках модель може бути побудована на основі емпіричного аналізу явищ. Моделювання тут буде сприяти переходу від емпіричного знання до теоретичного. Цей рівень моделювання є більш низьким порівняно з двома вказаними. Але в історичних дослідженнях можливості для нього є найбільш широкими та сприятливими. Таким чином, задачі та рівень моделювання історичних явищ та процесів можуть бути різними. За пізнавальною цінністю (у зростаючому порядку) їх можна розташувати так: емпіричне моделювання, математична верифікація гіпотез, дедуктивне моделювання [10]. Така висока оцінка моделей дедуктивного типу відповідає місцю, яке вони посідають в методичному арсеналі більшості наук, що використовують математичні моделі. Фізики, біологи або економісти, згадуючи про моделі, мають на увазі, як правило, математичні моделі дедуктивного типу, що дозволяють отримувати нове знання шляхом аналізу побудованої моделі як математичного об'єкта.

Математичні моделі дедуктивного типу можна класифікувати, виходячи із різних принципів. Розглянемо співвідношення, що виражають залежності між станами та параметрами системи, що моделюється. В цьому випадку можливі наступні варіанти.

1. Стан системи в заданий момент часу однозначно визначається через параметри системи, первинну інформацію та початкові умови. Це випадок так званих ***детерміністичних моделей***.

2. За допомогою вказаних співвідношень можна визначити (також однозначно) лише розподіл ймовірностей для початкових умов, параметрів системи та первинної інформації. В цьому випадку модель називається ***ймовірнісною*** **(*стохастичною*)**.

Досі йшла мова про моделювання історичних явищ та процесів в онтологічному сенсі, тобто з точки зору розкриття об'єктивної сутності цих явищ та процесів. Але моделювання в історичній науці може застосовуватися й для розв'язання інших задач, що носять гносеологічно-методологічний характер, тобто пов'язані із пізнавальним процесом. Одразу за постановкою дослідницької задачі із визначенням можливих шляхів її розв'язання за допомогою моделювання виникає проблема забезпечення цього розв'язання системою представницьких кількісних показників. Формування такої системи є найважнішим і дуже часто вельми складним етапом в історичному дослідженні. Тут також можуть застосовуватися математичні методи на рівні моделювання. Його можна широко використовувати для перевірки достовірності та точності кількісних та описових відомостей історичних джерел та оцінки їх репрезентативності, атрибуції історичних текстів, виявлення генеалогії історичних пам'ятників, заповнення прогалин в кількісних даних, розрахунку всілякого роду інтегральних показників і розв'язання інших інформаційно-джерелознавчих та вимірювальних задач [37]. Взагалі моделювання виступає тут в якості засобу, що створює можливості побудови моделей, які характеризують самі об'єкти дослідження.

Ще одним видом задач, для розв'язання яких може застосовуватися моделювання в історичних дослідженнях, є математична формалізація самого історичного знання, його теорій та гіпотез, понять і категорій. Моделювання самого наукового знання є найвищим рівнем математизації науки. Отже, моделювання в історичній науці може використовуватися при вирішенні дуже різноманітного кола задач і має різні рівні. Однак при всьому розмаїтті цих задач, відмінностях у рівні моделювання та розмаїтті математичного апарату, що може бути при цьому використаний, всі види моделей, що застосовуються при вивченні суспільних явищ, з дослідницько-цільової та математичної точки зору можуть бути зведені до двох типів.

Існує багато підходів до класифікації моделей і самих цих класифікацій. Це обумовлено великою кількістю різних моделей і можливих цілей класифікації. Одним із підходів може бути урахування ***пізнавальної мети*** моделювання. Вона визначає шляхи та методи моделювання, математичний тип моделі та характер отриманого при цьому знання. Тому стосовно прикладних аспектів моделювання такий підхід до типізації моделей та моделювання вважається переважним.

В дослідницькій практиці істориків математичні моделі можуть використовуватися для розкриття тих сторін, закономірностей та особливостей процесів суспільного розвитку, виявлення яких потребує розв'язувана дослідницька задача та які не вдається виявити більш простими методами. В цьому випадку математична модель відображає реальні, фактично наявні риси та властивості явищ та процесів суспільного життя та є їх ***вимірником***, тобто показником кількісної міри тих чи інших властивостей, станів та розвитку об'єкта моделювання. Такі моделі є ***аналітичними***. Методи побудови таких моделей отримали в сучасній науці назву «аналіз даних». Це є напрямок застосування математичних методів в наукових дослідженнях, який широко та успішно розвивається. Ці моделі подають досліджувані об'єкти, явища та процеси такими, якими вони є насправді, виявляючи та аналізуючи статистичні взаємозв'язки в системі показників, що характеризують предмет дослідження [22]. Для побудови цих моделей використовуються диференціальне вирахування, алгебра, Марківські ланцюги. Різновидом аналітичної моделі є ***статистична модель*** – це клас моделей, що також містять одне або декілька рівнянь та обмежену кількість змінних. Такі моделі описують різні лінійні та квазілінійні процеси. Аналітичні та статистичні моделі складають клас так званих ***відбивно-вимірювальних*** моделей.

Математичні моделі можуть використовуватися для прогнозування подальшого ходу розвитку або вибору оптимального в тому чи іншому сенсі варіанта функціонування суспільних систем [31, 32, 43]. Для цього модель має не лише відображати основні властивості об'єкта моделювання, але й дозволяти імітувати можливі стани об'єкта, що відрізняються від його реального буття. В цьому сенсі моделювання є потужним засобом соціального прогнозування, планування, оптимізації функціонування різних виробничих, соціальних, управлінських та інших суспільних систем. Імітація дозволяє встановити оптимальні з точки зору поставлених задач варіанти розвитку цих систем. На відміну від відбивно-вимірювальних моделей, ці моделі називаються ***імітаційно-прогностичними***. Для розв'язання прогностичних задач можуть використовуватися і багато яких із відбивно-вимірювальних моделей, але в цілому це є двома різними типами задач. Метою імітаційних моделей є реконструкція відсутніх даних про динаміку досліджуваного процесу на деякому проміжку часу. Тут можливий аналіз альтернатив історичного розвитку і теоретичне дослідження поведінки досліджуваного явища (або класу явищ) за побудованою математичною моделлю. Імітаційні моделі відтворюють сам досліджуваний процес в його функціонуванні в часі. При цьому імітуються елементарні явища із зберіганням їх логічної структури та послідовності протікання в часі. За допомогою моделюючого алгоритму за початковими даними про первинний стан процесу (початкової інформації) та його параметрах можна отримати відомості про стани процесу на кожному наступному кроці. Перевагою імітаційних моделей порівняно з вимірювальними є те, що в них проявляється можливість моделювання дуже складних процесів (з великою кількістю змінних, нелінійними залежностями, зворотними зв'язками), що не піддаються аналітичному дослідженню. Основним недоліком імітаційного моделювання є той факт, що отримане рішення (динаміка процесу, що моделюється) завжди носить частинний характер, відповідаючи фіксованим значенням параметрів системи, початкової інформації та початкових умов [22].

Основна вимога до вимірювальних моделей полягає в тому, щоб вони дозволяли адекватно відображати та вимірювати реально існуючі стани об'єкта моделювання. Імітаційні моделі, крім того, мають враховувати можливі зміни цього об'єкта та правильно їх відтворювати. Для цього потрібний вибір такого математичного апарату, який припускає можливість імітації. Це значно ускладнює побудову моделей, потребує збільшення їх чутливості до ймовірних тенденцій в розвитку та функціонуванні об'єктів моделювання.

В силу того, що функціонування та розвиток суспільних систем визначається багатьма чинниками із змінною інтенсивністю їх дії та характером взаємозв'язків, то досягти потрібної адаптації моделі до можливих змін дуже складно. Тому, незважаючи на безліч долученої інформації, на розмаїття математичних засобів, що використовуються для побудови прогностичних моделей, і широкі можливості для імітації, що забезпечуються застосуванням комп'ютерних систем, далеко не завжди зроблені прогнози виправдовуються, особливо якщо вони стосуються складних явищ та процесів суспільного розвитку. Стосовно історичної науки є очевидною правомірність використання всіх видів відбивно-вимірювальних моделей. Ці моделі потрібні на всіх рівнях онтологічно спрямованого моделювання, тобто моделювання, що ставить за мету вимірювання та розкриття сутності історичних явищ та процесів. За допомогою такого моделювання може вирішуватися велика кількість вимірювально-джерелознавчих задач. Ці моделі затребувані також при математичній формалізації історичного знання.

Значно складніші справи із застосуванням в історичних дослідженнях імітаційно-прогностичних моделей. Теоретико-методологічні проблеми їх застосування ще недостатньо докладно розроблені. Набутий досвід практичного застосування таких моделей дозволяє виділити **три типи задач**, що можуть бути розв'язані на основі імітаційних моделей [9].

1. Моделювання *альтернативних*, тобто об'єктивно та суб'єктивно можливих, але практично не реалізованих історичних ситуацій з метою більш глибоко охарактеризувати реальний плин розвитку.

2. Побудова моделей *контрфактичних*, тобто реально не існуючих історичних ситуацій, які конструюються істориком для використання цих моделей в якості еталона оцінки реальної історичної дійсності. Зазвичай конрфактичне моделювання асоціюється із довільним перекроюванням історичної реальності. Але, з іншого боку, воно може бути ефективним засобом вивчення альтернативних історичних ситуацій. Тут знаходять своє використання й аналітичні, й імітаційні моделі. Для аналітичних моделей є характерним запис процесів функціонування досліджуваної системи у вигляді функціональних співвідношень (рівнянь) [22].

3. Імітація історичних явищ та процесів, для звичайної характеристики та відбивно-вимірювального моделювання яких *відсутні необхідні конкретно-історичні дані*.

Отже, імітаційні моделі можуть бути ефективним засобом вивчення можливого розвитку історичних явищ та процесів. Моделювання того чи іншого із можливих результатів дозволить глибше зрозуміти реальний перебіг історичного розвитку та об'єктивний зміст та значення цього розвитку. Імітація альтернативної історичної ситуації та розрахунок значень показників, що цікавлять дослідника, мають ґрунтуватися на визначених в тому чи іншому ступені ймовірних та правомірних припущеннях. Обґрунтування цих припущень набуває найважливішого значення. В імітаційних альтернативних та контрфактичних моделях, що характеризують об'єктивно можливі, але ні існуючі насправді стани об'єкта, параметри моделі визначаються на основі даних, що характеризують реальні стани досліджуваної системи. «Ахіллесовою п'ятою» контрфактичного моделювання є принципова відмова від системного підходу до вивчення історичного минулого. Із всієї сукупності різноманітних зв'язків та опосередкувань, що утворюють нерозривну систему минулої дійсності, в довільний спосіб вилучається якась одна змінна, результати дослідження якої переносяться на всю систему, що далеко не завжди є правомірним та виправданим.

Таким чином, сфера дії відбивно-вимірювальних моделей – це розкриття та аналіз реального і в об'єкті історичного пізнання, і в самому історичному знанні. Сфера дії ж імітаційно-прогностичних моделей – це відображення можливого, припустимого або бажаного в цьому об'єкті. В зв'язку з цим значущість та місце вказаних двох типів моделей в історичній науці суттєво різняться. Найвідомішим та найрезультативнішим застосуванням імітаційного моделювання в історії вважається наступний випадок. Традиційно вважалося, що залізниці були абсолютно незамінними для економічного підйому США у 1840-1890-х роках. Вони сприяли зростанню товарообігу, освоєнню нових земель та надавали основний поштовх розвитку промисловості. Роберт Фогель, в майбутньому лауреат Нобелівської премії 1993-го року з економіки, побудував та дослідив контрфактичні моделі для оцінки ролі залізниць. Дослідження

Фогеля спростували загальноприйняту гіпотезу та довели, що водні шляхи могли б замінити залізниці, при цьому ВНП падав би не більше, ніж на 3 %, а освоєння нових земель йшло б завдяки розгалуженій системі каналів.

Ніяку кількісну модель не може бути побудовано без якісної моделі. Тому будь-яке наукове моделювання складається із двох етапів: сутнісно-змістового та формально-кількісного. З цієї точки зору можна говорити про те, що моделювання містить побудову як якісних, так і кількісних моделей.

Сутнісно-змістова модель є результатом теоретичного аналізу конкретно-наукових уявлень про об'єкт моделювання і в узагальненому вигляді виражає основні риси, закономірності та особливості функціонування та розвитку досліджуваних явищ та процесів, а також їх теоретично припустимі стани. Вона є основою для побудови формально-кількісної моделі та змістової інтерпретації результатів математичного моделювання. Цим обумовлено визначну роль якісної, сутнісно-змістової сторони в процесі моделювання.

Формально-кількісне моделювання полягає у виявленні на основі змістових уявлень потрібних кількісних характеристик досліджуваних явищ та процесів в їх математичній обробці, результати якої у формалізованому вигляді відображають суттєві властивості об'єкта моделювання. Побудова формально-кількісної моделі пов'язана з розв'язанням двох важливих задач. Перша полягає в тому, щоб отримати репрезентативні (в кількісному та якісному сенсі), достовірні та точні кількісні дані, що характеризують об'єкт моделювання. Друга задача полягає в виборі математичних засобів для обробки та аналізу кількісних даних. Головним на цьому етапі є питання про адекватність відображення математичною моделлю властивостей об'єкта моделювання. Побудована в такий спосіб математична модель має надавати можливість отримати нову, тобто безпосередньо не подану початковими даними, інформацію про досліджувані історичні явища та процеси. Змістовий аналіз цієї інформації, що ґрунтується на сутнісно-змістовому підході, і буде давати нові знання про досліджувану предметну область. Тому з пізнавальної точки зору побудова математичної моделі є виправданою в тому випадку, коли вона надає нову інформацію, а не просто в іншій формі виражає вже відомі дані.

Отже, на всіх етапах математичного моделювання, починаючи з постановки дослідницької задачі та закінчуючи інтерпретацією отриманих результатів, визначне значення має сутнісно-змістовий бік моделювання. Цьому не протирічить той факт, що доведення сутнісно-змістового аналізу до побудови якісної моделі можливе далеко не завжди. І при емпіричному моделюванні дослідник має ґрунтуватися на змістовому підході до об'єкта моделювання, хай і не доведеному до визначеної теорії та вираженому лише в окремих посилках та припущеннях [10].

Суттєва увага при моделюванні приділяється проблемам ***верифікації*** моделей історико-суспільних процесів. При цьому для багатьох аналітичних та імітаційних моделей параметри, в основному, зафіксовані апріорі. В той же час, в статистичних моделях всі параметри оцінюються прямо із даних, що верифікують цю модель, хоча в деяких випадках аналітичні та імітаційні моделі використовують статистичні оцінки як спосіб повної або часткової параметризації. Головна відмінність між цими двома видами параметризації полягає в тому, що статистичний підхід дає більш обґрунтовані оцінки. Немає ніякої гарантії, що значення параметрів, обраних апріорі для аналітичної або імітаційної моделі, є оптимальними хоч в якомусь сенсі. Статистичні моделі використовують одні й ті ж самі дані для оцінки параметрів та для оцінки правильності моделі. Тим самим вони дають точнішу відповідність емпіричному матеріалу, ніж моделі, які не використовують дані для параметризації. Однак при цьому треба усвідомлювати, що гарна відповідність даним є необхідною, але не достатньою умовою верифікації.

Таблиця 1.3 надає стисле уявлення про співвідношення вказаних трьох підходів до моделювання історичних процесів [22].

Таблиця 1.3

Порівняння підходів до моделювання історичних процесів

Тип моделі / Властивість	Аналітичні моделі	Статистичні моделі	Імітаційні моделі
1	2	3	4
Приклади	Диференціальні рівняння; Марківські ланцюги	Регресійні рівняння; факторний аналіз	Системи рівнянь скінченної розмірності
Обмеження	Одне або декілька рівнянь та змінних, проста форма взаємозв'язків між ними	Невелика кількість рівнянь, велика кількість змінних, складніші зв'язки між ними. Зворотні зв'язки важко дослідити	Припускається велика кількість змінних та рівнянь. Складна форма взаємозв'язків між ними
Вимоги до даних	Моделі є дедуктивними, можуть бути виведені із теорії. Для підтвердження надійності моделі потрібні різні дані	Моделі виводяться із припущення про роль факторів із долученням великої кількості даних високої якості	Моделі частково виводяться із теорії. Для підтвердження моделі можливе використання даних низької якості
Значення для побудови теорії	Орієнтовані на аналіз динаміки. Спрощене уявлення про змінні та зв'язки між ними. Результати моделювання виводяться шляхом аналітичного розв'язання. Припускаються детерміністичні зв'язки між змінними	Дуже обмежені форми динамічних зв'язків. Тенденція до побудови складних вимірювальних теорій. Дедукції із моделі є тривіальними. Припускаються стохастичні взаємозв'язки	Орієнтовані на аналіз динаміки та припускають нелінійні зв'язки. Тенденція до побудови складних емпірико-дедуктивних теорій. Припускаються як детерміністичні, так і стохастичні зв'язки
Верифікація	Параметризація проводиться або апріорі, або статистичними методами. Застосування може бути дуже обмеженим. Параметризовані тести на гарну відповідність моделі можливі лише статистичними методами. При невідповідності моделі надається деяка специфічна діагностична інформація	Параметризація проводить із даних статистичними методами. Припущення для оцінки можуть бути дуже складними для виконання (наприклад, структура помилок). Розроблені критерії верифікації. Деяка діагностична інформація можлива при невідповідності моделі даним	Параметризація проводиться або апріорі, або статистичними методами. Емпірично можливо проводити сильні тести моделей. Помилкам вимірювання особливої уваги не приділяється. Відсутні параметризовані тести на відповідність моделі. Діагностика у випадку невідповідності моделі є дуже незадовільною

Вирішення питання про застосування аналітичного, статистичного або імітаційного моделювання для побудови теорії залежить від характеру та обсягу наявних початкових даних. Аналітичні моделі є потужним засобом для оцінки теорії, але при моделюванні складних процесів вони стають дуже важкими для розв'язання та розуміння, а також можуть стикнутися із суттєвими труднощами при верифікації на основі ненадійних даних. Імітаційні моделі мають набагато більше переваг при відображенні складних емпіричних та теоретичних взаємозв'язків [22].

1.7. Математичні методи історичного моделювання

Математичний апарат, що застосовується для побудови історичних моделей, є досить різноманітним. Виходячи із результатів вже проведених досліджень, можна виділити низку методів та підходів. Деякі з них вже стали достатньо традиційними в історичному моделюванні (синергетичні та табличні моделі), а інші на теперішній час ще не отримали великого поширення й інколи представлені лише одиничними дослідженнями.

Диференціальні рівняння. Системи диференціальних рівнянь задають динаміку процесу та дозволяють інтерполювати та екстраполювати існуючі дані. Такі моделі можуть бути найпростішими або містити невизначені параметри, зміна яких істотно вплине на поведінку системи. Прикладом моделі такого типу є існуюча найпростіша модель демографічної динаміки для землевласницького суспільства, яка не враховує війни, кліматичні катаклізми та інше. Однак навіть така модель дозволяє зробити на її основі певні висновки про динаміку популяції [44].

Синергетика та нелінійна динаміка. Зростаючий інтерес істориків до вивчення перехідних епох, альтернатив історичного розвитку, ролі випадковостей в історії сприяє впровадженню синергетики у вивчення історії, яка розглядається сьогодні як методологічна база вивчення нестійких історичних процесів [45]. У відповідності із синергетичною парадигмою, тривалі стабільні стани – аттрактори – змінюються короткими періодами хаотичної поведінки – біфуркаціями. Традиційні методи більше підходять для вивчення сталих станів. Синергетика ж дає апарат для вивчення нестабільних періодів в історії, виявлення закономірностей розвитку, періодизації, а також вивчення альтернатив. Вона дозволяє моделювати такі явища та процеси, в результаті перебігу яких в системі в цілому можуть з'явитися нові властивості, яких жодна з її частин не має. При цьому мова йде про виявлення та застосування загальних закономірностей, що діють в різних галузях. Тому такий підхід робить синергетику міждисциплінарною наукою. Це означає, що має місце співпраця в розробці синергетичних моделей представників різних наукових дисциплін, в тому числі й істориків. Саме тому термін «синергетика» отримав поширення як в природничих, так і в гуманітарних галузях. На теперішній час дуже добре розроблені різні макромоделі нелінійних соціально-економічних процесів. Застосування синергетики можливе також при дослідженні локальних процесів, наприклад, при вивченні структури та динаміки селянського руху на території сучасної України до 1917 року.

Ймовірнісні моделі. Є очевидним, що будь-яким історичним процесам властивий ймовірнісний характер. З іншого боку, історія традиційно вивчає залежності та причинно-наслідкові зв'язки різних чинників, тому використання математичного апарату теорії ймовірностей та математичної статистики є достатньо традиційним в побудові та аналізі моделей як в якості основного засобу, так і в поєднанні з іншими. Для опису багатовимірних стохастичних моделей в дискретній формі використовуються ланцюги Маркова. Послідовність випадкових величин $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, …, $\boldsymbol{X_n}$ із множиною можливих значень $\boldsymbol{E}$ називається ***ланцюгом Маркова***, якщо при фіксованому значенні $\boldsymbol{x_{i_n}}$ випадкової величини $\boldsymbol{X_n}$ для поточного моменту часу $\boldsymbol{n}$ значення випадкової величини $\boldsymbol{X_{n'}}$ для майбутнього моменту $\boldsymbol{n' > n}$ не залежить від передісторії $\boldsymbol{x_{i_1}}$, $\boldsymbol{x_{i_2}}$, …, $\boldsymbol{x_{i_{n-1}}}$ [46]. Прикладом застосування ймовірнісних методів є виявлення закону розподілу за даними стрільб та його використання для реконструкції параметрів метальної зброї. Статистичний аналіз розподілу міфологічних мотивів може використовуватися для побудови моделі еволюції міфології та вивчення кореляції мотивів із формами соціальної організації та іншими чинниками [45].

Табличні моделі. Бази даних. Табличні моделі є найбільш простими з точки зору побудови. Вони застосовуються для систем зі скінченною сукупність елементів, які можна розташувати за якоюсь ієрархічною схемою. До певного моменту часу табличні моделі вважалися єдиними реально корисними для історії. Такі моделі дозволяють розв'язувати різноманітні класи задач. В сучасних умовах для створення та аналізу табличних моделей використовуються електронні таблиці, статистичні пакети та бази даних.

Клітинні автомати. Клітинні автомати є дискретними моделями, елементами яких є сукупність клітинок (квадратів), кожна з яких може приймати деяке значення. Ці клітинки утворюють решітку значень, кожне з яких залежить від стану клітинки в поточний момент часу та від стану її клітинок-сусідів, що розташовані на певній відстані від неї. Ця відстань не має перевищувати максимальну. Для клітинок цієї решітки задано правила переходу в залежності від її поточного стану. Клітини такого автомата, незважаючи на простоту їх задання, можуть мати досить складну поведінку. В кожен момент часу кожна клітинка може знаходитися лише в одному якомусь стані зі скінченної множини можливих станів. У випадку лінійного (одновимірного) автомата решітка клітинок є одновимірним масивом, в якому для кожної клітинки існує рівно два сусіда (окрім граничних клітинок, для яких сусід є лише один). З метою усунення вказаного граничного ефекту ця решітка уявно згортається в тор. Завдяки цьому всі граничні клітинки стають сусідніми одна для одної. В силу такого перетворення наступне співвідношення стає справедливим для абсолютно всіх клітин лінійного одновимірного автомата:

$$\boldsymbol{y_i' = f(y_{i-1}, y_i, y_{i+1})},$$

де $\boldsymbol{f}$ – функція переходів клітинки

$\boldsymbol{y_i'}$ – стан $\boldsymbol{i}$-ї клітинки в наступний момент часу;

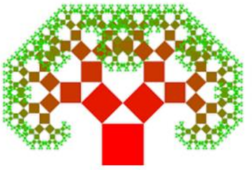
$\boldsymbol{y_{i-1}}$ – стан $\boldsymbol{(i-1)}$-ї клітинки в поточний момент часу;

$\boldsymbol{y_i}$ – стан $\boldsymbol{i}$-ї клітинки в поточний момент часу;

$\boldsymbol{y_{i+1}}$ – стан $\boldsymbol{(i+1)}$-ї клітинки в поточний момент часу.

Прикладом використання одновимірного лінійного клітинного автомата є моделювання озброєних конфліктів. Модель, подібна до клітинного автомата, використовується для вивчення міграцій населення. При цьому в якості клітинки (квадрата) розглядається деяка територія, якій притаманний певний набор характеристик [45].

Фрактальна геометрія. В останні роки теорія хаосу у вигляді синергетичного подання активно входить в гуманітарні науки. Як показали дослідження, багато соціальних процесів, подібно до природних явищ, мають фрактальну структуру та розвиваються у відповідності із фрактальними закономірностями. За допомогою фрактальної геометрії можна створювати моделі, що підходять для імітації нелінійності, парадоксальності процесів і структур. Методи фрактальної геометрії широко розробляються, починаючи з 1977 року. ***Фрактал*** – це особливий тип геометричної фігури, а **«*фрактальний*»** – це характеристика структури, явища або процесу, що мають властивості фрактала. В геометрії фрактал визначається як множина або об’єкт, для якого одна або декілька його часток точно або хоча б приблизно його відтворює, тобто ціле має ту ж саму форму, що й його частини. Особливої популярності фрактали набули із розвитком комп’ютерних технологій, що дозволили візуалізувати ці структури. Фрактальні структури виявляються в природі та вивчаються в дослідженнях по природничим наукам та пов’язаним з ними галузям знань. Головною властивістю фрактала є самоподібність, тобто навіть маленька частинка фрактала містить інформацію про фрактал в цілому. Тому в якому б масштабі фрактал не розглядався, завжди буде видно одне й те ж саме. Фрактальну геометрію називають «теорією побудови сніжинки, хмаринки та всесвіту в цілому». Мабуть, одним із найдавніших та водночас найкрасивіших прикладів фракталу є давньоіндійська мандала – геометричний візерунок, що заснований на круговій симетрії. В основному, мандали є фракталоподібними, бо їх створення та структура ґрунтується на принципах фрактальної геометрії – повторювані візерунки використовуються для зображення всесвіту або богів. На складних мандалах візерунки всередині візерунків повторюють один одного на різних рівнях. Фрактальна мандала – це геометричний патерн, що будується на основі математичної моделі флаттера. Її було розроблено американським математиком Бенуа Мандельбротом у 1975 році. Він використовував математичну модель флаттера для створення складних геометричних візерунків, що мають вигляд мандал. Саме Б. Мандельброт вважається засновником фрактальної геометрії [47].



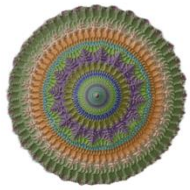


Рис. 1.2. Приклади фрактальних структур

Однак самоподібність буває частинною або може змінюватися за якимось правилом. На кожному рівні складності виникає сплав індивідуальних та загальних рис всієї системи. За думкою Б. Мандельброта, для природи є характерним саме фрактальний спосіб самоорганізації, завдяки чому можна створювати математичні моделі соціальних та політичних явищ та процесів. За допомогою спеціальних програм – конструкторів фракталів – можна проводити комп'ютерні експерименти, що симулюють такі явища та процеси. Існує декілька способів такого моделювання. По-перше, нелінійну динамічну систему в фазовому просторі можна розглядати за допомогою формули, що шляхом послідовності ітерацій описує поведінку точки (системи в фазовому просторі). При цьому така формула створює послідовність чисел, значення яких відображають траєкторію системи, а сукупність початкових умов системи в багатьох випадках має вигляд фракталу. Тому за допомогою математичного опису низки факторів системи можна передбачати її можливий розвиток. По-друге, за допомогою фракталів з'являється можливість імітувати реальні процеси, якщо в процедуру побудови ввести елементи випадковості. Такий метод моделювання був застосований для вивчення формування впливу держави на міські суспільства другої половини XIX століття. В якості результатів реального історичного процесу модернізації можна інтерпретувати графічні результати роботи програми. Але при різних запусках програми з одними й тими ж самими параметрами зовнішній вигляд отриманого фракталу може бути різним, незважаючи на те, що якісні ознаки (величина, ступінь розгалуженості та інші) при цьому будуть однаковими, тому що відображають статистичні закономірності взаємодії введених однакових параметрів. Цінність імітаційної моделі полягає в тому, що така модель дозволяє виявити потенціал розвитку ситуації, якщо вводити різні значення параметрів. В такому випадку отримують різні результати – різні фрактальні кластери. При цьому, і це є найголовнішим, кожен окремо розглянутий кластер не додає ніяких нових знань, однак в цьому кластері видно взаємозв'язок всіх досліджуваних факторів. Через це низка кластерів дозволяє порівняти результати вимірювання як одного, так і декількох факторів.

Метафора фракталу, якому притаманна масштабна інваріантність, дозволяє звести усе розмаїття фактів незалежно від їх масштабу до певної закономірності. В цьому випадку відбувається не просто зміна візуального ряду, але й зміна уявлень про сутність явищ. Таким чином, за допомогою фрактальної геометрії можна аналізувати ряди подій та припустити, що фрактальним структурам відповідають фрактальні процеси їх життєдіяльності. Спіралям у фазовому просторі, що закручуються, в реальному житті відповідають загасаючі коливальні процеси, що є характерними для соціально-політичних процесів на етапі стабілізації. Спіралям фазового простору з аттрактором у нескінченності, що розкручуються, відповідають коливальні процеси реального світу, що призводять до дестабілізації та руйнуванню системи. За думкою розробників, такі моделі не відображають точно історичну дійсність, але узагальнення декількох факторів, що дозволяють довільно експериментувати із соціальними і політичними явищами та процесами, є придатними для виявлення потенціалів та прогнозування [22]. Також при побудові моделі подій військової історії на основі клітинних автоматів було враховано фрактальні властивості цих подій за часовим та просторовим параметрами.

Ряд Фібоначчі та інші числові послідовності. В числовій послідовності Фібоначчі перші два числа дорівнюють **0** та **1**, а кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх. Цю послідовність добре знали ще в Давній Індії. Там її використовували в просодії – розділі науки про складання віршів, який вивчає метрично значущі звукові елементи віршів (голосні звуки, інтонація, наголос тощо). В Європі цю числову послідовність дослідив Леонардо Пізанський, відомий під іменем Фібоначчі, на прикладі ідеалізованої, тобто нереальної з біологічної точки зору, популяції кроликів. Схема основних етапів розвитку людства в археологічну епоху може бути поданою за допомогою ряду Фібоначчі, який кількісно відображає атрибутивну якісну ознаку, яку спостерігають історики та археологи, – «прискорення історичного часу» [44]. Але цей результат викликає сумніви у деяких представників наукової спільноти. Серед них існує думка, що всі твердження, що знаходять числа Фібоначчі в історичних об’єктах, виявляються неточною підгонкою під бажаний результат.

Нейронні мережі. Свою силу нейронні мережі беруть, по-перше, із розщеплення обробки інформації на декілька паралельних процесів і, по-друге, здатності до самонавчання, тобто здатності створювати узагальнення. Під узагальненням в цьому випадку мається на увазі здатність отримувати обґрунтований результат на основі даних, що не зустрічалися в процесі навчання. Ці властивості дозволяють нейронним мережам розв’язувати складні (масштабні) задачі. Однак на практиці нейронні мережі при автономній роботі не можуть забезпечити готові рішення. Їх необхідно інтегрувати в складні системи. Зокрема, комплексну задачу можна розділити на послідовність відносно простих, частина з яких може розв’язуватися нейронними мережами. Структура нейронних мереж безпосередньо пов’язана з використанням алгоритмів навчання. Теорія нейронних мереж стала міждисциплінарною галуззю досліджень, щільно пов’язаною із нейробіологією, математикою, психологією, фізикою та інженерією [48]. Одним із небагатьох прикладів використання нейронних мереж для моделювання історичного пізнання є роботи українського історика М. А. Польового. Ним припускається, що нейронна мережа здатна імітувати діяльність історіографа по створенню понять та концепцій процесів всесвітньої історії. При цьому зміною важелів досягається імітація різних історичних концепцій в межах однієї топології мережі [49].

Моделювання подання знань: семантичні мережі, фрейми. Семантичні мережі (принаймні ті з них, в яких правильно визначено семантику) є однією з форм логіки. Система позначень для висловлювань деяких типів, яку передбачено в семантичних мережах, часто є більш зручною для людини, але базові поняття (об’єкти, відношення, квантори тощо) є тими ж самими, що й в логіці. Існує багато варіантів семантичних мереж, але всі вони здатні подавати окремі об’єкти, категорії об’єктів та відношення між об’єктами [50]. Семантичні мережі подають знання у вигляді графа, вершини якого відповідають фактам або поняттям, а ребра – відношенням або асоціаціям між поняттями. Семантичні мережі є більш адекватними стосовно моделювання статичних станів об’єктів та процесів. Такі моделі використовуються, як правило, для формалізації різного роду історичних знань та даних історичних джерел.

Семантичні мережі є цікавими з точки зору можливості їх використання як для моделювання самих історичних об’єктів та процесів, так і для опису та отримання знань про ці об’єкти та процеси. Звідси випливає особливе значення моделей семантичних мереж для розвитку комп’ютерної історіографії та джерелознавства. Модель історичного або історіографічного джерела на основі семантичної мережі може містити в собі не лише дані джерела, але й його інтерпретацію дослідником або навіть групою дослідників. Можливість використання різних видів відношень, задання їх важелів та інше дозволяє дослідникам вести сумісну роботу над джерелом. Інша потенційна можливість використання моделей семантичних мереж – порівняння та аналіз історичних теорій, парадигм, концепцій, поданих аналогічними моделями.

Ще один різновид моделі подання знань – фрейми – багато в чому подібна до сценаріїв та є орієнтованою на включення в суворо організовані структури даних неявних інформаційних зв'язків, що існують в предметній області. Таке подання знань підтримує організацію знань в більш складні одиниці, що відображають структуру об'єктів цієї області. Фрейми поширюють можливості семантичних мереж, дозволяючи подавати складні об'єкти не у вигляді великої семантичної структури, а у вигляді єдиної сутності (фрейму). Це також дозволяє в природний спосіб подавати стереотипні сутності, класи, спадкування та значення без окремого обговорення [51]. Фрейми можуть використовуватися в історії, наприклад, для опису екземплярів одного й того ж об'єкта. Так, існує фреймова модель для опису історичних періодів [44].

1.8. Математичні методи в класичній та експериментальній археології

Задачею археології є реконструкція цілого за неповними даними або виділення суттєвих рис цілого із великого обсягу даних. Саме тому в археології широкого застосування набули статистичні методи. Більшість знайдених артефактів необхідно упорядковувати, зводити в класи та типи, а цей процес неможливий без їх математичної обробки. Якщо при роботі із задачами першого типу відбувається домислювання, індуктивне розширення інформації на основі меншої кількості фактичних даних, то другий тип задач характеризується згортанням, стиском інформації. При цьому великий обсяг фактичних даних піддається статистичному аналізу для того, щоб виділити його суттєву частину або сформувати узагальнені інтегровані показники. З метою розв'язання цих задач археологія однією з перших серед історичних наук звернулася до математичних методів, а в подальшому й до інформаційних технологій. Статистичні методи при вивченні палеонтологічних індустрій були застосовані Альфредом Кіддером у 1936-му році, а вже в 40-ві роки минулого століття математичні методи стали поширеними в Америці. Наступні роботи Джорджа Брейнерда показали, як можна формулювати та математично розв'язувати археологічні задачі.

