

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Дослідження звичайних диференціальних систем з
регулярними і сингулярними жмутками матриць»

«Investigation of ordinary differential systems with regular
and singular matrix pencils»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Драгун Олександра Олександрівна

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Шарай Н.В.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Самкова Г.Є.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол засідання кафедри

Протокол № ____ від _____ 2024 р.

№ ____ від _____ 2024 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1 Основні поняття та визначення		5
1.1	Елементарні перетворення многочленної матриці	5
1.2	Інваріантні многочлени та елементарні дільники многочленної матриці	7
1.3	Основні положення теорії жмуктів матриць	9
1.4	Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь	10
2 Регулярний і сингулярний жмутки матриць		14
2.1	Регулярний жмуток матриць	14
2.2	Сингулярний жмуток матриць. Теорема про приведення. . .	17
2.3	Канонічна форма сингулярного жмутка матриць	25
2.4	Мінімальні індекси жмутка. Критерій строгої еквівалентності жмуктів.	29
3 Дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь із регулярними та сингулярними жмутками матриць		34
3.1	Регулярний жмуток матриць в системі звичайних диференціальних рівнянь.	35
3.2	Сингулярний жмуток матриць в системі звичайних диференціальних рівнянь	36
3.3	Дослідження розв'язків функціонально - диференціальної задачі	42
3.4	Приклад 1	58
3.5	Приклад 2	65
Висновок		75
Список літератури		76

ВСТУП

Диференціальні системи з регулярними і сингулярними жмутками матриць є важливим об'єктом дослідження в математичній фізиці, теорії керування, теорії автоматичного керування та інших галузях науки. Вони використовуються для моделювання різноманітних фізичних та інженерних систем, таких як електричні ланцюги, механічні системи, екологічні моделі тощо.

Дослідження лінійних систем були започатковані Ф.Р.Гантмахером, який на підставі теорії кінцевих та нескінченних елементарних дільників жмутка, для випадку сталих матриць, побудував загальний розв'язок системи:

$$Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t)$$

де A та B - сталі матриці розміру $m \times n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, в випадку змінного жмутка матриць $A(t) + \lambda B(t)$.

Ці дослідження сприяли розповсюдженню методик, на випадки, коли жмуток матриць є змінним, що викликає інтерес до вивчення функціональних матриць. Проводяться дослідження, метою яких є, використовуючи різні обернення особливих матриць за допомогою спеціальних матриць, представити загальний розв'язок системи у такому вигляді, щоб їх розв'язок зводився до розв'язання ряду лінійних і квазілінійних систем.

Сингулярні задачі Коші почали досліджувати у другій половині XIX століття такі вчені, як Ш.Брію, Ж.Буке, І.Бендіксон, А.Пуанкаре, О.М. Ляпунов та інші. Лінійні системи у разі змінного жмутка матриць з виродженою матрицею вивчалися у роботах: А.М.Самойленка, В.П.Яковця, St.Campbell, M.Hanke та інших. Інтерес до нелінійних систем зі сталим і змінним жмутком матриць започаткували: А.М.Самойленко, Н.І.Шкіля, І.І.Старуна, St.Campbell, R.März, M.Hanke, Г.Є. Самкова, Н. В. Шарай та інші.

В кваліфікаційній роботі вивчається задача Коші для системи m

звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases}$$

де $A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, та вектор-функція $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^m$ неперервна у $D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}$, $0 < a, b = \text{const}'s$.

В роботі планується розглянути ключові аспекти диференціальних систем з регулярними та сингулярними жмутками матриць, враховуючи теоретичні основи теорії матриць і теорії диференціальних рівнянь.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Елементарні перетворення многочленної матриці

Означення 1.1. Многочленною матрицею або λ - матрицею називається *прямокутна матриця* $A(\lambda)$, елементи якої - многочлени від λ :

$$A(\lambda) = \|a_{ik}(\lambda)\| = \|a_{ik}^{(0)}\lambda^l + a_{ik}^{(1)}\lambda^{l-1} + \dots + a_{ik}^{(l)}\|, \quad (1.1)$$

де $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$ і l — найбільша зі степенів многочленів $a_{ik}(\lambda)$.

Вважаючи, що

$$A_j = \|a_{ik}^{(j)}\|, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ми можемо уявити многочленну матрицю $A(\lambda)$ як матричного многочлена відносно λ , тобто у вигляді многочлена з матричними коефіцієнтами:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^l + A_1\lambda^{l-1} + \dots + A_{l-1}\lambda + A_l$$

Введемо на розгляд наступні елементарні операції над многочленною матрицею $A(\lambda)$:

- 1) Добуток, наприклад i -го рядка на число $c \neq 0$.
- 2) Сума, наприклад i -го рядка до j -го рядка, попередньо помноженої на довільну многочленну матрицю $B(\lambda)$.
- 3) Перестановка місцями будь-яких двох рядків, наприклад i -й та j -й.

Операції 1, 2, 3 рівносильні множенню многочленної матриці $A(\lambda)$ зліва на відповідні квадратні матриці порядку m . Тобто в результаті застосування

операцій 1, 2, 3 матриця $A(\lambda)$ перетворюється відповідно в матриці

$$S' \cdot A(\lambda), S'' \cdot A(\lambda), S''' \cdot A(\lambda).$$

Тому операції типу 1, 2, 3 називаються «лівими елементарними операціями».

Абсолютно аналогічно визначаються «праві елементарні операції» над многочленною матрицею. Ці операції проводяться не над рядками, а над стовпцями многочленної матриці і відповідні цим операціям матриці мають порядок n .

В результаті застосування правої елементарної операції матриця $A(\lambda)$ множиться праворуч на відповідну матрицю T . Матриці типу S', S'', S''' (або, те саме, типу T', T'', T''') ми будемо називати «елементарними матрицями».

Визначник будь-якої елементарної матриці не залежить від λ відмінний від нуля. Тому для кожної лівої (правої) елементарної операції існує зворотна операція, яка також є лівою (відповідно правою) елементарною операцією.

Означення 1.2. Дві многочленні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ називаються:

- 1) лівоеквівалентними,
- 2) правоеквівалентними,
- 3) еквівалентними, якщо одна з них виходить з іншої шляхом застосування відповідно:
 - 1) лівих елементарних операцій;
 - 2) правих елементарних операцій;
 - 3) лівих та правих елементарних операцій.

Нехай матриця $B(\lambda)$ виходить з $A(\lambda)$ за допомогою лівих елементарних операцій, що відповідають матрицям S_1, S_2, \dots, S_p . Тоді

$$B(\lambda) = S_p S_{p-1} \dots S_1 A(\lambda). \quad (1.2)$$

Позначаючи через $P(\lambda)$ добуток $S_p S_{p-1} \dots S_1$, запишемо рівність (1.2) у вигляді

$$B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda), \quad (1.3)$$

де $P(\lambda)$, як і кожна з матриць S_1, S_2, \dots, S_p , має відмінний від нуля сталий визначник. Кожна квадратна λ -матриця $P(\lambda)$ зі сталим, відмінним від нуля, визначником може бути представлена у вигляді добутку елементарних матриць. Тому рівність (1.3) еквівалентна рівності (1.2) і тому означає ліву еквівалентність матриць $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$.

У випадку правої еквівалентності многочленних матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ замість рівності (1.3) матимемо рівність

$$B(\lambda) = A(\lambda)Q(\lambda), \quad (1.4)$$

а у випадку (двосторонньої) еквівалентності рівність

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda); \quad (1.5)$$

тут знову $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ — матриці з відмінними від нуля і незалежні від λ визначниками.

Таким чином, означення 1.2 можна замінити рівносильним означенням:

Означення 1.3. Дві прямокутні λ -матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ називаються:

- 1) лівоеквівалентними;
- 2) правоеквівалентними;
- 3) еквівалентними, якщо відповідно:

$$B(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda), \quad B(\lambda) = A(\lambda)Q(\lambda), \quad B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

де $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ - многочленні квадратні матриці зі сталими та відмінними від нуля визначниками.

1.2 Інваріантні многочлени та елементарні дільники многочленної матриці

Нехай многочлена матриця $A(\lambda)$ має ранг r , тобто у цій матриці є не рівні, тотожні нулю мінори r -го порядку, тоді як усі мінори, порядку більше

r , тотожні щодо λ , дорівнюють нулю. Позначимо через $D_i(\lambda)$ максимальний загальний дільник всіх мінорів j -го порядку матриці $A(\lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, r$)
Тоді, як неважко бачити, у ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1$$

кожен многочлен ділиться без залишку на попередній. Відповідні частині позначимо через $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots, i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda) \quad (1.6)$$

Означення 1.4. Многочлени $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$, що визначаються формулами (1.6) називаються *інваріантними многочленами* прямокутної матриці (λ) .

Вони залишаються незмінними, "інваріантними" під час переходу від однієї матриці до іншої, їй еквівалентної.

Розкладемо інваріантні многочлени $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ на неприведені в даному числовому полі K до множники:

$$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{c_1} [\phi_2(\lambda)]^{c_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{c_s}, \\ i_2(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{d_1} [\phi_2(\lambda)]^{d_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{d_s}, \\ &\dots\dots\dots \\ i_r(\lambda) &= [\phi_1(\lambda)]^{l_1} [\phi_2(\lambda)]^{l_2} \dots [\phi_s(\lambda)]^{l_s}, \\ c_k &\geq d_k \geq \dots \geq l_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (1.7)$$

Тут $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \dots, \phi_s(\lambda)$ — всі різні неприведені в поле K многочлени (зі старшими коефіцієнтами, які дорівнюють одиниці), що входять до складу $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$.

Означення 1.5. Всі відмінні від одиниці ступені серед $[\phi_1(\lambda)]^{c_1} \dots [\phi_r(\lambda)]^{l_s}$ в розкладі (1.7) називаються *елементарними дільниками матриці $A(\lambda)$* в поле K .

1.3 Основні положення теорії жмутків матриць

Нехай дані чотири матриці $A, B; A_1, B_1$ однакового розміру $m \times n$ елементами з числового поля K . Потрібно знайти, за яких умов існують дві квадратні невироджені матриці P і Q відповідно порядків m і n такі, що одночасно:

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1 \quad (1.8)$$

Вводячи на розгляд жмутки матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ дві матричні рівності (4) можна замінити однією рівністю

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1 \quad (1.9)$$

Означення 1.6. Два жмутка прямокутних матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ одного і того ж розміру $m \times n$, пов'язані рівністю (1.9), в якому P та Q – сталі (тобто не залежать від λ) квадратні невироджені матриці відповідно порядків m і n , називатимемо *строго еквівалентними*.

Критерій еквівалентності жмутків $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ впливає із загального критерію еквівалентності λ -матриць і полягає у збігу інваріантних многочленів або елементарних дільників жмутків $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$.
Всі жмутки матриць $A + \lambda B$ розміром $m \times n$ поділяються на два основних типу: на регулярні та сингулярні жмутки.

Означення 1.7. Жмуток матриць $A + \lambda B$ називається *регулярним*, якщо:

- 1) A, B – квадратичні матриці одного і того ж самого порядку n ;
- 2) Визначник $|A + \lambda B|$ тотожно не дорівнює 0.

У всіх інших випадках, тобто коли $m \neq n$ або $m = n$, але $|A + \lambda B| \equiv 0$, жмуток називається *сингулярним*.

1.4 Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо рівняння $F(x, y) = 0$, де F задана у певній області. Якщо для кожного значення x , з деякого проміжку, існує одне або кілька значень y , які спільно з x задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, то цим визначається однозначна або багатозначна функція $y = f(x)$, для якої рівність $F(x, f(x)) = 0$ має місце тотожно щодо x на деякому проміжку.

Означення 1.8. Функція $y = f(x)$ називається *неявною*, якщо вона задана за допомогою нерозв'язаного щодо y рівняння $F(x, y) = 0$. Вона стає явною, якщо розглядається безпосередня залежність y від x .

Наведемо тепер теорему про існування неявної функції, і навіть існування її похідної. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Теорема 1.1. Припустимо, що:

- 1) всі функції $F_k(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$ при $k = 1, \dots, m$, визначені та неперервні в $(n + m)$ — мірному прямокутному паралелепіпеді

$$D = \{(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) : |x_j - x_j^0| \leq \Delta_j, |y_k - y_k^0| \leq \Delta_k;$$

$$\Delta_j > 0, \Delta'_k > 0, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m\}$$

з центром у точці $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$;

- 2) існують неперервні в D часткові похідні від цих функцій за всіма аргументами;
- 3) $t.(x_1^0, \dots, y_m^0)$ задовольняє системі (1.10);
- 4) Якобіан $J = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$ у $t.(x_1^0, \dots, y_m^0)$ відмінний від нуля.

Тоді:

- 1) в деякій околиці т. (x_1^0, \dots, x_n^0) система (1.10) визначає (y_1^0, \dots, y_m^0) як однозначні функції, що диференціюються від x_1, \dots, x_n :

$$y_k = \phi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, m;$$

- 2) при $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$ ці функції набувають, відповідно, значення (y_1^0, \dots, y_m^0) :

$$\phi_k(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_k^0, \quad k = 1, \dots, m;$$

- 3) функції ϕ_1, \dots, ϕ_m неперервні та мають неперервні частині похідні за всіма аргументами в околицях точки (x_1^0, \dots, x_n^0) .

Наведемо теорему Пікара-Коші для задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Нехай дана задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n) \\ \\ y_1(x_0) = y_1^0 \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_n^0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

$$D_1 = \{(x; y_1, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a; |y_k - y_k^0| \leq b, \quad k = 1, \dots, n\},$$

$$a > 0, \quad b > 0$$

Означення 1.9. Кажуть, що функція $f(x; y_1, \dots, y_n)$, задовольняє умові Липшица по змінним y_1, \dots, y_n на множині D_1 , якщо існує стала $L > 0$, що для будь-яких точок $(x; y'_1, \dots, y'_n)$, $(x; y''_1, \dots, y''_n) \in D_1$, виконано умову

$$|f(x; y'_1, \dots, y'_n) - f(x; y''_1, \dots, y''_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |y'_j - y''_j|$$

Число L називається константою Липшица, і позначається $f \in Lip_{y_1, \dots, y_n}(D_1)$.