Статистичні методи можуть бути застосовані в тому випадку, коли експериментальні дані подані значним обсягом результатів проведених вимірювань. При цьому структура сукупності початкових даних має містити в собі певну неоднорідність, що виражає різні співвідношення залежності. В цьому випадку проведений статистичний аналіз археологічних даних дозволяє виявити приховані в матеріалі закономірності, для чого існує детально розроблена теорія вимірювань, яка визначає види ознак та шкал.

На першому етапі археолог складає більш-менш повний опис знайдених предметів або слідів об'єктів (будов) і вже на другому етапі здійснює більш-менш обґрунтовану реконструкцію культурних та історичних реалій, пов'язаних із знайденими артефактами. Яскравим прикладом прояву можливостей математики в історичній реконструкції є відновлення орнаменту на якнайширшому колі артефактів. Ця потреба виникає в зв'язку з тим, що орнамент є невід'ємною частиною декору, що відбиває загальні культурні поняття наших предків. Цей метод заснований на дослідженні формотворення орнаментальних композицій та методів гармонізації форми за допомогою симетричних перетворень [22], теоретичною основою яких є роботи в галузі феномену симетрії. Він здійснюється за допомогою вибіркового статистичного спостереження, результати якого організовуються за принципом вибіркового відбору. Генеральною сукупністю в даному випадку будуть всі орнаментальні зображення, притаманні тій чи іншій місцевості в певний відрізок часу. Далі обчислюються границі довірчих інтервалів. Після цього будується система співвіднесення фігур, що зустрічаються в даному орнаменті та мають бути ретельно вивчені, обміряні та класифіковані. В подальшому відбувається візуальне віднесення тих чи інших фігур до конкретних груп образів, які потім перевіряються за кожною частиною образу. Ці частини образу є елементами. Саме вони є об'єктом статистичного спостереження. Виділені елементи розділяються на низку типів, кожен з яких містить в собі найбільш близькі за графічним контуром конкретні зображення елементів фігур. Роздивитися разом всі ознаки та елементи при звичайному спостереженні неможливо. Дану задачу можна розв'язати лише за допомогою чіткого розпису ознак (якісних та кількісних) за визначеною системою та з подальшою комп'ютерною обробкою цих розписів.

Метод симетрії використовується також при реконструкції конкретних побудов та їх декору. Він є дуже ефективним при відновленні частково втрачених мозаїк, площа та границі яких достеменно прослідковуються в ході археологічних розкопок. Емпіричною базою, що забезпечує математичне моделювання як окремих технологічних процесів, так і найважливіших елементів стародавніх економік, є експериментальний метод, що дозволяє визначити, наприклад, продуктивність праці в межах різних виробничих процесів, можливості стародавніх транспортних комунікацій та інше. З середини XIX століття експериментальні методи в археології поступово займають достатньо сталі позиції. Так, у 1874-му році під час археологічної конференції у Копенгагені було продемонстровано дерев'яну побудову, зрублену за допомогою кам'яних знарядь. Наприкінці XIX століття Отто Тишлером було експериментально доведено можливість свердління кам'яних виробів за допомогою кам'яного свердла та насипаного під нього піску. У 1883-му році було зроблено першу експериментальну спробу довести можливість плавання до Америки до епохи Христофора Колумба: судно «Вікінг», що було копією драккару із Ґокстаду (IX століття, Норвегія), за 40 днів благополучно досягло берегів Нового Світу.

В 20-х роках XX століття виникає нова форма археологічного експерименту: дослідження набувають комплексного характеру, а учасники експериментів починають використовувати так звані методики «занурення в історичну епоху». Так, наприклад, в Швейцарії на березі Боденського озера були відновлені поселення кам'яного та бронзового віків. В Польщі подібний центр з'явився в Біскупині, де з високим ступенем точності було реконструйовано городище епохи заліза. Починаючи з 1936-го року на території цього поселення проводилися дослідження різних архаїчних господарчих процесів: за допомогою стародавніх знарядь праці експериментатори готували їжу, реконструювали процеси полювання та обробки землі. Потужний прорив у розвитку експериментальних методик в археології було зроблено у 1950-ті роки: було запропоновано оригінальну методику визначення та вивчення функцій знарядь праці за характеристиками слідів роботи (трассеологічний метод), завдяки якій, наприклад, було встановлено, що ефективність рубки лісу репліками кам'яних сокир є всього у 3-4 рази нижчою, ніж при виконанні аналогічної роботи сучасними сокирами, зробленими із заліза.

Ще однією областю все більшого застосування методів математичних обчислень є так звана експериментальна військова археологія, що прагне до адекватної та науково обґрунтованої історичної реконструкції. Дослідження, що проводяться з цієї точки зору, містять результати по формалізації та синтезу математичних моделей. Також вони містять розробку програмних засобів та отримання з їх допомогою історичних даних, що забезпечують проведення історичної реконструкції як артефактів, що використовують метальний принцип ураження (стародавніх стріл та ранньої вогнепальної зброї), так і процесів (бойового функціонування стародавнього городища або обладунків як об'єкта, що піддається впливу метальної зброї; динамічної моделі сухопутного або морського бою тощо), що дозволяють вилучити із історичного джерела максимальну кількість неявної інформації, прихованої при застосуванні традиційних методів історичних досліджень.

Отже, на теперішній час вже накопичений значний досвід застосування математичних методів в археології. Однак говорити про них як про повністю сформований науковий напрямок ще зарано, оскільки ще не досягнуто певної узгодженості предметної області та методів саме археології із відповідними методами математики, комп'ютерної технології обробки даних та аналізу інформації. Саме це є головною проблемою досліджень в області застосування інформаційних технологій в історичній науці в цілому [22].

1.9. Багатовимірна типологія в історичних дослідженнях

Методи багатовимірного статистичного аналізу – це клас різноманітних математико-статистичних методів, орієнтованих на дослідження статистичних сукупностей, в яких об'єкти характеризуються набором ознак. Такі об'єкти також називаються багатовимірними. Існують різні думки про те, які саме методи входять до складу цього класу. Найчастіше маються на увазі методи багатовимірної класифікації та розпізнання образів, факторного та компонентного аналізів, множинної регресії, багатовимірного шкалування (інколи сюди додають також і дисперсійний аналіз). В основному перелічені методи виникли як реакція на потреби соціальних наук, де багатовимірність опису досліджуваних об'єктів є характерною рисою більшості досліджень, пов'язаних з аналізом емпіричних даних. Методи багатовимірного статистичного аналізу дозволяють визначити структуру як сукупності об'єктів, так і набору ознак, виявити групи однорідних об'єктів та узагальнені фактори їх розвитку, а також оцінити значення та ступінь впливу різних факторів, що впливають на якусь істотну, остаточну ознаку. Практичне використання методів багатовимірного статистичного аналізу стало можливим у зв'язку з поширенням впровадження інформатики та комп'ютерної обробки даних. Основний клас змістових задач, що розв'язуються за допомогою методів багатовимірного статистичного аналізу, орієнтований на виявлення типології досліджуваних багатовимірних об'єктів та характеристик типів. В історичних дослідженнях впровадження методів багатовимірного статистичного аналізу пов'язане в основному із введенням в науковий обіг масових історичних джерел та із задачами їх обробки та аналізу [52].

Одним з найпоширеніших видів типізації в історичних дослідженнях є географічне районування. Воно застосовується при вивченні багатьох явищ та процесів. В цьому випадку основою для типізаціє є ***географічний*** (фізичний) простір. Перевагою такої типізації є виокремлення суцільного територіального комплексу, що є єдиним в тих чи інших відношеннях (природних, етнічних, економічних тощо), що має суттєве значення для розкриття багатьох особливостей історичного розвитку. Але географічному районуванню притаманні й певні недоліки. Територіальна єдність тих чи інших об'єктів сама по собі не забезпечує їх змістової однорідності. Тому поряд з географічним районуванням історики широко використовують ***соціальну*** типізацію досліджуваних об'єктів. Її основою є не географічний, а соціальний простір, тобто об'єкти виокремлюються не за їх географічною суміжністю, а за внутрішньою однорідністю. Головною складністю при цьому є неможливість обліку при використанні звичайних методів аналізу сукупних ознак, що визначають сутнісну єдність об'єктів, які утворюють той чи інший їх тип. В цьому випадку стає затребуваною багатовимірна типологія.

Одним із методів багатовимірної типології є ***кластерний аналіз***. Він полягає в тому, що в багатовимірному просторі, що відповідає визначеній кількості ознак, на основі яких проводиться виділення типів, виявляються скупчення схожих об'єктів. Цей простір є хмарою точок, кожна з яких визначає положення в цьому просторі окремих об'єктів, а їх близькість один до одного (відстань між кластерами) відображає ступінь їх схожості. Враховуючи це, стає можливим шляхом математичної обробки даних виділити кластери (від англ. «cluster» - скупчення, гроно), тобто групи об'єктів зі схожими властивостями [22].

Розглянемо процедуру виділення кластерів на прикладі агломеративно-ієрархічного методу. Нехай всі $\boldsymbol{m}$ ознак виміряні за кількісною шкалою. В такому випадку кожен з $\boldsymbol{n}$ об'єктів буде подано точкою в $\boldsymbol{m}$-вимірному просторі ознак. Схожість об'єктів можна оцінити, виходячи із відстані між відповідними точками. Отже, чим ближчими є об'єкти один до одного, тим вони є більш схожими. Для визначення близькості пари точок (об'єктів $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$) в багатовимірному просторі використовується ***евклідова відстань***, що обчислюється за формулою [22]:

$$\boldsymbol{d_{ij}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - x_{jk})^2}\ , \quad \boldsymbol{i = \overline{1, n}}\ ,$$

де $\boldsymbol{d_{ij}}$ – евклідова відстань між об'єктами $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{x_{ik}}$ – значення $\boldsymbol{k}$-ї ознаки для $\boldsymbol{i}$-го об'єкта;

$\boldsymbol{x_{jk}}$ – значення $\boldsymbol{k}$-ї ознаки для $\boldsymbol{j}$-го об'єкта.

Відстань між об'єктами залежить від масштабу ознак, який зазвичай нормалізують, тобто всі ознаки зводять до стандартного вигляду із середнім значенням, що дорівнює нулю, і стандартним відхиленням, що дорівнює одиниці. Після нормалізації об'єкти зберігають своє відносне розташування, але масштаб вимірювання ознак буде вже єдиним для них всіх. Зазвичай близькість двох кластерів визначається як середнє значення відстані між всіма парами об'єктів, де один об'єкт пари належить одному кластеру, а інший об'єкт – іншому кластеру:

$$\boldsymbol{D_{ij}} = \sum_{i \in X_p} \sum_{j \in X_q} \frac{\boldsymbol{d_{ij}^2}}{\boldsymbol{n_p \cdot n_q}}\ ,$$

де $\boldsymbol{D_{ij}}$ – міра близькості між $\boldsymbol{p}$-м та $\boldsymbol{q}$-м кластерами;

$\boldsymbol{X_p}$ – $\boldsymbol{p}$-й кластер;

$\boldsymbol{X_q}$ – $\boldsymbol{q}$-й кластер;

$\boldsymbol{n_p}$ – кількість об'єктів у $\boldsymbol{p}$-му кластері;

$\boldsymbol{n_q}$ – кількість об'єктів у $\boldsymbol{q}$-му кластері.

На першому кроці процедури агломеративно-ієрархічного метода кластерного аналізу за початковою матрицею відстаней між об'єктами визначається мінімальна відстань. Потім виділяють найбільш близькі об'єкти, що знаходяться один від одного на цій відстані, та об'єднуються в один кластер. В матриці викреслюють рядок та стовпець, що відповідають першому з цих об'єктів, і відстані від нового кластера до всіх решти кластерів обчислюють за наведеною формулою. Ці значення вписують в рядок та стовпець матриці відстаней, що відповідає другому об'єкту із першого кластера. Другий крок процедури передбачає формування нового кластера на основі нового визначення мінімальної відстані. Цей кластер будують шляхом об'єднання двох об'єктів або одного об'єкта з кластером, що побудований на першому кроці. В матриці відстаней викреслюється один рядок та один стовпець, а один рядок і один стовпець перераховуються і так далі. Наприкінці цієї процедури отримуємо один кластер, що містить всі ***n*** об'єктів.

Однак самі по собі кластери ще не утворюють істотно відмінних типів об'єктів, тому що розбіжності між ними можуть бути невеликими. Тому для виділення типів міні-кластери мають бути об'єднані в макро-кластери. Зробити це можна на основі відстаней між кластерами. Правомірність такого об'єднання потребує спеціального обґрунтування, тому що обліку лише відстаней виявляється недостатньо. Для цього перевіряється так звана «монолітність» макро-кластерів шляхом розрахунку мірі розсіювання значень кожної ознаки через обчислення коефіцієнту варіації, який буде розглянутий в третьому розділі даного посібника. Встановити найбільш характерні розбіжності між типами можна шляхом зіставлення середніх значень досліджуваних ознак в кожному типі. Ознаки, за якими середні значення мають істотні розбіжності, і розкривають ці відмінності.

Оскільки зіставлення великої кількості ознак призводить до втрати очевидної доказовості відмінностей між типами, може стати доцільним стиск початкової інформації методами факторного аналізу для того, щоб змістову природу типів можна було розкрити на меншій кількості інтегральних показників. Таким чином, кластерний аналіз є дуже ефективним методом багатовимірної типології. Однак, як і будь-який метод, він має свої обмеження. По-перше, він не виділяє типи як такі. Для цього потрібно об'єднання міні-кластерів в макро-кластери, що може стикнутися з труднощами, пов'язаними з встановленням границь типів, що виділяються. По-друге, хоча кластерний аналіз і показує відстань між об'єктами в міні-кластері та між кластерами, але ці відстані не вимірюють безпосередньо міру схожості та відмінностей між об'єктами. Але в об'єктивній історичній реальності будь-який тип об'єктів, який визначений якісно, відрізняється тим, що до нього, по-перше, належать об'єкти, що складають його ядро, тобто мають властивості, що найчіткіше виражають риси цього типу. По-друге, існують об'єкти, що утворюють оточення цього ядра, тобто належать до даного типу, але не відображають його властивостей настільки виразно, як об'єкти ядра. По-третє, об'єкти, що утворюють даний тип, можуть мати певні риси схожості з іншими типами. Це означає, що в оптимальному поданні багатовимірна типологія має показати щільність (або вагу) приналежності об'єкта до даного типу і міру його схожості з іншими типами. Існують математичні методи, засновані на теорії нечітких множин, що дозволяють розв'язувати таку задачу.

Ймовірнісне багатовимірне групування дозволяє виявити монолітність відповідних типів. Отже, багатовимірна ймовірнісна класифікація, як і кластерний аналіз, може також успішно застосовуватися в історичних дослідженнях. Багатовимірна типологія надає можливість не просто виокремлювати істотно різні сукупності об'єктів, що утворюють певні суспільні системи, але й при комбінованому групуванні, яке в обох випадках може бути багатовимірним, розкривати об'єктивно можливі напрямки подальшої еволюції цих об'єктів, що є надзвичайно важливим для органічного поєднання структурного та функціонального, синхронного та діахронного аналізу [52].

Регресійний аналіз – найпоширеніший метод багатовимірного статистичного аналізу. Термін «множинна регресія» пояснюється тим, що аналізу піддається залежність однієї ознаки (результату) від набору незалежних (факторних) ознак. Розділення ознак на результат та факторні здійснюється дослідником на основі змістових уявлень про досліджуване явище або процес. Всі ознаки мають бути кількісними (хоча припускається використання дихотомічних ознак, що можуть приймати лише два якихось значення, наприклад, із булевої множини **{0, 1}**) [36]. Для коректного застосування регресійного аналізу необхідно виконання певних умов:

- факторні ознаки мають бути некорельовані (умова відсутності мультиколінеарності). Передбачається, що вони виміряні точно та в цих вимірах немає автокореляції, тобто значення ознак одного об'єкта не повинно залежати від значень ознак у інших об'єктів;
- ознака-результат повинна мати постійну дисперсію, що не залежить від факторних ознак;
- кількість об'єктів має перевершувати кількість ознак в декілька разів для того, щоб параметри рівняння множинної регресії були статистично надійними;
- досліджувана сукупність повинна мати в достатній мірі однорідну якісну структуру.

Істотні порушення цих умов призводять до некоректного використання моделей множинної регресії.

При побудові регресійних моделей перш за все постає питання про вигляд функціональної залежності, що характеризує взаємозв'язки між ознакою-результатом та декількома ознаками-факторами. Вибір форми зв'язку має ґрунтуватися на якісному, теоретичному та логічному аналізі сутності досліджуваних явищ. Найчастіше обмежуються ***лінійною регресією***:

$$\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + \varepsilon}\,, \tag{1.8}$$

де $\boldsymbol{y}$ – значення ознаки-результату;

$\boldsymbol{x_1}$, …, $\boldsymbol{x_n}$ – факторні ознаки;

$\boldsymbol{a_1}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ – коефіцієнти регресії;

$\boldsymbol{a_0}$ – вільний член рівняння;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – помилка моделі.

Рівняння (1.8) є лінійним за коефіцієнтами $\boldsymbol{a_1}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ і, в загальному випадку, нелінійним за ознаками $\boldsymbol{x_1}$, …, $\boldsymbol{x_n}$, де $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$. В рівнянні (1.8) замість $\boldsymbol{x_i}$ можуть стояти $\boldsymbol{x_i^2}$, $\boldsymbol{\log x_i}$ і таке інше. Питання полягає в тому, чи потрібні перетворення початкових факторів $\boldsymbol{x_i}$, і якщо потрібні, то які саме. Найпоширенішим на практиці є логарифмічне перетворення $\boldsymbol{\log x_i}$. Його застосовують, коли найбільше значення ознаки-фактору вдвічі або більше перевищує мінімальне при високій кореляції між $\boldsymbol{x_i}$ і $\boldsymbol{y}$ (коефіцієнт кореляції більший за $\boldsymbol{0{,}9}$). Якщо максимальне значення $\boldsymbol{x_i}$ в двадцять або більше разів перевищує мінімальне, то таке перетворення потрібно майже завжди. В більшості застосунків регресійної моделі (1.8) ознаки беруть в початковому вигляді, тобто рівняння (1.8) виходить лінійним і за ознаками $\boldsymbol{x_1}$, …, $\boldsymbol{x_n}$. При застосуванні нелінійних перетворень початкових ознак регресійну моделі (1.8) називають ***нелінійною регресією*** [52]. Коефіцієнти регресії $\boldsymbol{a_1}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ визначаються в такий спосіб, щоб помилки $\boldsymbol{\varepsilon}$, що характеризують ступінь наближення реальних значень ознаки-результату $\boldsymbol{y}$ за допомогою лінійної моделі (1.8), були мінімальними. Це досягається за допомогою методу найменших квадратів.

У випадку, коли і залежна, і незалежні змінні є не кількісними, а атрибутивними, для встановлення зв'язків між ними використовують ***логістичну регресію***. Логістична (або логіт-множинна) регресія застосовується в тому випадку, коли треба визначити, які саме ознаки (змінні) найсильніше пов'язані із ймовірністю реалізації конкретного значення іншої ознаки (змінної). Це значення може бути дихотомічним, тобто бінарним, що приймає лише одне із значень $\boldsymbol{\{0,\ 1\}}$ [53, 54]. Або ж це значення може бути одним із варіантів відповіді поліхотомічної змінної, що передбачає три та більше варіантів відповіді. Логістична множинна регресія називається ***бінарною логістичною множинною регресією***, коли залежна змінна (ознака-результат) є дихотомічною, і ***мультиномінальною логістичною множинною регресією***, коли залежна змінна є багатозначною. При прагненні зрозуміти логістичну регресію корисним буде її порівняння із множинною регресією. Обидва методи схожі і можуть застосовуватися в схожій спосіб. Однак статистики, що використовуються в логістичній регресії, є складнішими. Щоб в них розібратися, корисним буде провести порівняння із відповідними статистиками в множинній регресії. Логістична регресія вважається більш адекватним методом аналізу даних, ніж множинна регресія, в тому випадку, коли залежна змінна (ознака-результат) є атрибутивною, а не кількісною. Незалежні змінні (факторні ознаки) можуть вводитися в певному порядку, як у випадку ієрархічної множинної регресії, або у відповідності зі статистичними критеріями, як у випадку покрокової множинної регресії. Можна вважати ієрархічну логістичну регресію засобом визначення того, наскільки значущими є одна або декілька факторних ознак при максимізації ймовірності того, що залежна змінна приймає або не приймає певне значення [36, 53].

При використанні регресійного аналізу увага акцентується на виявленні ваги кожної факторної ознаки, її вплив на результат, на кількісну оцінку «чистого» впливу даного фактора при елімінуванні решти ознак. Але існує й інший підхід до дослідження структури взаємодії ознак, що розвивається в межах ***факторного аналізу***. Цей підхід заснований на уявленні про комплексний характер досліджуваного явища, який проявляється, зокрема, у взаємній обумовленості окремих ознак. Акцент у факторному аналізі робиться на дослідженні внутрішніх чинників, що формують специфіку досліджуваного явища, на виявленні узагальнених факторів, що стоять за відповідними конкретними показниками. Факторний аналіз не потребує апріорного розділення ознак на залежні та незалежні, тому що всі ознаки в ньому розглядаються як рівноправні. Тут відсутнє припущення про «незмінність всіх інших умов», притаманне регресійно-кореляційному аналізу. Мета факторного аналізу – сконцентрувати початкову інформацію, виражаючи більшу кількість досліджуваних ознак через меншу кількість більш ємних внутрішніх характеристик явищ, які не піддаються безпосередньому вимірюванню (наприклад, рівень аграрного розвитку). При цьому припускається, що найбільш ємні характеристики одночасно виявляться й найбільш істотними, визначними. Результати факторного аналізу будуть успішними, якщо вдасться надати змістову інтерпретацію виявлених факторів, виходячи із змісту показників, що характеризують ці фактори. Даний етап аналізу є дуже відповідальним, він потребує від дослідника чіткого уявлення про змістове навантаження показників, що долучені до аналізу, та на основі яких виділені фактори. Тому на попередньому ретельному відборі показників для факторного аналізу слід керуватися їх змістом, а не прагненням до залучення до аналізу якнайбільшої їх кількості [52].

Факторний аналіз поєднує методи аналізу структури множини ознак, що характеризують досліджувані явища та процеси, та виявлення узагальнених факторів. Він ґрунтується на припущенні, що кореляційні зв’язки між більшістю спостережуваних показників визначаються існуванням меншої кількості гіпотетично спостережуваних показників або факторів. Пояснення множини початкових ознак через невелику кількість загальних факторів здійснюється завдяки стиску інформації, яка міститься в початкових корельованих ознаках. Основними характеристиками факторного аналізу є факторні навантаження та факторні важелі. ***Факторне навантаження*** – це значення коефіцієнтів кореляції кожної із початкових ознак з кожним із виявлених факторів. Чим щільніший зв’язок даної ознаки із розглянутим фактором, тим вище значення відповідного факторного навантаження. Додатний знак факторного навантаження свідчить про прямий зв’язок даної ознаки із фактором, а від’ємний знак – про зворотний. Якщо значення факторного навантаження наближається до нуля, то це свідчить про те, що цей фактор майже не впливає на дану ознаку [22].

Таблиця 1.4

Факторні навантаження

	№ фактору					
№ ознаки	**1**	**2**	**…**	***j***	**…**	***k***
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1k}
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2k}
…	…	…	…	…	…	…
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{ik}
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mk}
Разом (внесок ознак)	V_1	V_2	…	V_j	…	V_k

В наведеній таблиці факторних навантажень міститься ***m*** рядків (за кількістю ознак) та ***k*** стовпців (за кількістю факторів). Факторні навантаження дозволяють скласти думку про вибір початкових ознак, що відображають той чи інший фактор, та про відносну частку окремих ознак в структурі кожного фактора.

Факторні важелі – це кількісне значення виділених факторів для кожного з ***n*** наявних об'єктів. У об'єктів з більшими значеннями факторних важелів ступінь прояву властивостей, притаманних даному фактору, є більшим.

Таблиця 1.5

Факторні важелі

	№ фактору					
№ об'єкту	**1**	**2**	**…**	***j***	**…**	***k***
1	b_{11}	b_{12}	…	b_{1j}	…	b_{1k}
2	b_{21}	b_{22}	…	b_{2j}	…	b_{2k}
…	…	…	…	…	…	…
i	b_{i1}	b_{i2}	…	b_{ij}	…	b_{ik}
…	…	…	…	…	…	…
n	b_{n1}	b_{n2}	…	b_{nj}	…	b_{nk}

В наведеній таблиці факторних важелів міститься ***n*** рядків (за кількістю об'єктів) та ***k*** стовпців (за кількістю факторів). Фактори визначаються як стандартизовані показники із середнім арифметичним, що дорівнює нулю та середнім квадратичним відхиленням, що дорівнює одиниці. Внаслідок цього додатні факторні важелі відповідають об'єктам, що характеризуються ступенем прояву властивостей, більшим за середній, а від'ємний факторний важіль відповідає тим об'єктам, в яких ступінь прояву властивостей менший за середній. Об'єкти ранжуються в межах кожного фактора, виходячи із даних про факторні важелі. А їх, в свою чергу, можна розглядати як значення індексу, що характеризує рівень розвитку об'єктів в досліджуваному аспекті. Відповідно, факторні важелі можуть стати основою класифікації досліджуваних об'єктів. Створення багатовимірної типології на основі факторного аналізу є особливо ефективним в тому випадку, коли є велика кількість ознак, що характеризують сукупність об'єктів, але їх змістовий відбір є значно утрудненим. В цій ситуації потрібний стиск інформації, після чого проводиться класифікація за будь-яким із виділених факторів [22].

Одним із обмежень, що накладається на математичні статистичні методи, є особливості математичної обробки динамічних часових рядів кількісних показників. Такі показники містять в своєму складі декілька компонент [13]:

- основні значення (рівні) ряду, що характеризують корінні властивості показника та тенденцію їх зміни;
- показники, що відображають різного роду циклічні коливання, притаманні досліджуваній ознаці (циклічний розвиток виробництва, цикли врожайності, сезонні коливання цін та інше);
- показники випадкових коливань, що викликані чинниками, які не піддаються обліку.

Все це потребує розкладання фактичних показників динамічних рядів на складові компоненти. Найпоширенішим методом для цього є аналітичне (математичне) згладжування, тобто вирівнювання динамічних рядів [13, 29]. Найбільш складним при цьому є вибір функції такого вирівнювання. Найчастіше використовують рівняння прямої та параболи другого порядку. Коректне аналітичне вирівнювання динамічних рядів потребує перевірки того, наскільки адекватно відповідна функція відображає основні риси в зміні показників. Аналітичне згладжування надає можливість виявити рівні ряду (його основні значення), тренд (швидкість та напрямок зміни показників) та випадкові коливання показників (відхилення фактичних значень від їх рівнів).

Всі ці показники, як і початкові дані, можуть піддаватися математичній обробці та аналізу. При цьому зазвичай звертаються до кореляційного та регресійного аналізу. Дотично динамічних рядів він має важливу специфіку. Теоретико-методологічною основою кореляційного та регресійного аналізу є ймовірнісний підхід. Для його реалізації необхідно, щоб показники в корельованих рядах були незалежними. В варіаційних рядах така незалежність обумовлена самою природою варіаційних рядів. В них всі ряди містять числові значення ознак у різних, а тому і незалежних ознак. В свою чергу, динамічні ряди характеризують значення ознак у одних і тих самих об’єктів. Тому в даному випадку наступні значення показників можуть залежати від попередніх, тобто на зміну показників може впливати часова складова. При кореляційному аналізі це може призводити до завищення щільності взаємозв’язку між показниками в результаті виникнення так званої хибної кореляції. Зрозуміло, що таке завищення буде більшим в тих рядах, які мають більшу довжину.

Виміряти ступінь впливу часової компоненти на зміни показників динамічного ряду можна за допомогою обчислення коефіцієнта автокореляції (кореляції значень фактичного ряду із рядом, отриманим шляхом зсуву фактичних значень на один варіант).При коефіцієнтах автокореляції, що перевищують **0,71** (коефіцієнт детермінації буде більший за 50 %), часова складова виявляється основним фактором в зміні показників ряду. Отже, ці показники не будуть незалежними а, враховуючи ймовірнісну природу кореляційного аналізу, кореляція таких рядів буде некоректною. Але цей недолік можна знівелювати, якщо при кореляційному аналізі динамічних рядів виключити із них закономірні (плавні та повторювані) зміни рівня. При такому підході можна корелювати лише відхилення фактичних значень від рівнів аналітично згладжених динамічних рядів, бо ці відхилення визначаються множиною локально діючих чинників і тому з ймовірнісно-статистичної точки зору є незалежними. Крім того, при вдало підібраній функції вирівнювання вони взаємно погашаються та мають нормальний розподіл [52].

Однак в змістовому плані представляє інтерес і корелювання фактичних значень часових рядів, тому що в цих значеннях узагальнено всю інформацію про динаміку відповідних показників. Для урахування впливу на щільність взаємозв'язку часової компоненти пропонується на основі коефіцієнтів автокореляції вносити поправку до стандартної помилки коефіцієнтів кореляції фактичних значень динамічних рядів. Крім того, величина цієї поправки може показати, коли кореляція фактичних значень динамічних рядів стає взагалі неможливою. Такий підхід до кореляції фактичних значень рядів динаміки заслуговує уваги та може використовуватися в історичних дослідженнях. Але коректним він може бути лише в тому випадку, коли часова складова не відіграє визначної ролі в зміні значень цих рядів, тобто коли детермінація коефіцієнтів кореляції не перевищує 50 %. Тому вирішувати питання про можливість застосування такого підходу можна лише на основі даних автокореляції. Якщо ж наявність автокореляції не перевіряється, то значення результатів кореляційного та регресійного аналізу рядів динаміки є сумнівним. Більш того, ці результати можуть призвести до хибних висновків.

Таким чином, при кореляційному та регресійному аналізі динамічних рядів цілком правомірним є оперування випадковими відхиленнями. Можливим є також використання фактичних значень цих рядів у випадках, коли вплив часової компоненти на зміни значень ряду є невеликим, і коли вноситься поправка до стандартних помилок коефіцієнтів. При цьому корелювання аналітично згладжених рядів є неприпустимим, оскільки зміни цих рівнів цілком визначаються трендом, тобто саме часовою складовою ряду [13]. Аналіз динаміки – найважніша задача історичних досліджень. Але він пов'язаний з великими інформаційно-джерелознавчими та математичними труднощами, що підвищує вимоги до адекватності та коректності такого аналізу.

Останнім етапом застосування математичних методів в історичних дослідженнях є змістова історична інтерпретація результатів математичної обробки та аналізу кількісних даних та узагальнення отриманих підсумків. На цьому етапі дослідження доводиться до логічного завершення та виявляється те нове, що вдалося отримати в результаті застосування вказаних методів, і, як наслідок, весь науково-пізнавальний ефект такого застосування. Сутнісно-змістова інтерпретація результатів математичної обробки конкретних історичних даних – це не лише відповідальна, але й дуже складна процедура. Її складність обумовлюється труднощами розкриття змістово-історичного сенсу математичних показників, перекладу формально-логічних понять в конкретні історичні. Успіх тут цілком визначається глибиною теоретико-методологічного та конкретно-історичного підходу до досліджуваних явищ та процесів. При математичній верифікації конкретно-історичних гіпотез підсумок математичного аналізу або підтверджує, або спростовує висунуту гіпотезу. Доказовість висновків тут залежить від репрезентативності конкретних історичних даних, адекватності математичної моделі та коректності її застосування. Зрозуміло, що саме висування гіпотези має бути обґрунтованим змістово-історично [22].

Контрольні запитання

1. Опишіть етапи становлення історичної статистики.
2. Які напрямки досліджень сформувалися в українській кліометрії?
3. Яке місце займають кількісні методи в історичних дослідженнях?
4. До яких типів історичних задач можуть бути застосовані кількісні методи в історичних дослідженнях?

5. Які існують види шкал вимірювання за класифікацією Стивенса?
6. Охарактеризуйте номінальну шкалу вимірювання. Що таке альтернативна шкала? Які ознаки можуть бути виміряні за номінальною шкалою?
7. Охарактеризуйте порядкову шкалу. Які ознаки можуть бути за нею виміряні?
8. Охарактеризуйте інтервальну шкалу. Чим вона відрізняється від попередніх шкал? Які ознаки можуть бути за нею виміряні?
9. Охарактеризуйте шкалу відношень. Наведіть приклади шкали відношень. Які ознаки можуть бути виміряні за цією шкалою. Що таке абсолютна шкала?
10. Що таке міра центральної тенденції?
11. Дайте означення середнього арифметичного. Наведіть формулу для його обчислення.
12. Дайте означення середнього геометричного. Наведіть формулу для його обчислення.
13. Дайте означення середнього гармонічного. Наведіть формулу для його обчислення.
14. Дайте означення середнього хронологічного. Наведіть формулу для його обчислення.
15. Що таке медіана? За якою формулою вона обчислюється у разі парної кількості значень варіаційного ряду?
16. Що таке мода? Як обчислюється підсумкова мода варіаційного ряду?
17. Що таке коефіцієнт варіації? Наведіть формулу для його обчислення.
18. Опишіть показники вимірювання історичних явищ та процесів.
19. Опишіть одиниці вимірювання історичних явищ та процесів.
20. Охарактеризуйте види помилок при вимірюванні історичних явищ.
21. Опишіть причини виникнення та можливі шляхи усунення помилок вимірювання.
22. В чому сутність контент-аналізу?
23. При дослідженні яких саме історичних об’єктів застосовується контент-аналіз?
24. Охарактеризуйте клас відбивно-вимірювальних моделей історичних явищ та процесів.
25. Охарактеризуйте клас імітаційних моделей. Які існують їх різновиди?
26. В чому полягає сутність контрфактичного моделювання історичних явищ та процесів?
27. Які історичні задачі можуть бути розв’язані за допомогою імітаційних моделей?
28. Перелічіть математичні методи історичного моделювання.
29. Опишіть роботу клітинного автомата.
30. В чому полягає сутність фрактальної геометрії? Наведіть приклади фракталів.
31. Які існують види типізації в історичних дослідженнях?
32. В чому полягає алгоритм роботи кластерного аналізу?
33. За якою формулою обчислюється евклідова відстань?
34. В чому полягає регресійний аналіз історичних явищ та процесів?
35. За яких умов застосування регресійного аналізу є коректним?
36. Які існують види регресії? Для дослідження яких ознак вони застосовуються?
37. В чому полягає факторний аналіз? В яких випадках є доцільним його застосування?
38. Що таке факторне навантаження? Як інтерпретується його значення?
39. Що таке факторні важелі та як інтерпретуються їх значення?
40. Які існують обмеження на математичну обробку динамічних рядів в історичних дослідженнях? З чим пов’язані ці обмеження?

2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Класичне визначення ймовірності

Достовірною називається подія, що обов'язково відбудеться при здійсненні певного комплексу умов. Відповідно, ***неможливою*** називається подія, що при заданому комплексі умов не відбудеться ніколи. ***Випадковою*** називається така подія, що при заданому комплексі умов може як відбутися, так і не відбутися [1]. Мірою можливості здійснення такої події і є її ***ймовірність***. Достовірна й неможлива події можуть розглядатися як крайні окремі випадки випадкових подій.

Випадкові події будемо позначати великими латинськими буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, … ... Достовірна подія позначається буквою $\boldsymbol{\Omega}$, неможлива подія – символом $\varnothing$. Уведемо тепер деякі відносини між подіями. Дві події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ є ***несумісними***, якщо настання однієї з них виключає настання іншої. ***Сума подій A і B*** – це така третя подія $\boldsymbol{C = A + B}$, що відбувається тоді, коли наступає або подія $\boldsymbol{A}$, або подія $\boldsymbol{B}$, або вони обидві одночасно. ***Добуток подій A і B*** – це така третя подія $\boldsymbol{C = AB}$, що наступає тоді, коли відбуваються і подія $\boldsymbol{A}$, і подія $\boldsymbol{B}$. Подія $\overline{\boldsymbol{A}}$ є ***протилежною*** до події $\boldsymbol{A}$, якщо вона несумісна з подією $\boldsymbol{A}$ і разом з нею утворює достовірну подію, тобто $\overline{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Omega}$.

Однією з моделей із скінченною кількістю результатів є класична ймовірнісна схема. У цій схемі визначення ймовірності ґрунтується на рівній можливості кожного зі скінченної кількості результатів. Таке визначення з'явилося на основі перших спроб вирахування шансів в азартних іграх. Так, у випадку із гральною кісткою при одноразовому киданні однакова можливість випадання кожної із шести граней, на які нанесені цифри $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{5}$, $\mathbf{6}$. Позначимо ці однаково можливі результати, або ***елементарні події***, через $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_2}$, $\boldsymbol{\omega_3}$, $\boldsymbol{\omega_4}$, $\boldsymbol{\omega_5}$, $\boldsymbol{\omega_6}$. Природно, що шанс здійснитися не одному результату, а одному із двох, наприклад, або $\boldsymbol{\omega_1}$, або $\boldsymbol{\omega_2}$, є вдвічі більшим. Міркуючи таким чином, можна визначити шанси здійснення будь-якої складеної події, що складається з декількох елементарних [35].

У загальному випадку, коли є $\boldsymbol{n}$ однаково можливих елементарних подій $\boldsymbol{\omega_1}$, …, $\boldsymbol{\omega_n}$, ***ймовірність*** будь-якої складеної події $\boldsymbol{A}$, що складається з $\boldsymbol{m}$ елементарних подій $\boldsymbol{\omega_{i_1}}$, …, $\boldsymbol{\omega_{i_m}}$, визначається як відношення кількості елементарних подій, що сприяють події $\boldsymbol{A}$, до загальної кількості елементарних подій, тобто

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}\,. \tag{2.1}$$

Наприклад, у випадку із гральною кісткою ймовірність події $\boldsymbol{A}$, що полягає у випаданні парної кількості очок (тобто $\boldsymbol{A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}}$), дорівнює

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}},$$

тому що до складу події $\boldsymbol{A}$ входять три елементарних події, а загальна кількість елементарних подій дорівнює шести.

Із класичного визначення ймовірностей, зокрема, випливає, що ймовірність ***повної події*** $\boldsymbol{\Omega}$, що містить всі $\boldsymbol{n}$ елементарних подій, дорівнює

$$\boldsymbol{P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1}\,.$$

Але тоді повна подія $\boldsymbol{\Omega}$, що полягає в появі будь-якої із усього набору елементарних подій $\boldsymbol{\omega_1}$, …, $\boldsymbol{\omega_n}$, і є достовірною подією, тому що вона обов'язково відбувається. Тому ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Якщо події розглядати як підмножини множини елементарних подій, то відносини між подіями, введені вище, можна інтерпретувати як співвідношення між множинами [17]. Несумісні події – це такі події, які не містять спільних елементів. Сума $A + B$ і добуток AB – це відповідно їхнє об'єднання $A \cup B$ і перетин $A \cap B$. Протилежна подія $\overline{A}$ – це доповнення A. Запис $A \subset B$ означає, що в події B містяться всі елементарні події з A, і додатково можуть міститися елементарні події, що не входять до складу події A. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

У випадку класичного визначення ймовірності справедлива наступна теорема додавання ймовірностей.

Теорема 2.1 (***додавання ймовірностей***). *Формулювання*. Якщо дві складені події $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$ і $B = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}\}$ є несумісними, то ймовірність об'єднаної події $C = A \cup B$ дорівнює сумі ймовірностей цих двох подій.

Доведення. Дійсно, ймовірності подій A і B дорівнюють $\frac{m}{n}$ та $\frac{k}{n}$ відповідно. Подія

$$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}\}$$

містить $m + k$ елементарних подій, тому що за умовою теореми серед елементарних подій $\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$ немає жодної, що входила б у набір $\{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_k}\}$. Тому, відповідно до класичного визначення, її ймовірність дорівнює

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Теорему доведено.

Подія $\overline{A}$ називається ***протилежною*** до події A, якщо до неї входять всі ті елементарні події, що не входять до складу події A. Іншими словами, A і $\overline{A}$ - це такі несумісні події, що разом утворюють достовірну подію, тобто $A \cup \overline{A} = \Omega$. З теореми додавання випливає, що $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$, тому ***ймовірність протилежної події*** дорівнює

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Звідси, зокрема, випливає, що ймовірність неможливої події $\varnothing$, що є протилежною до достовірної події $\boldsymbol{\Omega}$, дорівнює нулю.

2.2. Урнова схема

Класична схема, незважаючи на всю свою обмеженість, придатна для вирішення низки суто практичних задач. Розглянемо, наприклад, деяку сукупність елементів об'єму N. Це можуть бути вироби, кожне з яких є придатним або бракованим. Подібні ситуації описуються урновою схемою: в урні є N куль, з них M білих, $(N - M)$ чорних [35]. Нехай, наприклад, є лише руйнівні засоби контролю кожного виробу на придатність (наприклад, перевірка якості сірника). У такому випадку не можна обстежити всю партію виробів, а тільки її частину. Отже, з урни, що містить N куль, у якій перебуває невідома кількість M білих куль, витягається вибірка об'єму n. Така процедура називається ***вибіркою без повернення***. Необхідно визначити ймовірність того, що у вибірці буде виявлено $\boldsymbol{m}$ білих куль. Це задача на застосування класичного визначення ймовірності. Справді, в описаній ситуації кожна вибірка не має переваги стосовно будь-якої іншої, тобто всі вони однаково можливі. Підрахуємо кількість всіх можливих вибірок об'єму $\boldsymbol{n}$ із $\boldsymbol{N}$ елементів. Як відомо з комбінаторики, кількість способів, за допомогою яких можна вибрати $\boldsymbol{n}$ елементів із загальної їхньої кількості $\boldsymbol{N}$, дорівнює кількості сполучень із $\boldsymbol{N}$ по $\boldsymbol{n}$, тобто

$$\boldsymbol{C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}}\,,\quad \boldsymbol{N! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot N}\,.$$

Таким чином, загальна кількість результатів дорівнює $\boldsymbol{C_N^n}$. З'ясуємо, скільки результатів із загальної кількості елементарних результатів сприяє події $\boldsymbol{A}$, тобто наявності у вибірці об'єму $\boldsymbol{n}$ білих куль у кількості $\boldsymbol{m}$. Кількість способів, якими можна з $\boldsymbol{M}$ білих куль витягти $\boldsymbol{m}$ штук, дорівнює $\boldsymbol{C_M^m}$, а кількість способів вибрати з $\boldsymbol{(N-M)}$ чорних куль $\boldsymbol{(n-m)}$ штук дорівнює $\boldsymbol{C_{N-M}^{n-m}}$. Тому кількість результатів, сприятливих події $\boldsymbol{A}$, дорівнює $\boldsymbol{C_M^m \times C_{N-M}^{n-m}}$ і, отже, її ймовірність, що дорівнює відношенню кількості сприятливих результатів до їхньої загальної кількості, буде наступною [35]:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_M^m\cdot C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M} = P_{M,N}(m,n)}. \qquad (2.2)$$

<u>**Приклад 2.1**</u>. Нехай є партія, що складається з **500** виробів, у якій два бракованих. Яка ймовірність у вибірці з **5** виробів не виявити жодного бракованого?

<u>*Розв'язання*</u>. Скористаємося формулою (2.2). Маємо

$$\boldsymbol{P_{498,500}(5,5) = \frac{C_{498}^5\cdot C_2^0}{C_{500}^5} = \frac{\dfrac{498!}{5!\,(498-5)!}\cdot\dfrac{2!}{0!\,(2-0)!}}{\dfrac{500!}{5!\,(500-5)!}} = \frac{\dfrac{498!}{5!\,493!}\cdot\dfrac{2!}{0!\,2!}}{\dfrac{500!}{5!\,495!}} = 0{,}98}\,.$$

<u>*Відповідь*</u>. Ймовірність у вибірці з **5** виробів не виявити жодного бракованого дорівнює $\boldsymbol{P_{498,500}(5,5) = 0{,}98}$.

Розглянемо тепер, наприклад, урну з кулями, вибірка куль із якої відбувається послідовно по одній кулі, і при цьому щоразу фіксується номер кулі, а сама куля повертається знову до урни. Така процедура називається ***вибіркою з поверненням*** [20]. У цьому випадку ймовірність події $\boldsymbol{A}$, обчислена в аналогічний спосіб, дорівнює

$$\boldsymbol{P(A) = C_n^m\cdot\frac{M^m(N-M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}}.$$

2.3. Умовна ймовірність

Говорити про ймовірності як про міри можливості здійснення випадкової події $\boldsymbol{A}$ має сенс лише при здійсненні певного комплексу умов. При зміні умов зміниться й імовірність. Так, якщо до комплексу умов, при якому вивчалася ймовірність $\boldsymbol{P(A)}$, додати нову умову, що полягає в появі події $\boldsymbol{B}$, то отримаємо інше значення ймовірності $\boldsymbol{P(A/B)}$ – умовну ймовірність події $\boldsymbol{A}$ за умови, що відбулася подія $\boldsymbol{B}$. Ймовірність $\boldsymbol{P(A)}$, на відміну від умовної, називається ***безумовною***.

Виведемо ***формулу умовної ймовірності***. Нехай подіям $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ сприяють $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{k}$ елементарних результатів із $\boldsymbol{n}$. Тоді, згідно з (2.1), їхні безумовні ймовірності дорівнюють $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ та $\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}$ відповідно. Нехай події $\boldsymbol{A}$ за умови, що подія $\boldsymbol{B}$ відбулася, сприяє $\boldsymbol{r}$ елементарних результатів. Тоді, згідно з (2.1), умовна ймовірність події $\boldsymbol{A}$ дорівнює $\boldsymbol{P(A/B)} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{k}}$. Розділивши і чисельник, і знаменник на $\boldsymbol{n}$, одержимо формулу умовної ймовірності:

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{r}{k} = \left(\frac{r}{n}\right) : \left(\frac{k}{n}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}\,, \tag{2.3}$$

оскільки події $\boldsymbol{A \cap B}$ відповідає $\boldsymbol{r}$ результатів і, отже, $\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}}$ - його безумовна ймовірність.

Подія $\boldsymbol{A}$ називається ***незалежною від B***, якщо її умовна ймовірність дорівнює безумовній, тобто $\boldsymbol{P(A/B) = P(A)}$. При цьому з формули (2.3) одержуємо ***формулу ймовірності добутку незалежних подій*** [10]

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}, \tag{2.4}$$

тобто властивість незалежності взаємна, і для незалежних подій імовірність їхнього одночасного здійснення дорівнює добутку їхніх ймовірностей. Формула (2.3), записана у вигляді

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)}, \tag{2.5}$$

називається ***формулою ймовірності добутку залежних подій***.

Наприклад, у експерименті з гральною кісткою нехай подія $\boldsymbol{A}$ полягає у випаданні числа очок, що ділиться на три, тобто $\boldsymbol{A = \{\omega_3, \omega_6\}}$, а подія $\boldsymbol{B}$ – у випаданні парного числа очок, тобто $\boldsymbol{B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}}$. Тоді $\boldsymbol{A \cap B = \{\omega_6\}}$ і за формулою умовної ймовірності (2.3) отримуємо, що

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 3} = \frac{1}{3}}.$$

Але

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}.$$

Тому $\boldsymbol{P(A/B) = P(A)}$, тобто події $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ незалежні.

Взаємність незалежності подій означає, що якщо подія $\boldsymbol{A}$ не залежить від події $\boldsymbol{B}$, то й подія $\boldsymbol{B}$ не залежить від події $\boldsymbol{A}$. Тоді при $\boldsymbol{P(A) > 0}$ і з огляду на формулу (2.5) маємо:

$$\boldsymbol{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)}\,.$$

Також слід зазначити, що не завжди події є несумісними. Вони також можуть бути сумісними, але водночас незалежними. Тому в загальному випадку для будь-яких (як несумісних, так і сумісних) подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ має місце наступна ***формула додавання сумісних подій*** [55]:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}\,.$$

Обчислення ймовірностей для таких подій зручно розглянути на конкретному прикладі. Нехай два стрілки здійснюють постріли по круговій мішені. Результат пострілів одного із цих стрілків ніяким чином не впливає на результати іншого стрілка. Тому ці події є незалежними. В той же час, ці події є сумісними, тому що обидва стрілки можуть як влучити, так і не влучити одночасно. Нехай ймовірність влучання по мішені для 1-го стрілка складає $\boldsymbol{P(A)}$, а для 2-го, відповідно, $\boldsymbol{P(B)}$. Тому, з урахуванням ймовірності протилежної події, ймовірності добутку незалежних та додавання сумісних подій, маємо ймовірність наступних можливих складних подій:

Влучили обидва стрілки – добуток незалежних подій (**формула 2.4**);

Влучив лише перший стрілок

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B))\ ;$$

Влучив лише другий стрілок

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A}) = P(B) \cdot (1 - P(A))\ ;$$

Не влучив жоден зі стрілків

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))\ ;$$

Влучив хоча б один стрілок

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)\ ;$$

Не влучив хоча б один стрілок

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$$
$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 1 - P(A) \cdot P(B)\ .$$

Цей приклад повністю описує формули обчислення ймовірності для ***незалежних сумісних подій***.

2.4. Скінченна схема з неоднаково можливими результатами

Обмеженість класичного визначення ймовірності, зокрема, закладена в однаковій можливості результатів. Дійсно, навіть невелике ускладнення практичної ситуації негайно ввійде в суперечність із однаковою можливістю, що може розглядатися, скоріше, як окремий випадок більш загальної ситуації.

Розглянемо, наприклад, стрілянину по круговій мішені. Елементарними результатами тут є влучення в те або інше кільце кругової мішені. Влучення в мале внутрішнє коло оцінюється в **10** очок, у навколишнє його кільце – у **9** очок, у наступне – у **8** очок тощо, у саме зовнішнє кільце – **1** очко, невлучення в кругову мішень – **0** очок. Таким чином, є **11** елементарних подій $\boldsymbol{\omega_{10}}$, $\boldsymbol{\omega_9}$, …, $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_0}$. Для кожного стрільця певного класу є свої визначені сталі шанси (ймовірності) вибити за один постріл ту або іншу кількість очок $\boldsymbol{p_{10}}$, $\boldsymbol{p_9}$, …, $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_0}$. Ці події, загалом кажучи, неоднаково можливі. Наприклад, для майстрів спорту, очевидно, виключена подія $\boldsymbol{\omega_0}$, тому $\boldsymbol{p_0 = 0}$, тобто відразу виключається однакова можливість [20].

Скінченна схема з неоднаково можливими результатами визначається в такий спосіб. Є скінченний набір елементарних подій $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}}$, і для кожної елементарної події $\boldsymbol{\omega_i}$ задана його ймовірність $\boldsymbol{p_i}$, $0 \leqslant \boldsymbol{p_i} \leqslant 1$, причому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\ .$$

Ймовірність будь-якої складеної події $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{\omega}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i_m}\}$ визначається як сума ймовірностей елементарних подій, що входять до її складу:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{p}_{i_l}. \tag{2.6}$$

Ця схема є узагальненням класичної схеми. Справді, якщо повернутися до випадку однакової можливості й приписати кожній елементарній події ймовірність $\frac{1}{n}$, то формула (2.6) зводиться до класичного визначення ймовірності.

У випадку скінченної схеми також має місце теорема додавання.

<u>Теорема 2.2</u>. *<u>Формулювання</u>*. Для двох несумісних подій $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, що є підмножинами $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}).$$

<u>Доведення</u>. Нехай $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{\omega}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i_m}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\omega}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{j_k}\}$. Згідно з (2.6),

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{p}_{i_l}\ , \ \ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{j_q}\ .$$

Оскільки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ є несумісними, вони не мають спільних елементарних подій і, отже, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\omega}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i_m}, \boldsymbol{\omega}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{j_k}\}$. На підставі (2.6) маємо

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{C}) = \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{p}_{i_l} + \sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{j_q} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}).$$

Теорему доведено.

Точно так само, як скінченна схема з неоднаково можливими результатами є узагальненням класичної скінченної схеми з однаково можливими результатами, дискретна схема з нескінченною кількістю неоднаково можливих подій, у свою чергу, є узагальненням скінченної схеми [56].

У дискретній схемі множина $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_n, \dots\}$, загалом кажучи, містить зліченну кількість елементарних подій. Для кожної елементарної події задана її ймовірність $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}_i)$, $0 \leqslant \boldsymbol{p}_i \leqslant 1$, причому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_i = \mathbf{1}\ .$$

Ймовірність будь-якої скінченної або зліченної підмножини $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{\Omega}$ множини елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій, що її складають, тобто якщо

$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \boldsymbol{\omega}_{i_l}\ ,$$

то

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sum_{l=1}^{\infty} \boldsymbol{p}_{i_l}\ .$$

Якщо ж

$$\boldsymbol{A} = \bigcup_{l=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_{i_l}\,,$$

то має місце (2.6).

У скінченній схемі, як і в класичній, можна вивести формулу умовної ймовірності. Розглянемо події $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{\omega}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\omega}_{i_m}\}$ і $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\omega}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\omega}_{j_l}, \ldots, \boldsymbol{\omega}_{j_k}\}$ такі, що $\boldsymbol{\omega}_{i_1} = \boldsymbol{\omega}_{j_1}$, …, $\boldsymbol{\omega}_{i_l} = \boldsymbol{\omega}_{j_l}$, $\boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{k}$. Інакше кажучи, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\omega}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{\omega}_{i_l}\}$. Тоді

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{p}_{i_\mu} > 0\,,$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{i_q} > 0\,,$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \sum_{\mu=1}^{l} \boldsymbol{p}_{i_\mu}\,.$$

Нехай подія $\boldsymbol{B}$ відбулася. Тому має місце нова скінченна схема з $\boldsymbol{k}$ результатами, $\boldsymbol{k} \leqslant \boldsymbol{n}$, отже, сума ймовірностей повного набору цих нових результатів повинна дорівнювати одиниці, а вона, відповідно до первісної схеми, дорівнює

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) = \sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{i_q}\,.$$

Щоб забезпечити рівність суми ймовірностей елементарних подій одиниці, уведемо нові ймовірності результатів:

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{j_q} = \frac{\boldsymbol{p}_{j_q}}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}\,,$$

$$\sum_{q=1}^{k} \widetilde{\boldsymbol{p}}_{j_q} = \frac{\sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{j_q}}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \mathbf{1}\,.$$

У рамках нової схеми (тобто за умови, що відбулася подія $\boldsymbol{B}$) визначаємо ймовірність події $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}) = \sum_{q=1}^{l} \widetilde{\boldsymbol{p}}_{j_q} = \frac{\sum_{q=1}^{k} \boldsymbol{p}_{j_q}}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})} = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}\,.$$

Таким чином, ми знову отримуємо ту ж формулу умовної ймовірності, що й у класичній схемі. Незалежність подій визначається аналогічно класичній схемі. Розглянемо найпростіші приклади схеми послідовних випробувань як ілюстрацію скінченної схеми з неоднаково можливими результатами [35].

<u>Приклад 2.2</u>. Система контролю виробів складається із двох незалежних перевірок, виконуваних одночасно. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. У результаті кожної перевірки бракований виріб приймається з ймовірностями $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_2}$ відповідно. Знайти ймовірність того, що буде прийнятий бракований виріб.

Розв'язання. Якщо на вхід системи контролю надійшов бракований виріб, то можливі наступні чотири елементарних результати: $\boldsymbol{\omega_1} = \{0, 0\}$, $\boldsymbol{\omega_2} = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{\omega_3} = \{1, 0\}$, $\boldsymbol{\omega_4} = \{1, 1\}$, де **0** означає, що виріб визнаний бракованим, а **1** – що виріб визнаний придатним. Випробування є незалежними, тому отримуємо наступні значення ймовірностей елементарних результатів $\boldsymbol{\omega = \{i_1, i_2\}}$:

$$\boldsymbol{p_1 = p(\omega_1) = P\{i_1 = 0, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 0\} = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)},$$

$$\boldsymbol{p_2 = p(\omega_2) = P\{i_1 = 0, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 1\} = (1 - \alpha_1)\alpha_2},$$

$$\boldsymbol{p_3 = p(\omega_3) = P\{i_1 = 1, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 0\} = \alpha_1(1 - \alpha_2)},$$

$$\boldsymbol{p_4 = p(\omega_4) = P\{i_1 = 1, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 1\} = \alpha_1\alpha_2}.$$

Сума ймовірностей елементарних подій має дорівнювати одиниці. Дійсно,

$$\boldsymbol{P(\Omega) = \sum_{i=1}^{4} p(\omega_i) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) + (1 - \alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = 1}.$$

Відповідно до умов задачі й сформованій схемі, ймовірність прийняти бракований виріб – це ймовірність елементарної події $\boldsymbol{\omega_4}$, яка полягає в тому, що й перша, й друга перевірки визнають бракований виріб придатним. Тому шукана ймовірність дорівнює $\boldsymbol{p_4 = \alpha_1\alpha_2}$.

Відповідь. Ймовірність того, що за результатами двох незалежних перевірок буде прийнятий бракований виріб дорівнює $\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2}$.

Приклад 2.3. В умовах прикладу 2.2 задані ймовірності $\boldsymbol{\beta_1}$ і $\boldsymbol{\beta_2}$ відбракувати придатний виріб у результаті першої й другої перевірок відповідно. Знайти ймовірність того, що буде відбракований придатний виріб.

Розв'язання. Якщо на вхід системи контролю надійшов придатний виріб, то можливі ті ж самі чотири елементарних результати, однак їхні ймовірності будуть іншими. Знову скористаємося незалежністю випробувань. Тоді одержимо наступні ймовірності елементарних результатів:

$$\boldsymbol{\widetilde{p}_1 = p(\omega_1) = P\{i_1 = 0, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 0\} = \beta_1\beta_2},$$

$$\boldsymbol{\widetilde{p}_2 = p(\omega_2) = P\{i_1 = 0, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 1\} = \beta_1(1 - \beta_2)},$$

$$\boldsymbol{\widetilde{p}_3 = p(\omega_3) = P\{i_1 = 1, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 0\} = (1 - \beta_1)\beta_2},$$

$$\boldsymbol{\widetilde{p}_4 = p(\omega_4) = P\{i_1 = 1, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 1\} = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2)}.$$

Подія, яка полягає в тому, що відбракованим є придатний виріб, містить у собі елементарні події $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_2}$, $\boldsymbol{\omega_3}$. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$\boldsymbol{\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3 = \beta_1\beta_2 + \beta_1(1 - \beta_2) + (1 - \beta_1)\beta_2 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2}.$$

Відповідь. Ймовірність того, що за результатами двох перевірок буде відбракований придатний виріб дорівнює $\boldsymbol{\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2}$.

2.5. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей

При аксіоматичній побудові теорії ймовірностей вихідним «матеріалом» служать простір елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ та виділений у ньому клас підмножин, що утворює поле подій $\boldsymbol{S}$. Будова простору $\boldsymbol{\Omega}$ і класу $\boldsymbol{S}$ визначається конкретною областю застосування.

Ймовірністю називається числова функція, визначена на полі подій $\boldsymbol{S}$, що має наступні властивості.

<u>**Аксіома 1**</u>. Для будь-якої події $A \in S$: $P(A) \geqslant 0$.

<u>**Аксіома 2**</u>. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці $P(\Omega) = 1$.

<u>**Аксіома 3**</u>. Ймовірність об'єднання двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто для будь-яких двох несумісних подій $A \in S$, $B \in S$, $A \cap B = \varnothing$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Клас $\boldsymbol{S}$ всіх підмножин із $\boldsymbol{\Omega}$ утворює поле. Тепер переконаємося, що скінченна схема задовольняє вимогам аксіоми 1. Для цього виберемо довільну подію $\boldsymbol{A}$, що є підмножиною $\boldsymbol{\Omega}$. В силу того, що $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$, то, відповідно до скінченної схеми, має місце формула (2.6), з якої випливає, що $P(A) \geqslant 0$, тобто умова аксіоми 1 виконується. Умова аксіоми 2 виконується, тому що $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, і на підставі (2.6)

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Умова аксіоми 3 також виконується, тому що вона є змістом теореми додавання для скінченної схеми. Таким чином, скінченна схема є прикладом об'єкта, для якого виконується система аксіом теорії ймовірностей.

Як приклад імовірнісної схеми з безперервним простором елементарних подій розглянемо схему з геометричними ймовірностями. Нехай простором елементарних подій служить множина точок деякої області $\boldsymbol{G}$, що має площу на площині. Як події будемо розглядати підмножини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, … цієї області, які мають площу. Клас цих підмножин також утворює поле. При цьому ймовірність будь-якої події $\boldsymbol{A}$ (підмножини, що має площу $\boldsymbol{mes(A)}$), можна задати в такий спосіб:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(G)}\,.$$

Описана схема також задовольняє аксіомам теорії ймовірностей. Аналогічно можна побудувати геометричні ймовірності в будь-якому скінченновимірному просторі.

У багатьох випадках виконання аксіоми 3 потрібно в розширеному варіанті. Аксіома 3 постулює додавання ймовірностей для скінченної кількості несумісних подій, тоді як у розширеному варіанті мова йде про зліченну кількість несумісних подій.

<u>**Аксіома 3'**</u>. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\,.$$

Аксіоми теорії ймовірностей лише постулюють існування ймовірностей для всіх подій, що утворюють поле $\boldsymbol{S}$, і задають певні правила дії з ймовірностями. Експериментальне ж визначення ймовірності будь-якої події $A \in S$ може бути здійснене в результаті випробувань, виконуваних при певному тому ж самому комплексі умов. Із усього вищесказаного випливає, що певна теоретико-імовірнісна схема задається трійкою $\{\Omega, S, P\}$, тобто конкретним простором елементарних подій, конкретним набором підмножин $\boldsymbol{\Omega}$, що утворюють поле, а також конкретним завданням ймовірностей на множинах поля. Набір цих трьох компонентів називається ***імовірнісним простором*** [1, 28]. Ймовірність $\boldsymbol{P}$ на $\{\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{S}\}$ називається ***розподілом ймовірностей на*** $\boldsymbol{\Omega}$.

2.6. Випадкова величина та її функція розподілу

Явища, які відбуваються в природі, є результатом дії внутрішніх і (або) зовнішніх факторів. Якщо зміна явища відбувається під впливом одного фактора, то цей вплив можна до деякої міри визначити, і результат зміни розглядається як детермінований цим фактором. Але часто кінцевий результат явища, що змінюється, викликаний дією багатьох причин, визначення яких викликає великі труднощі й не завжди є доцільним. Дія комплексу причин щоразу викликає певні зміни в кількісних характеристиках розглянутого явища. Причому сутність явища не змінюється. Такі коливання в значеннях кількісної характеристики є випадковими. Вони викликані дією множини причин, кожна з яких може бути неістотною для природи даного явища в цілому або для окремих його якостей. При багаторазовому повторенні тих самих умов експерименту (при дії того самого комплексу причин) у змінах значень кількісної характеристики ознаки (явища) можна виявити деяку закономірність. Ця закономірність, що є присутньою у випадкових числах, буде відображати ту якісну сторону (якісна ознака) явища, що найбільш яскраво проявляється у всіх експериментах (випробуваннях).

Кількісна характеристика розглянутої ознаки (явища), значення якої залежить від випадку, називається випадковою величиною [55]. Отже, ***випадковою величиною*** називається функція $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$, визначена на множині елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$. У випадку скінченної або зліченної множини подій $\boldsymbol{\Omega}$ випадковою величиною є будь-яка функція, визначена на $\boldsymbol{\Omega}$. У загальному випадку функція $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$ повинна бути такою, щоб для будь-яких $\boldsymbol{x}$ подія $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) < \boldsymbol{x}\}$, яка полягає в тому, що випадкова величина $\boldsymbol{X}$ попадає в інтервал $(-\infty, \boldsymbol{x})$, належала полю подій $\boldsymbol{S}$ і, таким чином, для будь-якої такої події була визначена ймовірність $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} < \boldsymbol{x}\}$.

Випадкові величини позначаються прописними латинськими буквами $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \ldots$, а значення випадкової величини на елементарній події – строчними латинськими буквами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$. Якщо множина елементарних подій є скінченною, то випадкову величину можна задати, перелічивши її значення на всіх елементарних подіях. Однак у багатьох задачах немає необхідності розглядати випадкові величини як функції від елементарної події, а достатньо лише знати ймовірності будь-яких подій, пов’язаних з випадковою величиною, тобто закон розподілу випадкової величини. Говорять, що ***закон розподілу випадкової величини*** $\boldsymbol{X}$ заданий, якщо для будь-якої множини дійсних чисел $\boldsymbol{B}$, що є об’єднанням або перетином скінченної або зліченної кількості проміжків, задана ймовірність $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{B}\}$ події, що полягає в тому, що $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega})$ прийме значення із цієї множини [34].

Випадкові величини поділяються на безперервні й дискретні. Значення, прийняті безперервною випадковою величиною, повністю заповнюють один або кілька числових інтервалів. Значення дискретної випадкової величини розташовані дискретно, тобто суцільно не заповнюють ніякий числовий інтервал. Таким чином, випадкова величина є дискретною, якщо існує скінченна або зліченна множина чисел $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \ldots$ таких, що $\boldsymbol{P}\{X = \boldsymbol{x_n}\} = \boldsymbol{p_n} \geqslant 0$, $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} + \boldsymbol{p_3} + \ldots = \mathbf{1}$. Закон розподілу дискретної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ визначений, якщо відомі всі $\boldsymbol{x_n}$ і ймовірності $\boldsymbol{p_n} = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x_n}\}$ такі, що $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} + \boldsymbol{p_3} + \ldots = \mathbf{1}$. Якщо скласти таблицю, у верхньому рядку якої помістити значення дискретної випадкової величини, а в нижньому – відповідні ймовірності, то одержимо ***ряд розподілу випадкової величини***. Сума ймовірностей, записаних у другому рядку таблиці, повинна дорівнювати одиниці. Ряд розподілу задає закон розподілу дискретної випадкової величини.

Закон розподілу випадкової величини X заданий, якщо можна визначити ймовірність події $\{\omega\text{: } X(\omega) \in A\}$ для будь-якої множини A, що є об'єднанням або перетином довільних проміжків. У свою чергу, будь-які такі множини A можна отримати за допомогою операцій об'єднання, перетину й доповнення із множини всіляких інтервалів вигляду $(-\infty, x)$. Отже, і події $\{\omega\text{: } X(\omega) \in A\}$ можна отримати за допомогою відповідних операцій над подіями із усіляких подій вигляду $\{\omega\text{: } X(\omega) < x\}$. За визначенням випадкової величини для будь-яких x подія $\{\omega\text{: } X(\omega) < x\}$ належить полю подій S. Отже, і події вигляду $\{\omega\text{: } X(\omega) \in A\}$ також належать S і для них визначена ймовірність. Таким чином, щоб задати закон розподілу довільної випадкової величини X, досить знати для будь-яких x ймовірності подій $\{\omega\text{: } X(\omega) < x\}$.

Функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X визначається формулою

$$F_X(x) = P\{\omega\text{: } X(\omega) < x\}.$$

Цю рівність зазвичай записують коротше у вигляді $F_X(x) = P\{X < x\}$. Для простоти в тих випадках, коли це не може призвести до неточності, пишуть $F(x)$ замість $F_X(x)$.

Розглянемо **<u>властивості функції розподілу</u>** [35].

1. *Функція розподілу приймає значення із проміжку* $[0, 1]$: $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$. <u>*Доведення*</u>. Дана властивість випливає з того, що функція розподілу – це ймовірність події $\{X < x\}$, а значення ймовірності будь-якої події є невід'ємним і не перевищує одиниці.
2. *Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з напівінтервалу* $[x_1, x_2)$, *дорівнює різниці* $F(x_2) - F(x_1)$:

$$P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1)\,.$$

<u>*Доведення*</u>. Подамо подію, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме значення, менше за x_2, у вигляді суми несумісних подій:

$$\{\omega\!: X(\omega) < x_2\} = \{\omega\!: X(\omega) < x_1\} \cup \{\omega\!: x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}\,.$$

За аксіомою додавання, ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$F(x_2) = P\{\omega\!: X(\omega) < x_2\} = P\{\omega\!: X(\omega) < x_1\} + P\{\omega\!: x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\} =$$
$$= F(x_1) + P\{\omega\!: x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\}\,.$$

звідки й випливає доказувана властивість.

3. *Функція розподілу – неубутна функція*, тобто $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$. <u>*Доведення*</u>. Нехай $x_2 > x_1$. Повторюючи наведені вище викладення та з огляду на те, що ймовірність будь-якої події є невід'ємною, отримуємо

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{\omega\!: x_1 \leqslant X(\omega) \leqslant x_2\} \geqslant F(x_1)\,.$$

4. $P\{X \geqslant x\} = 1 - F(x)$. <u>*Доведення*</u>. Подія $\{\omega\text{: } X(\omega) \geqslant x\}$ є протилежною до події $\{\omega\text{: } X(\omega) < x\}$. Отже,

$$P\{X \geqslant x\} = 1 - P\{X < x\} = 1 - F(x)\,.$$

5. Якщо $x \to \infty$, то $F(x) \to 1$.
6. Якщо $x \to -\infty$, то $F(x) \to 0$.