Теорема 1.2. (Пікара-Коші) Нехай $f_k \in C(D_1)$, $f_k \in Lip_{y_1, \dots, y_n}(D_1)$, $k = 1, \dots, n$. Тоді в досить малому околу точки x_0 ($|x - x_0| \leq h$), де $h = \min(a; \frac{b}{M})$, $M = \max_{D_1} |f_k|, k = 1, \dots, n$ існує єдиний неперервно - диференційований розв'язок задачі (1.11).

Нехай дана система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{cases} \quad (1.12)$$

праві частини якої визначені як функції незалежної змінної x , шуканих функцій y_1, \dots, y_n на множині D_1 з центром в заданій точці $(x_0; y_1^0, \dots, y_n^0)$ і як функції параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в області

$$Q = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) : \lambda_k^{(0)} \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{(1)}, \quad k = 1, \dots, m\}, \quad \lambda_k^{(j)} \in \mathfrak{R},$$

$$k = 1, \dots, m; \quad j = (0; 1)$$

Теорема 1.3. (про неперервну залежність розв'язків системи від параметрів) Припустимо, що функції $f_k(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $k = 1, \dots, n$ системи (1.12) задовольняють наступним 2-ум умовам:

- 1) Функції f_k , $k = 1, \dots, n$ неперервні на множині $D_1 \times Q$ і, отже, обмежені, тобто $|f_k(x; y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)| \leq M$ при $(x; y_1, \dots, y_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in D_1 \times Q$, а M — постійне додатне число, що не залежить від параметрів.
- 2) Функції $f_k \in Lip_{y_1, \dots, y_n}(D_1 \times Q)$, $k = 1, \dots, n$ рівномірно щодо $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda \in Q$

Тоді при фіксованому $\lambda \in Q$ система (1.12) має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \dots\dots\dots \\ y_n = y_n(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{cases}$$

що задовольняє початковим умовам: $y_i(x_0) = y_i^0$, $i = 1, \dots, n$.

Цей розв'язок визначений і неперервно диференціюється як функція від x в інтервалі $|x - x_0| \leq h$, де $h = \min(a; \frac{b}{M})$, і неперервно як функція від параметрів $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ з множини Q , рівномірно щодо незалежної змінної x із $|x - x_0| \leq h$, тобто $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: одночасно для всіх x із $|x - x_0| \leq h$ виконуються нерівності:

$$|y_k(x; \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k(x; \lambda_1, \dots, \lambda_m)| < \varepsilon, \quad k = 1, \dots, n.$$

Лише тільки $|\Delta\lambda_1| < \delta, \dots, |\Delta\lambda_m| < \delta$

РОЗДІЛ 2

РЕГУЛЯРНИЙ І СИНГУЛЯРНИЙ ЖМУТКИ МАТРИЦЬ

2.1 Регулярний жмуток матриць

Розглянемо окремий випадок, коли жмутки $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ складаються з квадратних матриць ($m = n$) та $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$. В цьому випадку, два поняття «еквівалентність» і «строга еквівалентність» жмутків збігаються. Тому, застосовуючи до жмутків загальний критерій еквівалентності λ -матриць приходимо до теореми:

Теорема 2.1. Два жмутки квадратних матриць одного і того ж порядку $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$, у яких $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$ є строго еквівалентними в тому і тільки тому випадку, коли ці жмутки мають одні і ті ж самі елементарні дільники в полі K .

Відповідно означенню, в регулярному жмутку можлива рівність $|B| = 0$ (і навіть $|A| = |B| = 0$).

Для того щоб з'ясувати, чи зберігається теорема 2.1. для регулярних жмутків, розглянемо наступний приклад:

Приклад

$$A + \lambda B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_1 + \lambda B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Тут кожен з жмутків $A + \lambda B$ та $A_1 + \lambda B_1$ має тільки один елементарний дільник $\lambda + 1$. У той же час ці жмутки не є строго еквівалентними, так як матриці B і B_1 мають відповідно ранги 2 і 1, а з рівності (1.9), якби воно мало місце, слід було б, щоб ранги матриць B і B_1 були рівні між собою.

При цьому жмутки (2.1) є регулярними за означенням 1.6, оскільки

$$|A + \lambda B| \equiv |A_1 + \lambda B_1| \equiv \lambda + 1$$

Цей приклад показує, що теорема 2.1 невірна щодо означення 1.6 регулярного жмутка.

Щоб зберегти теорему 2.1, доведеться запровадити поняття «нескінченних» елементарних дільників жмутка. Будемо жмуток $A + \lambda B$ задавати за допомогою «однорідних» параметрів $\lambda\mu : \mu A + \lambda B$. Тоді визначник $\Delta(\lambda, \mu) \equiv |\mu A + \lambda B|$ буде однорідною функцією параметрів λ, μ . Визначаючи найбільший спільний дільник $D_k(\lambda, \mu)$ усіх мінорів k -го порядку матриці $\mu A + \lambda B$ ($k = 1, 2, \dots, n$), отримаємо інваріантні многочлени за відомими формулами:

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_n(\lambda, \mu)}{D_{n-1}(\lambda, \mu)}, \quad i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{n-1}(\lambda, \mu)}{D_{n-2}(\lambda, \mu)}, \dots,$$

при цьому всі $D_k(\lambda, \mu)$ і $i_j(\lambda, \mu)$ - однорідні щодо λ та μ многочленів. Розкладаючи інваріантні многочлени на степені неприведених у поле K однорідних многочленів, отримаємо елементарні дільники $e_\alpha(\lambda, \mu)$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) жмутка $\mu A + \lambda B$ в поле K .

Очевидно, що, вважаючи $\mu = 1$ в $e_\alpha(\lambda, \mu)$, ми повернемося до елементарним дільникам $e_\alpha(\lambda)$ жмутка $A + \lambda B$. Зворотне, з кожного елементарного дільника $e_\alpha(\lambda)$ ступеня q жмутка $A + \lambda B$ ми отримаємо відповідний елементарний дільник $e_\alpha(\lambda, \mu)$ за формулою $e_\alpha(\lambda, \mu) = \mu^q e_\alpha(\frac{\lambda}{\mu})$. Таким способом можуть бути отримані всі елементарні дільники жмутка $\mu A + \lambda B$, за винятком елементарних дільників виду μ^q .

Елементарні дільники виду μ^q існують у тому й лише тому випадку, коли $|B| = 0$, і зветься «нескінченних» елементарних дільників для жмутка $A + \lambda B$.

Оскільки із строгої еквівалентності жмутків $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ слідує строга еквівалентність жмутків $\mu A + \lambda B$ і $\mu A_1 + \lambda B_1$, то у строго еквівалентних жмутків $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ повинні збігатися не тільки «кінцеві», але і «нескінченні» елементарні дільники.

Нехай тепер дано два регулярні жмутка $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$, у яких відповідно збігаються всі (зокрема і нескінченні) елементарні дільники.

Введемо однорідні параметри: $\lambda\mu : \mu A + \lambda B, \mu A_1 + \lambda B_1$. Перетворюємо параметри:

$$\lambda = \alpha_1 \tilde{\lambda} + \alpha_2 \tilde{\mu}, \quad (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0), \quad \mu = \beta_1 \tilde{\lambda} + \beta_2 \tilde{\mu}$$

У нових параметрах жмути запишуться так: $\tilde{\mu} \tilde{A} + \tilde{\lambda} \tilde{B}, \tilde{\mu} \tilde{A}_1 + \tilde{\lambda} \tilde{B}_1$, де $\tilde{B} = \beta_1 A + \alpha_1 B, \tilde{B}_1 = \beta_1 A_1 + \alpha_1 B_1$. З регулярності жмутків $\mu A + \lambda B$ і $\mu A_1 + \lambda B_1$ випливає, що можна підібрати числа λ_1 і β_1 так, щоб $|\tilde{B}| \neq 0$ і $|\tilde{B}_1| \neq 0$

Тому, відповідно до теореми 2.1, жмутки $\tilde{\mu} \tilde{A} + \tilde{\lambda} \tilde{B}$ і $\tilde{\mu} \tilde{A}_1 + \tilde{\lambda} \tilde{B}_1$ отже, і вихідні жмутки $\mu A + \lambda B$ і $\mu A_1 + \lambda B_1$ строго еквівалентні. Таким чином, ми дійшли до наступного узагальнення теореми 2.1:

Теорема 2.2. Для того щоб два регулярні жмутки $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ були строго еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб ці жмутки мали одні й ті самі кінцеві і нескінченні елементарні дільники.

У розібраному раніше прикладі жмутки (2.1) мали той самий «кінцевий» елементарний дільник $\lambda + 1$, але відрізнялися «нескінченними» елементарними дільниками, так як перший жмуток має один «нескінченний» елементарний дільник $-\mu^2$, а другий – два: μ, μ . Тому ці жмутки і не виявилися строго еквівалентними.

Нехай тепер дано довільний регулярний жмуток $A + \lambda B$. Тоді існує таке число c , що $A + cB \neq 0$. Даний жмуток представимо у вигляді $A_1 + (\lambda - c)B_1$, де $A_1 = A + cB$ і тому $|A_1| \neq 0$. Помножимо жмуток зліва на A_1^{-1} : $E + (\lambda - c)A_1^{-1}B$.

Перетворенням подібності наводимо цей жмуток до вигляду:

$$E + (\lambda - c)\{J_0, J_1\} = \{E - cJ_0 + \lambda J_0, E - cJ_1 + \lambda J_1\}, \quad (2.2)$$

де $\{J_0, J_1\}$ — квазідіагональна нормальна форма матриці $A_1^{-1}B$, J_0 — жорданова нільпотентна (тобто $J_0^l = 0$ при деякому цілому $l > 0$) матриця, а $|J_1| \neq 0$.

Перший діагональний блок правої частини (2.2) помножимо на $(E - cJ_0)^{-1}$. Отримаємо $E + \lambda((E - cJ_0)^{-1}J_0)$. Тут коефіцієнт при λ - нільпотентна матриця (із J_0^l випливає, що $[(E - cJ_0)^{-1}J_0]^l$). Тому перетворенням подібності наводимо цей жмуток до вигляду:

$$E + \widehat{\lambda J_0} = \{N^{u_1}, N^{u_2}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E\}, \quad (2.3)$$

$$(N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}),$$

де $E^{(u)}$ — одинична матриця порядку u , $H^{(u)}$ — матриця порядку u , у якої елементи першої наддіагонали дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю.

Другий діагональний блок у правій частині (2.2) множенням на J_1^{-1} , а потім перетворенням подібності може бути приведений до виду $J + \lambda E$, де J — матриця, що має нормальну форму, а E — одинична матриця.

Теорема 2.3. Довільний регулярний жмуток $A + \lambda B$ може бути приведений до строго еквівалентного канонічного квазідіагонального виду

$$\{N^{u_1}, N^{u_2}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E\} \quad (N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}), \quad (2.4)$$

де перші s діагональних блоків відповідають нескінченним елементарним дільникам $\mu^{u_1}, \mu^{u_2}, \dots, \mu^{u_s}$ жмутка $A + \lambda B$, а нормальна форма останнього діагонального блоку $J + \lambda E$ однозначно визначається кінцевими елементарними дільниками даного жмутка.

2.2 Сингулярний жмуток матриць. Теорема про приведення.

Розглянемо сингулярний жмуток матриці $A + \lambda B$ розміру $m \times n$. Позначимо через r ранг жмутка, тобто найбільший із порядків мінорів, не рівних тотожно нулю. З сингулярності жмутка випливає, що завжди має місце принаймні одна з нерівностей $r < n$ або $r < m$. Нехай $r < n$, тоді

стовпці λ – матриці $A + \lambda B$ лінійно залежні, тобто рівняння

$$(A + \lambda B)x = 0, \quad (2.5)$$

де x - шуканий стовпець, має нульовий розв'язок. Кожен ненульовий розв'язок цього рівняння визначає деяку лінійну залежність між стовпцями λ – матриці $A + \lambda B$. Ми обмежимося лише тими розв'язками $x(\lambda)$ рівняння (2.5), які є многочленами щодо λ , і серед цих розв'язків візьмемо розв'язок найменшою степеню ε

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \dots + (-1)^\varepsilon \lambda^\varepsilon x_\varepsilon \quad (x_\varepsilon \neq 0) \quad (2.6)$$

Підставляючи ці розв'язки в (2.5) і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при степенях λ , отримаємо

$$Ax_0 = 0, \quad Bx_0 - Ax_1 = 0, \quad Bx_1 - Ax_2 = 0, \dots, Bx_{\varepsilon-1} - Ax_\varepsilon = 0, \quad (2.7)$$

$$Bx_\varepsilon = 0$$

Розглядаючи цю систему рівностей як систему лінійних однорідних рівнянь щодо елементів стовпців $x_0, -x_1, +x_2, \dots, (-1)^\varepsilon x_\varepsilon$, укладаємо, що матриця коефіцієнтів цієї системи

$$M_\varepsilon = M_\varepsilon [A + \lambda B] = \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{cccccc} A & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B & A & & & & \\ 0 & B & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & A \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & B \end{array} \right]}^{\varepsilon+1} \end{array} \quad (2.8)$$

Має ранг $\rho_\varepsilon < (\varepsilon + 1)n$. Водночас через мінімальну властивість числа ε для рангів $\rho_1, \dots, \rho_{\varepsilon-1}$ матриць

$$M_0 = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}, \quad M_1 = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{vmatrix}, \dots, \quad M_{\varepsilon-1} = \overbrace{\begin{vmatrix} A & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B & A & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & A \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B \end{vmatrix}}^{\varepsilon} \quad (2.9)$$

має місце рівність $\rho_0 = n, \rho_1 = 2n, \dots, \rho_{\varepsilon-1} = \varepsilon n$.

Таким чином, число ε має найменше значення індекса k , при якому в відношенні $\rho_k \leq (k + 1)n$ має місце знак " $<$ ".