7. *Функція розподілу безперервна ліворуч*, тобто

$$\lim_{\Delta\to+0} F(x-\Delta) = F(x) .$$

Функцією розподілу може бути будь-яка функція, що задовольняє властивостям 1 – 7, тобто безперервна ліворуч у кожній точці x монотонна неубутна функція, множиною значень якої є проміжок $(0, 1)$, що містить або не містить граничні точки 0 і 1.

2.7. Розподіл дискретних випадкових величин

Дискретні випадкові величини приймають скінченну або зліченну кількість значень. Нехай X – дискретна випадкова величина, що приймає значення $x_1 < x_2 < x_3 <\ldots$ з ймовірностями p_1, p_2, p_3, $\ldots$, $p_1+ p_2+ p_3+\ldots=1$. Якщо по осі абсцис відкласти x_1, x_2, x_3, $\ldots$, а по осі ординат – відповідні ймовірності p_1, p_2, p_3, $\ldots$ і з'єднати сусідні точки відрізками, то одержимо ***багатокутник розподілу випадкової величини X***. Багатокутник розподілу – це графічне зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини. Розглянемо функцію розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X. Якщо $x \leqslant x$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0$, тому що в цьому випадку подія $\{X < x\}$ є неможливою. Якщо $x_1 < x \leqslant x_2$, то подія $\{X < x\}$ здійсниться тоді й лише, коли здійсниться подія $\{X = x_1\}$, тому $F(x) = P\{X < x\} = P\{X = x_1\} = p_1$. Якщо $x_2 < X \leqslant x_3$, то подія $\{X < x\}$ дорівнює сумі подій $\{X = x_1\}$ і $\{X = x_2\}$, а також

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\} = p_1 + p_2 .$$

Аналогічно, якщо $x_i < X < x_{i+1}$, то $F(x) = p_1+ p_2+ \ldots+ p_i$. Таким чином, функція розподілу дискретної випадкової величини дорівнює

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p_i ,$$

де $p_i = P\{X = x_i\}$ і підсумовування відбувається за тими i, для яких $x_i < x$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини є незмінною на проміжках $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, $\ldots$, $(x_i, x_{i+1}]$, $\ldots$. У точках x_1, x_2, x_3, $\ldots$ функція розподілу має стрибки, що дорівнюють ймовірності того, що випадкова величина прийме відповідне значення.

Приклад 2.4. Знайти функцію розподілу випадкової величини, що дорівнює кількості випадків «*герба*» при киданні двох монет [13].

Розв'язання. В залежності від результату експерименту, ця кількість може виявитися рівною **0**, **1** або **2**. Виберемо в якості елементарних наступні події:

ω_1 = ГГ = {на першій монеті випав «*герб*», на другій монеті – теж «*герб*»},

ω_2 = РГ = {на першій монеті випала «*решка*», на другій монеті – «*герб*»},

ω_3 = ГР = {на першій монеті випав «*герб*», на другій монеті – «*решка*»},

ω_4 = РР = {на першій монеті випала «*решка*», на другій монеті – теж «*решка*»}.

Кількість X «*гербів, що випа*ли», є функцією від елементарної події:

$X(\omega_1) = X$(ГГ) $= 2$,

$X(\omega_2) = X$(РГ) $= 1$,

$X(\omega_3) = X$(ГР) $= 1$,

$X(\omega_4) = X$(РР) $= 0$.

Результат експерименту є випадковим, тому значення X також є випадковим. Функція $X = X(\omega_i)$ – випадкова величина, визначена на множині $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Якщо монети симетричні, то елементарні події ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 однаково можливі, й тому природно в математичній моделі експерименту вважати ймовірності $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ такими, що дорівнюють $\frac{1}{4}$. Знаючи ймовірності $P(\omega_i)$, можна знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме те або інше значення. У наведеній таблиці подано елементарні події ω_i, ймовірності $P(\omega_i)$ та значення випадкової величини X, що дорівнює кількості «*гербів, що випали*».

i	1	2	3	4
ω_i	ГГ	РГ	ГР	РР
$P(\omega_i)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$
$X(\omega_i)$	21	1	1	0

Слід зазначити, що випадкова величина X може приймати на різних елементарних подіях однакові значення. Так, у розглянутому прикладі $X(\omega_2) = X(\omega) = 1$. Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме нульове значення, є подією $\{\text{РР}\}$. Ймовірність цієї події дорівнює $\frac{1}{4}$. Подія $\{\omega_i\colon X(\omega_i) = 1\}$ дорівнює події $\{\text{РГ, ГР}\}$. Її ймовірність дорівнює

$$P\{X = 1\} = P\{\text{РГ}, \text{ГР}\} = P\{\text{РГ}\} + P\{\text{ГР}\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

В той же час,

$$P\{X = 2\} = P\{\text{ГГ}\} = \frac{1}{4}\,.$$

При побудові математичної моделі в цьому випадку можна було б об’єднати події $\{\text{РГ}\}$ і $\{\text{ГР}\}$ в одну, та у якості елементарних розглядати події $\{0\}$, $\{1\}$ і $\{2\}$, що полягають в тому, що кількість «*гербів, що випали*», дорівнює нулю, одиниці або двійці відповідно: $\{0\} = \{\text{РР}\}$, $\{1\} = \{\text{ГР, РГ}\}$, $\{2\} = \{\text{ГГ}\}$. Щоб задати ймовірнісний простір та випадкову величину на «звуженому» просторі елементарних подій, у цьому випадку досить задати лише можливі значення випадкової величини й відповідні ймовірності, з якими ці значення приймаються. Вони наведені в наступній таблиці, де x_i – значення випадкової величини, $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

x_i	0	1	2
p_i	$1/4$	$1/2$	$1/4$

На рис. 2.1*а* наведений багатокутник розподілу розглянутої випадкової величини.

Знайдемо тепер функцію розподілу цієї випадкової величини. Функція розподілу при $x \leqslant 0$ дорівнює нулю. У точці $x = 0$ вона має стрибок, що дорівнює $\frac{1}{4}$, у точці $x = 1$ – стрибок, що дорівнює $\frac{1}{2}$, у точці $x = 2$ – стрибок, що дорівнює $\frac{1}{4}$. Між цими точками функція розподілу є постійною. При $x > 2$ функція $F(x) = 1$. Отже,

$$F(x)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{якщо } \boldsymbol{x}\leqslant \mathbf{0};\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, & \text{якщо } \mathbf{0}<x\leqslant 1;\\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}, & \text{якщо } \mathbf{1}<x\leqslant 2;\\ \mathbf{1}, & \text{якщо } \boldsymbol{x}>2\,.\end{cases}$$

Графік функції $\boldsymbol{F(x)}$ зображений на рис. 2.1*б*.

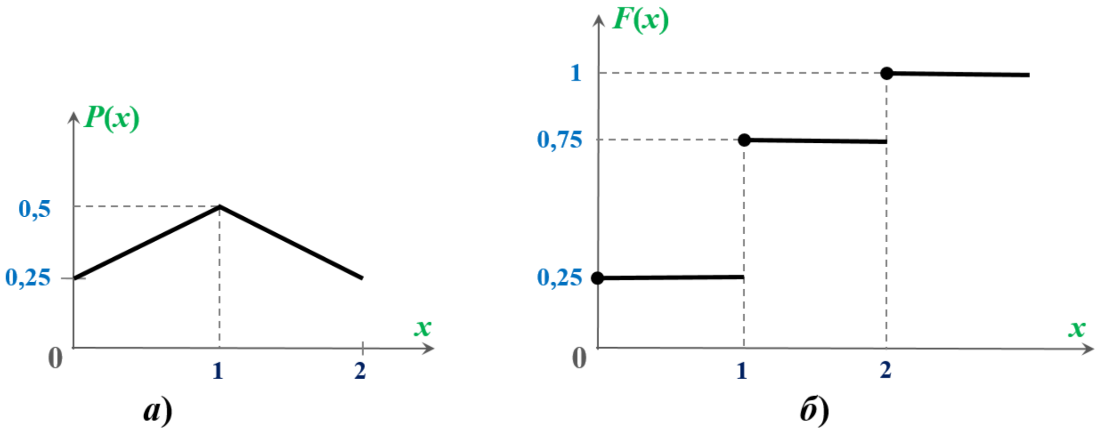


Рис. 2.1. Багатокутник та функція розподілу дискретної випадкової величини

Випадкова величина $\boldsymbol{X}$, що в якості значень має цілі числа від **1** до $\boldsymbol{n}$, має **<u>рівномірний розподіл на множині {1, 2, …, *n*}</u>**, якщо

$$P\{x=m\}=\frac{1}{n}\,,\quad m=\overline{1,n}\,.$$

Багатокутник розподілу випадкової величини $\boldsymbol{x}$ є відрізком прямої, паралельним до осі абсцис. Кінці відрізка мають координати $\left(\mathbf{1},\frac{1}{n}\right)$ і $\left(\boldsymbol{n},\frac{1}{n}\right)$.

2.8. Розподіл безперервних випадкових величин

Множина значень безперервної випадкової величини є незліченною та зазвичай є деяким проміжком, скінченним або нескінченним. Безперервна випадкова величина визначена на незліченній множині елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$.

Нехай випадкова величина задає взаємно однозначну відповідність між множиною елементарних подій та відрізком числової осі **[0, T]**. Елементами поля подій $\boldsymbol{S}$ – випадковими подіями – є об'єднання всіляких проміжків, що належать відрізку **[0, T]**. Ймовірність будь-якої події дорівнює відношенню довжин проміжків, що складають події, до довжини проміжку **[0, T]** (геометрична інтерпретація ймовірності). Позначимо через $\boldsymbol{\varphi(t)}$ функцію $\boldsymbol{\varphi(t)}=\frac{1}{T}$, $\mathbf{0}\leqslant \boldsymbol{t}\leqslant \boldsymbol{T}$. Тоді, якщо $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\in[\mathbf{0},\boldsymbol{T}]$, то

$$P(A)=\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_a^b \mathrm{d}t=\frac{b-a}{T}\,.$$

Якщо ж подія $\boldsymbol{A}$ дорівнює об'єднанню якихось проміжків, що не перетинаються, то ймовірність події $\boldsymbol{A}$ дорівнює сумі інтегралів від $\boldsymbol{\varphi(t)}$ по цих проміжках [46]:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \int_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}\ . \tag{2.7}$$

В аналогічний спосіб можна задати ймовірність і в більш загальному випадку. Нехай множина елементарних подій $\boldsymbol{\Omega}$ збігається із множиною дійсних чисел $\boldsymbol{\Omega} = \{\boldsymbol{x}\text{: } \boldsymbol{x} \in (-\infty, \infty)\}$ і нехай випадковими подіями з поля подій $\boldsymbol{S}$ є всілякі скінченні або зліченні об'єднання. Ймовірність на полі подій $\boldsymbol{S}$ задається за допомогою невід'ємної функції $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, інтегрованої на будь-якому скінченному або нескінченному проміжку й такої, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{1}\ .$$

Якщо подія $\boldsymbol{A}$ дорівнює об'єднанню проміжків, що не перетинаються, то ймовірність $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$ дорівнює сумі інтегралів від $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ по цих проміжках, тобто визначається за формулою (2.7). Визначена в такий спосіб на $\boldsymbol{S}$ імовірність задовольняє всім аксіомам теорії ймовірностей [35]. Описаний імовірнісний простір називається ***безперервним імовірнісним простором***.

Не всяка випадкова величина, визначена на незліченній множині $\boldsymbol{\Omega}$, є безперервною. Випадкова величина $\boldsymbol{X}$ називається ***безперервною***, якщо існує така невід'ємна функція $\boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x})$, що при будь-яких $\boldsymbol{x}$ функцію розподілу $\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x})$ можна подати у вигляді:

$$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{y})\mathbf{d}\boldsymbol{y}\ .$$

Будемо розглядати лише такі випадкові величини, для яких $\boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x})$ є безперервною скрізь, крім, можливо, скінченної кількості точок.

Функція $\boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x})$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей*** або ***щільністю розподілу***. Якщо з контексту ясно, про яку випадкову величину йдеться, то пишуть $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ замість $\boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x})$. З означення випливає, що в точках безперервності щільність розподілу дорівнює похідній функції розподілу: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$. З означення також випливає, що щільність розподілу $\boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x})$ визначає закон розподілу випадкової величини $\boldsymbol{X}$ [46].

Щільність розподілу випадкової величини має наступні властивості:

1. *Для будь-яких* $\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2}$:

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x_1} \leqslant \boldsymbol{X} < \boldsymbol{x_2}\} = \int_{\boldsymbol{x_1}}^{\boldsymbol{x_2}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}\ .$$

Ймовірність $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x_1} \leqslant \boldsymbol{X} < \boldsymbol{x_2}\}$ дорівнює площі фігури, обмеженої прямими $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ і щільністю розподілу $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$. На рис. 2.2 зображена щільність розподілу ймовірностей $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ і заштрихована площа фігури, що дорівнює ймовірності $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x_1} \leqslant \boldsymbol{X} < \boldsymbol{x_2}\}$.

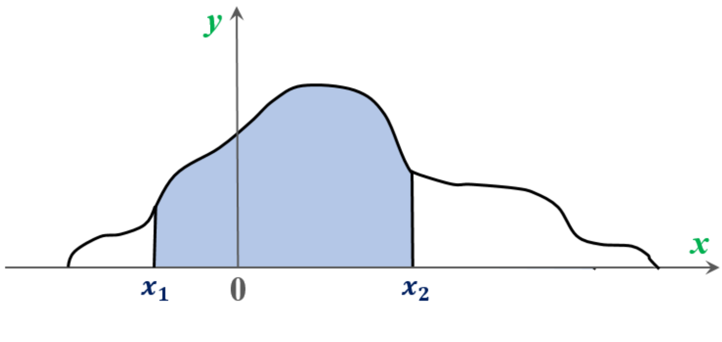


Рис. 2.2. Щільність розподілу

2. *Інтеграл по всій числовій прямій від щільності розподілу ймовірностей дорівнює одиниці*, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{p(x)\mathrm{d}x = 1} .$$

3. *Імовірність того, що безперервна випадкова величина прийме конкретне значення, дорівнює нулю*, тобто $\boldsymbol{P\{X = a\} = 0}$.

Із властивості 3 випливає, що для безперервних випадкових величин

$$\boldsymbol{P\{x_1 \leqslant X < x_2\} = P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = P\{x_1} < X < \boldsymbol{x_2\} = P\{x_1} < X \leqslant \boldsymbol{x_2\}} .$$

Щільністю розподілу може бути будь-яка невід’ємна функція, інтеграл від якої по всій числовій осі дорівнює одиниці. Функція розподілу випадкової величини будь-якій точці $\boldsymbol{x_p}$ ставить у відповідність ймовірність

$$\boldsymbol{p = F(x_p) = P\{X < x_p\}} .$$

Інколи виникає зворотна задача: за заданим значенням $\boldsymbol{p}$ знайти таке $\boldsymbol{x_p}$, щоб $\boldsymbol{F(x_p) = p}$. Точка $\boldsymbol{x_p}$, для якої виконується ця умова, називається ***квантиллю***, що відповідає заданому рівню ймовірності $\boldsymbol{p}$, або **100 %*-ю квантиллю***. Із означення безперервної випадкової величини випливає, що її функція розподілу також є неперервною. Тому для безперервної випадкової величини для будь-яких $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{0 < p < 1}$, існують квантилі $\boldsymbol{x_p}$. Якщо прийняти, наприклад, $\boldsymbol{p = 0{,}95}$, то отримаємо **95 %**-ву квантиль. В математичній статистиці зазвичай використовують квантилі, що відповідають рівням ймовірності **0,01**, **0,05**, **0,1**, **0,9**, **0,95**, та **0,99** [31]. Квантиль, що відповідає значенню $\boldsymbol{p = 0{,}5}$, називається ***медіаною розподілу***. Медіана є однією із характеристик центру розподілу ймовірностей. Випадкова величина з однаковою ймовірністю може приймати значення, менші або більші за медіану.

Безперервна випадкова величина $\boldsymbol{X}$, що приймає значення на відрізку $\boldsymbol{[a, b]}$, має **<u>рівномірний розподіл</u>**, якщо щільність розподілу $\boldsymbol{p(x)}$ має вигляд

$$\boldsymbol{p(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \notin [a, b]}; \\ \boldsymbol{\dfrac{1}{b-a}}, & \boldsymbol{x \in [a, b]}. \end{cases}$$

Для випадкової величини, що має рівномірний розподіл, імовірність того, що випадкова величина прийме значення із заданого інтервалу $\boldsymbol{(x, x + \Delta) \in [a, b]}$, не залежить від розташування цього інтервалу на числовій осі й пропорційна довжині цього інтервалу $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\boldsymbol{P\{x} < X < x + \Delta\} = \int_{\boldsymbol{x}}^{x+\Delta} \boldsymbol{\frac{1}{b-a}\mathrm{d}t} = \frac{\Delta}{\boldsymbol{b-a}} .$$

Функція розподілу має вигляд:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \leqslant a}; \\ \boldsymbol{\dfrac{x-a}{b-a}}, & \boldsymbol{a} < x \leqslant b; \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{x} > b. \end{cases}$$

Знайдемо медіану розподілу $\boldsymbol{x_{0,5}}$. Маємо $\boldsymbol{F(x_{0,5}) = 0{,}5}$, звідки випливає, що

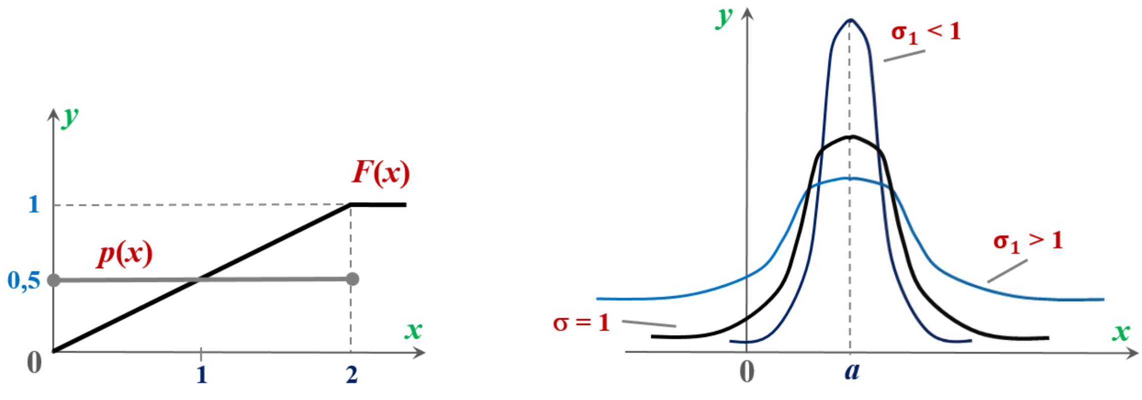
$$\boldsymbol{x_{0,5} = \frac{a+b}{2}} .$$

Отже, медіана рівномірного розподілу збігається з серединою відрізку $[a, b]$. Графіки щільності розподілу та функції розподілу безперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл на відрізку **[0, 2]**, наведені на рис. 2.3*а*.

Безперервна випадкова величина X має **нормальний розподіл** ймовірностей з параметрами a та $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд [1, 4, 7]

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Якщо X має нормальний розподіл з параметрами a та σ, то коротко це записується у вигляді $X \sim N(a, \sigma)$. Графіки щільності розподілу при різних значеннях параметра σ та при одному й тому самому значенні a наведені на рис. 2.3*б*.



а) *б*)

Рис. 2.3. Рівномірний та нормальний розподіл безперервної випадкової величини

Щільність розподілу $p(x)$ є симетричною відносно прямої $x = a$ (тобто $p(a + y) = p(a - y)$). Якщо $x \to \pm\infty$, то $p(x) \to 0$. При зменшенні σ графік «стягується» до своєї осі симетрії $x = a$. Нормальний розподіл відіграє особливу роль у теорії ймовірностей та її застосунках. Це пов'язане з тим, що при виконанні певних умов сума великої кількості випадкових величин має «приблизно» нормальний розподіл.

Інтегральна функція цього розподілу виражається співвідношенням [28]

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t-a}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t.$$

Зміст кривої нормального розподілу полягає в наступному: значення випадкової величини з нормальним законом розподілу розташовуються по обидві сторони від генерального середнього a, і чим далі ці значення віддалені від a, тим вони менш ймовірні. Крім того, чим меншим є σ^2, тим швидше гілки кривої наближаються до осі абсцис, тобто тим менш ймовірними є значення випадкової величини, що сильно відхиляються від a [55].

Нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$ називається ***нормованим***, якщо його щільність дорівнює [20]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (2.8)$$

Для нормованого нормального розподілу функція розподілу має наступний вигляд:

$$\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}\;. \qquad (2.9)$$

Оскільки щільність нормованого нормального розподілу (2.8) є парною, то невизначений інтеграл від неї є функцією непарною. Тому замість нього використовується *функція Лапласа*, яку часто позначають як **$\Phi(x)$ = $N(0, 1)$**:

$$\boldsymbol{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}\;. \qquad (2.10)$$

Значення цієї функції вже розраховані за допомогою обчислювальних методів ЕОМ та опубліковані в спеціальних таблицях. В таблиці 2.1 наведені деякі значення функції Лапласа **$\Phi(x)$** [35].

Таблиця 2.1

Значення розподілу нормальної функції Лапласа $\boldsymbol{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
– 0.0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
– 0.1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
– 0.2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
– 0.3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
– 0.4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
– 0.5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
– 0.6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
– 0.7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
– 0.8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
– 0.9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
– 1.0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
– 1.1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
– 1.2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
– 1.3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
– 1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
– 1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
– 1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
– 1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
– 1.8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
– 1.9	0,0288	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
– 2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
– 2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
– 2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
– 2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
– 2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
– 2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
– 2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
– 2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
– 2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
– 2.9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0014
	– 3.0	**– 3.1**	**– 3.2**	**– 3.3**	**– 3.4**	**-3.5**	**– 3.6**	**– 3.7**	**– 3.8**	**– 3.9**
	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000

В таблиці наведені значення функції **Φ** для від'ємних значень $\boldsymbol{x}$. Для визначення значень **$\Phi(x)$** при $\boldsymbol{x \geqslant 0}$ використовують співвідношення

$$\boldsymbol{\Phi(x)=1-\Phi(-x)}\;.$$

Так, наприклад,

$$\boldsymbol{\Phi(1,65)=1-\Phi(-1,65)=1-0,0495=0,0905}\;.$$

Незважаючи на те, що нормальний розподіл характеризує ряди з безперервними одиницями, при досить великій кількості спостережень він добре описує також і варіювання дискретних одиниць. До цього закону наближаються й інші типи розподілів.

Контрольні запитання

1. Що таке випадкова подія?
2. Яка подія є достовірною, а яка неможливою?
3. Які події є несумісними?
4. Що таке добуток подій?
5. Як визначається ймовірність складеної події?
6. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей.
7. В чому полягає урнова схема?
8. Які події є незалежними?
9. Наведіть формулу умовної ймовірності.
10. Сформулюйте теорему множення для незалежних подій.
11. У чому полягає скінченна схема з неоднаково можливими результатами?
12. Перелічить основні дії над подіями та їх властивості.
13. Що таке поле подій?
14. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
15. Що таке імовірнісний простір?
16. Що таке розподіл ймовірностей?
17. Коли заданий закон розподілу випадкової величини?
18. Як одержати ряд розподілу випадкової величини?
19. Якою формулою визначається функція розподілу випадкової величини?
20. Перелічить властивості функції розподілу.
21. Які вам відомі закони розподілу дискретних випадкових величин.
22. Перелічить відомі вам закони розподілу безперервних випадкових величин.

3. СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

3.1. Статистичне спостереження

Статистичне спостереження – це перша стадія статистичного дослідження, яка складається із вимірювання та реєстрації ознак одиниць досліджуваної сукупності. Зібрані й зафіксовані дані є первинним статистичним матеріалом. Сукупність одиниць, про які збираються дані, утворює ***об'єкт спостереження***. Нехай для вивчення випадкової величини, що характеризує деяке явище (наприклад, демографічні або антропометричні показники тощо), проводиться експеримент. Кожне випробування (результат) експерименту надає дослідникові певне значення випадкової величини. Сукупність значень випадкової величини (їх ще називають ***варіантами***), отриманих у ході експерименту, називається ***випадковою вибіркою***. Нехай випадкова величина $\boldsymbol{X}$ у ході експерименту, що складається з $\boldsymbol{n}$ випробувань, прийняла ряд значень $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ (не обов'язково всі значення $\boldsymbol{x}$ є різними, припускається наявність однакових значень). Тоді говорять, що $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ є випадковою вибіркою для ***X об'єму n***. На практиці суцільне дослідження (тобто дослідження кожного об'єкта із досліджуваної сукупності) проводять вкрай рідко. До того ж, якщо ця сукупність містить велику кількість об'єктів, або дослідження об'єкта потребує порушення його функціонального стандарту, то суцільне дослідження взагалі є неможливим. В таких випадках із всієї сукупності випадково відбирають обмежену кількість об'єктів та піддають дослідженню лише їх. ***Генеральною сукупністю*** називається сукупність об'єктів, із яких здійснюється вибірка [20]. Прикладом дослідження генеральної сукупності може служити загальний перепис населення. В цьому випадку дійсно в якийсь спосіб обліку підлягає кожен об'єкт сукупності. При цьому фіксується значення досліджуваної ознаки у кожної одиниці спостереження. ***Перепис*** – це спеціально організоване спостереження, що повторюється, як правило, через рівні проміжки часу з метою отримання даних про чисельність, склад та стан об'єкта статистичного спостереження за низкою ознак. Одиниці спостереження мають відповідати певним обмежувальним критеріям – ***цензу***. Такий ценз встановлюється, виходячи із мети статистичного дослідження. Наприклад, при демографічних дослідженнях для встановлення контингенту дітей дошкільного та шкільного віку, визначення їх забезпечення дитячими закладами та школами в якості об'єкта спостереження беруть населення, що постійно мешкає на досліджуваній території. До населення, що постійно мешкає в певному населеному пункті, належать особи, що мешкають в даному населеному пункті незалежно від їх фактичного місцезнаходження на момент обліку. З іншого боку, для визначення рівня обслуговування населення міським транспортом в якості об'єкта приймають наявне населення, до якого належать всі особи, що фактично знаходяться в даному населеному пункті незалежно від того, є таке їх перебування тимчасовим або постійним [9, 21]. Необхідно також розрізняти одиницю сукупності та одиницю спостереження. ***Одиниця сукупності*** – це те, що саме піддається дослідженню. ***Одиниця спостереження*** – це джерело відомостей про одиниці сукупності. Одиниці спостереження можуть як збігатися із одиницями сукупності, так і не збігатися.

Розрізняють два види способів отримання вибірки: без розчленування генеральної сукупності на частини та із таким розчленуванням. До першого виду належать випадкові відбори (повторювані або безповторні), коли об'єкти вилучають по одному із генеральної сукупності. Такий відбір можна здійснювати за допомогою генератора випадкових чисел. Другий спосіб відбору містить в собі наступні **різновиди розчленування генеральної сукупності**.

1. *Механічний*.

2. *Типовий*.

3. *Серійний*.

Якщо генеральну сукупність розділюють на кількість груп, що дорівнює об'єму вибірки, з подальшим відбором із кожної групи по одному об'єкту, то такий вибір називається ***механічним*** (***систематичним***). Він здійснюється в систематичному порядку суворо через рівні інтервали із загального переліку одиниць спостереження. Він є зручним при плануванні та вилученні вибірки та є доволі поширеним. При механічному відборі величина інтервалу (крок відбору) розраховується шляхом ділення кількості одиниць в генеральній сукупності на кількість одиниць у вибірковій сукупності (об'єм генеральної сукупності ділиться на об'єм вибірки). Механічний відбір можна застосовувати, якщо одиниці генеральної сукупності в основі вибірки розташовані у випадковому порядку. При цьому для вибіркових спостережень є обов'язковим принцип випадковості. Він реалізується завдяки тому, що випадковим є знаходження одиниць в точках відбору [23].

Відбір, при якому об'єкти вибираються із кожної «типової» частини генеральної сукупності, називається ***типовим*** (***стратифікованим***, ***районованим***, ***розгалуженим***). Наприклад, відбір із представників кожної спеціальності, а не із загальної кількості працівників, або із представників кожної національності, а не із загальної кількості населення, є типовим. Групування за типами зазвичай здійснюється за поєднанням декількох істотних ознак з таким розрахунком, щоб розмежувати між собою ті типи одиниць, що мають особливо сильні відмінності. В межах кожного із виділених типів бажано мати високий ступінь однорідності одиниць. Використання типової вибірки дозволяє:

- значно скоротити величину помилки репрезентативності, тому що величина випадкової помилки визначається лише варіацією ознаки між одиницями всередині типу. Вплив варіації ознаки між типами на помилку вибірки є неможливим, оскільки при формуванні типів в вибірковій сукупності при пропорційному відборі відтворюється фактична структура генеральної сукупності;
- забезпечити переваги організаційного характеру, коли, наприклад, переважніше доручити збирання інформації відокремленим закладам при зберіганні централізованого загального керівництва роботами (декілька різних експедицій з однаковою тематикою, робота різних дослідницьких груп в різних архівах та інше);
- розділити за типами ступінь точності результатів спостережень, якщо це є необхідним у відповідності з задачами дослідження;
- забезпечити зіставність даних за типами з метою порівняльного аналізу.

Розрізняють *три види типової вибірки* в залежності від способу визначення кількісних пропорцій між типами в вибірковій сукупності.

- Структура вибірки є пропорціональною структурі генеральної сукупності. Пропорційний відбір означає, що в вибірковій сукупності зберігаються ті ж самі кількісні пропорції між типами, які мають місце в генеральній сукупності.
- Рівномірне розташування одиниць вибіркової сукупності за типами – це відбір з рівними об’ємами вибірки за кожним типом. Такий вид вибірки є найбільш переважним при різькій диференціації шарів за кількістю одиниць генеральної сукупності, що входять до їх складу. При рівномірному відборі всі типи у вибірковій сукупності мають рівну та достатню наповненість, тому обчислені за ними вибіркові показники є достовірними на рівні кожного типу. Для отримання зведених підсумків за всією сукупністю при рівномірній типовій вибірці потрібно розраховувати зважені показники, щоб відтворити реальну структуру сукупності.
- Відбір з частками, які пропорційні величині дисперсії (оптимальна вибірка). З науково-методологічної точки зору, такий вид типової вибірки є найбільш коректним. Даний метод формування типової вибірки називають *методом Неймана*, який запропонував його в1934 році. При оптимальному розташуванні вибірки, як і при рівномірному відборі за типами, визначення підсумків за всією сукупністю потребує процедури зважування для відновлення фактичної структури сукупності. Теоретичне підґрунтя принципу оптимального розташування типової вибірки полягає в наступному. Помилка репрезентативності має тим більшу величину, чим більшою є неоднорідність генеральної сукупності. Отже, для вирівнювання за типами величини помилки репрезентативності треба збільшити у складі вибіркової сукупності об’єм тих типів, в яких є більшою дисперсія. Практична реалізація даного типу типової вибірки часто виявляється неможливою через відсутність на стадії проектування дослідження (коли треба розрахувати об’єм вибірки по кожному типу) даних про дисперсію досліджуваних показників за кожним окремим типом.

Серійним (***гніздовим***) називається відбір, при якому об’єкти обираються не по одному, а серіями. Цей спосіб використовується, коли досліджувана ознака має незначні коливання в різних серіях. Це відбувається, коли серію подано групою одиниць сукупності, що складають деяку єдність (родина, національність, країна та інше). Перевага відбору серіями полягає в тому, що досягається значна економія витрат на дослідження завдяки більш компактному розміщенню досліджуваних об'єктів. Також відбір серіями надає можливість дослідження взаємозв'язків та процесів, що діють в межах серії. Цінність відбору серіями значно знижується через стрімке збільшення, порівняно з механічним відбором, величини помилки репрезентативності, що потребує компенсації у вигляді збільшення об'єму вибірки. В деяких випадках серія формується штучно, спеціально з метою проведення серійного відбору [23].

На практиці часто застосовується комбінування перелічених способів відбору. Наприклад, генеральну сукупність розбивають на серії однакового об'єму, потім у випадковий спосіб відбирають декілька серій і на завершення складають вибірку шляхом випадкового вилучення окремих об'єктів. Конкретна комбінація способів відбору об'єктів із генеральної сукупності визначається вимогами репрезентативності вибірки [20].

Поняття ***малої вибірки*** не пов'язане ні з якими особливостями техніки формування вибіркової сукупності та відрізняється лише невеликим об'ємом вибіркової сукупності. Зазвичай малою вважається вибірка, об'єм якої складає менше 30 варіант. Виокремлення малої вибірки як особливого різновиду вибіркового спостереження викликано тим, що в умовах обмеженої кількості одиниць спостереження використання таблиці інтегралу ймовірності Лапласа (таблиці 2.1) призводить до значної похибки при розрахунку помилки репрезентативності. Тому у випадках малої вибірки звертаються до розподілу Стьюдента.

3.2. Показники варіації та способи їх обчислення

Варіація є однією з найважливіших категорій, що застосовуються у статистичній науці. Середня величина – узагальнюючий показник, що характеризує сукупність. Але він не показує, як навколо середньої величини розташовані окремі значення вибірки (варіанти). В одному випадку індивідуальні значення мало відрізняються від середнього, а в іншому – ці відмінності є великими. Отже, виникає потреба оцінити поряд з характеристиками середньої величини міру та ступінь варіації. Чим меншою є варіація, тим однорідношою є сукупність і тим більш надійними й типовими є середні величини [24]. Вивчення варіації має велике значення для оцінки сталості і диференціації соціальних явищ при використанні вибіркового та інших статистичних методів. ***Варіація*** – це зміна величини ознаки в статистичній сукупності, тобто наявність серед одиниць сукупності різних значень ознаки, що є наслідком впливу на елементи сукупності різних чинників (факторів). Для кількісної оцінки варіації статистика використовує систему абсолютних та відносних показників, кожен з яких має певні аналітичні переваги при розв'язанні тих чи інших задач статистичного аналізу.

Кожна випадкова вибірка несе в собі деяку якісну й кількісну інформацію про досліджуване явище. Щоб зробити цю інформацію більш компактною й доступною для огляду, використовуються деякі числові характеристики випадкової вибірки, які, природно, розглядаються як наближення до відповідних характеристик самої випадкової величини $\boldsymbol{X}$. До таких числових характеристик належать вибіркове середнє арифметичне значення й вибіркова дисперсія. Іноді слово «вибіркове» опускають.

Вибіркове середнє арифметичне значення – це число, навколо якого розташовуються (по обидві сторони) всі значення вибірки. У загальному випадку для вибірки $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ маємо ***просте середнє арифметичне*** значення [13, 35]:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} \;. \tag{3.1}$$

Розрахунки за формулою (3.1) застосовуються у тому випадку, коли індивідуальні значення досліджуваної ознаки у вибірці не повторюються або зустрічаються однакову кількість разів, тобто можна сказати, що вони мають однакову частоту, або вагу. Однак в початкових даних, особливо при дослідженні сукупностей великого об'єму, одні й ті ж самі значення ознаки повторюються. В цьому випадку дані подаються у зваженому вигляду. Оскільки має виконуватися рівність

$$(\boldsymbol{q_1 + q_2 + \cdots + q_m})\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x_1 q_1 + x_2 q_2 + \cdots + x_m q_m} \,,$$

де $\boldsymbol{q_j}$ – важіль, або ваговий коефіцієнт, тобто кількість разів, з якою у варіаційному ряду зустрічається варіанта $\boldsymbol{x_j}$, є очевидним, що

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{q_j} = \boldsymbol{n} \;. \tag{3.2}$$

З урахуванням цього, середнє арифметичне значення визначається за формулою ***середнього арифметичного зваженого:***

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x_1 q_1 + x_2 q_2 + \cdots + x_m q_m}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{x_j q_j} \;. \tag{3.3}$$

В окремих випадках вагові коефіцієнти можуть бути подані у вигляді відносних величин структури (у відсотках або частках одиниці)

$$\boldsymbol{d_j} = \frac{\boldsymbol{q_j}}{\boldsymbol{n}} \,,$$

де $\boldsymbol{d_j}$ – частка кожного можливого значення варіант у загальній кількості одиниць сукупності. Якщо ці важелі подано в частках одиниці, то

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{d_j} = \boldsymbol{1} \;.$$

В цьому випадку формула для обчислення середнього арифметичного значення спрощується:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{x_j d_j} \;.$$

Середнє арифметичне значення має низку властивостей, що можуть бути використані для спрощення його обчислення.

1. Сума відхилень окремих значень ознаки від середнього арифметичного значення дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \;.$$

2. Сума квадратів відхилень значень ознаки від середнього арифметичного менше суми квадратів відхилень від будь-якого довільного числа $\boldsymbol{A}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = min\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 < \sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2\,.$$

3. Якщо від кожної варіанти відняти або додати до кожної варіанти одне й те саме довільне число $\boldsymbol{A}$, то нове значення середнього арифметичного відповідно зменшиться або збільшиться на те ж саме число:

$$\overline{x_i \pm A} = \overline{x} \pm A\,.$$

4. Добуток середнього арифметичного значення на суму вагових коефіцієнтів (а у відповідності із формулою (3.2) – на об’єм вибірки) завжди дорівнює сумі добутків можливих значень варіант на їх вагові коефіцієнти:

$$\overline{x}\,n = \sum_{j=1}^{m} x_j q_j\,.$$

5. Якщо кожну варіанту розділити або помножити на одне й те саме довільне число $\boldsymbol{A}$, то нове значення середнього арифметичного відповідно зменшиться або збільшиться у стільки ж разів:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A \cdot x_i = A \cdot \overline{x}\,.$$

6. Якщо значення кожного важеля розділити або помножити на одне й те саме довільне число $\boldsymbol{A}$, то значення середнього арифметичного не зміниться:

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot A \cdot q_j}{\sum_{j=1}^{m} A \cdot q_j} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \frac{q_j}{A}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{q_j}{A}} = \overline{x}\,.$$

За допомогою середніх арифметичних значень узагальнюються не лише абсолютні, але й відносні величини. Відмінності в розрахунках при цьому відображають особливості побудови середніх значень на основі значень первинних та вторинних ознак. Порядок розрахунку та форма середнього арифметичного залежить від досліджуваних ознак та від того, які дані для обчислень є в наявності у дослідника. Середні значення первинних ознак (абсолютних величин) визначаються за формулою простого середнього арифметичного (3.1). Базою обчислення середніх значень вторинної ознаки (відносних величин) є початкове співвідношення ознак, що визначають логічну формулу відносного показника. У випадку, коли один із підсумкових показників вторинної ознаки (відносної величини) невідомий, обчислення середнього арифметичного здійснюється на основі початкових даних про величину самої вторинної ознаки (відносної величини) у кожної окремої одиниці сукупності та пов’язаного з нею вагового коефіцієнта. Таким чином, середнє арифметичне вторинної ознаки має вигляд середнього зваженого (3.3) [23].

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини називається сума добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності [20]:

$$\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i} .$$

Із цього означення випливає, що математичне очікування є деякою постійною (невипадковою) величиною. Ймовірнісний зміст математичного очікування полягає в тому, що воно наближено дорівнює (особливо для великої кількості випробувань, тобто при великому об'ємі вибірки) середньому арифметичному значенню випадкової величини. Це дуже наочно демонструє випадок, коли ймовірності всіх можливих значень дискретної випадкової величини дорівнюють одна одній:

$$\boldsymbol{p_i = p = \frac{1}{n}},$$

тобто випадкова величина має рівномірний розподіл ймовірностей. За такого розподілу формула для обчислення математичного очікування перетворюється у формулу (3. 1). <u>*Математичне очікування має наступні властивості*</u>.

1. *Математичне очікування постійної величини* $\boldsymbol{C}$ *дорівнює* $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{M(C) = C} ;$$

2. *Постійний множник можна виносити за знак математичного очікування*:

$$\boldsymbol{M(\alpha X) = \alpha M(X)} ;$$

3. *Математичне очікування суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних очікувань*:

$$\boldsymbol{M(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_m)} .$$

4. *Математичне очікування добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних очікувань*:

$$\boldsymbol{M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_m) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_m)} .$$

Різниця між випадковою величиною та її математичним очікуванням $\boldsymbol{X - M(X)}$ називається ***відхиленням***. Якщо за математичне очікування прийняти його вираз через середнє арифметичне значення за формулою (3.1), то відхилення є різницею між значенням варіанти та середнім арифметичним значенням варіаційного ряду, тобто $\boldsymbol{(x_i - \overline{x})}$. Отже, ***середнє лінійне відхилення*** – це величина, що відображає середнє відхилення від середнього значення в усій сукупності. Воно показує діапазон, в якому лежить основна маса значень ознаки навколо середньої величини. Оскільки сума відхилень від середньої величини дорівнює нулю, то для розрахунку середнього лінійного відхилення застосовується модуль [24]:

$$\boldsymbol{l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|} . \tag{3.4}$$

Щоб визначити характер розташування вибіркових значень щодо свого середнього арифметичного значення $\boldsymbol{\overline{x}}$, обчислюється вибіркова дисперсія. Її зазвичай позначають через $\boldsymbol{s^2}$. ***Дисперсією*** або ***розсіюванням*** називається математичне очікування квадрату відхилення [20]:

$$\boldsymbol{s^2(X) = M(X - M(X))^2} .$$

В розгорнутому вигляді формула дисперсії набуває форми:

$$\boldsymbol{s^2(X) = \left(x_1 - M(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - M(X)\right)^2 p_2 + \cdots + \left(x_n - M(X)\right)^2 p_n =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i} \, .$$

З цієї формули безпосередньо виводиться інколи більш зручна в застосуванні формула дисперсії:

$$\boldsymbol{s^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2} \, .$$

Якщо за математичне очікування прийняти його вираз через середнє арифметичне значення за формулою (3.1), то формула для обчислення дисперсії перетворюється в наступну [35]:

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \, . \tag{3.5}$$

Отже, для отримання дисперсії необхідно від кожного вибіркового значення відняти середнє арифметичне значення, результати піднести до квадрату, потім скласти ці результати, а отриману суму поділити на $\boldsymbol{(n-1)}$, де $\boldsymbol{n}$ – об’єм вибірки. Зміст вибіркової дисперсії як міри розсіювання (розкидання) полягає в наступному: якщо є дві випадкові вибірки однакового об’єму $\boldsymbol{n}$ (або приблизно однакових об’ємів) і з однаковим середнім арифметичним значенням $\boldsymbol{\overline{x}}$, то та вибірка, у якої $\boldsymbol{s^2}$ є меншим, має вибіркові значення досліджуваної величини, більш стисло розташовані по обидва боки від $\boldsymbol{\overline{x}}$. Як правило, така вибірка виникає при вивченні більш однорідного матеріалу [20]. *Дисперсія має наступні властивості*.

1. *Дисперсія постійної величини (константи)* $\boldsymbol{C}$ *дорівнює нулю*:

$$\boldsymbol{s^2(C) = 0} \, .$$

2. *Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату*:

$$\boldsymbol{s^2(\alpha X) = \alpha^2 s^2(X)} \, .$$

3. *Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій*:

$$\boldsymbol{s^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = s^2(X_1) + s^2(X_2) + \cdots + s^2(X_m)} \, .$$

Із цих властивостей дисперсії випливає важливий висновок:

$$\boldsymbol{s^2(X + C) = s^2(X)} \, ,$$

де $\boldsymbol{C}$ – постійна величина.

Корінь квадратний із вибіркової дисперсії, тобто величина $\boldsymbol{s = \sqrt{s^2}}$, називається ***вибірковим середнім квадратичним відхиленням***. Із 3-ї властивості дисперсії та означення математичного очікування випливає, що у випадку суми взаємно незалежних випадкових величин має місце формула [20]:

$$\boldsymbol{s(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = \sqrt{s^2(X_1) + s^2(X_2) + \cdots + s^2(X_m)}} \, .$$

Середнє квадратичне відхилення вимірює абсолютний розмір коливань ознаки та виражається в тих самих одиницях вимірювання, що й значення ознаки (гривні, тонни, відсотки та інше) [23]. Застосування модуля для розрахунку середнього лінійного відхилення накладає ряд обмежень на подальші математичні дії з досліджуваною випадковою величиною. Тому на практиці, як правило, застосовується саме середнє квадратичне відхилення.

Розглянуті показники варіації надають можливість порівняти ступінь однорідності декількох сукупностей, але відносно лише однієї ознаки. Це пов'язане з тим, що це іменовані величини, що виміряні в тих самих одиницях, що й сама ознака. Але часто досліднику доводиться порівнювати варіації різних ознак [19]. Для повнішого аналізу мінливості в сукупності необхідно розраховувати відносні показники варіації, суть яких полягає у співвіднесенні деяких абсолютних показників варіації зі значенням середньої величини як характеристики центру розподілу. У статистиці найбільш поширеними є коефіцієнти варіації, що характеризують ступінь розсіювання (мінливості) ознаки та є відсотками відношення середнього відхиленні до середнього арифметичного значення.

Лінійний коефіцієнт варіації показує, яку частку в розмірі середньої величини становить розмір середнього лінійного відхилення. Він визначається за формулою

$$\boldsymbol{v_l = \frac{d}{\bar{x}} \cdot 100\,\%}\,. \tag{3.6}$$

Квадратичний коефіцієнт варіації визначає питому вагу середнього квадратичного відхилення в розмірі середньої величини та дорівнює відношенню середнього квадратичного відхилення $\boldsymbol{s}$ до середнього арифметичного значення, поданому у відсотках:

$$\boldsymbol{v_s = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\,\%}\,. \tag{3.7}$$

Коефіцієнти варіації є мірою однорідності сукупності [24]. Ці коефіцієнти застосовуються, наприклад, коли треба порівняти мінливість ознак об'єкта, що виражені різними одиницями вимірювання. Коефіцієнт варіації має зміст виключно для величин, виміряних за шкалою відношень. Якщо $\boldsymbol{v < 10\,\%}$, мінливість вважається слабкою. Якщо $\boldsymbol{11\% \leqslant v \leqslant 25\,\%}$, мінливість є середньою. Якщо $\boldsymbol{v > 25\,\%}$, мінливість досліджуваної ознаки є сильною. Взагалі, чим більшим є коефіцієнт варіації, тим менш однорідною є сукупність і тим менш притаманним є обчислене середнє арифметичне для даної сукупності. У відповідності з властивостями нормального розподілу встановлено, що досліджувана сукупність є кількісно однорідною, якщо коефіцієнт варіації не перевищує **33 %** [23].

Приклад 3.1. У результаті десяти випробувань було отримано випадкову вибірку: $\boldsymbol{x_1 = 206}$, $\boldsymbol{x_2 = 110}$, $\boldsymbol{x_3 = 136}$, $\boldsymbol{x_4 = 150}$, $\boldsymbol{x_5 = 200}$, $\boldsymbol{x_6 = 164}$, $\boldsymbol{x_7 = 170}$, $\boldsymbol{x_8 = 178}$, $\boldsymbol{x_9 = 140}$, $\boldsymbol{x_{10} = 166}$. Знайти для цієї вибірки середнє арифметичне значення, дисперсію та середньоквадратичне відхилення. Оцінити ступінь кількісної однорідності отриманих спостережень.

Розв'язання. Очевидно, що об'єм вибірки дорівнює $\boldsymbol{n = 10}$. Щоб отримати середнє арифметичне значення для цієї вибірки, необхідно всі знайдені числа скласти й суму поділити на **10**. Таким чином, маємо

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{206 + 110 + 136 + 150 + 200 + 164 + 170 + 178 + 140 + 166}{10} = \frac{1620}{10} = 162}\,.$$

Для обчислення дисперсії та середньоквадратичного відхилення всі дані зручно звести в наступну розрахункову таблицю.

№ з/п (N_i)	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	206	206 – 162 = **44**	44^2 = **1936**
2	110	110 – 162 = **– 52**	$(-52)^2$ = **2704**
3	136	136 – 162 = **– 26**	$(-26)^2$ = **676**
4	150	150 – 162 = **– 12**	$(-12)^2$ = **144**
5	200	200 – 162 = **38**	38^2 = **1444**
6	164	164 – 162 = **2**	2^2 = **4**
7	170	170 – 162 = **8**	8^2 = **64**
8	178	178 – 162 = **16**	16^2 = **256**
9	140	140 – 162 = **– 22**	$(-22)^2$ = **484**
10	166	166 – 162 = **4**	4^2 = **16**
Разом	$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1620$		$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 7728$

Таким чином, виходячи з цих результатів, маємо:

$$s^2 = \frac{7728}{10-1} = \frac{7728}{9} = 858{,}67\ ;$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{858{,}67} = 29{,}3\ .$$

Враховуючи отримані значення, коефіцієнт варіації для цієї вибірки складає

$$v_s = \frac{29{,}3}{162} \cdot 100\ \% = 18{,}09\ \%\ ;$$

$$18{,}09\ \% < 25\ \%.$$

Відповідь. Для отриманої вибірки маємо середнє арифметичне значення $\overline{x}$ **= 162**, дисперсію s^2**= 858,67**, та середньоквадратичне відхилення s **= 29,3**. Мінливість досліджуваної ознаки є середньою. Первинний статистичний матеріал є кількісно однорідним. Значення виміряної ознаки відрізняється від середнього значення цієї ознаки в середньому на **18,9 %**.

3.3. Групування статистичних даних

Розглянутий приклад показує, що обчислення $\overline{x}$ та s^2 пов'язане з великою кількістю розрахунків, яка стрімко збільшується разом із зростанням об'єму вибірки. Однак процес обчислення може бути істотно спрощений без особливої втрати точності. Для цього проводять ***групування*** вибіркових значень – розбиття одиниць досліджуваної статистичної сукупності на групи в залежності від значень досліджуваної ознаки. Ознака, за значеннями якої формуються підмножини початкової сукупності, називається ***групувальною ознакою*** або ***основою групування***. Вона може бути як кількісною (дискретною або інтервальною), так і атрибутивною (в тому числі й альтернативною). Групування класифікується за наступними ознаками:

- мета;
- кількість групувальних ознак;
- співпідпорядкованість групувальних ознак;
- початкова інформаційна база.

В залежності від мети дослідження групування бувають типологічними, структурними та аналітичними. ***Типологічне групування*** – це розділення якісно різнорідної сукупності на якісно однорідні групи (класи, типи). При цьому під однорідністю розуміється підпорядкування всіх одиниць сукупності одному закону розвитку відносно досліджуваного явища. Прикладами типологічних угрупувань є групування населення за соціальними, тобто суспільними групами (національність, рівень освіти тощо). Типологічні групування дозволяють прослідкувати зародження, розвиток та відмирання різних типів явищ (розвиток форм державного устрою, формування нових шарів населення). Вони надають можливість у складі масового явища виділити ті його частини, що є однорідними за якістю та умовами розвитку та в яких діють одні й ті ж самі закономірності, на які впливають одні й ті ж самі фактори. ***Структурним*** є групування, яке дозволяє розділити однорідну сукупність на групи, що характеризують структуру досліджуваної сукупності за якоюсь варіюючою ознакою. За допомогою структурних угрупувань вивчається, наприклад, структура населення при демографічних дослідженнях. ***Аналітичне групування*** здійснюється з метою виявлення взаємозв'язку ознак, що характеризують одну статистичну сукупність. Як вже зазначалося, ознака, значення якої впливають на значення іншої ознаки, є факторною. Залежна ознака є результативною. Групування відбувається за факторною ознакою, поряд з якою фіксується значення результативної. Далі проводиться аналіз поведінки результативної ознаки при зміні факторної.

Розділення угрупувань на три види в залежності від вирішуваних задач носить відносний характер, тому що групування часто є універсальною процедурою, в ході якої одночасно виділяються типи, показується структура сукупності та відображається закономірність зміни значень однієї ознаки в залежності від значень іншої ознаки.

За кількістю групувальних ознак розрізняють *прості групування* (одна ознака) та *складні групування* (дві та більше ознак). Складні групування, в свою чергу, бувають *комбінованими* (від двох до чотирьох ознак) та *багатовимірними* (будь-яка кількість ознак, що є більшою за чотири). Складні групування надають можливість вивчати розподіл одиниць сукупності одночасно за декількома ознаками. В той же час, групування з великою кількістю груп стає ненаочним. Тому на практиці будують складні групування не більше, ніж за трьома ознаками.

Групування може бути *фасетним* (списковим) та *ієрархічним*. У фасеті послідовно перелічуються об'єкти класифікації за однією ознакою. В ієрархічному групуванні початкова множина одиниць послідовно розподіляється на підмножини за співпідпорядкованим групувальним ознакам. Крупніша група одиниць є сумою одиниць тих груп, що входять до її складу. Дані, що підлягають групуванню, можуть бути не упорядкованими. В цьому випадку отримане групування є *первинним*. Якщо групування відбувається на основі даних, систематизованих в результаті первинного групування, то таке групування є *вторинним* [21].

Кількість груп, на які розбивається початкова статистична інформація, залежить від задач дослідження, виду та ступеню варіації групувальної ознаки, кількості одиниць досліджуваної статистичної сукупності (об'єму вибірки). Нехай є вибірка об'єму $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n})$. Можна вважати, що числа $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ розташовані в порядку зростання або зменшення (цього завжди можна досягти). Після такого ранжування ми отримуємо ***варіаційний ряд***. Інколи результати спостережень з самого початку є упорядкованими, тобто не потребують попередньої обробки, бо вже утворюють варіаційний ряд. ***Розмахом варіації*** називається різниця між максимальним та мінімальним значенням ознаки у варіаційному ряду [23]:

$$\boldsymbol{R = x_{max} - x_{min}}\,.$$

Цій показник відображає межі мінливості досліджуваної ознаки, тобто амплітуду варіації. В інтервальному ряду розподілу розмах варіації визначають як різницю між верхньою границею останнього інтервалу та нижньою границею першого інтервалу або як різницю між середніми значеннями цих інтервалів. Безумовною перевагою розмаху варіації є простота його обчислення та тлумачення. Але надійність такої простої характеристики є невисокою, оскільки вона ґрунтується на двох крайніх значеннях ознаки, які часто не є типовими для всієї сукупності або мають випадковий характер. Тому розмах варіації зазвичай використовують лише для попередньої оцінки варіації [24].

Якщо групувальна ознака є атрибутивною або кількісною дискретною, то кількість груп дорівнює кількості значень ознаки. Якщо кількісна ознака є інтервальною, а величини інтервалів є однаковими, то ***довжина інтервалів групування*** обчислюється за формулою [21]:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{x_{max}} - \boldsymbol{x_{min}}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{k}},$$

де $\boldsymbol{k}$ – кількість інтервалів (груп).

Інтервали однакової довжини застосовуються для групування за ознакою, яка має невелику мінливість. Кількість інтервалів залежить від кількості одиниць сукупності (об'єму вибірки) та визначається у відповідності з номограмою Стерджесса [21], поданою у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Номограма Стерджесса

Об'єм вибірки	**10 – 24**	**25 – 44**	**45 – 89**	**90 – 179**	**180 – 359**	**360 – 719**	**720 – 1439**
Кількість інтервалів	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**

Значення кількості інтервалів, зазначені в цій номограмі, не є обов'язковими, вони носять рекомендаційний характер в тому сенсі, що для наявного об'єму вибірки кількість інтервалів групування має бути не меншою за зазначену в таблиці 3.1. Отже, обираємо деяке ціле число $\boldsymbol{k}$ в діапазоні $\boldsymbol{10 \leqslant k \leqslant 20}$. Це число має бути таким, щоб обчислювати довжину інтервалу було якнайзручніше. Самим вдалим вибором буде такий, коли результат ділення розмаху варіації на кількість інтервалів буде цілим числом. Якщо такого результату досягти не вдалося, величину інтервалу округлюють завжди в більшу сторону незалежно від правил округлення. Це пов'язане з тим, що у разі необхідності округлення в меншу сторону (якщо це передбачено правилом) будуть втрачені останні значення варіаційного ряду, що потягне за собою викривлення результатів обчислень. Кожне зі значень нашої випадкової вибірки $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}$ потрапляє до одного із інтервалів. Якщо деяке вибіркове значення потрапило на границю двох інтервалів, то воно належить до правого інтервалу. Схему проведення такого групування наведено на рис. 3.1, де мається на увазі, що $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_{min}}$, а $\boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{x_{max}}$.

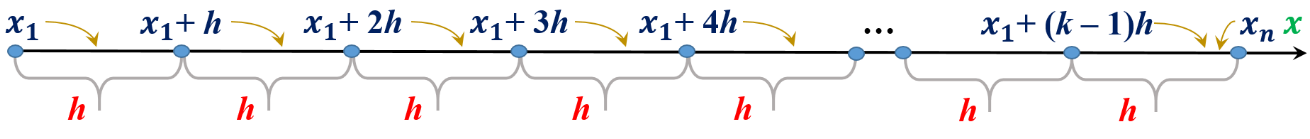


Рис. 3.1. Схема розподілу варіант за інтервалами

Тепер можна вказати самі інтервали групування:

$$[x_{min}, x_{min}+h),$$
$$[x_{min}+h, x_{min}+2h),$$
$$\ldots,$$
$$[x_{min}+(n-1)h, x_{max}].$$

Так, якщо деяке вибіркове значення x_m задовольняє нерівності

$$x_{min}+mh \leqslant x_m < x_{min}+(m+1)h,$$

то воно належить до інтервалу $[x_{min}+mh, x_{min}+(m+1)h)$. Позначимо через n_i кількість значень вибірки, що потрапили до інтервалу $[x_{min}+(i-1)h, x_{min}+ih)$. Числа n_i називаються ***частотами відповідних інтервалів***. Тепер для визначення $\overline{x}$ та s^2 діють за ***наступним алгоритмом***:

1. Фіксується якийсь із побудованих інтервалів (зазвичай беруть інтервал з максимальним значенням частоти n_i, тобто модальний інтервал).
2. Обчислюється середина зафіксованого інтервалу. Вона позначається через x_0.
3. Всі інтервали нумеруються в зростаючому порядку від **1** до k (у нас рівно k інтервалів).
4. З номера кожного поточного інтервалу N_i віднімається номер N_0 зафіксованого інтервалу. Ці різниці з відповідними знаками позначаються через

$$c_i = N_i - N_0 .$$

5. Далі користуються формулами, отриманими за допомогою методу найменших квадратів:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i\right)\cdot h\,, \tag{3.8}$$

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i\right)^2\right)\cdot h^2 \cdot \frac{1}{n-1}\,. \tag{3.9}$$

Тут $n_i c_i$ – добуток частоти n_i i-го інтервалу на відповідне йому число c_i, n – об’єм вибірки.

Природно очікувати, що інтервальна розбивка призводить до деяких помилок в обчисленні вибіркового середнього й вибіркової дисперсії. Щоб знівелювати цю похибку, можна ввести поправку на групування в значення $\overline{x}$ і s^2. Але виявляється, що коригування потребує лише величина s^2. З урахуванням цієї поправки (її значення зазначене Шеппардом і дорівнює $\left(-\frac{h^2}{12}\right)$), маємо наступний вираз для s^2 [35]:

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i\right)^2\right)\cdot h^2 \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{h^2}{12}\,.$$

Зазвичай поправка Шеппарда становить менше **5 %** від скоригованого значення s^2, а тому її варто вносити лише для вибірок достатньо великого об’єму, коли є впевненість, що вибіркова дисперсія добре наближує справжню дисперсію.

<u>Приклад 3.2</u>. При проведенні експерименту була отримана вибірка, що містить **699** значень. Після проведення групування отриманих даних були отримані наступні інтервали групування з відповідними частотами.

№ з/п	Інтервали	n_i
1	80 – 100	2
2	100 – 120	5
3	120 – 140	32
4	140 – 160	59
5	160 – 180	71
6	180 – 200	92
7	200 – 220	127
8	220 – 240	77
9	240 – 260	66
10	260 – 280	67
11	280 – 300	36
12	300 – 320	31
13	320 – 340	15
14	340 – 360	12
15	360 – 380	7
Разом		699

Обчислити для цієї вибірки середнє арифметичне значення, дисперсію та середньоквадратичне відхилення з урахуванням проведеного групування даних. Скоригувати значення дисперсії за допомогою поправки Шеппарда. Оцінити ступінь кількісної однорідності отриманих спостережень.

<u>Розв'язання</u>. З умови задачі видно, що $k = 15$, $h = 20$. Для обчислення числових характеристик отриманої вибірки побудуємо розрахункову таблицю.

№ з/п	Інтервали	n_i	c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
	1	2	3	4	5
1	80 – 100	2	1 – 7 = – 6	2 · (– 6) = – 12	$2 \cdot (-6)^2$ = (–12) · (– 6) = 72
2	100 – 120	5	2 – 7 = – 5	5 · (– 5) = – 25	$5 \cdot (-5)^2$ = (–25) · (– 5) = 125
3	120 – 140	32	3 – 7 = – 4	32 · (– 4) = – 128	$32 \cdot (-4)^2$ = (–128) · (– 4) = 512
4	140 – 160	59	4 – 7 = – 3	59 · (– 3) = – 177	$59 \cdot (-3)^2$ = (–177) · (– 3) = 531
5	160 – 180	71	5 – 7 = – 2	71 · (–2) = – 142	$71 \cdot (-2)^2$ = (–142) · (– 2) = 284
6	180 – 200	92	6 – 7 = – 1	92 · (–1) = – 92	$92 \cdot (-1)^2$ = (–92) · (– 1) = 92
7	200 – 220	127	7 – 7 = 0	127 · 0 = 0	$127 \cdot 0^2$ = 127 · 0 = 0
8	220 – 240	77	8 – 7 = 1	77 · 1 = 77	$77 \cdot 1^2$ = 77 · 1 = 77
9	240 – 260	66	9 – 7 = 2	66 · 2 = 132	$66 \cdot 2^2$ = 132 · 2 = 264
10	260 – 280	67	10 – 7 = 3	67 · 3 = 201	$67 \cdot 3^2$ = 201 · 3 = 603
11	280 – 300	36	11 – 7 = 4	36 · 4 = 144	$36 \cdot 4^2$ = 144 · 4 = 576
12	300 – 320	31	12 – 7 = 5	31 · 5 = 155	$31 \cdot 5^2$ = 155 · 5 = 775
13	320 – 340	15	13 – 7 = 6	15 · 6 = 90	15 · 6 = 90 · 6 = 540
14	340 – 360	12	14 – 7 = 7	12 · 7 = 84	$12 \cdot 7^2$ = 84 · 7 = 588
15	360 – 380	7	15 – 7 = 8	7 · 8 = 56	$7 \cdot 8^2$ = 56 · 8 = 448
Разом		699		$\sum_{i=1}^{15} n_i c_i = 363$	$\sum_{i=1}^{15} n_i c_i^2 = 5487$

Найчастотнішим є сьомий інтервал, бо його частота $n_7 = 127$ є найбільшою серед отриманих в ході експерименту. Отже, зафіксуємо інтервал з номером $N_0 = 7$ і обчислимо числа c_i – стовпець **№ 3**. Для отримання чисел стовпця **№ 4** перемножуються відповідні елементи другого й третього стовпців. Останній (п'ятий) стовпець отримується множенням елементів стовпця **№ 2** на квадрати чисел стовпця **№ 3** (піднесення у квадрат здійснюється зазвичай усно).

Але той самий результат можна отримати, якщо помножити елементи стовпця **№ 4** на елементи стовпця **№ 3**. Знаходячи суми елементів другого, четвертого та п'ятого стовпців, відповідно отримуємо значення

$$\boldsymbol{n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 699}, \quad \boldsymbol{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = 363}, \quad \boldsymbol{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 = 5487}.$$

Серединою зафіксованого інтервалу є число $\boldsymbol{x_0}$ **= 210**. Звідси маємо, що

$$\boldsymbol{\bar{x} = 210 + \frac{363}{699} \cdot 20 = 210 + 10{,}39 = 220{,}39},$$

$$\boldsymbol{s^2 = \left(5487 - \frac{363^2}{699}\right) \cdot \frac{20^2}{699 - 1} = 3036{,}38},$$

$$\boldsymbol{s = \sqrt{3036{,}38} = 55{,}1}.$$

З урахуванням того, що $\boldsymbol{h}$ **= 20**, скориговане значення $\boldsymbol{s^2}$ дорівнює

$$\boldsymbol{s^2 = 3036{,}38 - \frac{20^2}{12} = 3003{,}05};$$

$$\boldsymbol{s = \sqrt{3003{,}05} = 54{,}8}.$$

Враховуючи отримані значення, коефіцієнт варіації для цієї вибірки складає

$$\boldsymbol{v_s = \frac{54{,}8}{220{,}39} \cdot 100\% = 24{,}87\%};$$

$$\boldsymbol{24{,}87\%} < 25\%.$$

Відповідь. З урахуванням результатів групування даних, числові характеристики отриманої вибірки складають: середнє арифметичне значення $\boldsymbol{\bar{x}}$ **= 220,39**, дисперсія $\boldsymbol{s^2}$ **= 3036,38** (з поправкою Шеппарда **3003,05**), середньоквадратичне відхилення $\boldsymbol{s}$ **= 55,1** (з поправкою Шеппрада **54,8**). Мінливість досліджуваної ознаки є середньою. Первинний статистичний матеріал є кількісно однорідним. Значення виміряної ознаки відрізняється від середнього значення цієї ознаки в середньому на **24,87 %**.

Всі означення числових характеристик дискретних випадкових величин розповсюджуються й на безперервні випадкові величини. Розбіжність полягає в тому, що замість сум в формулах застосовуються їх інтегральні аналоги. Отже, для безперервних випадкових величин математичне очікування та дисперсія обчислюються за формулами:

$$\boldsymbol{M(X) = \int_a^b x\, p(x)\, \mathrm{d}x},$$

$$\boldsymbol{s^2(X) = \int_a^b \big(x - M(X)\big)^2 p(x)\, \mathrm{d}x}.$$

У тому випадку, коли можливі значення випадкової величини $\boldsymbol{X}$ заповнюють всю вісь $\boldsymbol{O_x}$, то ліміти інтегрування $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ є нескінченними, тобто $\boldsymbol{a} = -\infty$, $\boldsymbol{b} = \infty$. Можливі й такі випадки, коли один із лімітів інтегрування є нескінченним (можливі значення $\boldsymbol{X}$ розташовані на півпрямій).

Середнє квадратичне відхилення, як і раніше, є квадратним коренем із дисперсії. Як і для дискретних випадкових величин, для безперервних випадкових величин також існує альтернативна формула обчислення дисперсії [13]:

$$\boldsymbol{s^2(X) = \int_a^b x^2 p(x)\,\mathrm{d}x - \big(M(X)\big)^2}\,.$$

3.4. Довірчий інтервал. Репрезентативність вибірки

Вибіркове середнє $\boldsymbol{\bar{x}}$ обчислюється на підставі деякої вибірки, отриманої в результаті експерименту. Тому як сама вибірка, так і вибіркове середнє $\boldsymbol{\bar{x}}$, є випадковими величинами. Якщо зробити декілька вибірок, тобто декілька незалежних один від одного експериментів, то їх вибіркові середні $\boldsymbol{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m}$ можна розглядати як вибірку з деякої генеральної сукупності. Закон розподілу значень деякого показника може відрізнятися від нормального, але вибіркові середні мають розподіл, близький до нормального. Це випливає із центральної граничної теореми, яку в 1733 році довів французький математик Абрахам Муавр для окремого випадку біноміального розподілу. Ця теорема стверджує, що розподіл вибіркових середніх значень сходиться до нормального розподілу, незважаючи на форму початкового розподілу даних [3]. Це твердження стає практично достовірним, якщо об'єми вибірок, для яких визначалися $\boldsymbol{\bar{x}}$, більші за **30**. Тобто із збільшенням об'єму вибірки відхилення для спостережуваної частки зменшуються. Цим питанням цікавився Френсіс Гальтон, британський дослідник, географ, антрополог, психолог, статистик, засновник диференціальної психології та психометрики, а також вчення євгеніки, призначенням якого передбачалася боротьба з явищем виродження в людському генофонді. Він був двоюрідним братом Чарльза Дарвіна. Френсіс Гальтон не лише написав роботи про мудрість натовпу, кореляцію, регресію та багато інших тем, але й вважав справжнім дивом те, що нормальний розподіл, який в ті часи називали *законом розподілу помилок*, в якійсь упорядкований спосіб виникає із видимого хаосу. З цього приводу він писав: «Я навряд чи знаю щось, що здатне впливати на уяву так, як чудова форма космічного порядку, виражена «Законом розподілу помилок». Якщо б стародавні греки знали цей закон, вони б персоніфікували його та надали божественних властивостей. Він безтурботно панує серед самого дикого сум'яття. Чим більшим є натовп, тим досконалішим є його панування. Це найвищий закон серед нерозумності. Кожного разу, коли ми беремо множину хаотичних елементів та розставляємо їх за величиною, з'являється несподівана й досі прихована найпрекрасніша закономірність».

Отже, нормальний закон розподілу є одним із найпоширеніших на практиці законів розподілу випадкової величини. Як вже зазначалося при проведенні аналізу рис. 2.3*б*, графік функції нормального розподілу є симетричним відносно $\boldsymbol{a}$. На практиці параметр $\boldsymbol{a}$ знаходить своє вираження в середньому арифметичному значенні $\boldsymbol{\bar{x}}$, а $\boldsymbol{\sigma^2}$ – у вибірковій дисперсії $\boldsymbol{s^2}$. У силу того, що середнє арифметичне значення вибірки $\boldsymbol{\bar{x}}$ так само, як і вибіркова дисперсія $\boldsymbol{s^2}$, є наближеннями до $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$, то можна очікувати, що характер розташування у вибірці значень випадкової величини (варіант), розподіленої за нормальним законом, буде мати зазначені властивості. Нормальна випадкова величина з генеральним середнім $\boldsymbol{a}$ й дисперсією $\boldsymbol{\sigma^2}$ має наступну важливу властивість: з імовірністю β варіанти віддалені від $\boldsymbol{a}$ на відстань, не більшу за $\boldsymbol{d_\beta\sigma}$, де параметр нормального закону розподілу $\boldsymbol{d_\beta}$ можна визначити з таблиці 3.2. При цьому величина β називається ***довірчою ймовірністю*** [29].