Теорема 2.4. Якщо рівняння (2.5) має розв'язок мінімального степеня ε і $\varepsilon > 0$, то даний жмуток $A + \lambda B$ строго еквівалентний жмутку виду

$$\begin{vmatrix} L_\varepsilon & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

де \hat{A}, \hat{B} - сталі прямокутні матриці, $\hat{A} + \lambda \hat{B}$ - жмуток матриць, для якого рівняння виду $(A + \lambda B)x = 0$ не має розв'язок при степені менше, ніж ε ,

$$L_\varepsilon = \left. \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & \lambda & 1 \end{vmatrix} \right\} \varepsilon,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon+1}$

Доведення. Спочатку доведемо, що жмуток виду $A + \lambda B$ строго

еквівалентний жмутку виду

$$\left\| \begin{array}{cc} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{array} \right\|$$

де D, F - постійні прямокутні матриці відповідних розмірів.

Встановимо, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ немає розв'язків $\hat{x}(\lambda)$ степені менше, ніж ε . Після цього покажемо, що подальшими перетвореннями жмукток може бути приведений до квазідіагонального виду (2.8) .

1. Першу частину доказу вдягнемо в геометричну форму. Замість жмутка матриць $A + \lambda B$ розглянемо жмукток операторів $A + \lambda B$, що відображають R_n в R_m покажемо, що при належному виборі базисів у цих просторах матриця, відповідна оператору $A + \lambda B$, матиме форму (2.10).

Замість рівнянь (2.5) візьмемо векторне рівняння

$$(A + \lambda B)x = 0 \quad (2.11)$$

з векторним розв'язком

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - \dots + (-1)^\varepsilon \lambda^\varepsilon x_\varepsilon; \quad (2.12)$$

рівності (2.7) замінюється векторними рівностями

$$Ax_0 = 0, \quad Ax_1 = Bx_0, Ax_2 = Bx_1, \dots, Ax_\varepsilon = Bx_{\varepsilon-1}, Bx_\varepsilon = 0. \quad (2.13)$$

Доведемо, що вектори

$$Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_\varepsilon \quad (2.14)$$

лінійно незалежні. Звідси легко слідуватиме лінійна незалежність векторів

$$x_0, x_1, \dots, x_\varepsilon \quad (2.15)$$

Справді, оскільки $Ax_0 = 0$, з $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\varepsilon x_\varepsilon = 0$ знаходимо $\alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0$, звідки через лінійну незалежність векторів (2.13) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\varepsilon = 0$, але $x_0 \neq 0$, оскільки в іншому випадку $\frac{1}{\lambda}x(\lambda)$ було б

розв'язком рівняння (2.11) степеня $\varepsilon - 1$, що неможливо. Тому й $\alpha_0 = 0$.

Якщо тепер прийняти вектори (2.14) і (2.15) як перші базові вектори для нових базисів відповідно в R_m і R_n , то в нових базисах операторам A і B (2.13) будуть відповідати матриці

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix};$$

тоді λ -матриця $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ матиме вигляд (2.10). Усі попередні міркування будуть обґрунтованими, якщо ми доведемо, що вектори (2.14) лінійно незалежні. Допустимо супротивне, нехай $Ax_h (h \geq 1)$ - перший у ряду (2.14) вектор, що лінійно залежить від попередніх векторів:

$$Ax_h = \alpha_1 Ax_{h-1} + \alpha_2 Ax_{h-2} + \dots + \alpha_{h-1} Ax_1$$

В силу (2.7) ця рівність може бути переписана так:

$$Bx_{h-1} = \alpha_1 Bx_{h-2} + \dots + \alpha_2 Bx_{h-3} + \dots + \alpha_{h-1} Bx_0,$$

тобто $Bx_{h-1}^* = 0$, де $x_{h-1}^* = x_{h-1} - \alpha_1 x_{h-2} - \alpha_2 x_{h-3} - \dots - \alpha_{h-1} x_0$.

Далі, знову в силу (2.13):

$$Ax_{h-1}^* = B(x_{h-2} - \alpha_1 x_{h-3} - \dots - \alpha_{h-2} x_0) = Bx_{h-2}^*,$$

де $x_{h-2}^* = x_{h-2} - \alpha_1 x_{h-3} - \dots - \alpha_{h-2} x_0$.

Продовжуючи цей процес далі і ще вводячи вектори

$$x_{h-3}^* = x_{h-3} - \alpha_1 x_{h-4} - \dots - \alpha_{h-3} x_0, \dots, x_1^* = x_1 - \alpha_1 x_0, x_0^* = x_0,$$

ми отримаємо ланцюжок рівностей

$$Bx_{h-1}^* = 0, \quad Ax_{h-1}^* = Bx_{h-2}^*, \dots, Ax_l^* = Ax_0^*, \quad Ax_0^* = 0 \quad (2.16)$$

З (2.16) випливає, що $x^*(\lambda) = x_0^* - \lambda x_1^* + \dots + (-1)^{h-1} x_{h-1}^* \lambda^{h-1}$ ($x_0^* = x_0 \neq 0$) є ненульовий розв'язок рівняння (2.11) степеня менше або рівного $h - 1 < \varepsilon$, що неможливо. Таким чином, вектори (2.14) є лінійно незалежними.

2. Доведемо тепер, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ немає розв'язків степеня $< \varepsilon$.

Спочатку звернемо увагу на те, що рівняння $L_\varepsilon y = 0$, як і рівняння (2.5), має ненульовий розв'язок найменшого степеня ε . У цьому можна переконатись безпосередньо, якщо матричне рівняння $L_\varepsilon y = 0$ замінити системою скалярних рівнянь

$$\lambda y_1 + y_2 = 0, \quad \lambda y_2 + y_3 = 0, \dots, \lambda y_\varepsilon + y_{\varepsilon+1} = 0$$

$$[y = (y_1, y_2, \dots, y_{\varepsilon+1})], \quad y_k = (-1)^{k-1} y_1 \lambda^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, \varepsilon + 1).$$

З іншого боку, якщо жмук має «трикутний» вигляд (2.10), то відповідні цьому жмутку матриці M_k ($k = 1, 2, \dots, \varepsilon$) після належної перестановки рядків та стовпців також можуть бути приведені до трикутного вигляду

$$\left\| \begin{array}{cc} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D + \lambda F] \\ 0 & M_k[\hat{A} + \lambda \hat{B}] \end{array} \right\| \quad (2.17)$$

При $k = \varepsilon - 1$ усі стовпці цієї матриці, а значить, і стовпці матриці $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$, лінійно незалежні. Це випливає з того, що ранг матриці (2.17) при $k = \varepsilon - 1$ дорівнює εn ; аналогічна рівність має місце для рангу матриці $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$. Але $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ - квадратна матриця порядку $\varepsilon(\varepsilon + 1)$. Тому й у матриці $M_k[\hat{A} + \lambda \hat{B}]$ всі стовпці лінійно незалежні, а це означає, що рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{B})\hat{x} = 0$ немає розв'язків степеня $\leq \varepsilon - 1$, що й потрібно було довести.

3. Замінімо жмуток (2.9) строго еквівалентним йому жмутком

$$\left\| \begin{array}{cc} E_1 & Y \\ 0 & E_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} E_3 & -X \\ 0 & E_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} L_\varepsilon & D + \lambda F + Y(\hat{A} + \lambda \hat{B}) - L_\varepsilon X \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{array} \right\|, \quad (2.18)$$

де E_1, E_2, E_3, E_4 - квадратичні одиничні матриці відповідно порядків $\varepsilon, m - \varepsilon, \varepsilon + 1, n - \varepsilon - 1$, а X, Y - довільні постійні прямокутні матриці відповідних розмірів. Теорема буде повністю доведена, якщо ми покажемо, що матриці X та Y можуть бути обрані так, щоб мало місце матрична нерівність

$$L_\varepsilon X = D + \lambda F + Y(\hat{A} + \lambda \hat{B}). \quad (2.19)$$

Введемо позначення для елементів матриць D, F, X , а також для рядків матриці Y і для стовпців матриць \hat{A}, \hat{B} :

$$D = \|d_{ik}\|, \quad F = \|f_{ik}\|, \quad X = \|x_{jk}\|$$

$$i = 1, 2, \dots, \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1, \quad j = 1, 2, \dots, \varepsilon + 1,$$

$$Y = \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\varepsilon \end{array} \right\|, \quad \hat{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-\varepsilon-1}), \quad \hat{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{n-\varepsilon-1}).$$

Тоді матричне рівняння (2.19) можна замінити системою скалярних рівнянь, записуючи, що елементи k -го стовпця в лівій та правій частинах рівності (2.19) відповідно дорівнюють один одному ($k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1$):

$$\begin{aligned} x_{2k} + \lambda x_{1k} &= d_{1k} + \lambda f_{1k} + y_1 \alpha_k + \lambda y_1 b_k, \\ x_{3k} + \lambda x_{2k} &= d_{2k} + \lambda f_{2k} + y_2 \alpha_k + \lambda y_2 b_k, \\ x_{4k} + \lambda x_{3k} &= d_{3k} + \lambda f_{3k} + y_3 \alpha_k + \lambda y_3 b_k, \end{aligned} \quad (2.20)$$

.....

$$x_{\varepsilon+1} + \lambda x_{\varepsilon k} = d_{\varepsilon k} + \lambda f_{\varepsilon k} + y_2 \alpha_k + \lambda y_{\varepsilon} b_k$$

$$k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1$$

У лівих частинах цих рівностей стоять лінійні двочлени відносно λ . Вільний член кожного з перших $\varepsilon - 1$ цих двочленів дорівнює коефіцієнту при λ у наступному двочлені. Але тоді й праві частини мають задовольняти цій умові. Тому:

$$\begin{aligned} y_1 \alpha_k - y_2 b_k &= f_{2k} - d_{1k}, \\ y_2 \alpha_k - y_3 b_k &= f_{3k} - d_{2k}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{\varepsilon-1} \alpha_k - y_{\varepsilon} b_k &= f_{\varepsilon k} - d_{\varepsilon-1,k} \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1$$

Якщо рівності (2.21) мають місце, то, очевидно, із (2.20) можна визначити потрібні елементи матриці X . Тепер залишилося показати, що система рівнянь (2.21) щодо елементів матриці Y завжди має розв'язок за будь-яких d_{ik} і f_{ik} ($i = 1, 2, \dots, \varepsilon; k = 1, 2, \dots, n - \varepsilon - 1$).

Справді, матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих елементах рядків $y_1, -y_2, +y_3, -y_4, \dots$, може бути записана після транспонування у вигляді

$$\overbrace{\left\| \begin{array}{cccc} \hat{A} & 0 & \dots & 0 \\ \hat{B} & \hat{A} & & \\ 0 & \hat{B} & & \\ \vdots & & & \hat{A} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \hat{B} \end{array} \right\|}^{\varepsilon-1}.$$

Але ця матриця є матрицею $M_{\varepsilon-2}$ для жмутка прямокутних матриць (2.9). Ранг цієї матриці дорівнює $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$, оскільки за доведеним рівняння $(\hat{A} + \lambda \hat{X})\hat{x} = 0$ немає розв'язків степеня $< \varepsilon$. Таким чином, ранг системи рівнянь (2.21) дорівнює числу рівнянь, а така система за будь-яких вільних членів є спільною.

Теорему доведено.

2.3 Канонічна форма сингулярного жмутка матриць

Нехай дано довільний сингулярний жмуток матриць $A + \lambda B$ розміру $m \times n$. Допустимо спочатку, що як між стовпцями, так і між рядками цього жмутка немає лінійної залежності із постійними коефіцієнтами.

Нехай $r < n$, де r — ранг жмутка, тобто стовпці жмута $A + \lambda B$ лінійно залежні. У цьому випадку рівняння $(A + \lambda B)x = 0$ має ненульовий розв'язок мінімальної степеня ε . З прийнятого на початку цього параграфу обмеження випливає, що $\varepsilon > 0$. Даний жмуток можна перетворити на вигляд

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1 + \lambda B_1 \end{pmatrix},$$

Якщо це рівняння має ненульовий розв'язок мінімального степеня ε_2 при цьому неодмінно $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, то, застосовуючи до жмутка $A_1 + \lambda B_1$ теорему 2.4, ми даний жмуток перетворимо на вигляд

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2 + \lambda B_2 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес далі, ми приведемо цей жмутка до квазидіаго-

нального виду

$$\left\| \begin{array}{ccc} L_{\varepsilon_1} & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & L_{\varepsilon_p} \\ 0 & & A_p + \lambda B_p \end{array} \right\|, \quad (2.22)$$

де $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_p$ рівняння $(A_p + \lambda B_p)x^{(p)} = 0$ не має ненульових розв'язків, тобто стовпці матриці $A_p + \lambda B_p$ лінійно незалежні. Очевидно, що $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p \leq m$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + p \leq n$. Ці співвідношення можуть стати рівностями лише одночасно. У цьому випадку блок $A_p + \lambda B_p$ буде відсутня.

Якщо рядки жмутка $A_p + \lambda B_p$ лінійно залежні, то транспонований жмуток $A'_p + \lambda B'_p$ може бути приведений до виду (2.22), де замість чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ будуть фігурувати числа $0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_q$. Але тоді цей

жмукот $A + \lambda B$ виявиться перетвореним до квазідіагонального вигляду

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} L_{\varepsilon_1} & & & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & L_{\varepsilon_p} & & & \\ & & & & & L'_{\eta_1} & & \\ & & & & & & L'_{\eta_2} & \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & L'_{\eta_q} \\ 0 & & & & & & & A_0 + \lambda B_0 \end{array} \right\| \quad (2.23)$$

$$(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_p, 0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_q),$$

де у жмутка $A_0 + \lambda B_0$ як стовпці, і рядки лінійно незалежні, тобто. $A_0 + \lambda B_0$ - регулярний жмукот. Якщо в даному жмукоту $r = n$, тобто стовпці жмутка лінійно незалежні, то в (2.23) відсутні перші p діагональних блоків виду L_ε ($p = 0$). Так само, якщо $r = m$, тобто в $A + \lambda B$ рядки лінійно незалежні, то в (2.23) відсутні діагональні блоки виду L'_η ($q = 0$). Розглянемо тепер загальний випадок, коли рядки та стовпці даного жмутка можуть бути пов'язані лінійними залежностями з постійними коефіцієнтами. Позначимо максимальну кількість постійних незалежних розв'язків рівнянь

$$(A + \lambda B)x = 0 \quad \text{і} \quad (A' + \lambda B')y = 0$$

відповідно через g та h . Замість першого з цих рівнянь розглянемо відповідне векторне рівняння $(A + \lambda B)x = 0$ (A та B - оператори, відображають R_n в R_m). Лінійно незалежні постійні розв'язки цього рівняння позначимо через e_1, e_2, \dots, e_g і прийнемо за перші базисні вектори в R_n . Тоді у відповідній

матриці $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ перші g стовпців будуть складатися з нулів:

$$\tilde{A} + \lambda\tilde{B} = (0, \tilde{A}_1 + \lambda\tilde{B}_1) \quad (2.24)$$

Так само в жмуткі $\tilde{A}_1 + \lambda\tilde{B}_1$ перші h рядків можна зробити нульовими.