Таблиця 3.2

Довірча ймовірність β та параметр d_β нормального закону розподілу

β	d_β	β	d_β
0,80	1,282	**0,92**	1,750
0,82	1,340	**0,94**	1,880
0,84	1,404	**0,95**	1,960
0,86	1,475	**0,96**	2,053
0,88	1,554	**0,98**	2,325
0,90	1,645	**0,99**	2,576
0,91	1,694	**0,999**	3,290

З таблиці видно, що практично (з імовірністю, більшою за **0,99**) всі значення нормальної випадкової величини віддалені від $\boldsymbol{a}$ на відстань, що не перевершує $\mathbf{3\sigma}$. Це твердження зветься ***правилом «трьох сигм»*** [35]. Це правило значно полегшує розрахунки, тому що використовує ціле число **3**. З урахуванням цього правила, визначивши вибіркове середнє $\overline{\boldsymbol{x}}$, можна з імовірністю **0,99** вказати інтервал (його серединою буде $\overline{\boldsymbol{x}}$), у якому міститься генеральне середнє $\widehat{\boldsymbol{x}}$. Але для цього треба знати середнє квадратичне $\boldsymbol{\sigma}$ нормального розподілу, якому підкоряється $\overline{\boldsymbol{x}}$.

За оцінку для $\boldsymbol{\sigma}$ беруть величину $\frac{s}{\sqrt{n}}$, де $\boldsymbol{s}$ – середнє квадратичне відхилення для вибірки, за якою знайдено $\overline{\boldsymbol{x}}$, а $\boldsymbol{n}$ – об'єм цієї вибірки. Таким чином, з імовірністю **0,99** справжнє середнє $\widehat{\boldsymbol{x}}$ розташоване в інтервалі

$$\widehat{\boldsymbol{x}} \in \left(\overline{\boldsymbol{x}} - 3\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}};\ \overline{\boldsymbol{x}} + 3\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right). \qquad (3.10)$$

Якщо можна задовольнятися меншою ймовірністю, то границі інтервалу, що містить $\widehat{\boldsymbol{x}}$, можна звузити. У загальному випадку ці границі мають вигляд

$$\widehat{\boldsymbol{x}} \in \left(\overline{\boldsymbol{x}} - d_\beta\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}};\ \overline{\boldsymbol{x}} + d_\beta\frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right),$$

де $\boldsymbol{d}_\beta$ обирається з таблиці 3.2 на підставі заданого значення довірчої ймовірності $\boldsymbol{\beta}$. Цей інтервал має назву ***довірчого інтервалу***. Поняття довірчих інтервалів було формалізовано в 1930-ті роки в Університетському коледжі Лондона видатним математиком і статистом Юджином Нейманом та Егоном Пірсоном, сином Карла Пірсона [3].

До того, як починати аналіз отриманої в ході експерименту вибірки, треба оцінити достовірність відображення нею реальної поведінки досліджуваної генеральної сукупності, тобто оцінити ***репрезентативність*** наявної вибірки. Для цього використовується ***коефіцієнт репрезентативності E***, що обчислює за формулою [35]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\,\boldsymbol{s}}{\overline{\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{n}}} \cdot \mathbf{100}\ \%. \qquad (3.11)$$

Вибірка вважається ***репрезентативною*** або ***представницькою*** серед подібних їй вибірок однієї й тієї ж генеральної сукупності, якщо її значення $\boldsymbol{E}$ менше за **15 %**. Висновки, що зроблені на основі аналізу такої вибірки можна буде розповсюдити на всю генеральну сукупність, тому що отримана вибірка адекватно відображає її поведінку. У протилежному випадку до оцінок параметрів розподілу ($\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{\sigma}$), що надаються цією вибіркою, варто ставитися з обережністю, тому що вона неадекватно відображає реальну поведінку генеральної сукупності. Висновки, зроблені на основі аналізу такої вибірки, неможна буде розповсюдити на всю генеральну сукупність.

Вважається, що, якщо дві вибірки взяті з однієї й тієї ж самої генеральної сукупності (тобто отримані в результаті вивчення того самого явища, що протікає в однорідних умовах), то вибірка, для якої значення $\boldsymbol{E}$ менше, є більш представницькою, тобто більш репрезентативною. Інакше кажучи, у такій вибірці краще проявляється ознака досліджуваного явища [35].

Приклад 3.3. В умовах прикладу 3.1 та прикладу 3.2 розрахувати довірчі інтервали для їхнього генерального середнього значення та оцінити репрезентативність цих вибірок, отриманих в результаті двох різних експериментів при вивченні одного й того ж самого явища. Порівняти ці вибірки та обрати ту, яка більш адекватно відображає поведінку генеральної сукупності.

Розв'язання. Розглянемо вибірки, досліджені в прикладах 3.1 і 3.2. Позначимо їхні середні значення відповідно через $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$, середні квадратичні відхилення відповідно через s_1 і s_2, а об'єми цих вибірок відповідно через n_1 і n_2. Отже, з довірчою ймовірністю, більшою за **0,99**, довірчі інтервали для генерального середнього, обчислені на основі цих вибірок будуть наступними:

$$\hat{x}_1 \in \left(\bar{x}_1 - \frac{3\,s_1}{\sqrt{n_1}};\ \bar{x}_1 + \frac{3\,s_1}{\sqrt{n_1}}\right) = \left(162 - \frac{3\cdot 29,3}{\sqrt{10}};\ 162 + \frac{3\cdot 29,3}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= (162 - 27,8;\ 162 + 27,8) = (134,2;\ 189,8);$$

$$\hat{x}_2 \in \left(\bar{x}_2 - \frac{3\,s_2}{\sqrt{n_2}};\ \bar{x}_2 + \frac{3\,s_2}{\sqrt{n_2}}\right) = \left(220,39 - \frac{3\cdot 55,1}{\sqrt{699}};\ 220,39 + \frac{3\cdot 55,1}{\sqrt{699}}\right) =$$

$$= (220,39 - 6,25;\ 220,39 + 6,25) = (214,14;\ 226,64).$$

Репрезентативність цих вибірок складає відповідно

$$E_1 = \frac{3\,s_1}{\bar{x}_1\sqrt{n_1}}\cdot 100\ \% = \frac{3\cdot 29,3}{162\cdot\sqrt{10}}\cdot 100\ \% = 0,1716\cdot 100\ \% = 17,16\ \%\,;$$

$$E_2 = \frac{3\,s_2}{\bar{x}_2\sqrt{n_2}}\cdot 100\ \% = \frac{3\cdot 55,1}{220,39\cdot\sqrt{699}}\cdot 100\ \% = 0,0284\cdot 100\ \% = 2,84\ \%\,.$$

В силу того, що $\boldsymbol{E_1}$ **= 17,16 % > 15 %**, то, згідно з прийнятим граничним значенням, обчислене $\hat{x}$ не можна прийняти, а відповідну вибірку вважати репрезентативною. У той же час, значення $\boldsymbol{E_2}$ **= 2,84% < 15%** цілком відповідає обраному критерію. Таким чином, можна прийняти, що генеральне середнє арифметичне значення досліджуваного показника лежить в межах $\hat{x}$ **∈ (214,14; 226,64)**. Границі цього інтервалу визначені з довірчою ймовірністю, більшою за **0,99**.

Відповідь. Репрезентативність першої вибірки складає $\boldsymbol{E_1}$ **= 17,16 % > 15 %**, тому розрахований на основі її числових характеристик інтервал для генерального середнього значення $\hat{x}_1$ **∈ (134,2; 189,8)** неможна прийняти для подальшої роботи. Репрезентативність другої вибірки дорівнює $\boldsymbol{E_2}$ **= 2,84 % < 15 %**, тому з ймовірністю, більшою за **0,99**, справжнє середнє арифметичне значення досліджуваного показника міститься в інтервалі $\hat{x} \in$ **(214,14; 226,64)**, і всі отримані на основі цієї вибірки висновки можна розповсюдити на усю генеральну сукупність.

Як можна побачити із формули для обчислення коефіцієнту репрезентативності вибірки, дослідник може вплинути на його значення, збільшуючи об'єм вибірки. Ця величина стоїть в знаменнику, тому між нею та величиною коефіцієнту існує зворотна пропорційність: чим більшим є об'єм вибірки, тим більш репрезентативною буде ця вибірка.

Узгодженість розподілу $\bar{x}$ з нормальним законом дозволяє при будь-якому розподілі варіант із певною ймовірністю визначити границі для $\hat{x}$. А це означає, що кожна репрезентативна вибірка (тобто при $E > 15\ \%$) може мати надійну кількісну характеристику у вигляді $\bar{x} \pm 3s$. Дана характеристика добре відображає якісну сторону досліджуваного явища, а це може бути використане при описі та порівнянні ознак різної природи.

Крім того, оцінка $\hat{x}$ застосовується при визначенні помилки виміру, або помилки репрезентативності, величина якої визначається границями довірчого інтервалу для X. Припустимо, що в ході проведення археологічних експедицій біли здійснені заміри якоїсь антропометричної характеристики. Природно, що при вимірі цієї характеристики цілком можливо припуститися якоїсь помилки, величина якої визначається границями довірчого інтервалу X. Розглянемо цю ситуацію на конкретному прикладі.

Приклад 3.4. Було обміряне значення деякої антропометричної ознаки в давніх похованнях. Для визначення помилки виміру було взято десять різних великих поховань і зроблено по двадцять вимірів досліджуваної антропометричної ознаки в кожному з цих поховань. Були визначені середні арифметичні значення цієї ознаки по двадцяти вимірам. Таке усереднення робить закон розподілу середніх значень вимірюваного показника близьким до нормального, що дозволяє користуватися правилом «трьох сигм» для визначеного інтервалу, у якому лежить справжнє середнє значення цього показника. Також в ході кожної експедиції, окрім середнього арифметичного значення, були обчислені дисперсії по 20 вимірам. Результати обчислень подано в наступній таблиці.

№ з/п	Середнє значення антропометричної ознаки в кожному об'єкті дослідження по результатам 20 вимірів ($\bar{x}_i$)	Дисперсія по кожному об'єкту дослідження (s_i^2)
1	2	3
1	300	1.29
2	272	6.18
3	271	1.32
4	274	4.11
5	275	1.30
6	292	6.35
7	271	3.89
8	275	1.44
9	272	5.84
10	270	1.27

Побудувати довірчий інтервал для досліджуваної антропометричної ознаки.

Розв'язання. Для побудови довірчого інтервалу, який буде оцінкою для справжнього середнього значення досліджуваної антропометричної ознаки, треба обчислити середнє арифметичне для значень середніх та середнє арифметичне для дисперсій за всіма проведеними експедиціями. Для проведення цих обчислень додамо в таблицю ще один підсумковий рядок.

№ з/п	Середнє значення антропометричної ознаки в кожному об'єкті дослідження за результатами 20 вимірів ($\overline{x}_i$)	Дисперсія по кожному об'єкту дослідження (s_i^2)
1	2	3
1	300	1.29
2	272	6.18
3	271	1.32
4	274	4.11
5	275	1.30
6	292	6.35
7	271	3.89
8	275	1.44
9	272	5.84
10	270	1.27
Разом	$\sum_{i=1}^{10} \overline{x}_i = 2772$	$\sum_{i=1}^{10} s_i^2 = 33.01$

Суму елементів стовпця **№ 2** ділимо на **10** (на кількість експедицій) та отримуємо середнє значення досліджуваної антропометричної ознаки за результатами всіх експедицій:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i = \frac{2772}{10} = 277,2\,.$$

Із суми елементів стовпця **№ 3** витягаємо квадратний корінь і ділимо на **10**, в результаті чого отримуємо середнє квадратичне відхилення за всіма експедиціями:

$$\overline{s} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{10} s_i^2} = \frac{\sqrt{33.1}}{10} \approx \frac{5.75}{10} = 0,58\,.$$

Отже, згідно з правилом «трьох сигм», довірчий інтервал для генерального середнього арифметичного для досліджуваної антропометричної ознаки має вигляд:

$$\hat{x} \in \left(\overline{x} - \frac{3\,\overline{s}}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + \frac{3\,\overline{s}}{\sqrt{n}}\right) = \left(277.2 - \frac{3 \cdot 0.58}{\sqrt{10}};\ \ 277.2 + \frac{3 \cdot 0.58}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= (277.2 \pm 1.71) = (275.49;\ 278.91).$$

Обчислимо для цієї вибірки коефіцієнт репрезентативності:

$$E = \frac{3\,\overline{s}}{\overline{x}\,\sqrt{n}} \cdot 100\ \% = \frac{3 \cdot 0.58}{277,2 \cdot \sqrt{10}} \cdot 100\ \% = 0.002 \cdot 100\ \% = 0,2\% < 15\%.$$

Відповідь. Коефіцієнт репрезентативності даної вибірки складає ***E* = 0,2 %**, що значно менше граничних **15 %**. Тому результатам, отриманим на основі цієї вибірки, цілком можна довіряти та розповсюдити їх на всю генеральну сукупність. Отже, довірчий інтервал для оцінки середнього значення досліджуваної антропометричної характеристики має вигляд $\hat{x} \in$ **(275,49; 278,91).**

3.5. Перевірка гіпотез

3.5.1. *Статистичні гіпотези. Статистичні критерії*

Зазвичай в практичних задачах не зустрічаються випадкові величини, розподіли яких точно відповідали б теоретичним розподілам. Теоретичні розподіли є математичними моделями реальних розподілів. Підбор таких моделей та аналіз їх адекватності випадковим величинам, які моделюються, є однією з основних задач математичної статистики. Отже, математична статистика в підсумку зводиться до перевірки припущень (гіпотез) про вигляд моделі розподілу та його параметрів. ***Статистичною гіпотезою*** називається гіпотеза про вигляд невідомого розподілу, про параметри відомих розподілів, про відношення між випадковими величинами тощо. ***Нульовою гіпотезою*** $\boldsymbol{H_0}$ називається висунута гіпотеза. ***Альтернативною (конкуруючою) гіпотезою*** називається гіпотеза $\boldsymbol{H_1}$, що протирічить нульовій гіпотезі $\boldsymbol{H_0}$, і яка може виявитися правдою, якщо гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ буде відкинута. Наприклад, якщо нульова гіпотеза полягає в припущенні про те, що математичне очікування нормального розподілу $\boldsymbol{a = 5}$, то альтернативна гіпотеза може полягати у припущенні, що $\boldsymbol{a \neq 5}$. Коротко це записується як $\boldsymbol{H_0: a = 5}$, $\boldsymbol{H_1: a \neq 5}$. Гіпотези бувають *прості*, що складаються лише із одного припущення, та *складні*, що складаються із скінченної або нескінченної кількості припущень [20]. Формулювання гіпотез систематизує припущення дослідника та подає їх в чіткому лаконічному вигляді. Завдяки гіпотезам дослідник не втрачає дороговказу в ході розрахунків і йому легко зрозуміти після їх завершення, що саме він виявив. Нульова та альтернативна гіпотези можуть бути *спрямованими* ($\boldsymbol{H_0}$**: «**$\boldsymbol{x_1}$ **перевищує** $\boldsymbol{x_2}$**»**, $\boldsymbol{H_1}$**: «**$\boldsymbol{x_1}$ **не перевищує** $\boldsymbol{x_2}$**»**) та *неспрямованими* ($\boldsymbol{H_0}$**: «**$\boldsymbol{x_1}$ **не відрізняється від** $\boldsymbol{x_2}$**»**, $\boldsymbol{H_1}$**: «**$\boldsymbol{x_1}$ **відрізняється від** $\boldsymbol{x_2}$**»**) [15]. Найпоширенішими є **два види гіпотез**.

- *Параметричні гіпотези*, які при відомому вигляді розподілу висувають припущення про невідомі характеристики цього розподілу.
- *Непараметричні гіпотези*, які для відомої випадкової величини (вибірки) висувають припущення про вигляд її розподілу.

Відповідно до цих типів гіпотез існують *параметричні* та *непараметричні статистичні критерії*. ***Статистичним критерієм*** (або просто ***критерієм***) називають випадкову величину $\boldsymbol{T}$, яка служить для перевірки статистичних гіпотез. Статистичні критерії представляють собою компактні формулювання правил перевірки достовірності висновків аналізу або правильності висунутих гіпотез [56]. Вони дозволяють замість суб'єктивних оцінок використовувати об'єктивні кількісні характеристики.

Основні задачі, що розв'язуються за допомогою статистичних критеріїв:

- чи відповідає даний вибірковий розподіл тому чи іншому теоретичному закону;
- чи є дані вибірки вибірками із однієї статистичної сукупності з точки зору досліджуваної ознаки явища чи процесу.

Цілком очевидні, на перший погляд, суб'єктивні за своєю природою оцінки історичних явищ та процесів не завжди збігаються зі справжнім станом справ. Дуже часто доводиться зустрічатися з такими ситуаціями, коли нібито здоровий глузд та суб'єктивні враження свідчать про одне, а в дійсності має місце зовсім інше. В інших випадках суб'єктивне враження не дозволяє дійти якогось визначеного висновку через незрозумілість загальної картини. Виходом із таких ситуацій може бути лише застосування об'єктивних кількісних методів. Забуваючи про можливість впливу випадкових чинників, багато дослідників навіть незначні зміни показників відносять на рахунок впливу досліджуваних факторів. Саме виключити суб'єктивні хибні висновки і дозволяє апарат статистичних гіпотез. При перевірці гіпотез за допомогою статистичних критеріїв можуть виникнути наступні **помилки** [20].

1. ***Помилка 1-го роду*** – це відкидання правильної гіпотези $\boldsymbol{H_0}$. Ймовірність появи помилки 1-го роду називається ***рівнем значимості*** α, тобто ймовірність цієї помилки складає α.
2. ***Помилка 2-го роду*** – це прийняття хибної гіпотези $\boldsymbol{H_0}$ при правильності альтернативної гіпотези $\boldsymbol{H_1}$. Ймовірність виникнення такої помилки позначають через β.

Потужністю критерію називається ймовірність відкинути хибну альтернативну гіпотезу $\boldsymbol{H_1}$. Потужність критерію дорівнює $\mathbf{1} - \beta$. Чим більшою є потужність критерію, тим ймовірніше, що він виявить хибність альтернативної гіпотези. Між рівнем значимості та потужністю критерію існує певний зв'язок: із зменшенням рівня значимості знижується також і потужність критерію [56]. Отже, чим більшою є потужність критерію, тим меншою є ймовірність помилки 2-го роду. Потужність критерію визначається емпіричним шляхом. Одні й ті ж самі задачі можуть бути розв'язані за допомогою різних критеріїв. Але при цьому виявляється, що деякі критерії дозволяють виявити розбіжності там, де інші виявляються неспроможними це зробити, або виявляють більш високий рівень значимості розбіжностей. В зв'язку з цим постає питання, а навіщо тоді взагалі використовувати менш потужні критерії? Справа в тому, що підґрунтям для вибору того чи іншого критерію може бути не лише його потужність, але й інші **характеристики** цього **критерію**, а саме [15]:

- простота обчислення;
- більш широкий діапазон використання (наприклад, відносно даних, визначених за номінальною шкалою, або відносно до великих об'ємів вибірки $\boldsymbol{n}$);
- застосовність до неоднакових за розміром вибірок;
- більша інформативність результатів.

Основні етапи перевірки статистичних гіпотез [20, 46].

1. *Визначаються нульова та альтернативна гіпотези*. Для основної гіпотези $\boldsymbol{H_0}$ формулюється альтернативна гіпотеза $\boldsymbol{H_1}$.
2. *Задається припустима ймовірність помилки 1-го роду*. Обирається невелике додатне число α – рівень значимості перевірки. Зазвичай α коливається в межах від **0,01** до **0,05**, тобто від **1 %** до **5 %**. Якщо рівень значимості $\alpha = 5$ %, то це означає, що існує можливість відкинути правильну гіпотезу $\boldsymbol{H_0}$ в одному випадку із двадцяти (тобто в 5 % випадків). Якщо ж $\alpha = 1$ %, – то в одному випадку із ста (тобто в 1 % випадків) [56].
3. *Обирається критерій перевірки* (*міра розходження*). Розглядаються теоретичні вибірки значень випадкових величин, про які сформульована гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$, і обирається (формується) випадкова величина ***T***, значення якої і є ***значенням критерію***. Значення та розподіл критерію ***T*** повністю визначаються за вибірками при припущенні про правильність гіпотези $\boldsymbol{H_0}$. Інколи формула для обчислення значення критерію ***T*** містить кількість спостережень, тобто об'єм вибірки $\boldsymbol{n}$. В цих випадках емпіричне значення критерію одночасно є ***тестом*** для перевірки статистичних гіпотез [15].
4. *Визначається критична область*. На числовій осі задають такий інтервал ***D***, що ймовірність попадання значення критерію ***T*** до цього інтервалу дорівнює

$$\boldsymbol{P(T \in D) = 1 - \alpha}\,. \tag{3.12}$$

Інтервал ***D*** називається ***областю прийняття гіпотези*** $\boldsymbol{H_0}$, а решта область числової осі – ***критичною областю***. В ряді випадків за область ***D*** приймається один із інтервалів

$$(-\infty;\ d_\alpha],\ [-d_\alpha;\ d_\alpha],\ [d_\alpha;\ +\infty)\ ,$$

де d_α – ***критичне значення тесту критерію***, або просто ***критичне значення критерію*** для обраного рівня значимості. Відповідно до цих інтервалів, критерій перевірки є правостороннім, двостороннім або лівостороннім. Відповідно області відкидання гіпотези H_0 складають

$$(d_\alpha;\ \infty);$$
$$(-\infty;\ d_\alpha) \cup ([d_\alpha;\ +\infty);$$
$$(-\infty;\ d_\alpha).$$

5. *<u>За результатами спостережень обчислюється фактичне значення критерію</u>*. За реалізаціями теоретичних вибірок, що підлягають аналізу, обчислюється конкретне (спостережуване) значення критерію T та перевіряється виконання умови (3.12). Якщо ця умова задовольняється, то гіпотеза H_0 приймається в тому розумінні, що вона не протирічить експериментальним даним. Тобто попадання значення критерію в область припустимих значень не означає суворого доведення гіпотези. Воно лише вказує, що між гіпотезою та результатами спостережень немає значних розбіжностей [46]. Якщо ж умова (3.12) не задовольняється, то припускається, що гіпотеза H_0 є хибною і ймовірність цієї події обчислена неправильно.

Отже, можна сформулювати **<u>правило відкидання або прийняття нульової гіпотези H_0</u>** (відповідно прийняття або відкидання альтернативної гіпотези H_1): якщо емпіричне значення критерію відповідає **α = 5 %** (**α = 0,05**) або перевищує його, тобто емпіричне значення критерію $d \geqslant d_{05}$, то гіпотеза H_0 відкидається, але ми ще не можемо впевнено прийняти гіпотезу H_1. Якщо емпіричне значення критерію дорівнює критичному значенню, що відповідає **α = 1 %** (**α = 0,01**) або перевищує його, тобто $d \geqslant d_{01}$, то гіпотеза H_0 відкидається і приймається гіпотеза H_1. Якщо емпіричне значення критерію менше за критичне значення, що відповідає рівню значимості **α = 0,05**, тобто $d < d_{05}$, то гіпотеза H_0 впевнено приймається, а альтернативна гіпотеза H_1 відкидається. Виключення складають критерій Вілконсона, критерій Манна-Уитні та критерій знаків *G*, для яких встановлюються зворотні співвідношення. Із всього зазначеного випливає, що особливу увагу треба приділити випадку, коли $d_{01} < d < d_{05}$. При таких емпіричних значеннях критерію однозначний висновок щодо прийняття або відкидання якоїсь гіпотези зробити неможливо, треба провести додаткові дослідження. Для полегшення процесу прийняття рішення про відкидання нульової або альтернативної гіпотези можна щоразу креслити вісь значимості за зразком, поданим на рис. 3.2 [15].

Рис. 3.2. Схема осі значимості для прийняття або відкидання гіпотези

3.5.2. *Критерій нормальності розподілу*

Нормальний розподіл притаманний масовим випадковим явищам. Його сутність полягає в тому, що частоти більших та менших значень ознаки рівномірно зменшуються порівняно з тими значеннями, що зустрічаються найчастіше. Це означає, що розподіл в цих випадках є симетричним. Такий характер розподілу має бути властивий усій генеральній сукупності досліджуваних об'єктів. Перевірка нормальності розподілу потрібна в тих випадках, коли ця сукупність вивчається за вибірковими даними і передбачено оцінити за ним значення ознак всієї сукупності. Коли ж розглядається вся генеральна сукупність, таку перевірку зазвичай не роблять. Але, суворо кажучи, ті дані, які характеризують деяку генеральну сукупність історичних об'єктів, є лише великими вибірками, що фіксують стан цієї сукупності на момент вимірювання. До цього моменту та після нього цей стан міг бути іншим. Тому, якщо передбачається розглядання показників певного моменту в ширшому плані, може також бути затребуваною перевірка нормальності розподілу ознак.

Існує поширена, але нічим не доведена думка, що в суспільних масових явищах нормальний розподіл зустрічається рідко. Але це протирічить тому очевидному факту, що масові суспільні явища й процеси та властиві їм закони й тенденції розвитку мають стохастичний характер та ймовірнісно-статистичну форму прояву. А саме цим явищам, як відомо, і притаманний нормальний розподіл. Тому математичні методи, засновані на нормальному розподілі, можуть знайти в історичних дослідженнях більш широке коректне застосування, ніж прийнято вважати. Найбільші труднощі, пов'язані з перевіркою нормальності розподілу значень ознак досліджуваних історичних явищ та процесів, полягають в тому, що розподіл одних з них може бути нормальним або близьким до нього, а інших – ні. В цьому випадку слід орієнтуватися на розподіл найістотніших із них з точки зору розв'язуваної задачі [22].

Нормально розподілені випадкові величини зазвичай відповідають явищам, що є результатом багатьох одночасно діючих чинників, дія кожного з яких не є переважаючою над іншими. Така ситуація виникає при вивченні явища, що протікає в однорідних умовах. Але умови однорідності не завжди можна дотриматися. Крім того, природа явища іноді буває мало вивченою, і тому важко визначити ступінь впливу окремих чинників на кількісні характеристики даного явища. Очевидно, не можна очікувати, що досліджуване явище обов'язково визначить нормально розподілену випадкову величину. Тому на практиці виникає задача визначення закону розподілу.

Визначення закону розподілу за вибіркою розпадається на три етапи [20]:

- формулювання виду закону розподілу,
- знаходження параметрів цього розподілу,
- перевірка згоди отриманої вибірки із прийнятим (сформульованим) законом розподілу.

Однією з передумов для формулювання виду закону розподілу є емпіричний розподіл. Для побудови емпіричного розподілу в отриманій вибірці проводять інтервальну розбивку та складають таблицю, а вже на її підставі будують гістограму емпіричного розподілу. Східчаста фігура, що складається із прямокутників із основою довжини $\boldsymbol{h}$ та висотами $\frac{n_i}{h}$, називається ***гістограмою частот***. Геометричний зміст гістограми полягає в тому, що її площа дорівнює сумі всіх частот або об'єму вибірки. В аналогічний спосіб визначається і ***гістограма відносних частот***. Для неї висоти прямокутників, з яких складається східчаста фігура, визначаються відношеннями сум відносних частот $\frac{n_i}{n}$, що потрапляють до інтервалу

$[x_{min} + (i-1)h,\ x_{min} + ih)$, до довжини інтервалу h. В цьому випадку площа гістограми відносних частот дорівнює одиниці (сумі відносних частот вибірки). Для дискретного варіаційного ряду кожну пару значень (x_i, q_i) із розподілу вибірки можна розуміти як точку на координатній площині. Ламана крива, відрізки якої з'єднують точки (x_i, q_i) координатної площини, називають ***полігоном частот***.

Приклад 3.5. Для вибірки, отриманої в ході експерименту в прикладі 3.2, побудувати гістограму та висунути гіпотезу щодо можливого закону розподілу досліджуваної випадкової величини.

Розв'язання. Для побудови гістограми можна обмежитися тими частотами, що задані в таблиці умови прикладу 3.2. В той же час, можна скористатися нормованими частотами, обчисленими за формулою

$$\bar{n}_i = \frac{n_i}{n},$$

де n_i – частоти відповідних інтервалів, отримані в ході експерименту;

n – об'єм вибірки.

Гістограми частот з використанням фактичних частот n_i та гістограми відносних частот з використанням нормованих частот $\bar{n}_i$ будуть мати однакову форму і відрізнятися одна від одної лише масштабом. Отже, випадковій величині, виміряній в ході експерименту в прикладі 3.2, відповідає гістограма, зображена на рис. 3.3.

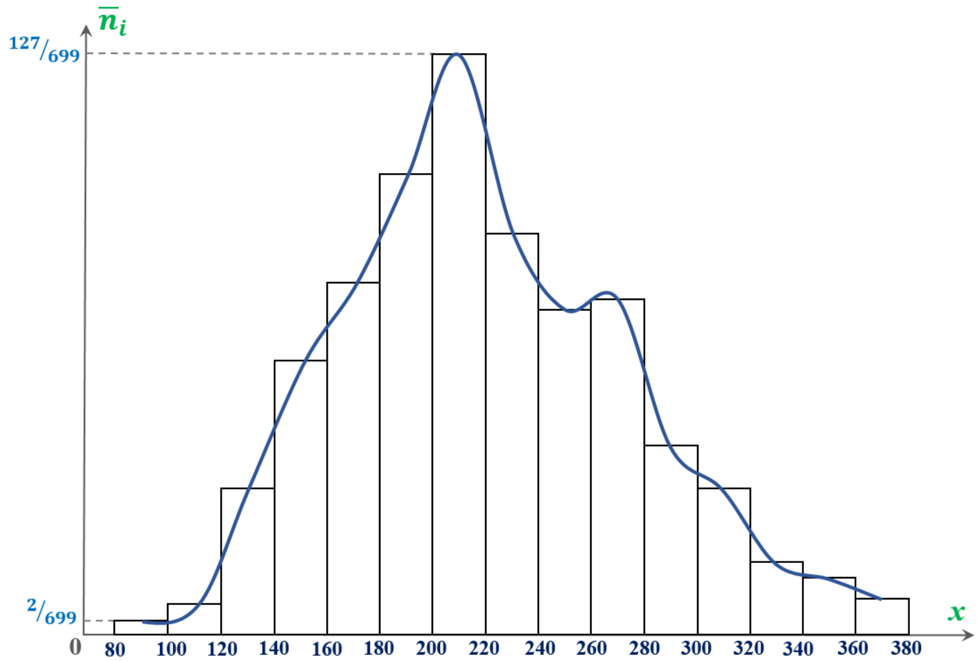


Рис. 3.3. Гістограма для висування гіпотези щодо закону розподілу

Приблизно через середини верхніх сторін прямокутників гістограми проводиться плавна крива. За її зовнішнім виглядом і висувається припущення щодо можливого закону розподілу випадкової величини. Отримана крива, хоч і віддалено, нагадує криву нормального розподілу. Тому природно припустити, що досліджувана вибірка взята з нормальної генеральної сукупності, параметри якої a й σ^2 оцінюються на основі вибірки.

<u>*Відповідь*</u>. Висувається припущення про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини, параметри розподілу якої $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{\sigma^2}$ можна оцінити на основі вибірки величинами $\overline{\boldsymbol{x}}$ та $\boldsymbol{s^2}$ відповідно.

У загальному випадку, якщо за зовнішнім виглядом гістограми було зроблене припущення про вид теоретичного розподілу й були оцінені його параметри, то залишається порівняти теоретичний закон розподілу з вибіркою. Для такого порівняння необхідно обрати критерій перевірки гіпотези про узгодженість емпіричного та теоретичного розподілу. Такі критерії називаються ***критеріями згоди***. Всі критерії згоди будуються за однаковою схемою. Для цього обирається деякий параметр, закон розподілу якого відомий, і який має досить велику «чутливість», тобто відмінність закону, що перевіряється, від дійсного істотно позначалася б на значеннях цього параметра. Найбільшою поширеністю користується ***критерій Пірсона***, роль параметра в якому грає величина [35]

$$\chi^2 = \boldsymbol{n}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \frac{\left(\frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{p_i}\right)^2}{\boldsymbol{p_i}}\ , \tag{3.13}$$

де $\boldsymbol{n}$ – об'єм вибірки,

$\boldsymbol{k}$ – кількість інтервалів групування,

$\frac{\boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{n}}$ - відносні частоти інтервалів,

$\boldsymbol{p_i}$ – теоретичні ймовірності цих інтервалів (у припущенні про вірність передбачуваного теоретичного розподілу).

Введений параметр $\boldsymbol{\chi^2}$ використовується для перевірки (на підставі вибірки) гіпотези про те, що справжній закон розподілу збігається із передбачуваним. Цю гіпотезу позначають через $\boldsymbol{H_0}$, і саме вона в даному випадку є нульовою гіпотезою. Нульова гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ відкидається, якщо ймовірність спостерігати дану вибірку в умовах гіпотези $\boldsymbol{H_0}$ є дуже малою. На практиці прийнято вважати, що якщо ця ймовірність менша за **0,05**, то гіпотезу $\boldsymbol{H_0}$ відкидають. Інколи, як вже зазначалось, замість **0,05** беруть **0,01**. Параметр $\boldsymbol{\chi^2}$ визначає критерій перевірки гіпотези $\boldsymbol{H_0}$. Його називають ***критерієм «хі-квадрат»***. Застосування цього критерію в даному випадку засноване на тому, що для обраного рівня значимості визначають табличне $\boldsymbol{\chi^2_{05}}$ (**5 %**-ве значення критерію) або $\boldsymbol{\chi^2_{01}}$ (**1 %**-ве значення критерію) та порівнюють їх зі значенням $\boldsymbol{\chi^2}$, обчисленим за формулою (3.13). Щоб знайти табличне $\boldsymbol{\chi^2_\alpha}$, варто звернутися до таблиці розподілу $\boldsymbol{\chi^2}$ (таблиці 3.3) для значення $\boldsymbol{f=k-r-1}$, де $\boldsymbol{k}$ - кількість інтервалів групування, використаних при обчисленні $\boldsymbol{\chi^2}$, а $\boldsymbol{r}$ – кількість параметрів теоретичного закону розподілу, оцінених на основі даної вибірки. Число $\boldsymbol{f}$ називається ***числом ступенів свободи***. Для випадку, коли передбачуваний теоретичний закон розподілу є нормальним, $\boldsymbol{f=k-3}$. Це випливає з того, що на основі вибірки в цьому випадку оцінюються два параметри теоретичного закону розподілу ($\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{\sigma}$).

Таблиця 3.3

Критичні значення критерію χ^2-Пірсона

f	5%	1%	*f*	5%	1%	*f*	5%	1%
1	3.8	6.6	**18**	28.9	34.8	**35**	49.8	57.3
2	6.0	9.21	**19**	30.1	36.2	**36**	51.0	58.6
3	7.8	11.3	**20**	31.4	37.6	**37**	52.2	59.9
4	9.5	13.3	**21**	32.7	38.9	**38**	53.4	61.2
5	11.1	15.1	**22**	33.9	40.3	**39**	54.6	62.4
6	12.6	16.8	**23**	35.2	41.6	**40**	55.8	63.7
7	14.1	18.5	**24**	36.4	43.0	**41**	56.9	65.0
8	15.5	20.1	**25**	37.7	44.3	**42**	58.1	66.2
9	16.9	21.7	**26**	38.9	45.6	**43**	59.3	67.5
10	18.3	23.1	**27**	40.1	47.0	**44**	60.5	68.7
11	19.7	24.7	**28**	41.3	48.3	**45**	61.7	70.0
12	21.0	26.2	**29**	42.6	49.6	**46**	62.8	71.2
13	22.4	27.7	**30**	43.8	50.9	**47**	64.0	72.4
14	23.7	29.1	**31**	45.0	52.2	**48**	65.2	73.7
15	25.0	30.6	**32**	46.2	53.5	**49**	66.3	74.9
16	26.3	32.0	**33**	47.4	54.8	**50**	67.5	76.2
17	27.6	33.4	**34**	48.6	56.1			

Для застосування критерію згоди χ^2 при перевірці нульової гіпотези H_0 = «***отримана вибірка, взята з генеральної сукупності з нормальним законом розподілу***» проводиться обчислення за наступним алгоритмом [35].

1. Нехай прийнято рішення провести інтервальне групування спостережень вибірки на k інтервалів, і нехай $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ – границі всіх інтервалів.
2. Визначаються вибіркові середнє арифметичне значення $\bar{x}$ та дисперсія s^2.
3. Обчислюються різниці

$$y_1 - \bar{x};\ \ y_2 - \bar{x};\ \ldots;\ \ y_{k+1} - \bar{x}\,.$$

4. Ці різниці нормуються, тобто обчислюються величини

$$u_i = \frac{y_i - \bar{x}}{s}, \qquad i = \overline{1, k+1}\,.$$

5. За таблицею 2.1 знаходимо відповідні значення розподілу функції Лапласа, тобто величини $\Phi(u_1)$, $\Phi(u_2)$, …, $\Phi(u_{k+1})$.
6. Обчислюємо різниці

$$p_1 = |\Phi(u_2) - \Phi(u_1)|;\ \ldots;\ \ p_k = |\Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k)|\,.$$

7. Обчислюємо

$$\tilde{n}_i = p_i n\,.$$

8. Визначаємо значення χ^2 за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}\,. \tag{3.14}$$

Ця формула дає те ж саме значення χ^2, що й формула (3.13), але вона є зручнішою для розрахунків. До того ж вона свідчить про правильність проведеного інтервального групування. Вважається, що «очікувані частоти» $\tilde{n}_i$ не повинні бути меншими за п’ять. У протилежному випадку кілька середніх інтервалів об’єднують в один, тобто тут вже не обов’язково піклуватися про однакову довжину інтервалів. Але таке об’єднання треба проводити вже після обчислення $\bar{x}$ й s^2.

Обчислене значення критерію χ^2 порівнюємо з табличним χ^2_{05} (або χ^2_{01}). Якщо виявиться, що $\chi^2 > \chi^2_{01}$, то гіпотеза H_0 відкидається з рівнем значимості **0,01**. Рівень значимості α (зазвичай α = **0,05** або α = **0,01**) означає, що ймовірність отримання даної вибірки в умовах гіпотези H_0 менша за α, тобто гіпотеза H_0 слабко узгоджується з даною вибіркою, а тому має бути відкинутою. Якщо ж $\chi^2 < \chi^2_{05}$, то гіпотеза H_0 приймається. Точніше кажучи, ця гіпотеза не відкидається, і наступні експерименти можуть підтвердити її або спростувати. Як вже зазначалося, особливо важливо продовжувати експеримент, якщо обчислене значення χ^2 задовольняє нерівності $\chi^2_{05} < \chi^2 < \chi^2_{01}$, тому що дослідник (із міркувань обережності) може вибрати рівень значимості α=**0,01**, а тому не відкидає гіпотезу H_0, але наведена нерівність ставить під сумнів його висновок.

<u>Приклад 3.6</u>. Для вибірки, отриманої в ході експерименту в прикладі 3.2, спираючись на припущення, висунуте на основі гістограми, побудованої в прикладі 3.5, перевірити за допомогою критерію χ^2 Пірсона відповідність закону розподілу досліджуваної випадкової величини нормальному закону.

<u>Розв’язання</u>. Розглядаючи наведену вище гістограму, можна побачити, що в центрі її розташовані найбільш частотні варіанти, а ближче до країв – відносно рідкі варіанти. Як вже зазначено, за цими ознаками гістограма нагадує криву щільності нормального розподілу. Використовуючи вибіркове середнє $\bar{x}$ = **220,39** і середнє квадратичне відхилення s = **55,1**, за допомогою критерію χ^2 можна перевірити гіпотезу H_0 = ***«досліджувана випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами а* = 220,39 *і* σ = 55,1»**. Емпіричне значення χ^2 (за його допомогою перевіряється гіпотеза H_0) обчислюється відповідно до зазначеної схеми. Результати проміжних обчислень наведені в наступній розрахунковій таблиці.

№ інтервалу	Границі інтервалів	Відхилення границь інтервалів від $\bar{x}$	Нормовані відхилення границь інтервалів u_i	$\Phi(u_i)$	$p_i = \lvert\Phi(u_{i+1})-\Phi(u_i)\rvert$	$\tilde{n}_i = p_i n$	n_i	χ_i^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	80	80 – 220,39 = **– 140,39**	(– 140,39) : 55,1 = **– 2,55**	0,0054	**0,0092**	6,43	2	$(6,43-2)^2:6,43$ = **3,05**
2	100	100 – 220,39 = **– 120,39**	(– 120,39) : 55,1 = **– 2,18**	0,0146	**0,0198**	13,84	5	$(13,84-5)^2:13,84$ = **5,64**
3	120	120 – 220,39 = **– 100,39**	(– 100,39) : 55,1 = **– 1,82**	0,0344	**0,0377**	26,35	32	$(26,35-32)^2:26,35$ = **1,21**
4	140	140 – 220,39 = **– 80,39**	(– 80,39) : 55,1 = **– 1,46**	0,0721	**0,0636**	44,46	59	$(44,46-59)^2:44,46$ = **4,76**
5	160	160 – 220,39 = **– 60,39**	(– 60,39) : 55,1 = **– 1,10**	0,1357	**0,0970**	67,80	71	$(67,80-71)^2:67,80$ = **0,15**
6	180	180 – 220,39 = **– 40,39**	(– 40,39) : 55,1 = **– 0,73**	0,2327	**0,1230**	85,98	92	$(85,98-92)^2:85,98$ = **0,42**
7	200	200 – 220,39 = **– 20,39**	(– 20,39) : 55,1 = **– 0,37**	0,3557	**0,1483**	103,66	127	$(103,66-127)^2:103,66$ = **5,26**
8	220	220 – 220,39 = **– 0,39**	(– 0,39) : 55,1 = **0,01**	0,5040	**0,1366**	95,48	77	$(95,48-77)^2:95,48$ = **3,58**
9	240	240 – 220,39 = **19,61**	19,61 : 55,1 = **0,36**	0,6406	**0,1236**	86,40	66	$(86,40-66)^2:86,40$ = **4,82**
10	260	260 – 220,39 = **39,61**	39,61 : 55,1 = **0,72**	0,7642	**0,0957**	66,89	67	$(66,89-67)^2:66,89$ = **0,0002**
11	280	280 – 220,39 = **59,61**	59,61 : 55,1 = **1,08**	0,8599	**0,0652**	45,57	36	$(45,57-36)^2:45,57$ = **2,01**
12	300	300 – 220,39 = **79,61**	79,61 : 55,1 = **1,44**	0,9251	**0,0398**	27,82	31	$(27,82-31)^2:27,82$ = **0,36**
13	320	320 – 220,39 = **99,61**	99,61 : 55,1 = **1,81**	0,9649	**0,0201**	14,05	15	$(14,05-15)^2:14,05$ = **0,06**
14	340	340 – 220,39 = **119,61**	119,61 : 55,1 = **2,17**	0,9850	**0,0093**	6,50	12	$(6,50-12)^2:6,50$ = **4,65**
15	360	360 – 220,39 = **139,61**	139,61 : 55,1 = **2,53**	0,9943	**0,0038**	2,66	7	$(2,66-7)^2:2,66$ = **7,08**
	380	380 – 220,39 = **159,61**	159,61 : 55,1 = **2,90**	0,9981				
Разом $\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$								**43,05**

Опишемо процес заповнення стовпців цієї таблиці. Було ухвалене рішення використати **15** інтервалів групування ($\boldsymbol{k}$ **= 15**), причому початок першого інтервалу дорівнює **80**, а довжина інтервалів дорівнює **20**. У стовпці **№ 1** зазначені номери отриманих інтервалів, у стовпці **№ 2** – кінці відповідних інтервалів, у стовпці **№ 3** – відхилення границь інтервалів від вибіркового середнього $\overline{\boldsymbol{x}}$ **= 220,39**. У стовпці **№ 4** записані числа $\boldsymbol{u_i}$, що є нормованими відхиленнями границь інтервалів. Ці числа отримуються діленням відповідних чисел стовпця **№ 3** на одне й те саме число, а саме на $\boldsymbol{s}$ **= 55,1** (з урахуванням знаку). Стовпець **№ 5** містить значення $\boldsymbol{\Phi(u_i)}$, які знаходять за таблицею значень функції Лапласа **Ф** (таблиця 2.1). Так, для $\boldsymbol{u_1}$ **= – 2,55** маємо **Ф(– 2,55) = 0,0054**, а для $\boldsymbol{u_{10}}$ **= 0,72** маємо **Ф(0,72) = 1 – Ф(– 0,72) = 1 – 0,2358 = 0,7642**. Числа стовпця **№ 6** відповідають номерам інтервалів і дорівнюють різницям значень функції **Ф** для границь інтервалу (із більшого значення **Ф** віднімається менше значення). Числа стовпця **№ 6** і є теоретичними («очікуваними») частотами $\boldsymbol{\tilde{n}_i}$. Вони отримуються як добуток чисел стовпця **№ 6** на одне й те саме число, а саме на об'єм вибірки $\boldsymbol{n}$ (у нашому прикладі $\boldsymbol{n}$ **= 699**). У стовпці **№ 8** зазначені емпіричні частоти $\boldsymbol{n_i}$. Вони відображають результат вибірки. Ці числа взяті зі стовпця **№ 2** розрахункової таблиці прикладу 3.2.

Тепер обчислюємо χ^2. Для цього із чисел стовпця **№ 8** віднімаються числа стовпця **№ 7** (або навпаки, з чисел стовпця **№ 7** віднімаються числа стовпця **№ 8**), отримані різниці підносяться у квадрат, а потім діляться на числа стовпця **№ 7**. Результати підсумовуються. Отже, сума елементів останнього стовпця, тобто стовпця **№ 9**, і є обчислюваним значенням критерію χ^2. В нашому прикладі $\boldsymbol{\chi^2}$ **= 43,05**. Тепер за таблицею розподілу χ^2 (таблицею 3.3) знаходимо $\boldsymbol{\chi^2_{05}}$ й $\boldsymbol{\chi^2_{01}}$, що відповідають числу ступенів свободи $\boldsymbol{f}$ **= 15 – 3=12**. Маємо $\boldsymbol{\chi^2_{05}}$ **= 21,0**, $\boldsymbol{\chi^2_{01}}$ **= 26,2**. Оскільки $\boldsymbol{\chi^2}$ **= 43,05 > 26,2 =** $\boldsymbol{\chi^2_{01}}$, то гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ відкидається. Таким чином, припущення про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини не підтвердилося.

<u>Відповідь</u>. Гіпотеза $\boldsymbol{H_0}$ про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини ***відкидається*** з ймовірністю **0,99**, тобто з ймовірністю **99 %** закон розподілу досліджуваної випадкової величини не є нормальним.

Критерій $\boldsymbol{\chi^2}$ Пірсона добре себе зарекомендував в статистичних дослідженнях. Але задля забезпечення коректності та об'єктивності отриманих даних, важливо передбачити декілька наступних моментів [57]:

- *оптимальний об'єм вибірки*. Використовувати цей критерій доцільно в тому випадку, коли даних для аналізу більше за **50**;
- *тип даних*. Параметрами можуть бути вимірювання номінальної шкали, якісні цілочисельні параметри або бінарні показники;
- *очікувана частота* за нульовою гіпотезою має бути не меншою за **5**.

В той же час цей критерій має і недоліки, що можуть викривити отриманий при його застосуванні результат. Основний недолік критерію Пірсона полягає в тому, що через те, що результати спостережень групуються в інтервали, а самі інтервали з невеликою кількістю спостережень об'єднуються, то початкова інформація може бути втраченою, а самі дані виявитися не зовсім об'єктивними. Щоб уникнути такого викривлення отриманих результатів, доцільним є застосування критерію $\boldsymbol{\chi^2}$ Пірсона в комплексі з іншими критеріями. При такому підході висновки будуть максимально відповідати дійсності.

3.5.3. *Критерій Стьюдента*

При вивченні показників історичних явищ та процесів велике значення має наступна постановка питання: деякий показник визначений за двома різними вибірками. Як правило, середнє значення цього показника в одній вибірці відрізняється від його середнього значення в іншій вибірці. Чи істотно це розходження, або воно є випадковим і ці вибірки можна об'єднати в одну і в подальшому аналізувати їх спільні результати (ці вибірки є однорідними)? У тих випадках, коли закон розподілу цього показника близький до нормального, відповідь на поставлене питання дає критерій Стьюдента. Вимогою нормальності можна знехтувати, якщо об'єми порівнюваних вибірок досить великі (більші за 30), тому що при зростанні об'єму вибірки розподіл Стьюдента стрімко наближається до нормального розподілу. Другою вимогою для застосування критерію Стьюдента є рівність дисперсій двох досліджуваних вибірок. Однак в більшості технічних та техніко-економічних задач цю умову неможна вважати виконаною, а перевіряти її не є доцільним. Але при великих та приблизно рівних об'ємах вибірок цю вимогу також можна не застосовувати. Третьою вимогою для застосування критерію Стьюдента, якою неможна знехтувати ні за яких обставин, є незалежність порівнювальних вибірок. Сутність критерію Стьюдента проілюструємо на наступному прикладі.

Приклад 3.7. У двох різних регіонах (регіон *A* та регіон *B*) досліджувалася чисельність міського населення. За результатами окремих досліджень в кожному регіоні (вимога незалежності вибірок) окремо було проведено інтервальне групування, яке відображене в наступних таблицях.

Регіон *A*

№ з/п	Інтервали	Частоти (n_i)
1	180 – 210	2
2	210 – 240	4
3	240 – 270	5
4	270 – 300	6
5	300 – 330	8
6	330 – 360	6
7	360 – 390	4
8	390 – 420	3
9	420 – 450	2
Разом		**40**

Регіон *B*

№ з/п	Інтервали	Частоти (n_j)
1	120 – 140	1
2	140 – 160	1
3	160 – 180	3
4	180 – 200	3
5	200 – 220	4
6	220 – 240	5
7	240 – 260	5
8	260 – 280	3
9	280 – 300	3
10	300 – 320	2
11	320 – 340	2
Разом		**32**

Висувається гіпотеза H_0 = «***Розбіжність вибіркових середніх арифметичних значень*** $\overline{a}$ ***і*** $\overline{b}$ ***є несуттєвою, випадковою, тобто справжні середні значення чисельності міського населення для регіонів A та B є однаковими***». Підтвердити або спростувати цю гіпотезу за допомогою критерію Стьюдента.

Розв'язання. Побудуємо для кожного регіону розрахункові таблиці, подібні до тієї, за допомогою якої було здійснене обчислення вибіркового середнього арифметичного значення та вибіркової дисперсії в прикладі 3.2.

Регіон *A*

№ з/п	Інтервали	n_i	$y_i = c_i^{(A)}$	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$
	1	2	3	4	5
1	180 – 210	2	– 4	– 8	32
2	210 – 240	4	– 3	– 12	36
3	240 – 270	5	– 2	– 10	20
4	270 – 300	6	– 1	– 6	6
5	300 – 330	8	0	0	0
6	330 – 360	6	1	6	6
7	360 – 390	4	2	8	16
8	390 – 420	3	3	9	27
9	420 – 450	2	4	8	32
Разом		$n_A = 40$		– 7	175

Регіон *B*

№ з/п	Інтервали	n_j	$z_j = c_j^{(B)}$	$n_j z_j$	$n_j z_j^2$
	1	2	3	4	5
1	120 – 140	1	– 5	– 5	25
2	140 – 160	1	– 4	– 4	16
3	160 – 180	3	– 3	– 9	27
4	180 – 200	3	– 2	– 6	12
5	200 – 220	4	– 1	– 4	4
6	220 – 240	5	0	0	0
7	240 – 260	5	1	5	5
8	260 – 280	3	2	6	12
9	280 – 300	3	3	9	27
10	300 – 320	2	4	8	32
11	320 – 340	2	5	10	50
Разом		$n_B = 32$		+10	210

Стовпці цих таблиць заповнюються за тими ж правилами, що й стовпці розрахункової таблиці в прикладі 3.2. У вибірці для регіону A найчастотнішим (модальним) є **5**-й інтервал. Тому фіксується саме інтервал **№ 5**, серединою якого є $x_0^{(A)}$ = **315**. Довжина інтервалів в першій вибірці складає h_A = **30**. У вибірці для регіону B найчастотнішими є 6-й та 7-й інтервали. В таких випадках на практиці обирається той інтервал, який розташований ближче до середини таблиці. В нашому прикладі таким інтервалом є **6**-й. Тому фіксується інтервал **№ 6**, серединою якого є $x_0^{(B)}$ = **230**. Довжина інтервалів в другій вибірці складає h_B = **20**. За даними наведених розрахункових таблиць обчислюємо середні арифметичні значення для кожної вибірки (кожного регіону):

$$\bar{a} = 315 + \frac{-7}{40} \cdot 30 = 309{,}75\,;$$

$$\bar{b} = 230 + \frac{10}{32} \cdot 20 = 236{,}25\,.$$

де $\bar{a}$ – середнє значення чисельності міського населення для регіону A,

$\bar{b}$ – середнє значення чисельності міського населення для регіону B.

Розбіжність вибіркових середніх (**309,75** і **236,25**) ще не доводить, що регіони A і B істотно різняться з точки зору досліджуваної чисельності. Для перевірки гіпотези H_0 обчислюємо величину $S_{\bar{a}-\bar{b}}$ за формулою:

$$S_{\bar{a}-\bar{b}} = \sqrt{\frac{\sum(a_i - \bar{a})^2 + \sum(b_j - \bar{b})^2}{n_A + n_B - 2} \cdot \frac{n_A + n_B}{n_A n_B}}\,, \tag{3.15}$$

де n_A і n_B – об'єми вибірок відповідно для регіонів A і B. В наведеній формулі суми квадратів відхилень $\sum(a_i - \bar{a})^2$ і $\sum(b_j - \bar{b})^2$ мають той же зміст, що й при обчисленні дисперсій вибірок відповідно для регіонів A і B без проведення інтервального групування. В нашому прикладі ми не знаємо конкретні значення елементів вибірок a_i та b_j, але незважаючи на це, зазначені суми обчислити все ж таки можемо. Без проведення групування дисперсія обчислюється за формулою (3.3). В той же час, після проведення групування дисперсія обчислюється за формулою (3.5). Враховуючи, що це одна й та ж сама величина незалежно від того, було проведено групування чи ні, маємо:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\left(\sum_{i=1}^{k}n_ic_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}n_ic_i\right)^2\right)\cdot h^2\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Помножуючи обидві частини цієї рівності на $\boldsymbol{n-1}$, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\left(\sum_{i=1}^{k}n_ic_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}n_ic_i\right)^2\right)\cdot h^2\,. \qquad (3.16)$$

Тому для наших двох вибірок регіонів $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ відповідно маємо:

$$\sum_{i=1}^{n_A}(a_i-\overline{a})^2=\left(\sum_{i=1}^{k_A}n_iy_i^2-\frac{1}{n_A}\left(\sum_{i=1}^{k_A}n_iy_i\right)^2\right)\cdot {h_A}^2\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n_B}(b_j-\overline{b})^2=\left(\sum_{j=1}^{k_B}n_jz_j^2-\frac{1}{n_B}\left(\sum_{i=1}^{k_B}n_jz_j\right)^2\right)\cdot {h_B}^2\,.$$

Підставляючи в ці формули дані наведених розрахункових таблиць, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n_A}(a_i-\overline{a})^2=\left(175-\frac{(-7)^2}{40}\right)\cdot 30^2=156397,5\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n_B}(b_j-\overline{b})^2=\left(210-\frac{10^2}{32}\right)\cdot 20^2=82750\,.$$

Використовуючи ці результати, обчислюємо:

$$S_{\overline{a}-\overline{b}}=\sqrt{\frac{156397,5+82750}{40+32-2}\cdot\frac{40+32}{40\cdot 32}}=\sqrt{192,17}=13,86\,.$$

Тепер для розрахунку саме критерію Стьюдента (псевдонім англійського вченого-статистика В. Госсета) використовують формулу [35]

$$\mathbf{t}_S=\frac{|\overline{a}-\overline{b}|}{S_{\overline{a}-\overline{b}}}\,. \qquad (3.17)$$

З урахуванням отриманих результатів для досліджуваних вибірок, в нашому прикладі емпіричне значення критерію Стьюдента дорівнює

$$\mathbf{t}_S=\frac{|309,75-236,25|}{13,86}=\frac{73,5}{13,86}=5,30\,.$$

За таблицею розподілу Стьюдента (таблицею 3.4) визначаємо $\mathbf{t_{05}}$ та $\mathbf{t_{01}}$ для числа ступенів свободи $\boldsymbol{f=n_A+n_B-2}$ [58].

Таблиця 3.4

Критичні значення критерію* t *Стьюдента

f	Рівень довіри			*f*	Рівень довіри		
	90%	95%	99%		90%	95%	99%
1	6,313	12,706	63,657	29	1,699	2,045	2,756
2	2,920	4,303	9,925	30	1,697	2,042	2,750
3	2,353	3,182	5,841	32	1,693	2,036	2,738
4	2,132	2,776	4,604	34	1,691	2,032	2,728
5	2,015	2,571	4,032	36	1,688	2,028	2,720
6	1,953	2,447	3,707	38	1,686	2,024	2,712
7	1,895	2,365	3,499	40	1,684	2,021	2,705
8	1,860	2,306	3,355	42	1,682	2,018	2,698
9	1,833	2,262	3,250	44	1,680	2,015	2,692
10	1,812	2,228	3,169	46	1,678	2,013	2,687
11	1,796	2,201	3,106	48	1,677	2,011	2,682
12	1,782	2,179	3,055	50	1,676	2,009	2,678
13	1,771	2,160	3,012	55	1,673	2,004	2,668
14	1,761	2,145	2,977	60	1,671	2,000	2,660
15	1,753	2,131	2,947	65	1,669	1,997	2,654
16	1,746	2,120	2,921	70	1,669	1,994	2,648
17	1,740	2,110	2,898	80	1,664	1,990	2,638
18	1,734	2,101	2,878	90	1,662	1,987	2,632
19	1,729	2,093	2,861	100	1,660	1,984	2,626
20	1,725	2,086	2,845	120	1,658	1,976	2,617
21	1,721	2,080	2,831	150	1,655	1,972	2,609
22	1,717	2,074	2,819	200	1,653	1,972	2,601
23	1,714	2,069	2,807	250	1,651	1,970	2,597
24	1,711	2,064	2,797	300	1,650	1,968	2,592
25	1,708	2,060	2,787	400	1,649	1,966	2,589
26	1,706	2,056	2,779	500	1,647	1,964	2,585
27	1,703	2,052	2,771	∞	1,645	1,960	2,576
28	1,701	2,048	2,763				
f	10%	5%	1%	*f*	10%	5%	1%
	Рівень значимості				Рівень значимості		

Критерій Стьюдента стверджує: якщо розраховане $\mathbf{t}_S \leqslant \mathbf{t}_{05}$, то гіпотеза H_0 приймається. Причому ймовірність того, що вона є правильною, не менша за **0,95**, тобто в **95 %** випадків ця гіпотеза відповідає дійсності. Якщо ж розраховане $\mathbf{t}_S \geqslant \mathbf{t}_{01}$, то гіпотеза H_0 відкидається, тому що з ймовірністю **0,99** вона є помилковою, тобто в **99 %** випадків вона не відповідає дійсності. Як і при застосуванні інших критеріїв, особливу увагу слід приділити випадкам, коли $\mathbf{t}_{05} < \mathbf{t}_S < \mathbf{t}_{01}$. Якщо розраховане значення $\mathbf{t}_S$ задовольняє цій нерівності, то висновок щодо прийняття або відкидання гіпотези H_0 зробити неможливо, треба продовжувати експеримент та отримати додаткові дані (нові вибірки).

В розглянутому прикладі $f = 40 + 32 - 2 = 70$, $\mathbf{t}_{05} = 1{,}994$, $\mathbf{t}_{01} = 2{,}648$. Отже, розраховане для наявних вибірок значення критерію Стьюдента $\mathbf{t}_S = 5{,}3 > 2{,}648 = \mathbf{t}_{01}$. З цього випливає, що гіпотеза H_0 про випадковість розбіжностей в середніх значеннях для двох розглянутих вибірок відкидається з ймовірністю **0,99**.

Відповідь. З ймовірністю **99 %** розбіжності у середніх арифметичних значеннях чисельності міського населення для регіонів ***A*** і ***B*** не є випадковими, вони викликані впливом якогось додаткового чинника. Тому чисельність міського населення в цих регіонах слід аналізувати окремо одну від одної.

Взагалі критерій Стьюдента використовується в історичних дослідженнях, коли треба перевірити отримані дослідником результати. Наприклад, можна порівнювати показники різних років, виявляти їх динаміку та прогнозувати подальший розвиток цих показників. При цьому висувається гіпотеза про зростання або, навпаки, зменшення значень аналізованих показників.

І критерій Пірсона, і критерій Стьюдента є статистичними методами, що дають об'єктивний достовірний практичний результат. Ці критерії можна використовувати як окремо, так і спільно. Таким чином, ці критерії не виключають можливості використання один одного – критерій Пірсона надає можливість зіставляти різні дані та визначати частоту, з якою та чи інша ознака зустрічається в теорії або в емпіричному розподілі, а критерій Стьюдента надає можливість отримувати дані для вибірок, що не пов'язані між собою [57]. Також слід зазначити, що критерій Стьюдента може бути застосований для порівняння лише двох вибірок. Якщо є потреба порівняти більшу кількість вибірок, то слід використовувати інші статистичні методи.

3.5.4. *Критерій однорідності*

Цінність критерію χ^2 (для перевірки гіпотез) полягає в тому, що з його допомогою можна досліджувати якісні ознаки, які характеризуються якимись відтінками, але не мають кількісного вираження. Перебіг кожного історичного процесу або прояв якогось історичного явища завжди залежать від декількох чинників. Якщо для жодного з них не створено спеціальних умов, то досліджуване явище або процес будуть підкорятися нормальному закону. На практиці часто доводиться мати справу з явищами, коли для супутніх цьому явищу чинників можуть, незалежно від бажання дослідника, створюватися сприятливі для нього умови. Оскільки будь-яке явище або процес вивчаються в часі, то іноді ці умови можуть стати доволі значущими. Тому перед дослідником, як правило, стоїть задача підбора однорідного матеріалу для вивчення досліджуваного процесу або явища.

В історичних дослідженнях доводиться мати справу з найрізноманітнішими джерелами інформації про минуле. Особливими видами, наприклад, етнографічних джерел інформації є фольклорні та лінгвістичні. Лінгвістичне джерело інформації – це пам'ятки мови, що містять цінні для історії відомості. Історія будь-якого народу ґрунтується в тому числі й на дослідженні його мови: якими були назви об'єктів побуту, знарядь праці, зброї, ремесел; від яких народів, коли і чому проникали в його мову іноземні слова; якою була мова документів, літературних творів і приватних текстів (листів, щоденників) тощо. В основу назви цього джерела інформації покладено латинське слово «lingua», що українською означає «мова». Мова виникла на певному етапі розвитку людини. Народи та нації впродовж історії сформували свої мови. Без знань про мовленнєві процеси й історія як наука не може вважатися повноцінною. Наприклад, іншомовні слова допомагають зрозуміти, як розвивалися відносини народу із сусідами, якими були торгівля, освіта, наука, перекладацька справа тощо. Нехай, наприклад, в ході лінгвістичного етнографічного експерименту вивчалися музичні фольклорні твори (пісні) англійською мовою із різним емоційним навантаженням: позитивним (веселим) та негативним (тужливим, сумним). При цьому за індикатор можливих розбіжностей було прийнято частоту основного тону голосного с головним наголосом в емоційних реченнях, що виражають оклик.

Аудиторський аналіз свідчив про чітке розходження позитивного й негативного відтінків емоції при прослуховуванні фраз у контексті. Однак коли експериментальні фрази були вичленовані з контексту, показання аудиторів виявилися плутаними, а іноді й суперечливими. Результати аудіювання дозволяють висунути наступну нульову гіпотезу $\boldsymbol{H_0}$: «***Не існує акустичних ознак розходження позитивного й негативного відтінків емоції оклику, принаймні, такий параметр, як частота основного тону, не розрізняє цих відтінків. Інакше кажучи, матеріал про значення частоти основного тону, отриманий окремо для окличних речень із позитивними й негативними відтінками емоції, є однорідним, тобто вибірки по цих відтінках емоції можна об'єднати***». Висунуту гіпотезу можна перевірити за допомогою критерію χ^2. Процес обчислення χ^2 у цьому випадку розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 3.8. Значення частоти основного тону голосного з головним наголосом в емоційних окличних реченнях зазначені в наступній таблиці. Підтвердити або спростувати висунуту гіпотезу $\boldsymbol{H_0}$.

№ з/п	Інтервали (частота основного тону)	Частоти для позитивного відтінку емоції (n_{1i})	Частоти для негативного відтінку емоції (n_{2i})
	1	2	3
1	0.80 – 1.20	7	2
2	1.20 – 1.60	16	3
3	1.60 – 2.00	24	7
4	2.00 – 2.40	65	26
5	2.40 – 2.80	15	6

Розв'язання. Для проведення розрахунків, потрібних для обчислення критерію χ^2, за допомогою якого можна перевірити висунуту гіпотезу, побудуємо розрахункову таблицю.

№ з/п	Інтервали (частота основного тону)	Частоти для позитивного відтінку емоції (n_{i1})	Частоти для негативного відтінку емоції (n_{i2})	$N^{(i)}$	$\frac{n_1 N^{(i)}}{N}$	$\frac{n_2 N^{(i)}}{N}$	χ^2_{1i}	χ^2_{2i}
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.80 – 1.20	7	2	7 + 2 = 9	$\frac{9\cdot127}{171} = 6.68$	$\frac{9\cdot44}{171} = 2.32$	$\frac{(7-6.68)^2}{6.68} = 0.02$	$\frac{(2-2.32)^2}{2.32} = 0.04$
2	1.20 – 1.60	16	3	16 + 3 = 19	$\frac{19\cdot127}{171} = 14.11$	$\frac{19\cdot44}{171} = 4.89$	$\frac{(16-14.11)^2}{14.11} = 0.25$	$\frac{(3-4.89)^2}{4.89} = 0.73$
3	1.60 – 2.00	24	7	24 + 7 = 31	$\frac{31\cdot127}{171} = 23.02$	$\frac{31\cdot44}{171} = 7.98$	$\frac{(24-23.02)^2}{23.02} = 0.04$	$\frac{(7-7.98)^2}{7.98} = 0.12$
4	2.00 – 2.40	65	26	65 + 26 = 91	$\frac{91\cdot127}{171} = 67.58$	$\frac{91\cdot44}{171} = 23.42$	$\frac{(65-67.58)^2}{67.58} = 0.1$	$\frac{(26-23.42)^2}{23.42} = 0.28$
5	2.40 – 2.80	15	6	15 + 6 = 21	$\frac{21\cdot127}{171} = 15.6$	$\frac{21\cdot44}{171} = 5.4$	$\frac{(15-15.6)^2}{15.6} = 0.02$	$\frac{(6-5.4)^2}{5.4} = 0.07$
Разом		$n_1 = \sum_{i=1}^{k} n_{i1} = 127$	$n_2 = \sum_{i=1}^{k} n_{i2} = 44$	$N = \sum_{i=1}^{k} N^{(i)} = 171$			$\chi^2_1 = \sum_{i=1}^{k} \chi^2_{i1} = 0.43$	$\chi^2_2 = \sum_{i=1}^{k} \chi^2_{i2} = 1.24$

Стовпці цієї таблиці заповнюються в такий спосіб: у результаті експерименту були отримані значення частоти основного тону (як для позитивних, так і для негативних відтінків емоції оклику), які були розподілені за п'ятьма інтервалами **(0.80 – 1.20)**, **(1.20 – 1.60)**, **(1.60 – 2.00)**, **(2.00 – 2.40)**, **(2.40 – 2.80)**. Ці інтервали зазначені в стовпці **№ 1**. У стовпці **№ 2** записані числа фраз, що спостерігалися, з позитивним відтінком емоції, склад з головним наголосом яких має значення частоти основного тону у відповідному інтервалі. В такий самий спосіб заповнюється стовпець **№ 3**, що відповідає негативним відтінкам емоції оклику. Стовпець **№ 4** – числа $N^{(i)}$ – це сума відповідних елементів стовпців **№ 2** і **№ 3**. Число N – сума всіх елементів стовпця **№ 4**, n_1 – сума елементів стовпця **№ 2**, n_2 – сума елементів стовпця **№ 3**. Ясно, що $N = n_1 + n_2$. У цьому прикладі $N = 171$, $n_1 = 127$, $n_2 = 44$. Елементи стовпця **№ 5** (і відповідно стовпця **№ 6**) отримуються як результат перемножування відповідних елементів стовпця **№ 4** на n_1 (відповідно, на n_2) і ділення результату на N.