Тоді даний жмуток набуде вигляду

$$\left\| \begin{array}{cc} h \begin{array}{c} \overbrace{0}^g \\ \vdots \\ 0 \end{array} & 0 \\ 0 & A_0 + \lambda B_0 \end{array} \right\|, \quad (2.25)$$

де рядки та стовпці жмутка $A^0 + \lambda B^0$ вже не пов'язані лінійними залежностями із постійними коефіцієнтами. До жмута $A^0 + \lambda B^0$ застосовно уявлення типу (2.23). Таким чином, у загальному випадку жмуток $A + \lambda B$ завжди може бути приведений до канонічного вигляду

$$diag \left\{ h \left\{ \overbrace{0}^g, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; A_0 + \lambda B_0 \right\} \right\}. \quad (2.26)$$

Вибір індексів при ε і η пов'язані з тим, що нам зручно тут рахувати $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_g = 0$ і $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_h = 0$.

Замінюючи регулярний жмуток, що фігурує в (2.26) $A_0 + \lambda B_0$ його канонічної формою (2.4), отримуємо остаточно наступну квазідіагональну матрицю:

$$diag \left\{ h \left\{ \overbrace{0}^g, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}; J + \lambda E \right\} \right\} \quad (2.27)$$

де матриця J має жорданову або природну нормальну форму, а $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$.

Теорема 2.5. Довільний сингулярний жмуток $A + \lambda B$ може бути наведений до (строго еквівалентного) канонічного квазідіагонального виду

(2.27):

$$\text{diag} \left\{ h \left\{ \overset{g}{0}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}; J + \lambda E \right\} \right\}$$

Для того щоб по даному жмутку безпосередньо визначити його канонічну форму (2.27), не здійснюючи послідовно процес приведення ми, слідуючи Кронекеру, в наступному параграфі введемо поняття мінімальних індексів жмутка.

2.4 Мінімальні індекси жмутка. Критерій стро- гої еквівалентності жмутків.

Нехай дано довільний сингулярний жмуток прямокутних матриць $A + \lambda B$. Тоді k до многочленних стовпців $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)$, які є розв'язками рівняння

$$(A + \lambda B)x = 0 \quad (2.28)$$

будуть лінійно залежними, якщо ранг численної матриці, складеної із цих стовпців, $X = [x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)]$ менше за k . В цьому випадку існує k до многочленів $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots, p_k(\lambda)$, не рівних одночасно тотожно нулю, таких, що

$$p_1(\lambda)x_1(\lambda) + p_2(\lambda)x_2(\lambda) + \dots + p_k(\lambda)x_k(\lambda) = 0$$

Якщо ранг матриці X дорівнює k , то подібної залежності не існує, і розв'язок $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_k(\lambda)$ лінійно незалежні.

Серед усіх розв'язків рівняння (2.28) візьмемо ненульовий розв'язок $x_1(\lambda)$ найменшою степенню ε_1 . Серед усіх розв'язків того ж рівняння, лінійно незалежних від $x_1(\lambda)$, виберемо розв'язок $x_2(\lambda)$ найменшою степенню ε_2 . Очевидно, що $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Цей процес продовжимо, обираючи серед розв'язків, лінійно незалежних від $x_1(\lambda)$ та $x_2(\lambda)$, розв'язок $x_3(\lambda)$, мінімального степеня ε_3 і т.д. Так як число лінійно незалежних розв'язків рівняння (2.28) завжди $\leq n$, це процес має закінчитися. Ми отримаємо фундаментальний ряд

розв'язків рівняння (2.28).

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_p(\lambda) \quad (2.29)$$

зі степенями

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \varepsilon_p. \quad (2.30)$$

Загалом фундаментальний ряд розв'язків не визначається однозначно (з точністю до скалярних множників) завданням жмутка $A + \lambda B$.

Однак два різних фундаментальних ряду розв'язків мають завжди один і той же ряд степенів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$. Справді, розглянемо поряд із (2.29) другий фундаментальний ряд розв'язків

$$\tilde{x}_1(\lambda), \tilde{x}_2(\lambda) \dots$$

зі степенями

$$\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots$$

Нехай серед степенів (2.30)

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n_1} < \varepsilon_{n_1+1} = \dots = \varepsilon_{n_2} < \dots$$

і аналогічно в ряду

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \dots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1} < \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1} = \dots = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2} < \dots$$

Очевидно, що $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1$. Будь-який стовпець $\tilde{x}_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, \tilde{n}_1$) є лінійна комбінація стовпців $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_{n_1}(\lambda)$, тому що в іншому випадку в ряду (2.29) можна було б розв'язок $x_{n_1+1}(\lambda)$ замінити розв'язком $\tilde{x}_i(\lambda)$ з меншим степенем. Очевидно, що і, навпаки, будь-який стовпець $\tilde{x}_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, \tilde{n}_1$) є лінійною комбінацією стовпців $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots, x_{n_1}(\lambda)$. Тому $n_1 = \tilde{n}_1$ і $\varepsilon_{n_1+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1}$. Тепер аналогічними міркуваннями переконуємось у тому, що $n_2 = \tilde{n}_2$ і $\varepsilon_{n_2+1} = \tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2+1}$ і т.д.

Кожен розв'язок $x_k(\lambda)$ фундаментального ряду (2.29) дає лінійну залежність степіня ε_k між стовпцями матриці $A + \lambda B$ ($k = 1, 2, \dots, q$). Тому числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$ називаються мінімальними індексами

для стовпців жмутка $A + \lambda B$.

Аналогічно вводяться мінімальні індекси $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ для рядків жмутка $A + \lambda B$. При цьому рівняння $(A + \lambda B)x = 0$ замінюється рівнянням $(A' + \lambda B')y = 0$ та числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$ визначаються як мінімальні індекси для стовпців транспонованого жмутка $A' + \lambda B'$.

Строго еквівалентні жмутки мають одні й самі мінімальні індекси. Справді, нехай дані такі два жмутки $A + \lambda B$ і $P(A + \lambda B)Q$ (P і Q — квадратні невироджені матриці). Тоді рівняння (2.27) для першого жмутка після почленного множення зліва на P може бути записано так:

$$P(A + \lambda B)QQ^{-1}x = 0$$

Звідси видно, що всі розв'язки рівняння (2.27) після множення зліва на Q^{-1} дають повну систему розв'язків рівняння $P(A + \lambda B)Qz = 0$. Тому жмутки $A + \lambda B$ і $P(A + \lambda B)Q$ мають одні й самі мінімальні індекси для стовпців. Збіг мінімальних індексів для рядків встановлюється переходом до транспонованим жмутками.

Обчислимо мінімальні індекси для канонічної квазидіагональної матриці

$$P(A + \lambda B)Q = \tilde{A} + \lambda \tilde{B} = \text{diag} \left\{ N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda E \right\} =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} \} u_1 & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \overbrace{N^{(u_s)}}^{u_s} \} u_s & \cdot \\ \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \underbrace{J + \lambda E}_w \end{array} \right)}_n \quad (2.31)$$

де $A_0 + \lambda B_0$ — регулярний жмуток, що має нормальну форму (2.4).

Зауважимо попередньо, що повна система мінімальних індексів для стовпців (рядок) квазидіагональної матриці виходить з'єднанням з відповідних систем мінімальних індексів окремих діагональних блоків. Матриця

L_ε має лише один індекс η для стовпців, а рядки цього матриці лінійно незалежні. Так само матриця L'_η має лише один індекс η для рядків, а стовпці цієї матриці лінійно незалежні.

Регулярний жмуток $A_0 + \lambda B_0$ зовсім не має мінімальних індексів. Тому матриця (2.31) має мінімальні індекси для стовпців

$$\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_g = 0, \quad \varepsilon_{g+1}, \dots, \varepsilon_p,$$

а для рядків

$$\eta_1 = \dots = \eta_h = 0, \quad \eta_{h+1}, \dots, \eta_q.$$

Зауважимо ще, що матриця L_ε немає елементарних дільників, оскільки серед її мінорів максимального порядку $\varepsilon \in$ мінор, рівний одиниці, і мінор, рівний λ^ε . Це ж положення, зрозуміло, вірно і для транспонованої матриці L'_ε . Оскільки елементарні дільники квазідіагональної матриці виходять шляхом з'єднання елементарних дільників окремих діагональних блоків, то елементарні дільники λ — матриці (2.27) збігаються з елементарними дільниками її регулярного «ядра» $A_0 + \lambda B_0$.

Канонічна форма жмутка (2.31) цілком визначається завданням мінімальних індексів $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \eta_1, \dots, \eta_q$ та елементарних дільників цього жмутка, або строго еквівалентного йому жмутка $A + \lambda B$. Так як два жмутка, мають одну і ту ж канонічну форму, строго еквівалентних, то ми довели таку теорему:

Теорема 2.6 (Кронекера). Для того щоб два довільні жмутка прямокутних матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ того самого розміру $m \times n$ були строго еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб ці жмутки мали одні і ті ж мінімальні індекси і одні і ті ж («кінцеві» та «нескінченні») елементарні дільники.

Випишемо канонічну форму жмутка $A + \lambda B$, що має мінімальні індекси $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 2, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_3 = 2$, і елементарні дільники $\lambda^2, (\lambda + 2)^2, \mu^3$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & & & & & & \\
 0 & (I) & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & (II) & & & \\
 & & & \lambda & 1 & 0 & \\
 & & & 0 & \lambda & 1 & (III) \\
 & & & & & & \lambda & 0 \\
 & & & & & & 1 & \lambda & (IV) \\
 & & & & & & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & 1 & \lambda & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & \lambda & (V) \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \lambda & (VI) \\
 & & & & & & & & & & & & & \lambda+2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & \lambda+2
 \end{array}$$

Зазначимо, які мінімальні індекси яким блокам відповідають:

$$\begin{aligned}
 (I) - \varepsilon_1 &= 0, & (IV) - \eta_1 &= 0, \\
 (II) - \varepsilon_2 &= 1, & (V) - \eta_2 &= 0, \\
 (III) - \varepsilon_3 &= 2, & (VI) - \eta_3 &= 2.
 \end{aligned}$$

Також останньому блоку відповідає елементарний дільник $(\lambda+2)^2$, $(VI) - \lambda^2$ та $(V) - \mu^3$

РОЗДІЛ 3

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ РЕГУЛЯРНИМИ ТА СИНГУЛЯРНИМИ ЖМУТКАМИ МАТРИЦЬ

Розглянемо задачу Коші для системи m звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку виду:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^n b_{ik} \frac{dx_k}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, m \\ x_k(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.1)$$

Перепишемо задачу (3.1) у векторній формі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

де $A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, та вектор-функція

$$f : D \rightarrow \mathfrak{R}^m,$$

де $D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}$, $0 < a, b = \text{const}$.

Ліва частина системи в задачі (3.2) відповідає постійному жмутку матриць $A + B \frac{d}{dt}$.

Розглянемо випадки, коли жмуток матриць $A + B \frac{d}{dt}$ є регулярним та сингулярним.

3.1 Регулярний жмуток матриць в системі звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай жмуток матриць є регулярним. За визначенням регулярного жмутка $m = n$, $|A + B \frac{d}{dt}| \neq 0$. Запишемо $\lambda = \frac{d}{dt}$, тоді жмуток матриць має вигляд $A + \lambda B$.

Відповідно до теореми 2.3 про приведення регулярного жмутка матриць до канонічному квазідіагональному вигляду, існують такі невідроджені матриці $P, Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, що

$$P(A + \lambda B)Q = \tilde{A} + \lambda \tilde{B} = \text{diag} \left\{ N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, J + \lambda E \right\} =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} \overbrace{N^{(u_1)}}^{u_1} & & & \\ \underbrace{N^{(u_1)}}_{\mu_1} & \cdot & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \overbrace{N^{(u_s)}}^{u_s} & \\ & \cdot & \underbrace{N^{(u_s)}}_{\mu_s} & \\ 0 & & & \underbrace{J + \lambda E}_w \end{array} \right)}_n \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}} \right\} n$$

Зробимо у системі задачі (3.2) заміну невідомих функцій. Для цього покладемо $x = Qz$, де $z = z(t)$ — нова невідома вектор-функція, а потім помножимо обидві частини отриманої системи диференціальних рівнянь зліва на P . Отримаємо:

$$\begin{cases} (\tilde{A}x + \tilde{B} \frac{d}{dt})z = \tilde{f}(t, z), \\ z(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

де $\tilde{f}(t, z) = Pf(t, Qz)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$, $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)$, та жмутки $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ та $A + \lambda B$ строго еквівалентні.

Відповідно до структури канонічного квазідіагонального регулярного жмутка система (3.3) набуде вигляду:

$$\begin{cases} N^{(u_i)} \left(\frac{d}{dt} \right)^i z = \tilde{f}^i(t, z), i = 1, \dots, s, \\ (J + \frac{d}{dt} E) z^{s+1} = \tilde{f}^{s+1}(t, z), \\ z^k(t) \rightarrow 0, k = 1, \dots, s+1 \end{cases} \quad (3.4)$$

де

$$z^1 = (z_1, \dots, z_{u_1}), z^2 = (z_{u_1+1}, \dots, z_{u_1+u_2}), \dots, z^s = (z_{u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)}+1}, \dots, z_{u_1+\dots+u_s}), z^{s+1} = (z_{u_1+\dots+u_s+1}, \dots, z_{u_m})$$

$$\tilde{f}^1 = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{u_1}), \tilde{f}^2 = (\tilde{f}_{u_1+1}, \dots, \tilde{f}_{u_1+u_2}), \dots, \tilde{f}^s = (\tilde{f}_{u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)}+1}, \dots, \tilde{f}_{u_1+\dots+u_s}), \tilde{f}^{s+1} = (\tilde{f}_{u_1+\dots+u_s+1}, \dots, \tilde{f}_{u_m})$$

При фіксованому s перший блок жмутка $\tilde{A} + \tilde{B} \frac{d}{dt}$ має вигляд:

$$\begin{cases} z_j^s + \frac{d}{dt} z_{j+1}^s = \tilde{f}_j^s(t, z), j = 1, \dots, u_{s-1} \\ z_{u_s}^s = \tilde{f}_{u_s}^s(t, z) \end{cases}$$

3.2 Сингулярний жмуток матриць в системі звичайних диференціальних рівнянь

Нехай жмуток $A + B \frac{d}{dt}$ є сингулярним. За визначенням сингулярного жмутка матриці маємо $m \neq n$ або якщо $m = n$, то $|A + \lambda B| \equiv 0$.

Відповідно до теореми 2.5 про приведення сингулярного жмутка матриць до канонічному квазідіагональному вигляду існують такі невідроджені матриці P і Q , що $PAQ = \tilde{A}$, $PBQ = \tilde{B}$, $P \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

Зробимо у системі задачі (3.2) заміну невідомих функцій. Для цього покладемо $x = Qz$, де $z = z(t)$ —нова невідома вектор-функція, а потім помножимо обидві частини отриманої системи диференціальних рівнянь зліва на P .

Отримаємо:

$$\begin{cases} \tilde{A}z + \tilde{B}\frac{dz}{dt} = \tilde{f}(t,z), \\ z(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases}$$

де $\tilde{f}(t,z) = Pf(t,Qz), z = (z_1, \dots, z_n), \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)$.

Відповідно до структури канонічного квазідіагонального сингулярного жмутка маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \cdot z = \tilde{f}^1(t,z) \\ L_{\varepsilon_{g+i}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+i} z = \tilde{f}^{1+i}(t,z), i = 1, \dots, p-g \\ L'_{n_{h+j}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+p-g+j} z = \tilde{f}^{1+p-g+j}(t,z), j = 1, \dots, g-h \\ N^{(u_k)} \left(\frac{d}{dt} \right)^{1+p-g+q-h+k} z = \tilde{f}^{1+p-g+q-h+k}(t,z), k = 1, \dots, s \\ \left(J + \frac{d}{dt} E \right)^{1+p-g+q-h+s+1} z = \tilde{f}^{1+p-g+q-h+s+1}(t,z) \\ z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, l = 1, \dots, 1+p-g+q-h+s+1 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

де канонічна квазідіагональна форма сингулярного жмутка $\tilde{A} + \tilde{B}\frac{d}{dt}$ в

матричному поданні:

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
 \overbrace{\left. \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\}^g}_h & & & & & & & \\
 & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \varepsilon_{g+1+1} \\ \hline L_{\varepsilon_{g+1}} \end{array} \right\}^{\varepsilon_{g+1}}} & & & & & & \\
 & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \varepsilon_{g+2+1} \\ \hline L_{\varepsilon_{g+2}} \end{array} \right\}^{\varepsilon_{g+2}}} & & & & 0 & \\
 & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \varepsilon_{p+1} \\ \hline L_{\varepsilon_p} \end{array} \right\}^{\varepsilon_p}} & & & & \\
 & & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \eta_{h+1} \\ \hline L'_{\eta_{h+1}} \end{array} \right\}^{\eta_{h+1}+1}} & & & & \\
 & & & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \eta_q \\ \hline L'_q \end{array} \right\}^{\eta_q+1}} & & \\
 & 0 & & & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} u_1 \\ \hline N^{(u_1)} \end{array} \right\}^{u_1}} & \\
 & & & & & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} u_s \\ \hline N^{(u_s)} \end{array} \right\}^{u_s}} \\
 & & & & & & & \overbrace{\left. \begin{array}{c} \theta \\ \hline J + \lambda E \end{array} \right\}^{\theta}}
 \end{array} \right)$$

Розпишемо позначення z у системі (3.4):

$$\begin{array}{l} 1 \\ Z = (Z_1, \dots, Z_g), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ Z = (Z_{g+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1}), \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\varepsilon(g+2)+1}), \dots, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+p-g \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\varepsilon(g+2)+1+\dots+\varepsilon(p-1)+1+\varepsilon_p+1}), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+p-g+1 \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}}), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+p-g+2 \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}}), \dots, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+p-g+q-h \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}+\dots+\eta_{(g-1)+1}}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\eta_{h+2}+\dots+\eta_{q-1}+\eta_q}), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1+p-g+q-h+1 \\ Z = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1}), \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{1+p-g+q-h+2}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2}), \dots, \\
& \overset{1+p-g+q-h+s}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2+\dots+u_{(s-1)}+1}, \dots, Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+u_2+\dots+u_s}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+s+1}{Z} = (Z_{g+\varepsilon(g+1)+1+\dots+\varepsilon_p+1+\eta_{h+1}+\dots+\eta_q+u_1+\dots+u_s+1}, \dots, Z_n), \\
& Z = (\overset{1}{Z}, \overset{1+1}{Z}, \overset{1+2}{Z}, \dots, \overset{1+p-g}{Z}, \overset{1+p-g+1}{Z}, \dots, \overset{1+p-g+q-h}{Z}, \overset{1+p-g+q-h+1}{Z}, \dots, \overset{1+p-g+q-h+s}{Z}, \overset{1+p-g+q-h+s+1}{Z}); \\
& \overset{1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_h), \overset{2}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}}), \overset{3}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}}), \dots, \\
& \overset{1+p-g}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}+\dots+\varepsilon_{p-1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\varepsilon_{g+2}+\dots+\varepsilon_{p-1}+\varepsilon_p}), \overset{1+p-g+1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_{p+1}}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1}), \\
& \overset{1+p-g+2}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\eta_{h+2}+1}), \dots, \\
& \overset{1+p-g+q-h}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\eta_{h+2}+1+\dots+\eta_{q-1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_{q-1}+1+\eta_q+1}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+2}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+u_2}), \dots, \\
& \overset{1+p-g+q-h+s}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_{s-1}+1}, \dots, \tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_s}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+s+1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_{h+\varepsilon_{g+1}+\dots+\varepsilon_p+\eta_{h+1}+1+\dots+\eta_q+1+u_1+\dots+u_s+1}, \dots, \tilde{f}_m) \\
& \tilde{f} = (\overset{1}{\tilde{f}}, \overset{1+1}{\tilde{f}}, \dots, \overset{1+p-g}{\tilde{f}}, \overset{1+p-g+1}{\tilde{f}}, \dots, \overset{1+p-g+q-h}{\tilde{f}}, \overset{1+p-g+q-h+1}{\tilde{f}}, \dots, \overset{1+p-g+q-h+s}{\tilde{f}}, \overset{1+p-g+q-h+s+1}{\tilde{f}})
\end{aligned}$$

Випишемо розмірність блоку $J + E \frac{d}{dt}$

$$\theta = n - g - \varepsilon_{g+1} - 1 - \dots - \varepsilon_p - 1 - \eta_{h+1} - \eta_q - u_1 - \dots - u_s$$

$$r = m - u_s - \dots - u_1 - h - \varepsilon_{g+1} - \varepsilon_p - \eta_{h+1} - 1 - \dots - \eta_q - 1$$

Введемо деякі позначення:

$$\begin{aligned}
& Z = (Z_1, \dots, Z_g), \overset{1+i}{Z} = (Z_1, \dots, Z_{\varepsilon_{g+1}+1}), \overset{1+p-g+j}{Z} = (Z_1, \dots, Z_{\eta_{h+j}}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+k}{Z} = (Z_1, \dots, Z_{u_k}), \overset{1+p-g+q-h+s+1}{Z} = (Z_1, \dots, Z_{\theta}), \\
& \overset{1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_h), \overset{1+i}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\varepsilon_{g+1}}), \overset{1+p-g+j}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\eta_{h+j+1}}), \\
& \overset{1+p-g+q-h+k}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{u_k}), \overset{1+p-g+q-h+s+1}{\tilde{f}} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)
\end{aligned}$$

А також зробимо заміну:

$$1 + i = \hat{i}, \quad 1 + p - g + j = \hat{j}, \quad 1 + p - g + q - h + k = \hat{k},$$

$$1 + p - g + q - h + s + 1 = \hat{s}.$$

Тоді систему (3.5) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{f}(t, z) = 0 \quad \overset{1}{\tilde{f}}_{\nu}(t, z) = 0, \nu = 1, \dots, h \quad \otimes] \text{I} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_j + z_{j+1} = \overset{\hat{i}}{\tilde{f}}_j(t, z) \\ i = 1, \dots, p - g, j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i} \end{array} \right. \text{II} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_1 = \overset{\hat{j}}{\tilde{f}}(t, z) \\ z_{l-1} + \frac{d}{dt} z_l = \overset{\hat{j}}{\tilde{f}}_l(t, z) \\ z_{\eta_{h+j}} = \overset{\hat{j}}{\tilde{f}}_{\eta_{h+j}+1}(t, z) \\ j = 1, \dots, g - h; l = 2, \dots, \eta_{h+j} \end{array} \right. \text{III} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} z_w + \frac{d}{dt} z_{w+1} = \overset{\hat{k}}{\tilde{f}}_w(t, z), w = 1, \dots, u_{k-1} \\ z_{u_k} = \overset{\hat{k}}{\tilde{f}}_{u_k}(t, z), k = 1, \dots, s \end{array} \right. \otimes] \text{IV} \\
 & \left(J + \frac{d}{dt} E \right)^{\hat{s}} z = \overset{\hat{s}}{\tilde{f}}(t, z) \quad] \text{V} \\
 & z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ця система складається з функціональних та диференціальних рівнянь. Функціональні рівняння позначені значком \otimes .

Функціональну підсистему в системі (3.6) представляють перший блок, останнє рівняння з кожної системи третього блоку та останнє рівняння із кожної системи четвертого блоку. У результаті функціональна підсистема

системи (3.6) має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_v(t, z) = 0, v = 1, \dots, h \\ z_{\eta_{h+j}} = \tilde{f}_{\eta_{h+j+1}}^j(t, z), j = 1, \dots, g-h \\ z_{u_k} = \tilde{f}_{u_k}^k(t, z), k = 1, \dots, s \end{array} \right.$$

Функціональна підсистема містить t рівнянь, де $t = h + q - h + s = q + s$.

Диференціальну підсистему в системі (3.6) представляють другий блок, третій блок без останнього рівняння, четвертий блок без останнього рівняння та п'ятий блок. Тобто диференціальна підсистема системи (3.6) має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_j + z_{j+1} = \tilde{f}_j^i(t, z), i = 1, \dots, p-g; j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i} \\ \frac{d}{dt} z_1 = \tilde{f}_1^j(t, z), j = 1, \dots, g-h \\ z_{l-1} + \frac{d}{dt} z_l = \tilde{f}_l^j(t, z), l = 2, \dots, \eta_{h+j} \\ z_w + \frac{d}{dt} z_{w+1} = \tilde{f}_l^k(t, z), k = 1, \dots, s; w = 1, \dots, u_{k-1} \\ \left(J + \frac{d}{dt} E \right) z = \tilde{f}^s(t, z) \end{array} \right.$$

Диференціальною підсистема містить $m - t$ рівнянь.

З урахуванням введених позначень та початкових умов вихідного задачі (3.1) звелася до функціонально-диференціальної задачі виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(t, z_1, z_2) = 0 \\ \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2) \\ z_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ z_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned}
 t &\subseteq \mathfrak{R}, z_1 : (0; t_0] \rightarrow \mathfrak{R}^p, z_2 : (0; t_0] \rightarrow \mathfrak{R}^l, p+l = n, \\
 \psi &: (0; t_0] \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^l \rightarrow \mathfrak{R}^k, \varphi : (0; t_0] \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^l \rightarrow \mathfrak{R}^l, k+l = m, \\
 \psi &= \left(\begin{array}{c} \tilde{f}_v(t, z) \\ z^{\hat{j}} \eta_{h+j} - \tilde{f}_{\eta_{h+j+1}}(t, z), j = 1, \dots, q-h \\ u_k^{\hat{k}} \\ z - \tilde{f}(t, z), k = 1, \dots, s \end{array} \right) \quad \varphi = \left(\begin{array}{c} \tilde{f}_j(t, z) - z_{j+1}^{\hat{i}}, i = 1, \dots, p-g; j = 1, \dots, \varepsilon_{g+i} \\ \tilde{f}_1(t, z), j = 1, \dots, g-h \\ \tilde{f}_l(t, z) - z_{l-1}^{\hat{j}}, l = 2, \dots, \eta_{h+j} \\ \tilde{f}_w(t, z) - z_w^{\hat{k}}, k = 1, \dots, s; w = 1, \dots, u_{k-1} \\ \tilde{f}(t, z) - J \cdot z \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

3.3 Дослідження розв'язків функціонально - диференціальної задачі

Розглянемо початкову задачу (3.7).

Означення. Нехай вектор-функція ψ неперервна в $D_1 \subseteq \mathfrak{R}^{n+1}$, де $D_1 = \{(t, z_1, z_2) : t \in (0, t_0], \|z_1\| < \alpha, \|z_2\| < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$.

Будемо говорити, що функція ψ задовольняє умові S_1 , якщо виконуються наступні умови:

- 1) функція ψ доозначена в точці $(0, 0, 0)$, причому справедливо, що $\psi(0, 0, 0) = 0$.
- 2) існують неперервні в D_1 часткові похідні ψ по всім компонентах векторів z_1 і z_2 .

Означення. Нехай вектор-функція φ неперервна в $D_1 \subseteq \mathfrak{R}^{n+1}$, де $D_1 = \{(t, z_1, z_2) : t \in (0, t_0], \|z_1\| < \alpha, \|z_2\| < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$.

Будемо говорити, що функція φ задовольняє умові S_2 , якщо виконуються наступні умови:

- 1) функції φ доозначена у точці $(0, 0, 0)$, причому $\varphi(0, 0, 0) = 0$;
- 2) вектор-функція φ неперервна по t і неперервно-диференційована по z_1

і z_2 в D_1 .

Дослідження задачі (3.7) почнемо з вивчення питання про розв'язання задачі

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0 \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

тобто для функціонального блоку задачі (3.7).

Вивчимо, за яких умов задача (3.8) можна розв'язати або щодо вектор-функції z_1 , або щодо вектор-функції z_2 , або щодо частини компонент невідомих вектор-функцій z_1, z_2 . Далі, повертаючись до завдання (3.7), знайдемо достатні умови існування її розв'язку і з'ясуємо, скільки існує таких розв'язків.

Теорема 3.1. Нехай $k = p$ і вектор-функції ψ і φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\frac{D(\psi)}{D(z_1)} \Big|_{(0,0,0)} \neq 0 \quad (3.9)$$

Тоді задача (3.7) має єдиний розв'язок при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення: Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерівність (3.9), то за теоремою про неявні функції система

$$\psi(t, z_1, z_2) = 0 \quad (3.10)$$

однозначно можна розв'язати на множині D_1 щодо змінної z_1 , причому

$$z_1 = \xi(t, z_2), \text{ де } \xi(t, z_2) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_2) \\ \vdots \\ \xi_p(t, z_2) \end{pmatrix}.$$

Функції $\xi_k(t, z_2)$, $k = 1, \dots, p$ - неперервні по t і неперервно-диференційовані по z_2 на множині $D_2 = \{(t, z_2) : t \in [0; t_2], \|z_2\| < \beta_2, 0 < t_2 \leq t_0, 0 < \beta_2 \leq \beta\}$ і $\xi_k(0, 0) = 0$, $k = 1, \dots, p$.

Підставляючи $z_1 = \xi(t, z_2)$ в диференціальну підсистему задачі (3.7), отримаємо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, \xi(t, z_2), z_2) \equiv \xi(t, z_2) \\ z_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

де $\xi = C_t(D_2)$, $\xi \in C_{z_2}^1(D_2)$.

В силу властивостей вектор-функції $\xi(t, z_2)$ для задачі Коші (3.11) виконані умови теореми Пікара-Коші та задачі Коші (3.11) має єдиний розв'язок $z_2 = \tilde{\varphi}(t)$ при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_0$, причому $\tilde{\varphi} \in C_{[0, t_1]}^1$, $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^l$. Тоді задача (3.7) при $t \in [0, t_1]$ має єдиний розв'язок виду:

$$\begin{cases} z_1 = \xi(t, \tilde{\varphi}(t)) \\ z_2 = \tilde{\varphi}(t) \end{cases}$$

Теорему доведено.

Теорема 3.2. Нехай $k = j$, $1 \leq j < p$ і вектор-функції ψ і φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно.

Якщо виконано умову

$$\frac{D(\psi)}{D(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1j})} \Big|_{(0, \dots, 0)} \neq 0 \quad (3.12)$$

тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення: Так як вектор-функція задовольняє умовам S_1 і S_2 і справедлива нерівність (3.12), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно можна розв'язати на множині D_1 відносно z_{11}, \dots, z_{1j} , причому $z_{1i} = \xi_i(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2)$, $i = 1, \dots, j$.

Функції $\xi_i(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2)$, $i = 1, \dots, j$, $j < p$, неперервні по t і неперервно диференційована по всім іншим аргументам на множині $D_3 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0; t_3], \|z_1\| < \alpha_3, \|z_2\| < \beta_3, 0 < t_3 \leq t_0, 0 < \alpha_3 \leq \alpha, 0 < \beta_3 \leq \beta\}$ і $\xi_k(0, 0) = 0$, $k = 1, \dots, p$ і $\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, j$.

Підставимо z_{1i} , $i = 1, \dots, j$ у диференціальну підсистему задачі (3.7),

отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}z_2 = \varphi(t, \xi_1(t, \xi_1(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \dots, \xi_j(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2)) \\ z_2(0) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\xi_i \in C_t(D_3), \xi_i \in C_{z_2}^1(D_3), i = 1, \dots, j, j < p$$

Виходячи з умови S_2 , будемо дивитися на задачу Коші (3.13) як на систему звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші з невідомою векторною функцією z_2 та функціональними параметрами z_{1j+1}, \dots, z_{1p} , де функції $z_{1j+1}(t), \dots, z_{1p}(t)$ з класу $C_{[0, t_1]}^1$, $0 < t_1 \leq t_3 \leq t_0$.

Тоді для кожного фіксованого набору функціональних параметрів будемо мати єдиний розв'язок задачі Коші (3.13) - $z_2 = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p})$, $\tilde{\varphi}$ - неперервно-диференційована функція, $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^l$, $0 < t_1 \leq t_3 \leq t_0$.

Вектор-функція z_2 залежатиме від кількох довільних неперервно-диференційованих функцій.

Розв'язання задачі Коші (3.8) знайдено у вигляді:

$$\begin{cases} z_1 = \xi(t, \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p})) \\ z_2 = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \end{cases}$$

Отримали $(p - j)$ - параметричне сімейство розв'язків задачі Коші (3.8), що залежать від $(p - j)$ неперервно-диференційованих функцій.

Теорему доведено.

Теорема 3.3. Нехай $k = p + j$, $1 \leq j < l$, і вектор-функції ψ і φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай виконується

$$\frac{D(\psi)}{D(z_1, z_{21}, \dots, z_{2j})} \Big|_{(0, \dots, 0)} \neq 0 \quad (3.14)$$

тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення: Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерівність (3.14), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно може бути розв'язати на множині D_1 щодо вектора z_i компонент

вектора $z_{2i}, i = 1, \dots, j$:

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \\ z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix},$$

причому $z_{1k} = \xi_{1k}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), k = 1, \dots, p, z_{2i} = \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), i = 1, \dots, j$. Функції $\xi_{1k}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), k = 1, \dots, p, i, \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), i = 1, \dots, j$, неперервні по t і неперервно-диференційовані по решті аргументів на множині $D_4 = \{(t, z_4) : t \in [0; t_4], \|z_2\| < \beta_4, 0 < t_4 \leq t_0, 0 < \beta_4 \leq \beta\}$ і $\xi_{1k}(0, \dots, 0) = 0, \xi_{2i}(0, \dots, 0) = 0, k = 1, \dots, p, i = 1, \dots, j, j < l$

Підставляючи $z_{1k} = \xi_{1k}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), k = 1, \dots, p, i, z_{2i} = \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), i = 1, \dots, j$. в диференційну підсистему задачі (3.7) отримаємо задачу Коші виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \xi_{2i}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \varphi_i(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ \frac{d}{dt} z_{2j+1} = \varphi_{j+1}(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ \dots \dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \varphi_l(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), i = 1, \dots, j \\ z_{2g}(0) = 0, g = j + 1, \dots, l \end{array} \right. \quad (3.15)$$

де $\xi \in C_t(D_4), \xi \in C_{z_2}^1(D_4)$.

Завдання Коші (3.15) розпадається на 2 блоки рівнянь. Спочатку розглянемо останні $(l - j)$ рівняння. Для останніх $(l - j)$ компонент вектор-

функції

$$\varphi(t, \xi_1(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{21}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2j}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \xi_{2j+1}(t, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}))$$

виконано умови пункту 2 умови S_2 , тобто для задачі Коші (3.15) виконуються умови теореми Пікара-Коші, отримаємо розв'язок виду

$$\begin{pmatrix} z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t), \quad (3.16)$$

де $\tilde{\varphi} \in C^1_{[0, t_1]}$, $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^l$, $0 < t_1 \leq t_4 \leq t_0$.

Тепер, з урахуванням (3.16), знаходимо значення вектора z_1 , і компонент вектора z_2 :

$$\begin{cases} z_1 = \xi_1(t, \tilde{\varphi}(t)) \\ \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \end{pmatrix} = \xi_{2i}(t, \tilde{\varphi}(t)), i = 1, \dots, j \end{cases}$$

Тепер підставимо отримані z_{2l}, \dots, z_{2j} у перші j диференціальних рівнянь. Вся система диференціальних рівнянь є умовою спільності для задачі Коші. Якщо при підстановці z_{2l}, \dots, z_{2j} маємо тотожні рівності, то задачу розв'язано.

Теорему доведено.

Теорема 3.4. Нехай $k = l$ і вектор-функції ψ і φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\frac{D(\psi)}{D(z_2)} \Big|_{(0,0,0)} \neq 0 \quad (3.17)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення:

Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерів-

ність (3.17), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно можна розв'язати на множині D_1 щодо змінної z_2 , причому $\xi_k(t, z_1)$, де

$$\xi(t, z_1) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_1) \\ \vdots \\ \xi_l(t, z_1) \end{pmatrix}.$$

Функції $z_2 = \xi_k(t, z_1)$, $k = 1, \dots, l$ - неперервні по t і неперервно - диференційовані по z_1 на множині

$$D_5 = \{(t, z_1) : t \in [0; t_5], \|z_1\| < \alpha_5, 0 < t_5 \leq t_0, 0 < \alpha_5 \leq \alpha\}$$

і $\xi_k(0, 0) = 0$, $k = 1, \dots, l$. Підставляючи $z_2 = \xi(t, z_1)$ в диференціальну підсистему задачі (3.7), отримуємо задачу Коші:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\xi(t, z_1) = \varphi(t, z_1, \xi(t, z_1)) = \zeta(t, z_1) \\ \xi(t, z_1) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

де $\xi \in C_t(D_5)$, $\xi \in C_{z_1}^1(D_5)$, $\zeta(t, z_1)$ - неперервно-диференційована на множині D_5 .

Так як

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \zeta(t, z_1) \quad (3.19)$$

то розглянемо три випадки:

а). Якщо $\left. \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} \neq 0$ тоді

$$\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} = \zeta(t, z_1) - \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \right)^{-1} \left(\zeta(t, z_1) - \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$$

Так як $\zeta(t, z_1) \in C^1(D_5)$, то для задачі (3.18) виконані умови існування та єдиності розв'язання задачі Коші, маємо розв'язання задачі Коші (3.18): причому $\tilde{\varphi} \in C_{[0, t_1]}^1$, $\tilde{\varphi} : [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^p$, тоді задача (3.7) при $t \in [0, t_1]$, $0 < t_1 \leq t_5 \leq t_0$ має і до того ж єдиний розв'язок виду:

$$\begin{cases} z_1 = \tilde{\varphi}(t) \\ z_2 = \xi(t, \tilde{\varphi}(t)) \end{cases}$$

б). Якщо $\left| \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} = 0$, то ми маємо сингулярну диференціальну систему подібну до вихідної, але з меншою кількістю рівнянь:

$$A(t, z_1) \frac{d}{dt} z_1 + B(t, z_1) \cdot z_1 = f(t, z_1)$$

ця система виходить з (3.19) у разі, якщо у $\zeta(t, z_1)$ можна виділити лінійну частину.

в). Розпишемо рівняння (3.19) та отримаємо три умови для тих блоків, для яких визначник існує.

1). Якщо $j = p$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_j)$, $z_1 = (z_{11}, \dots, z_{1p})$, то $\det \frac{d\xi}{dz_1} \neq 0$ і ми повертаємося до пункту а).

2). Якщо $j < p$, маємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{11}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{12}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{1j}} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{21}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{22}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{2j}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{j2}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{jj}} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j+11}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{j+12}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1j}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{p1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z_{p2}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1)$$

то решта рівнянь

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{j+11}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1j}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z_{p1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1)$$

є умовами спільності задачі Коші (3.7).

3). Якщо $j > p$, то рівняння

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{p+1}}{\partial z_{j+11}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{j+1j}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{p+1}}{\partial z_{p1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_j}{\partial z_{pj}} \end{pmatrix} = \zeta(t, z_1)$$

є умовами спільності для задачі Коші (3.7).

Теорема доведена.

Теорема 3.5. Нехай $k = j, 1 < j \leq l$, та вектор-функції ψ та φ задовольняє умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\frac{D(\psi)}{D(z_{21}, \dots, z_{2j})} \Big|_{(0, \dots, 0)} \neq 0 \quad (3.20)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1], 0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення:

Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерівність (3.20), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно можна розв'язати на множині D_1 щодо компонент вектора $z_{2i}, i = 1, \dots, j$:

$$z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \\ z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix},$$

причому

$$\begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2j} \end{pmatrix} = \xi(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \begin{pmatrix} \xi_1(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ \vdots \\ \xi_j(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \end{pmatrix}$$

Функції $\xi_i(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$, $i = 1, \dots, j$ неперервні по t і неперервно-диференційовані по решті аргументів на множині

$D_6 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0; t_6], \|z_1\| < \alpha_6, \|z_2\| < \beta_6, 0 < t_6 \leq t_0, 0 < \alpha_6 \leq \alpha, 0 < \beta_6 \leq \beta\}$ і $\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, j$.

Підставляючи $z_{2i} = \xi_i(t, z_1, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ в диференціальну підсистему задачі (3.7), отримаємо задачу Коші виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_i(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})}{dt} = \varphi_i(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), \\ i = 1, \dots, j \\ \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} z_{2j+1} = \varphi_{j+1}(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})) \\ \dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \varphi_l(t, z_1, \xi_1(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_l(t, z_1, z_{2j}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})) \end{array} \right] \\ z_{2g}(0) = 0, g = j + 1, \dots, l \end{array} \right. \quad (*)$$

Так як праві частини блоку (*) задовольняють умові S_2 , тоді з блоку

(*), так як виконані умови теореми 1.3, знаходимо z_{2j+1}, \dots, z_{2l} . Кожна з цих компонентів буде функцією від $z_{1,t}$.

$$\begin{pmatrix} z_{2j+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t, z_1)$$

Функція $\tilde{\varphi} \in C^1_{[0,t_1]}$, $\tilde{\varphi} : [0,t_1] \rightarrow \mathbb{R}^l$, де $z_1(t)$ - довільна функція, параметр.

Підставляючи ці значення в перші j рівнянь системи, отримаємо диференціальні рівняння щодо z_1 .

При $p = j$, отримали ситуацію, ідентичну ситуації розглянутої в теоремі 3.4:

а). Якщо визначник відповідної матриці $\left| \frac{d\xi}{dz_1} \right|_{(0,0)} \neq 0$, то при розв'язанні задачі Коші можемо знайти $z_1 = \zeta(t)$. Знаючи z_1 і z_{2j+1}, \dots, z_{2l} , отримаємо, $z_{2l}, i = 1, \dots, j$.

б). Якщо визначник дорівнює нулю т. $(0,0, \dots, 0)$, то маємо сингулярну диференціальну систему.

Теорему доведено.

Теорема 3.6. Нехай $k = i + j, i \leq j < p$, та вектор-функції ψ та φ задовольняють умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\frac{D(\psi)}{D(z_{11}, \dots, z_{1i}, z_2)} \Big|_{(0, \dots, 0)} \neq 0 \quad (3.21)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1], 0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення:

Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерівність (3.21), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно можна розв'язати на множині D_1 щодо компонент вектора z_2 компонент

вектора $z_{1i}, i = 1, \dots, j : .$

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{1j+1} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix}$$

Тобто

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \xi_1(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) = \begin{pmatrix} \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \vdots \\ \xi_{1j}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \xi_{21}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \vdots \\ \xi_{2l}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \end{pmatrix} \right. \quad (3.22)$$

Функції $\xi_{1i}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), i = 1, \dots, j$ і $\xi_{2k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), k = 1, \dots, l$ неперервні по t і неперервно-диференційовані за всіма аргументами на множині $D_7 = \{(t, z_1) : t \in [0; t_7], \|z_1\| < \alpha_7, 0 < t_7 \leq t_0, 0 < \alpha_7 \leq \alpha\}$ і $\xi_{1i}(0, \dots, 0) = 0, i = 1, \dots, j, k = 1, \dots, l$.

Підставляючи диференціальну підсистему задачі (3.7), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi_2(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) &= \varphi(t, \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \dots, \xi_{1p}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}), \\ &\xi_2(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p})) \zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}). \end{aligned}$$

Маємо задачу Коші (l дифференційних рівнянь з $(p - j)$ невідомими):

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{2k}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ k = 1, \dots, l \\ z_1(0) = 0 \end{cases}$$

Або в скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \zeta_1(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ \dots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} \frac{\partial z_{1j+1}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \frac{dz_{1p}}{dt} = \zeta_l(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \\ z_1(0) = 0 \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \text{grad}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dz_{1j+1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{z_{1p}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_l \end{pmatrix} \\ z_1(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{21}}{\partial z_{1p}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1j+1}} & \dots & \frac{\partial \xi_{2l}}{\partial z_{1p}} \end{pmatrix} \equiv A(t, z_{1j+1}, z_{1p})$$

а). Нехай $|A| \neq 0$ у т. $(0, \dots, 0)$, тоді

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{dz_{1j+1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_{1p}}{dt} \end{pmatrix} = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_l \end{pmatrix} - \text{grad}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right) \right) \\ z_{1i}(0) = 0, i = j + 1, \dots, p \end{cases} \quad (3.23)$$

Тут можливі такі ситуації:

1). $l = p - j$

Оскільки $\xi \in C_t(D_7), \xi \in C_{z_{1i}}^1(D_7), \zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}) \in C^1(D_7)$, тобто виконано умови теореми 1.2 та задача Коші (3.22) має розв'язок: $z_{1i} = (\tilde{\varphi})_i(t), i = j + 1, \dots, p$, де $(\tilde{\varphi})_i \in C_{[0, t_1]}^1, (\tilde{\varphi})_i : [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^p$.

Підставляючи отримані значення (3.21), маємо розв'язок вихідної задачі Коші (3.7).

2) $l > p - j$

Тоді вся система (3.22) стає умовою спільності задачі Коші (3.7). Для будь-яких $(p - j)$ рівнянь виконані умови теореми 1.2, існування та єдиності розв'язання задачі Коші (3.22), знайдемо всі $(p - j)$ невідомих. Потім перевіримо, чи є цей розв'язок розв'язком для системи з усіх рівнянь.

Якщо отримуємо тотожності, то, підставляючи цей розв'язок у (3.21), маємо розв'язок вихідної задачі.

Тоді якісь $(p - j - l)$ із $(p - j)$ невідомих стануть вільними змінними.

Розв'язанням задачі Коші (3.22) буде l компонент, кожен з яких залежатиме від інших $(p - j - l)$ параметрів.

Підставляючи, отримані значення (3.21), знаходимо розв'язок вихідної системи.

Це буде $(p - j - l)$ – параметричне сімейство розв'язків.

б). $|A| = 0$. Тоді маємо сингулярну задачу.

Теорему доведено.

Теорема 3.7. Нехай $k = i + j, 1 < j < p, 1 < i < l$ та вектор-функції ψ та φ задовольняє умовам S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{11}, \dots, z_{1j}, z_{21}, \dots, z_{2i})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0 \quad (3.24)$$

Тоді задача (3.7) має розв'язок при $t \in [0, t_1], 0 < t_1 \leq t_0$.

Доведення:

Так як вектор-функція ψ задовольняє умовам S_1 і справедлива нерівність (3.23), то за теоремою про неявні функції система (3.10) однозначно

можна розв'язати на множині D_1 щодо компонент вектора $z_{2r}, r = 2, \dots, i$ і компонент вектора $z_{1k}, k = 1, \dots, j$.

$$z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1j} \\ z_{1j+1} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2i} \\ z_{2i+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix}$$

Тобто система (3.10) можна розв'язати щодо $z_{1k}, k = 1, \dots, j, j < p$ і $z_{2r}, r = 2, \dots, i, i < l$.

Отже,

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1k} \end{pmatrix} = \xi_{1k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ \begin{pmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{2r} \end{pmatrix} = \xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Функції $\xi_{1k}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ і $\xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})$ неперервні по t і неперервно-диференційовані за всіма аргументами на множині $D_8 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0; t_8], \|z_1\| < \alpha_8, \|z_2\| < \beta_8, 0 < t_8 \leq t_0, 0 < \alpha_8 \leq \alpha, 0 < \beta_8 \leq \beta\}$ і $\xi_{1k}(0, \dots, 0) = 0, k = 1, \dots, j$ і $\xi_{2r}(0, \dots, 0) = 0, r = 1, \dots, i$.

Підставляючи (3.26) диференціальну підсистему задачу (3.7), отрима-

емо задачу Коші:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \xi_{2r}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) = \\ \varphi_r(t, \xi_{11}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{1p}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \\ \xi_{21}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}), \dots, \xi_{2l}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l})), r = 1, \dots, i \\ \frac{d}{dt} z_{2i+1} = \zeta_{i+1}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ \dots \\ \frac{d}{dt} z_{2l} = \zeta_l(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Розглянемо останні $(l - i)$ рівняння. Оскільки $\zeta(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_{2j+1}, \dots, z_{2l}) \in C^1(D_9)$ то виконані умови теореми 1.3, і задача Коші (3.26) має єдиний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} z_{2i+1} \\ \vdots \\ z_{2l} \end{pmatrix} = \tilde{\varphi}(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}),$$

де $\tilde{\varphi}$ - неперервно-диференційована функція, $\tilde{\varphi}; [0, t_1] \rightarrow \mathfrak{R}^l$, $0 < t_1 \leq t_8 \leq t_0$.

Тепер підставимо значення z_{2i+1}, \dots, z_{2l} в перші i диференціальних рівнянь задачі (3.26).

Отримуємо i диференціальних рівнянь із $(p-j)$ невідомими: z_{1j+1}, \dots, z_{1p} , тобто ситуацію, повністю аналогічну до ситуації попередньої теореми 3.6.

Теорему доведено.

Теорема 3.8. Нехай для вектор-функцій ψ та φ виконані умови S_1 і S_2 відповідно. І нехай

$$\frac{D(\psi)}{D(z_1, z_2)} \Big|_{(0,0,0)} \neq 0 \quad (3.27)$$

Нехай уздовж розв'язання системи (3.10) диференціальна підсистема системи (3.7) перетворюється на тотожність на деякому проміжку.

Тоді задача (3.7) має, і до того ж, єдиний розв'язок при $t \in [0, t_1]$, $0 <$

$$t_i \leq t_0$$

Доведення:

Так як вектор-функція ψ задовольняє умові S_1 і справедлива нерівність (3.27), то за теоремою про неявні функції система (3.19) однозначно можна розв'язати на множині D_1 щодо компонентів z_1 і z_2 , причому :

$$\begin{cases} z_1 = \xi_1(t) \\ z_2 = \xi_2(t) \end{cases}$$

Підставляючи $z_1 = \xi_1(t)$ і $z_2 = \xi_2(t)$ у диференціальну підсистему задачу (3.7), отримаємо задачу Коші виду:

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \varphi(t, \xi_1(t), \xi_2(t)) \\ \xi_2(0) = 0 \end{cases}$$

де $t \in [0, t_9]$, $0 < t_9 \leq t_0$ і функції $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ неперервні по t і неперервно-диференційована по t .

Теорему доведено.

3.4 Приклад 1

Знайти розв'язок задачі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ t \cos(x_2 + x_4) \end{pmatrix};$$

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2\lambda + 5 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda + 3 & \lambda + 3 & -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку на лінійну залежність: лінійної залежності зі сталими коефіцієнтами немає, $\rho(A + \lambda B) = 3 < 4 = n$, тобто, є лінійна залежність між стовпцями. У канонічній формі жмутка будуть присутні блоки виду L_ε .

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо } \varepsilon_1: M_0 &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \rho M_0 &= \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = (0 + 1) \cdot 4 \Rightarrow \varepsilon_1 \neq 0; M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\rho M_1 = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 7 < (1 + 1) \cdot 4 \Rightarrow \varepsilon_1 = 1.$$

$$L_{\varepsilon_1} = \lambda.$$

За допомогою елементарних перетворень наведемо жмук до вигляду

$$\{L_{\varepsilon_1}, A_1 + \lambda B_1\}.$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & -1 & 0 \\ 2\lambda+5 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Знайдемо P і Q за допомогою виконаних нами елементарних перетворень з рядками та стовпцями відповідно:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

В системі (3.28) зробимо заміну:

$$x = Qz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_3 \\ x_2 = z_2 - z_4 \\ x_3 = z_1 \\ x_4 = z_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 + x_4 \\ z_3 = x_3 - x_1 \\ z_4 = x_4 \end{cases}$$

$x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \approx$ (через невиврожденість перетворень) \approx

$\approx z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0.$

$$\tilde{f} = Pf = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f_1 - f_2 - f_3 \\ -f_1 - f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \end{pmatrix}$$

Після того, як у системі (3.28) зробили заміну, помножимо обидві її частини зліва на P :

$$P * |A(Qz) + B \frac{d(Qz)}{dt} = f(t, Qz)$$

$$P(A + \frac{d}{dt}B)Qz = Pf(t, Qz) = \tilde{f}(t, z)$$

$$\text{Отримаємо: } \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix}$$

Перейдемо від $f(t,x)$ до $f(t,Qz)$, а потім до $\tilde{f}(t,z)$:

$$\begin{cases} f_1 = e^t \\ f_2 = 0 \\ f_3 = t \cos(x_2 + x_4) = t \cos z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{f}_1 = 2f_1 - f_2 - f_3 = 2e^t - t \cos z_2 \\ \tilde{f}_2 = -f_1 - f_2 = -e^t \\ \tilde{f}_3 = f_3 = t \cos z_2 \end{cases}$$

Запишемо систему, що вийшла:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_1 + z_2 = 2e^t - t \cos z_2 \\ \frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = -e^t \\ \frac{d}{dt} z_4 + 2z_4 = t \cos z_2 \\ z_i(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Маємо 3 диференціальні рівняння з 4-ма невідомими. Тому $z_2(t)$ - вільна змінна, нехай вона належить класу $C^1(U(0))$, причому $z_2(0) = 0$. Почнемо з розв'язку другого рівняння:

$$\frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = -e^t$$

$$\frac{d}{dt} z_3 + 2z_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt} z_3 = -2z_3; \quad \frac{dz_3}{z_3} = -2dt; \quad \ln|z_3| = -2t + \ln|c|;$$

$$z_{3_{\text{зо}}} = ce^{-2t};$$

$$z_{3_{\text{чн}}} = c(t)e^{-2t};$$

$$z'_{3_{\text{чн}}} = c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t);$$

$$c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t) + 2e^{-2t}c(t) = -e^t$$

$$c'(t) = -e^{3t};$$

$$c(t) = \int -e^{3t} dt = -\frac{e^{3t}}{3};$$

$$z_{3_{\text{чн}}} = -\frac{e^{3t}e^{-2t}}{3} = -\frac{e^t}{3};$$

$$z_3 = ce^{-2t} - \frac{e^t}{3};$$

$$z_3(0) = 0 \Rightarrow c - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow z_3 = \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t).$$

Знайдемо z_4 із третього рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_4 + 2z_4 = t\cos z_2$$

$$\frac{d}{dt}z_4 + 2z_4 = 0$$

$$\frac{d}{dt}z_4 = -2z_4; \quad \frac{dz_4}{z_4} = -2dt \Rightarrow \ln|z_4| = -2t + \ln|c|;$$

$$z_{4_{\text{зо}}} = ce^{-2t};$$

$$z_{4_{\text{чн}}} = c(t)e^{-2t};$$

$$z'_{4_{\text{чн}}} = c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t);$$

$$c'(t)e^{-2t} - 2e^{-2t}c(t) + 2e^{-2t}c(t) = t\cos z_2;$$

$$c'(t)e^{-2t} = t\cos z_2;$$

$$c(t) = \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_{4_{\text{чн}}} = e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_4 = ce^{-2t} + e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt;$$

$$z_4(0) = 0 \Rightarrow c + (\int te^{2t}\cos z_2(t)dt)_{t=0} = 0;$$

$$c = -(\int te^{2t}\cos z_2(t)dt)_{t=0};$$

$$z_4 = -e^{-2t}(\int te^{2t}\cos z_2(t)dt)_{t=0} + e^{-2t} \int te^{2t}\cos z_2(t)dt.$$

Залишилось знайти z_1 з першого рівняння отримаємо:

$$\frac{d}{dt}z_1 + z_2 = 2e^t - t\cos z_2;$$

$$\frac{d}{dt}z_1 = 2e^t - t\cos z_2 - z_2;$$

$$z_1 = \int 2e^t dt - \int t\cos z_2 dt - \int z_2 dt = 2e^t + c - \int t\cos z_2 dt - \int z_2 dt;$$

$$z_1(0) = 0 \Rightarrow c = (\int t\cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2;$$

$$z_1 = 2e^t + (\int t\cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t\cos z_2 dt - \int z_2 dt.$$

Отримуємо розв'язок вихідної задачі:

$$\begin{cases} x_1 = 2e^t + (\int t \cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t \cos z_2 dt - \int z_2 dt - \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t) \\ x_2 = z_2(t) + e^{-2t} (\int t e^{2t} \cos z_2(t) dt)_{t=0} - e^{-2t} \int t e^{2t} \cos z_2(t) dt \\ x_3 = 2e^t + (\int t \cos z_2 dt)_{t=0} + (\int z_2 dt)_{t=0} - 2 - \int t \cos z_2 dt - \int z_2 dt \\ x_4 = -e^{-2t} (\int t e^{2t} \cos z_2(t) dt)_{t=0} + e^{-2t} \int t e^{2t} \cos z_2(t) dt. \end{cases}$$

де $z_2(t)$ - довільна функція з класу C^1 в околі нуля така, що $z_2(0) = 0$.

3.5 Приклад 2

Знайти розв'язок задачі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} t \\ tx_2 \\ 2t^3 \\ \frac{e^t}{2} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо жмуток матриць:

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 3 + 3\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 3 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

Ми бачимо, що наші стовпці, а саме перший і третій, пов'язані лінійною залежністю. Позбавимося цієї залежності за допомогою елементарних перетворень. Тоді отримаємо матрицю виду $\{A_1 + \lambda B_1\}$, де 0 - прямокутна нульова матриця, а $A_1 + \lambda B_1$ - матриця без лінійної залежності.

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 3 + 3\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 3 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & 0 & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 0 & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A_1 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 2\lambda & \lambda & 1 + 2\lambda \\ 1 & 2 + \lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо ранг матриці $A_1 + \lambda B_1$. Якщо ранг $\rho < 4$, то між рядками, або між стовпцями, або в обох випадках існує лінійна залежність.

Якщо визначник $\det(A_1 + \lambda B_1) \neq 0$, то $\rho = 4$.

$$|A_1 + \lambda B_1| = (1 + \lambda)[(1 + \lambda)(1 + 2\lambda)\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2(1 + 2\lambda) - (2\lambda^2 + 2\lambda) - 2\lambda^2] = \lambda^2 + \lambda^3 \neq 0$$

Звідси випливає, що $\rho = 4$, отже, лінійної залежності немає.

$A_1 + \lambda B_1$ - регулярний жмуток матриць.

Спробуємо знайти нескінченні елементарні дільники жмутка $A_1 + \lambda B_1$.

Вони будуть існувати тоді і лише тоді, коли $|B_1| = 0$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Значить, нескінченні елементарні дільники існують. Елементарними перетвореннями наведемо жмуток $A_1 + \lambda B_1$ до вигляду

$$\{N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, A_2 + \lambda B_2\}, \quad |B_2| \neq 0, \quad N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}$$

відповідають нескінченним елементарним дільникам $\mu^{u_1}, \dots, \mu^{u_s}$. Спочатку $A_1 + \lambda B_1$ приводимо до вигляду $\{N^{(u_1)}, \tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1\}$, де

$$N^{(u_1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u_1} \Bigg\} u_1$$

Якщо $|\tilde{B}_1| \neq 0$, то $\tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1 \equiv A_2 + \lambda B_2$.

Інакше приводимо $\tilde{A}_1 + \lambda \tilde{B}_1$ до вигляду $\{N^{(u_2)}, \hat{A}_1 + \lambda \hat{B}_1\}$ і т.д.

Отже,

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & \lambda & 1+2\lambda \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda+1 \\ 1 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda)(1+\lambda) - 2\lambda(1+\lambda) = 2\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 - 2\lambda - 2\lambda^2 = \lambda^3 + \lambda^2 \neq 0,$$

значить $u_1 = 1$, $N^{(u_1)} = (1)$ і $A_2 + \lambda B_2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$.

Жмуток $A_2 + \lambda B_2$ немає нескінченних елементарних дільників, так як

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Приведемо $A_2 + \lambda B_2$ до нормальної жорданової форми за допомогою

елементарних перетворень:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2+\lambda & 1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отже,

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Знайдемо P і Q за допомогою виконаних нами елементарних перетворень з рядками та стовпцями відповідно.

$$\begin{aligned} P = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \\ & * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \\
& * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

У системі (3.29) зробимо заміну:

$$x = Qz = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = 4z_1 - 3z_3 \\ x_2 = -2z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = -z_1 + z_3 \\ x_4 = z_4 \\ x_5 = z_5 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 + 3x_3 \\ z_2 = x_2 + 3x_1 + 10x_3 \\ z_3 = x_1 + 4x_3 \\ z_4 = x_4 \\ z_5 = x_5 \end{cases},$$

$x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \approx$ (через невиродженість перетворень) $\approx z(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$.

Після того, як в системі (3.29) зробили заміну, помножимо обидві її

частини зліва на P :

$$P \cdot \left| A(Qz) + B \frac{d(Qz)}{dt} = f(t, Qz) \right.$$

$$P \left(A + \frac{d}{dt} B \right) Qz = P f(t, Qz) = \tilde{f}(t, z)$$

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{pmatrix}.$$

Перейдемо від $f(t, x)$ до $f(t, Qz)$, а потім до $\tilde{f}(t, z)$:

$$\begin{cases} f_1 = t \\ f_2 = tx_2 = t(-2z_1 + z_2 - z_3) = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ f_3 = 2t^3 \\ f_4 = \frac{e^t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f_1 = t \\ \tilde{f}_2 = f_2 + f_3 = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ \tilde{f}_3 = f_3 = 2t^3 \\ \tilde{f}_4 = f_4 = \frac{e^t}{2} \end{cases}$$

Запишемо початкову задачу:

$$\begin{cases} z_2 = t \\ \frac{d}{dt}z_3 + z_4 = tz_2 - 2tz_1 - tx_3 \\ \frac{d}{dt}z_4 = 2t^3 \\ \frac{d}{dt}z_5 + z_5 = \frac{e^t}{2} \\ z_i(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0, i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Це функціонально-диференційна система виду:

$$\begin{cases} \psi(t, y_1, y_2) = 0 \\ \frac{d}{dt}y_2 = \varphi(t, y_1, y_2) \\ y_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ y_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\text{де } y_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}.$$

Функціональне рівняння розв'язано щодо частини y_1 . Почнемо з розв'язку третього рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_4 = 2t^3,$$

$$z_4 = \frac{2t^4}{4} + c = \frac{t^4}{2} + c$$

$$z_4(0) = 0 \Rightarrow 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow z_4 = \frac{t^4}{2}$$

Тепер знайдемо z_5 :

$$\frac{d}{dt}z_5 + z_5 = \frac{e^t}{2}$$

$$\frac{d}{dt}z_5 + z_5 = 0$$

$$\frac{dz_5}{z_5} = dt \Rightarrow \ln|z_5| = -t + \ln|c|$$

$$z_{5_{30}} = ce^{-t}; \quad z_{5+i} = c(t)e^{-t}$$

$$z'_{5+i} = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t}$$

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = \frac{e^t}{2}$$

$$c'(t)e^{-t} = \frac{e^t}{2}$$

$$c'(t) = \frac{e^{2t}}{2}$$

$$c(t) = \int \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$z_{5_{\text{чн}}} = \frac{1}{4}e^{2t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{4}e^t$$

$$z_5 = z_{5_{\text{со}}} + z_{5_{\text{чн}}} = c(t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

$$z_5(0) = 0 \Rightarrow c \cdot e^0 + \frac{1}{4}e^0 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$z_5 = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t$$

$$z_2 = t$$

Підставимо z_2, z_4, z_5 в друге рівняння:

$$\frac{d}{dt}z_3 + \frac{t^4}{2} = -2tz_1 + t^2 - tz_3 + 2t^3,$$

$$\frac{d}{dt}z_3 + tz_3 = -2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2}$$

Для того, щоб задача Коші мала розв'язок, накладемо на $z_1(t)$ умову неперервності диференційності в околиці $t = 0$.

$$\frac{d}{dt}z_3 = -tdt,$$

$$\ln|z_3| = -\frac{t^2}{2} + \ln|c|,$$

$$z_{3_{\text{со}}} = c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad z_{3_{\text{чн}}} = c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$z'_{3_{\text{чн}}} = c'(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t$$

$$c'(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t + c(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t = -2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2}$$

$$c'(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(-2tz_1 + t^2 + 2t^3 - \frac{t^4}{2})$$

$$c(t) = -2 \int te^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2 \int t^3 e^{\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

$\int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt$ не інтегрується в елементарних функціях.

$$\int t^3 e^{\frac{t^2}{2}} dt = \left[\begin{array}{l} \frac{t^2}{2} = m \quad t^2 = 2m \\ dm = t dt \end{array} \right] = 2 \int m e^m dm = \left[\begin{array}{ll} u = m & du = dm \\ dv = e^m dm & v = e^m \end{array} \right] =$$

$$= 2(m \cdot e^m - \int e^m dm) = e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)$$

$$c(t) = -2 \int te^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}}(t^2 - 2)$$

$$\begin{aligned}
z_3 &= c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 - 2) \right) \\
z_3(0) = 0 &\Rightarrow c + \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} - 4 = 0 \\
c &= 4 - \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} \\
z_3 &= \left(4 - \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} * \\
&* \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 - 2) \right)
\end{aligned}$$

Отримуємо розв'язок вихідної системи:

$$\left\{ \begin{aligned}
x_1 &= \left(4z_1(t) - \left(12 - 3 \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} \right) \right) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + \\
&+ 3e^{\frac{t^2}{2}} \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 - 2) \right) \\
x_2 &= -2z_1(t) + t - \left(4 - \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} + \\
&+ e^{-\frac{t^2}{2}} \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 - 2) \right) \\
x_3 &= -z_1(t) + \left(4 - \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt \right)_{t=0} \right) e^{-\frac{t^2}{2}} + \\
&+ e^{-\frac{t^2}{2}} \left(-2 \int t e^{\frac{t^2}{2}} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int t^4 e^{\frac{t^2}{2}} dt + \int t^2 e^{\frac{t^2}{2}} dt + 2e^{\frac{t^2}{2}} (t^2 - 2) \right) \\
x_4 &= \frac{t^2}{2} \\
x_5 &= -\frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} e^t
\end{aligned} \right.$$

де $z_1(t)$ - довільна функція з класу C^1 в околі нуля, що $z_1(0) = 0$.

ВИСНОВОК

В кваліфікаційній роботі досліджувалась задача Коші для системи m звичайних диференціальних рівнянь виду:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0 \end{cases}$$

де $A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, та вектор-функція $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^m$ неперервна у $D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}$, $0 < a, b = \text{const}$.

Методи дослідження задачі засновані на теорії регулярних та сингулярних жмутків матриць із сталими елементами.

У першому розділі дані основні поняття та визначення з теорії матриць та теорії диференціальних рівнянь, які знадобились нам для подальшого дослідження диференціальних систем.

Основним результатом другого розділу є теорема про приведення сингулярного жмутка матриць до найпростішого квазидіагонального вигляду та критерій еквівалентності матриць.

Третій розділ роботи присвячений перетворенню системи звичайних диференціальних рівнянь з регулярними та сингулярними жмутками матриць до найпростішого вигляду. Еквівалентна система включатиме диференціальні та функціональні рівняння. Досліджуються достатні умови існування розв'язків звичайних диференціальних рівнянь зі сталим сингулярним жмутком матриць. Встановлено, що за різних додаткових умов безліч розв'язків задачі Коші може включати єдиний розв'язок, сімейство розв'язків, що залежать від довільних дійсних сталих, або сімейство розв'язків, що залежать від довільних функцій певного класу функцій, що неперервно диференціюються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Campbell S.L., Petzold L.R. Canonical forms and solvable singular system of differential equations. - SIAM J. Alg. and Discrete Methods. - 1983 - N4. - P.517-521
2. März R., Lamour R., Winkler R. How floquet theory applies to index 1 differential equations. - J. Math. Appl. – 1998. - N2. – p. 372-394.
3. Campbell S.L. Singular system of differential equations. - San-Francisco: Pitman, 1980. – p. 41-55.
4. Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. – 1988. – 552 с.
5. Campbell S.L. Singular system of differential equations 2. - San-Francisco: Pitman, 1982. – 234 p.
6. M. H. Hamdan, Z. Jackiewicz. Stiff Differential Equations and Applications. - 2014.
7. Silverman L.M., Bucy R.S. Generalizations of theorem of Dolezal, Math.System Theory, 4. - 1970. - p. 334-339.
8. Campbell S.L., A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations. -SIAM J. Math. Anal. - 1987 - N4. - P. 1101-1115
9. D. S. Mackey, V. V. Sergeichuk. Matrix Polynomials. - 2010.
10. Самойленко А.М., Яковець В.П. Про приведення виродженої лінійної системи до центральної канонічної форми. Київ: Наукова думка. - 1993.
11. V. Mehrmann, C. Schröder. Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution - 2012.
12. Briot, C. A., Bouquet, J. C. Théorie des fonctions elliptiques - 1875.
13. Самкова Г.Є., Шарай Н.В. Про дослідження деякої напівявної системи диференціальних рівнянь у разі змінного жмутка матриць// Нелінійні коливання.- 2002.
14. I. Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. - 1901.
15. J. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. - 1881.
16. О.М. Ляпунов. Загальні задачі теорії стійкості руху. - 1892.
17. Petzold L.R., Gear C. W. ODE methods for the solution of differential

algebraic systems. SIAM J. Numer. Anal. – 1984. – N4. – p. 716-728.

18. Campbell St., Hanke M. "Regularization Methods for Ill-Posed Problems". Springer. - 1995.