Тепер можна приступитися до обчислення χ^2. Для цього з кожного елемента стовпця **№ 2** віднімаємо відповідний елемент стовпця **№ 5**, отримані різниці підносимо до квадрата, а результат ділимо на елемент стовпця **№ 5**. В такий спосіб отримуємо елементи стовпця **№ 7**. Так же само вчиняємо і з парами зі стовпців **№ 3** і **№ 6**, в результаті чого отримуємо елементи стовпця **№ 8**. Над розрахунковою таблицею наведено схему, які саме стовпці задіяні при обчисленні підсумкових стовпців за різними відтінками емоції. Отримані підсумкові стовпці підсумовуємо. Це будуть значення критерію для кожного виду емоції. Сума підсумків за цими стовпцями і є обчисленим значенням критерію χ^2. В нашому прикладі

$$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 = \mathbf{0.43 + 1.24 = 1.67}\ .$$

Число ступенів свободи для даного прикладу дорівнює $f = k - 1$, де k – кількість інтервалів групування. У нашому випадку $f = 5 - 1 = 4$. З таблиці 3.3 знаходимо $\chi^2_{05} = 9.5$ і $\chi^2_{01} = 13.3$. Оскільки $\chi^2 = 1.64 < 9.5 = \chi^2_{05}$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто позитивні й негативні відтінки емоції оклику в англійських піснях однаково впливають на частоту основного тону складу з головним наголосом.

<u>Відповідь</u>. З ймовірністю **95 %** не існує акустичних ознак розходження позитивного й негативного відтінків емоції оклику, принаймні, такий параметр, як частота основного тону, не розрізняє цих відтінків. Це означає, що матеріал про значення частоти основного тону, отриманий окремо для окличних речень із позитивними й негативними відтінками емоції, є однорідним, тобто вибірки по цих відтінках емоції можна об’єднати.

В загальному випадку, щоб побудувати критерій однорідності, припустимо, що досліджуване явище характеризується набором k взаємовиключних одна для одної ознак P_1, P_2, …, P_k (у прикладі 3.8 ці ознаки характеризувалися інтервалами групування). В загальному випадку ці ознаки можуть бути як кількісними, так і атрибутивними. Нехай є m вибірок відповідно об’ємів n_1, n_2, …, n_m, що відповідають ознакам Q_1, Q_2, …, Q_m (у прикладі 3.8 $m = 2$). Ці ознаки в загальному випадку також можуть бути як кількісними, так і атрибутивними. Позначимо через n_{ij} кількість елементів в j-й вибірці, що має властивість P_i. Очевидно, що

$$N^{(i)} = n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{im}.$$

Позначимо через

$$n_j = n_{1j} + n_{2j} + \ldots + n_{kj}.$$

Тоді

$$N = \sum_{i=1}^{k} N^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} n_j\ .$$

Загальна схема розрахункової таблиці для довільної кількості ознак має наступний вигляд

№ з/п	Інтервали	Частоти					$N^{(i)}$	Очікувані частоти					Критерій за j-ю ознакою				
		n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{im}		$\frac{n_1 N^{(i)}}{N}$	…	$\frac{n_j N^{(i)}}{N}$	…	$\frac{n_m N^{(i)}}{N}$	χ^2_{i1}	…	χ^2_{ij}	…	χ^2_{im}
	1	A1	…	AJ	…	AM	2	B1	…	BJ	…	BM	C1	…	CJ	…	CM
1	$[x_1 ; x_1+h)$	n_{11}	…	n_{1j}	…	n_{1m}	$N^{(1)}$	$\frac{n_1 N^{(1)}}{N}$	…	$\frac{n_j N^{(1)}}{N}$	…	$\frac{n_m N^{(1)}}{N}$	χ^2_{11}	…	χ^2_{1j}	…	χ^2_{1m}
2	$[x_1+h ; x_1+2h)$	n_{21}	…	n_{2j}	…	n_{2m}	$N^{(2)}$	$\frac{n_1 N^{(2)}}{N}$	…	$\frac{n_j N^{(2)}}{N}$	…	$\frac{n_m N^{(2)}}{N}$	χ^2_{21}	…	χ^2_{2j}	…	χ^2_{2m}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	$[x_1+(i-1)h, x_1+ih)$	n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{im}	$N^{(i)}$	$\frac{n_1 N^{(i)}}{N}$	…	$\frac{n_j N^{(i)}}{N}$	…	$\frac{n_m N^{(i)}}{N}$	χ^2_{i1}	…	χ^2_{ij}	…	χ^2_{im}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k	$[x_1+(k-1)h ; x_n]$	n_{k1}	…	n_{kj}	…	n_{km}	$N^{(k)}$	$\frac{n_1 N^{(k)}}{N}$	…	$\frac{n_j N^{(k)}}{N}$	…	$\frac{n_m N^{(k)}}{N}$	χ^2_{k1}		χ^2_{kj}		χ^2_{km}
Разом		n_1	…	n_j	…	n_m	N						χ^2_1	…	χ^2_j	…	χ^2_m

Значення критерію χ^2 в загальному випадку обчислюється за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_j N^{(i)}}{N}\right)^2}{\frac{n_j N^{(i)}}{N}} . \tag{3.18}$$

Тут підсумовування ведеться по всіляких парах чисел (i, j), $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$. З наведеної таблиці значення цього критерію отримується за формулою

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \chi^2_j ,$$

тобто як сума підсумкових значень останнього блоку стовпців. Обчислене остаточне значення χ^2 порівнюється з табличним χ^2_{05} або χ^2_{01}, обчисленим для числа ступенів свободи, яке в загальному випадку дорівнює [35]

$$f=(k-1)(m-1).$$

Для випадку $m = 2$ ми маємо випадок, уже розібраний у прикладі 3.8.

На відміну від критерію Стьюдента, критерій якісної однорідності може бути застосований для дослідження будь-якої довільної кількості ознак. Більш за те, ці ознаки не обов’язково мають бути кількісними.

3.6. Кореляційна залежність

Для встановлення загальних законів, за якими протікають різні явища, необхідно не лише проаналізувати кожний з компонентів якогось явища, але й надати детальну кількісну та якісну характеристику різноманітних зв'язків, які існують між ознаками, що цікавлять дослідника історичного процесу, і описати результати впливу даних зв'язків на досліджувані процеси [55].

Прояв однієї ознаки перебуває в щільному зв'язку з багатьма іншими ознаками досліджуваного явища. Внутрішня структура явища характеризується багатопричинними зв'язками. Зведення складної системи відносин до більш простих її видів, виділення тих зв'язків, які є основними в досліджуваній функції історичного явища – це ті задачі, які мають бути вирішені експериментатором на початковому етапі дослідження.

Найважливіше місце при вивченні історичних явищ та процесів математичними методами займає аналіз взаємозв'язків. Він потребує, перш за все, виявлення форми зв'язку між досліджуваними ознаками. Теоретично всі зв'язки, з узагальнення яких виникають закони науки, можна розділити на два види – функціональна залежність та кореляційна залежність. При ***функціональній залежності*** будь-якому фіксованому значенню однієї ознаки відповідає суворо визначене, завжди те саме, значення іншої ознаки. Також зміна фактору-причини на одну й ту ж саму величину при функціональній залежності завжди призводить до однієї й тієї ж самої зміни результативної ознаки. При ***кореляційній залежності*** фіксованому значенню однієї ознаки можуть відповідати декілька значень іншої ознаки, причому до проведення експерименту це відповідне значення другої ознаки дослідникові невідоме. Причина цього полягає в тому, що в жодному експерименті, загалом кажучи, не можна повністю врахувати вплив другорядних чинників. Також при стохастичній залежності одні й ті самі зміни фактора причини можуть призводити до неоднакових, заздалегідь невідомих, змін результативної ознаки. Тому в цьому випадку, по-перше, щільність та сила взаємозв'язку можуть бути виміряні лише застосовно до серії вимірювань, тобто виражені статистично. А по-друге, і показники зв'язку, отримані за вибіркою, можуть бути розповсюджені на всю генеральну сукупність лише приблизно з певним довірчим інтервалом [22].

Кореляційний зв'язок може розглядатися з точки зору його «*щільності*» та «*форми*». Під ***щільністю кореляційного зв'язку*** розуміється сила впливу досліджуваних ознак одна на одну. За щільністю кореляція може бути

- *слабкою,*
- *середньою,*
- *сильною.*

Форма кореляційного зв'язку показує, як у середньому змінюються значення однієї ознаки при зміні іншої. За формою кореляція може бути

- *лінійною* (*прямолінійною*),
- *криволінійною.*

Графічно подати кореляційну залежність у вигляді деякої лінії можна, розташувавши на декартовій площині точки, що відповідають сумісним значенням двох досліджуваних ознак. Лінія, вздовж якої розташуються ці точки, називається ***лінією регресії***.

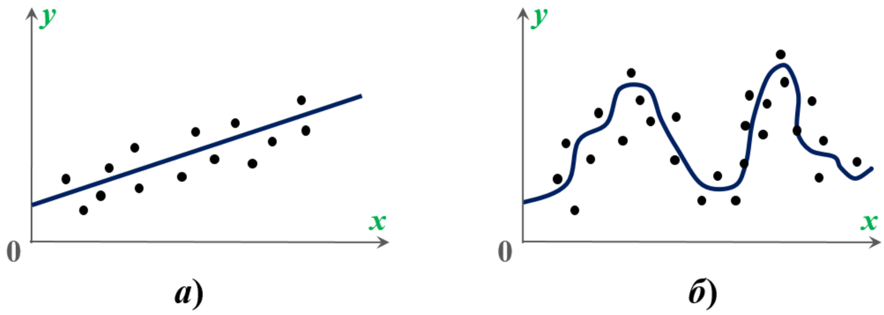


Рис. 3.4 .Лінійна та криволінійна регресія

Прямолінійна форма кореляційного зв'язку виникає тоді, коли рівним змінам першої ознаки відповідають рівні (у середньому) за величиною та за знаком зміни другої ознаки. При лінійній залежності розташування значень ознак ***X*** і ***Y*** можна подати графічно уздовж однієї прямої (рис. 3.4*а*). Залежність вважається ***лінійною***, якщо рівним збільшенням значень однієї ознаки відповідають більш-менш рівні зміни того самого знаку іншої ознаки. Якщо рівним збільшенням значень однієї ознаки відповідають різні як за знаком, так і за величиною, зміни іншої ознаки, то така залежність називається ***криволінійною*** (рис. 3.4*б*).

Нехай є дві ознаки, ***X*** і ***Y***, що характеризують одне й те ж саме явище. Залежність, при якій зі збільшенням (або зменшенням) кожного значення однієї ознаки збільшується (або зменшується) кожне значення іншої ознаки, називається ***повною***. Але бувають ситуації, коли зі збільшенням значень ознаки ***X*** збільшується не кожне значення ознаки ***Y***. Залежність називається ***частковою***, коли в середньому (тобто не для кожного значення) зі збільшенням (або зменшенням) значень однієї ознаки збільшуються (зменшуються) значення іншої ознаки. Повна або часткова кореляція за своєю формою є ***прямою***, якщо збільшення (зменшення) значень однієї ознаки в підсумку спричиняє збільшення (зменшення) значень іншої ознаки. У тому випадку, коли зі збільшенням (зменшенням) значень однієї ознаки в підсумку зменшуються (збільшуються) значення іншої ознаки, повна або часткова кореляція називається ***зворотною***. Приклади різновидів кореляційного зв'язку за повнотою та напрямком показано у наступних рядах даних [13].

x	4	6	9	10	12
y	20	28	30	35	37

Повна пряма кореляція

x	4	6	9	10	12
y	30	20	35	28	37

Часткова пряма кореляція

x	4	6	9	10	12
y	37	35	30	28	20

Повна зворотна кореляція

x	4	6	9	10	12
y	37	28	35	20	30

Часткова зворотна кореляція

Кореляційна залежність двох ознак не має двостороннього характеру, тобто не є комутативною. Точніше кажучи, якщо вплив 1-ї ознаки на 2-гу має певну щільність й форму зв'язку, то щільність й форма кореляційного зв'язку між 2-ю і 1-ю ознаками може бути іншою. Але в тих випадках, коли кореляційний зв'язок між двома ознаками є лінійним, ступені впливу однієї ознаки на іншу є однаковими. Цим пояснюється те, що надалі велику увагу буде приділено саме лінійному кореляційному зв'язку.

Припустимо, що є значення двох ознак X і Y якогось історичного явища. У кожному прояві явища обидві ці ознаки приймають певне числове значення. У результаті численних спостережень, як правило, помічено, що ознаки X і Y взаємозалежні. Зв'язок може прийняти різний вигляд, але ми вправі припустити найпростішу залежність між ними – прямолінійну (лінійну). Лінійний зв'язок є найпростішим й досить часто зустрічається. Мірою щільності та показником напрямку лінійного зв'язку служить ***коефіцієнт лінійної кореляції*** $\boldsymbol{r}$, обчислюваний за формулою

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{3.19}$$

де $\overline{x}$ – середнє арифметичне значення ознаки X за спостереженнями x_1, x_2, …, x_n;

$\overline{y}$ - середнє арифметичне значення ознаки Y за спостереженнями y_1, y_2, …, y_n.

Для того, щоб зробити висновок про кореляційну залежність ознак X і Y варто врахувати, що коефіцієнт кореляції r може приймати значення від -1 до $+1$, причому від'ємне значення для r свідчить про те, що залежність між X і Y зворотна (тобто зі збільшенням однієї ознаки інша зменшується), а при додатних значеннях r зв'язок є прямим (зі збільшенням однієї ознаки збільшується й інша). Крім того, чим ближче r до ± 1, тим сильніший існуючий лінійний зв'язок між X і Y, а коли r наближується до нуля, то між X і Y лінійний зв'язок майже відсутній. Однак при цьому цілком можливо, що між X і Y має місце кореляційний зв'язок, і навіть сильний, але криволінійний. Отже, щодо сили лінійного кореляційного зв'язку існує наступна градація: якщо $|r| \in [0{,}7;\ 1]$ – лінійний зв'язок *сильний*, якщо $|r| \in [0{,}3;\ 0{,}7)$ – лінійний зв'язок *середньої сили*, якщо $|r| \in [0{,}1;\ 0{,}3)$ – лінійний зв'язок *слабкий*, $|r| \in [0;\ 0{,}1)$ – лінійний зв'язок *відсутній*.

Приклад 3.9. Для визначення кореляційного зв'язку між двома ознаками деякого явища був проведений експеримент із **20** спостережень. Кожне спостереження одночасно вимірювало значення обох ознак. Позначимо першу ознаку через X та другу ознаку через Y. Таким чином, результатом кожного спостереження є пара значень ознак (x_i, y_i).

№ (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	350	320	360	360	340	240	200	260	200	240	290	220	200	220	300	230	270	300	300	280
y_i	17	17	16	15	17	10,5	9,5	14,5	10,5	11	17	20	16	10	13	16	15	16	20	19

З'ясувати, чи існує між виміряними ознаками лінійна кореляційна залежність. Дослідити її напрямок та щільність.

Розв'язання. Є очевидним, що об'єм вибірки дорівнює кількості спостережень, тобто $n = 20$. а пари (x_i, y_i) означають, що в i-му спостереженні ознака X прийняла значення x_i, а ознака Y – значення y_i. Для обчислення коефіцієнта лінійної кореляції між ознаками X і Y складемо розрахункову таблицю.

№ (i)	I		II		III		IV
	Значення ознаки		Відхилення від середнього арифметичного		Квадрати відхилень від середнього арифметичного		Добутки відхилень
	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	350	17	350 – 274 = **76**	17 – 15 = **2**	76^2 = **5776**	2^2 = **4**	76 · 2 = **152**
2	320	17	320 – 274 = **46**	17 – 15 = **2**	46^2 = **2116**	2^2 = **4**	46 · 2 = **96**
3	360	16	360 – 274 = **86**	16 – 15 = **1**	86^2 = **7396**	1^2 = **1**	86 · 1 = **86**
4	360	15	360 – 274 = **86**	15 – 15 = **0**	86^2 = **7396**	0^2 = **0**	86 · 0 = **0**
5	340	17	340 – 274 = **66**	17 – 15 = **2**	66^2 = **4356**	2^2 = **4**	66 · 2 = **132**
6	240	10,5	240 – 274 = **– 34**	10,5 – 15 = **– 4,5**	$(–34)^2$ = **1156**	$(–4,5)^2$ = **20,25**	(– 34) · (– 4,5) = **153**
7	200	9,5	200 – 274 = **– 74**	9,5 – 15 = **– 5,5**	$(–74)^2$ = **5476**	$(–5,5)^2$ = **30,25**	(– 74) · (– 5,5) = **407**
8	260	14,5	260 – 274 = **– 14**	14,5 – 15 = **– 0,5**	$(–14)^2$ = **196**	$(–0,5)^2$ = **0,25**	(– 14) · (-0,5) = **7**
9	200	10,5	200 – 274 = **– 74**	10,5 – 15 = **– 4,5**	$(–74)^2$ = **5476**	$(–4,5)^2$ = **20,25**	(– 74) · (– 4,5) = **333**
10	240	11	240 – 274 = **– 34**	11 – 15 = **– 4**	$(–34)^2$ = **1156**	$(–4)^2$ = **16**	(– 34) · (– 4) = **136**
11	290	17	290 – 274 = **16**	17 – 15 = **2**	16^2 = **256**	2^2 = **4**	16 · 2 = **32**
12	220	20	220 – 274 = **– 54**	20 – 15 = **5**	$(–54)^2$ = **2916**	5^2 = **25**	(– 54) · 5 = **– 270**
13	200	16	200 – 274 = **– 74**	16 – 15 = **1**	$(–74)^2$ = **5476**	1^2 = **1**	(– 74) · 1 = **– 74**
14	220	10	220 – 274 = **– 54**	10 – 15 = **– 5**	$(–54)^2$ = **2916**	$(–5)^2$ = **25**	(– 54) · (– 5) = **270**
15	300	13	300 – 274 = **26**	13 – 15 = **– 2**	26^2 = **676**	$(–2)^2$ = **4**	26 · (– 2) = **– 52**
16	230	16	230 – 274 = **– 44**	16 – 15 = **1**	$(–44)^2$ = **1936**	1^2 = **1**	(– 44) · 1 = **– 44**
17	270	15	270 – 274 = **– 4**	15 – 15 = **0**	$(–4)^2$ = **16**	0^2 = **0**	(– 4) · 0 = **0**
18	300	16	300 – 274 = **26**	16 – 15 = **1**	26^2 = **676**	1^2 = **1**	26 · 1 = **26**
19	300	20	300 – 274 = **26**	20 – 15 = **5**	26^2 = **676**	5^2 = **25**	26 · 5 = **130**
20	280	19	280 – 274 = **6**	19 – 15 = **4**	6^2 = **36**	4^2 = **16**	6 · 4 = **24**
Разом	**5480**	**300**			**56080**	**202**	**1544**

З **I**-ї групи стовпців (стовпці **№ 2** та **№ 3**, що є даними умови задачі, тобто результатами спостережень) можна знайти середні арифметичні значення для кожної ознаки за весь період спостережень:

$$\bar{x} = \frac{5480}{20} = 274\,; \qquad \bar{y} = \frac{300}{20} = 15\,.$$

Для обчислення елементів **II**-ї групи стовпців (відхилень від середнього арифметичного) треба від кожного значення ознаки відняти середнє арифметичне значення для цієї ознаки. Отже, елементи стовпця **№ 4** дорівнюють різницям елементів стовпця **№ 2** та вже обчисленого значення $\bar{x}$ **= 274**, а елементи стовпця **№5** – різницям елементів стовпця **№ 3** та вже обчисленого значення $\bar{y}$ **= 15**. Елементи **III**-ї групи стовпців (квадрати відхилень від середнього арифметичного) є піднесеними до другого ступеню елементами **II**-ї групи стовпців: елементи стовпця **№ 6** – це квадрати елементів стовпця **№ 4**, а елементи стовпця **№ 7** – це квадрати елементів стовпця **№ 5**. Елементи **IV**-ї групи, тобто стовпця **№ 8**, є добутком відповідних елементів **II**-ї групи стовпців, тобто добутком елементів стовпця **№ 3** на відповідні елементи стовпця **№ 4**. В обчисленні коефіцієнта лінійної кореляції беруть участь суми елементів за **6**-м, **7**-м та **8**-м стовпцями. Отже, використовуючи результати наведеної розрахункової таблиці, маємо:

$$r = \frac{1544}{\sqrt{56080 \cdot 202}} = \frac{1544}{3365{,}73} = 0{,}46\,.$$

Знак отриманого коефіцієнта лінійної кореляції визначається знаком суми елементів останнього стовпця, тобто суми добутків відхилень значень ознак від своїх середніх арифметичних значень (це число є чисельником у формулі для коефіцієнта лінійної кореляції). В нашому прикладі це число є додатним, тому коефіцієнт лінійної кореляції також є числом додатним, що свідчить про прямий напрямок лінійного кореляційного зв'язку між досліджуваними ознаками. Абсолютне значення обчисленого коефіцієнта міститься в інтервалі r **= 0,46** $\in$ **[0,3; 0,7)**. Це означає, що між ознаками X та Y існує лінійний кореляційний зв'язок середньої сили.

<u>Відповідь</u>. Між ознаками ***X*** та ***Y*** існує ***прямий*** лінійний кореляційний зв'язок ***середньої сили***.

У більшості випадків при історичних дослідженнях характер кореляції між двома ознаками повністю або частково залежить від того, що дві досліджуваних ознаки або одна з них залежать, у свою чергу, від якої-небудь третьої ознаки. Для того, щоб точно оцінити зв'язок між двома ознаками, необхідно виключити залежність від третьої ознаки. Це можна зробити, зокрема, при постійному значенні третьої ознаки. Але на практиці це здійснити дуже важко, практично неможливо. Однак можна спробувати виключити залежність від третьої ознаки, зіставивши її з кожною з основних ознак. Коефіцієнт кореляції між двома ознаками ***X*** і ***Y*** при постійних значеннях третьої ознаки ***Z*** називається ***частинним*** **(*парціальним*)** ***коефіцієнтом кореляції***. Парціальний коефіцієнт кореляції може бути обчислений лише у випадку суворо лінійного зв'язку всіх трьох ознак за допомогою наступних формул:

при постійному значенні ознаки ***Z***:

$$\boldsymbol{r_{xy/z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}} \;;$$

при постійному значенні ознаки ***Y***:

$$\boldsymbol{r_{xz/y} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}} \;;$$

при постійному значенні ознаки ***X***:

$$\boldsymbol{r_{yz/x} = \frac{r_{yz} - r_{xy} \cdot r_{xz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xz}^2)}}} \;.$$

При аналізі стохастичних взаємозв'язків виходять із припущення про той чи інший вигляд форми функціонального зв'язку, тобто розглядають їх як наближення до якоїсь із цих форм. Найпростішою формою функціонального зв'язку, як вже зазначалося, є прямолінійна форма. Тому найбільш поширені методи аналізу ймовірнісних взаємозв'язків – кореляційний та регресійний аналіз – перш за все виходять із припущення про лінійну залежність між ознаками. Але взаємозв'язок між досліджуваними ознаками може бути й нелінійним. Тому потрібна перевірка цієї лінійності. Вона є необхідною, коли дослідник має справу не лише з вибірковими даними, але й з показниками, що характеризують генеральні сукупності об'єктів. При кореляційному аналізі обійтися без спеціальної перевірки лінійності можна лише тоді, коли коефіцієнти кореляції є високими (перевищують 70 %), бо це свідчить про переважну роль лінійної залежності. В решті випадків потрібна перевірка лінійності. Основний метод виявлення лінійного характеру кореляційного зв'язку полягає в оцінці істотності розбіжностей лінійних коефіцієнтів кореляції та коефіцієнтів кореляційних відносин, що розкривають взаємозв'язок при його криволінійному типі [22]. Коли такі розбіжності виявляються істотними, слід використовувати не лінійні коефіцієнти кореляції, а кореляційні відносини. Але їх недоліком є те, що вони не показують напрямку взаємозв'язку (прямий чи зворотний). Цей напрямок можна визначити за лінійними коефіцієнтами кореляції. Таке припущення є правомірним в змістовому плані, тому що при будь-якій формі взаємозв'язку його прямолінійна функція є найбільш узагальненим (хоч і вкрай наближеним і навіть грубим) вираженням його основного напрямку.

При множинному регресійному аналізі (коли з'ясовується залежність результату від ознак) лінійна форма кореляційного зв'язку між ознакою-результатом і ознаками-факторами може побічно свідчити про можливість використання регресійної моделі. Найважливішою умовою коректного застосування регресійної моделі є незалежність між собою факторних ознак. Показником цієї незалежності може виступати щільність кореляційного взаємозв'язку між факторними ознаками. До щільно взаємозалежних ознак належать ті, у яких коефіцієнт детермінації (тобто квадрат коефіцієнта кореляції, поданий у відсотках) перевищує 50 %, тобто коефіцієнти кореляції виявляються великими (більшими за 0,7). Тому є припустимим введення в регресійну модель в якості незалежних таких ознак, кореляційний взаємозв'язок між якими не перевищує 0,5 – 0,6. В протилежному випадку можливе коректне урахування в лінійній моделі лише сукупного впливу на результат щільно взаємопов'язаних ознак або слід звернутися до регресійної моделі іншої форми.

Контрольні запитання

1. Що таке випадкова вибірка?
2. Як обчислюється вибіркове середнє?
3. Як обчислюється вибіркова дисперсія?
4. В який спосіб проводиться інтервальне групування вибіркових значень?
5. Що таке частота інтервалу?
6. Як і коли вноситься поправка Шеппарда?
7. Сформулюйте правило трьох сигм.
8. Що показує критерій згоди Пірсона?
9. Яка величина грає роль параметра в критерії Пірсона?
10. Як висувається нульова гіпотеза?
11. Чим відрізняється вибірка від генеральної сукупності?
12. Який закон розподілу має середнє арифметичне значення?
13. Як обираються границі довірчого інтервалу?
14. За яким критерієм досліджується репрезентативність вибірки?
15. Коли використовується критерій Стьюдента?
16. Чим кореляційна залежність відрізняється від функціональної?
17. Якою може бути кореляція за щільністю?
18. Якою може бути кореляція за формою?
19. Яка кореляція є повною, а яка частковою?
20. Яка кореляція є прямою, а яка зворотною?
21. За якою формулою обчислюється коефіцієнт лінійної кореляції?
22. Яким чином інтерпретується числове значення коефіцієнта кореляції?
23. Що таке частинна (парціальна) кореляція?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Глівенко С. В., Соколов М. О., Теліженко О. М. Економічне прогнозування: навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 207 с.
2. Агафоненко О. Ю., Литинський Р. М. Історія розвитку статистики як науки. – Донецьк: Донецький державний інститут управління, 2013. – 272 с.
3. Шпігельхалтер Д. Мистецтво статистики. Як знаходити відповіді в даних. – Київ: Форс Україна, 2021. – 448 с.
4. Галушко К. Ю. Статистика історична. [Електронний ресурс]. URL: http://www.history.org.ua/?termin=Statystyka_istorychna
5. Міронова І. С. Джерелознавство, історіографія та методологія історії. – Миколаїв: Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2023. – 212 с.
6. https://studfile.net/preview/12362129/page:15/
7. Польовий М. А., Святець Ю. А. Короткий нарис історії української кліометрики.// Україна модерна. – Вип. 27, 2017. – С. 183 – 212.
8. Ignatova Yu. V., Polishchuk Ye. A., Vasylyshen Yu. V. Methods of descriptive statistics and factor analysis in assessing the effectiveness of using modern financial and credit instruments in the implementation of innovation projects// Інвестиції: практика та досвід. – 2017. – С. 5–11.
9. Анрі Л., Блюм А. Методика аналізу в історичній демографії. – Київ: Вид-во «Либідь», 2007. – 207 с.
10. Кількісні методи в історичних дослідженнях/ Гарскова І. М., Ізмєстьєва Т. Ф., Мілов Л. В. та ін., під ред. Ковальченко І. Д. – Київ: Вища школа, 1984. – 384 с.
11. Joseph C. Giarratano, Gary D. Riley. Expert System. Principles and Programming: fourth edition. – Houston: Course Technology, 2005. – 1152 p.
12. Stevens S. S., Warshofsky F. Sound and hearing. Psychophysics social – New York: 1972. – 400 p.
13. Якімова Н. А., Круглов В. Є. Математичні методи прогнозування в економіці та бізнесі. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2024. – 211 с.
14. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 2. Булеві функції: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 126 с.
15. Сидоренко О. Методи математичної обробки в психології. – Київ: ООО «Мова», 2000. – 350 с.
16. Гвоздинський А. М., Якімова Н. А., Губін В. О. Методи оптимізації в системах прийняття рішень / Навчальний посібник. – Харків. – 2006.
17. Якімова Н. А. Елементи теорії множин: навчально-методичний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 102 с.
18. https://studfile.net/preview/10155659/page:152
19. Ямненко Р. Є. Математична статистика. – Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2020. – 85 с.
20. Коркавий В. К., Ярова В. В. Математична статистика: навчальний посібник. – Київ: ВД «Професіонал», 2004. – 378 с.
21. Єдронова В. Н., Єдронова М. В. Загальна теорія статистики. – Тернопіль.: Юрист, 2001. – 511 с.
22. Нєгін А. Є., Миронос А. А. Математичні методи в історичних дослідженнях. – Київ: Либідь, 2012. – 31 с.

23. Ярема О. Р. Моделювання економіки. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 254 с.
24. Гончарук А. Г. Основи статистики. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 125 с.
25. Гвоздинський А. М., Губін В. О., Шергін В. Л. Методи оптимізації в організаційному управлінні. – Харків: ХНУРЕ. – 2014. – 396 с.
26. Бідюк П. І., Ткач Б. П., Харрінгтон Т. Математична статистика: навчальний посібник – Київ: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2018. – 348 с.
27. Вашків П. Г., Пастер П. І., Сторожук В. П., Ткач Є. І. Теорія статистики/ Навчальний посібник. – К.: Либідь, 2004. – 320 с.
28. Шумська С. С. Макроекономічне прогнозування: Навчальний посібник. Частина 1. – Київ: Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2015. – 176 с.
29. Рогальський Ф. Б., Цокуренко О. О. Математичні методи аналізу економічних систем. Книга 2. Методи та алгоритми розв'язання задач, що важко формалізуються. – Київ: Наукова думка, 2001. – 424 с.
30. Горбатенко В., Петренко І. Метод «Делфі» та специфіка його застосування у прогнозних розробках.// Політичний менеджмент. № 6, 2008. – С. 174 – 182.
31. Joseph J. Moder, Salah E. Elmaghraby. Handbook of Operation Research. Foundation and Fundamentals. – Ney York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisco, London, Toronto, Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 712 p.
32. Joseph J. Moder, Salah E. Elmaghraby. Handbook of Operation Research. Models and Applications. – Ney York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisco, London, Toronto, Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 712 p.
33. Michael H. Mescon, Michael Albert, Franklin Khedouri. Management. – Ney York: Harper&Row Publishers, 1988. – 800 p.
34. Сущук-Слюсаренко В. І., Гадиняк Р. А. Математична статистика: навчальний посібник. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сикорського, 2019. – 60 с.
35. Варбанець П. Д., Якімова Н. А. Лінгвостатистика: навчальний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2021. – 182 с.
36. Cramer Duncan. Advanced Quantitative Data Analysis. – Philadelphia: Maidenhead. Open University Press UK Limited, 2003. – 288 p.
37. Брагіна Л. М. Методика кількісного аналізу філософських трактатів епохи Відродження. – Київ: Вища школа, 1987. – 58 с.
38. Левицький В. В. Квантитативні методи в лінгвістиці. – Чернівці: «Рута», 2004. – 190 с.
39. Yakimova N. Mathematical interpretation of simple word-combinations using vector logical algebra (on the example of Slavic and Romance-Germanic groups of languages).// «Science in modern society». Proceedings of the XVII International Scientific and Practical Conference. (October 7-8, 2025, Beijing. China). – Pp. 46–49.
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.17349992
40. Yakimova N. A. Mathematical formalization of simple word-combinations using the algebra of finite predicates (on the example of the Ukrainian language).// Modern engineering and innovative technologies. – Karlsruhe, Germany. – February, 2025. – Issue № 37. – Part 3 – Pp. 138–148. DOI: http://doi.org/10.30890/2567-5273.2025-37-03-017
41. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів: Курс лекцій – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2022. – 102 с.
42. Зиков О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.

43. Hamdy A. Taha. Operations Research: an Introduction: seventh edition. – Ney Jersey: Upper Saddle River, 2003. – 912 p.
44. Gagarina D. A. Modeling in history: methods, approaches and researches.// Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2009. – Vol. 7(33). – P. 26 – 34.
45. Бородкін Л. Й., Березкін Ю. Є. Історія та математика: аналіз і моделювання соціально-історичних процесів. – Київ: Либідь, 2007. – 224 с.
46. Андронов О. М., Копитов Є. О., Гринглаз Л. Я. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Харків: КСД, 2004. – 461 с.
47. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. – W. H. Freeman & Co., 1983. – 400 с.
48. Haykin S. Neural networks. – Ney Jersey: Prentice Hill Upper Saddle River, 2006. – 1104 p.
49. Польовий М. А. Прогнозування зміни парадигм історичного пізнання: пошук методу. – Одесса, 2010. – 168 с.
50. Russel Stuart J., Norvig P. Artificial Intelligence: a modern approach. – Ney Jersey: Prentice Hill Upper Saddle River, 2003. – 1406 p.
51. Luger George F. Artificial Intelligence: structures and strategies for complex problem solving. – Boston: Addison Wesley, 2002. – 864 p.
52. Бородкін Л. Й. Багатовимірний статистичний аналіз в історичних дослідженнях. – Київ: КНУ ім. Т.Г. Шевченка, 1998. – 188 с.
53. Якімова Н. А. Операції над блочними предикатними матрицями.// Вісник Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова. Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Том 28. – Випуск 1 – 2 (41 – 42). – С. 185-199. DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269
54. Якімова Н. А. Логічна алгебра: методичний посібник. – Одеса: «Освіта України». – 2019.– 40 с.
55. Герич М. С., Синявська О. О. Математична статистика: навчальний посібник. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2021. – 146 с. – М: ГУ-ВШЭ, 2000. – 688 с.
56. Вігоднер І. В., Білоусова Т. П., Ляхович Т. П. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Одеса: «Олді+», 2019. – 336 с.
57. https://diploms.com.ua/kogda-primenyaetsya-kriterij-pirsona-i-kriterij-styudenta/
58. Шарай Н. В, Білозерова М. О. Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірностей: навчально-методичний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 122 с.
59. Yakimova N.A. Vector modeling of atomic linguistic elements taking into account their dual algebraic essence.// International Science Journal of Education & Linguistics. – 2025. – Vol. 4. – Issue 6. – Pp.75 – 80. DOI: http://doi.org/10.46299/j.isjel.20250406.08
60. Yakimova N. Economic interpretation of some operations on undirected hypergraphs// Grail of Science. – 2026. – Issue. 61. – Pp. 265 – 275. DOI: https://doi.org/10.36074/grail-of-science.23.01.2026.027

Навчальне видання

Якімова Наталія Анатоліївна

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ІСТОРИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з дисципліни «Математична обробка історичної інформації»
для здобувачів спеціальності В9 Історія та археологія

Електронне видання мережевого використовування

В авторській редакції

Затв. авт. 12.03.2026. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система
сумісна з програмним забезпеченням для читання файлів формату PDF.
Обсяг 3,9 МБ. Зам. № 3142.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua