

УДК 539.1

**А. П. Мойсеєнок**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В КЛИНОВИДНО-СЛОИСТОЙ  
СРЕДЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ В ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**Мойсеєнок О. П.** Розв'язання двовимірної граничної задачі для рівняння Лапласа у клиновидно-шаруватому середовищі з застосуванням до теплопровідності та теорії пружності. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна початкова задача зведена до одновимірної, явний розв'язок якої знайдено на основі рекуррентної схеми для довільної кількості шарів [1]. Зворотне перетворення Мелліна дозволило отримати розв'язок задачі. Запропонований метод розв'язання задачі проілюстрований для випадку двошарового клина.

**Ключові слова:** клиновидно-шарувате середовище, рекуррентні матричні перетворення, теорія пружності.

**Мойсеєнок А. П.** Решение двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа в клиновидно-слоистой среде с применением в теплопроводности и теории упругости. С помощью интегрального преобразования Меллина исходная задача сведена к одномерной, явное решение которой найдено на основе рекуррентной схемы для произвольного количества слоев [1]. Обратное преобразование Меллина позволило получить решение задачи. Предложенный метод решения задачи проиллюстрирован для случая двухслойного клина.

**Ключевые слова:** клиновидно-слоистая среда, рекуррентные матричные преобразования, теория упругости.

**Moysyeyenok A. P.** The solution of the 2D boundary Laplace equation in the edge-layered medium with the use in the elasticity theory and heat conduction. With the help of the Mellin integral transformation the problem is reduced to one-dimensional, explicit solution is found on the recursive scheme for an arbitrary number of layers. The inverse Mellin transform allows to obtain the solution of the problem. The proposed method of solution is illustrated for the case of two-layer wedge.

**Key words:** edge-layered medium, recurrent matrix transformations, the theory of elasticity.

**ВВЕДЕНИЕ.**

Актуальность предложенной задачи обусловлена тем, что существующие математико-технические модели, разработанные для классических однородных материалов, не полностью охватывают механические и физические свойства современных материалов неоднородной структуры. Развитие композитных, многослойных или функционально-градиентных материалов потребовало создания новых математических моделей, позволяющих определить целостность объекта без дорогостоящих экспериментов. Построению таких моделей посвящены задачи [1-3]. Новизной предложенной работы является построение точного решения

для упругой клиновидной двуслойной среды, находящейся в условиях антиплоской деформации.

**1. Постановка задачи.** Имеется двуслойная клиновидная среда

$$0 < r < \infty, \quad \omega_0 < \varphi < \omega_2, \quad (1)$$

$\mu_j, G_j, j = 1, 2$  — коэффициенты Пуассона и модули сдвига каждого из упругих клиньев. В каждом из слоев смещения  $W_j(r, \varphi), j = 1, 2$  удовлетворяют уравнениям равновесия

$$r(rW_j'(r, \varphi))' + W_j''(r, \varphi) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad \omega_0 < \varphi < \omega_2 \quad (2)$$

здесь и далее штрих отображает производную по первой переменной, а точка — по второй, ( $j$  — номер слоя). Краевые условия записываются следующим образом:

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \omega_0) = G_1 \frac{W_1'(r, \omega_0)}{r} = q(r); \quad \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \omega_2) = G_2 \frac{W_2'(r, \omega_0)}{r} = \tilde{q}(r). \quad (3)$$

Напряжения  $\tau_{\varphi z}^{(j)}(r, \varphi), j = 1, 2$  и смещения  $W_j(r, \varphi), j = 1, 2$  удовлетворяют также условиям сопряжения на стыке сред:

$$W_1(r, \omega_1) = W_2(r, \omega_1); \quad \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \omega_1) = \tau_{\varphi z}^{(2)}(r, \omega_1). \quad (4)$$

Требуется отыскать решение краевой задачи (2) — (4) в области (1).

**2. Сведение исходной краевой задачи к одномерной.** Переформулируем исходную задачу в терминах смещений. Тогда краевые условия (3), (4) будут записаны в виде:

$$\begin{aligned} r(rW_j'(r, \varphi))' + W_j''(r, \varphi) &= 0, \quad 0 < r < \infty, \quad \omega_0 < \varphi < \omega_2, j = 1, 2; \\ G_1 W_1'(r, \omega_0) &= r q(r); \quad G_2 W_2'(r, \omega_0) = r \tilde{q}(r); \\ W_1(r, \omega_1) &= W_2(r, \omega_1); \quad G_1 W_1'(r, \omega_1) = G_2 W_2'(r, \omega_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Для сведения поставленной краевой задачи (5) к одномерной применим к уравнениям и краевым условиям интегральное преобразование Меллина.

$$W_{js}(\varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} W_j(r, \varphi) dr, \quad j = 1, 2 \quad (6)$$

с формулой обращения

$$W_j(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} W_{js}(\varphi) r^{-s} ds. \quad (7)$$

В пространстве трансформант краевая задача (5) примет вид:

$$\begin{aligned} W_{js}(\varphi)'' + s^2 W_{js}(\varphi) &= 0, \quad j = 1, 2; \omega_0 < \varphi < \omega_2; \\ G_1 W_1'(\omega_0) &= q_s, \quad G_2 W_2'(\omega_2) = \tilde{q}_s; \\ G_1 W_{1s}'(\omega_1) &= G_2 W_{2s}'(\omega_1); \end{aligned} \quad (8)$$

где  $q_s = \int_0^\infty r^{s-1} q(r) dr$ ;  $\tilde{q}_s = \int_0^\infty r^{s-1} \tilde{q}(r) dr$ .

### 3. Построение решения одномерной краевой задачи.

Общее решение уравнения в (8) имеет вид

$$W_{js}(\varphi) = C_j^0(s) \sin(s\varphi) + C_j^1(s) \cos(s\varphi), \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Подставим (9) в условия сопряжения и краевые условия

$$\begin{aligned} C_1^0(s) \sin(s\omega_1) + C_1^1 \cos(s\omega_1) &= C_2^0(s) \sin(s\omega_1) + C_2^1 \sin(s\omega_1); \\ sG_1 C_1^0(s) \cos(s\omega_1) - sC_1 C_1^1 \sin(s\omega_1) &= sG_2 C_2^0(s) \cos(s\omega_1) + \\ &+ sG_2 C_2^1 \cos(s\omega_1); \\ sG_1 C_1^0(s) \cos(s\omega_0) + sG_1 C_1^1 \sin(s\omega_0) &= q(s); \\ sG_2 C_2^0(s) \cos(s\omega_2) + sG_2 C_2^1 \cos(s\omega_2) &= \tilde{q}(s); \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) четырех линейных алгебраических уравнений содержит четыре неизвестные постоянные  $C_j^0, C_j^1, j = 1, 2$ , которые вычисляются в явном виде. Разрешив систему (10) получаем представление трансформант Меллина смещений:

$$\begin{aligned} W_{1s}(\varphi) &= \left\{ \frac{q_s}{G_1 \Delta} (\cos(\frac{\pi}{2}s) h_1(s) - \sin(\frac{\pi}{2}s) h_3(s)) - \right. \\ &- \frac{\tilde{q}_s}{G_2 \Delta} (\cos(\frac{\pi}{2}s) h_2(s) + \sin(\frac{\pi}{2}s) h_1(s)) \left. \right\} \sin(s\varphi) + \\ &+ \left\{ \frac{q_s}{G_1 \Delta} s \sin(\frac{\pi}{6}s) + \frac{\tilde{q}_s}{G_2 \Delta} s \cos(\frac{\pi}{6}s) \right\} \cos(s\varphi); \\ h_1 &= \sin(\pi s/4) \cos(\pi s/4) - \sin(\pi s/4) \cos(\pi s/4) \frac{G_1}{G_2}; \\ h_2 &= \sin(\pi s/4)^2 + \cos(\pi s/4)^2 \frac{G_1}{G_2}; \quad h_3 = \cos(\pi s/4)^2 + \sin(\pi s/4)^2 \frac{G_1}{G_2}; \\ \Delta &= s^2 \cos(\omega_0 s) (\sin(\omega_1 s) \cos(\omega_1 s) \frac{G_2 - G_1}{G_2} (\cos(\omega_2 s) - \sin(\omega_2 s)) + \\ &+ \frac{G_1 - G_2}{G_2} (\sin(\omega_0 s))^2 (-\sin(\omega_0 s) \cos(\omega_2 s) - \sin(\omega_2 s)) + \frac{G_1}{G_2} \sin(\omega_0 s) \cos(\omega_2 s)). \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичную структуру имеет трансформанта  $W_{2s}(\varphi)$ .

Таким образом, в пространстве трансформант получено точное решение краевой задачи (8). С тем, чтобы получить решение исходной задачи, к смещениям (11) применим обратное интегральное преобразование Меллина (7), выбрав в качестве заданной нагрузки  $q(r), \tilde{q}(r)$  функции

$$q(r), \tilde{q}(r) = \begin{cases} r, & r \in [a, b], \\ 0, & r \notin [a, b]. \end{cases}$$

Тогда смещения  $W_1(r, \varphi)$ , например, примут вид:

$$W_1(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_a^b (H_1(s) \sin(s\varphi) + H_2(s) \cos(s\varphi)) d\rho \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} ds, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{s}{G_1 \Delta} (\cos(\omega_2 s) h_1(s) - \\ &- \sin(\omega_2 s) h_3(s)) - \frac{s}{G_2 \Delta} (\cos(\omega_2 s) h_2(s) + \sin(\omega_2 s) h_1(s)); \\ H_2(s) &= \frac{s \sin(\omega_1 s)}{G_1 \Delta} + \frac{s \cos(\omega_1 s)}{G_2 \Delta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычисление оригинала смещений свелось к вычислению интегралов вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_a^b \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} H_1(s) \sin(s\varphi) ds d\rho, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_a^b \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} H_2(s) \cos(s\varphi) ds d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

Подсчитаем эти интегралы с помощью теоремы о вычетах, для чего установим нули знаменателя подынтегральной функции и замкнем контур так, чтобы выполнялась лемма Жордана.

#### 4. Отыскание нулей знаменателя $\Delta(s)$ .

Найдем корни уравнения  $\Delta(s) = 0$ , для чего запишем его в следующем виде

$$\Delta(s) = s^2 \cos(\omega_0 s) F(s),$$

где

$$\begin{aligned} F(s) &= (\sin(\omega_1 s) \cos(\omega_1 s) \frac{G_2 - G_1}{G_2} (\cos(\omega_2 s) - \sin(\omega_2 s)) + \\ &+ \frac{G_1 - G_2}{G_2} (\sin(\omega_0 s))^2 (-\sin(\omega_0 s) \cos(\omega_2 s) - \sin(\omega_2 s)) + \\ &+ \frac{G_1}{G_2} \sin(\omega_0 s) \cos(\omega_2 s)). \end{aligned} \quad (15)$$

Равенство (14) приводит к первому корню  $s = 0$ , а также серии корней  $s_k = \frac{\pi}{2\omega_0} + \frac{\pi k}{\omega_0}$ . Корни уравнения  $F(s) = 0$  будем искать в следующем виде  $\omega_i = \frac{\pi d_i}{e_i}$ ,  $(d_i, e_i) = 1$ ,  $d_i, e_i \in \mathcal{N}$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , в нашем случае положим  $d_i \equiv 1$ , тогда  $s = \frac{\pi}{e_i} + tk$ , где  $t = [e_0, e_1, e_2]$  — наименьшее общее кратное, в нашем случае  $[2, 4, 6] = 12$ , где  $t$  — период. Окончательное выражение для корней имеет вид  $s = s_i + 12k$ ,  $k \in \mathcal{N}$ .

Приближенные значения корней  $s_i$  были рассчитаны численно с помощью пакета Maple. Вычисление интегралов вида (14) с учетом выполнения леммы Жордана проводится по формулам:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \int_a^b \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} H_1(s) \sin(s\varphi) d\rho ds = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=s_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} H_1(s) \sin(s\varphi) = \\ = Q_1^k(r, \rho), r > \rho, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=-s_k} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{-s} H_1(s) \sin(s\varphi) = \\ = Q_2^k(r, \rho), r < \rho. \end{cases} \quad (16)$$

Аналогичная формула используется для вычисления второго интеграла в (14). Таким образом получаем окончательную расчетную формулу для определения

смещений внутри клина:

$$W_1(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^r Q_1^k(r, \rho) d\rho - \sum_{k=0}^{\infty} \int_r^b Q_2^k(r, \rho) d\rho. \quad (17)$$

### 5. Численные результаты.

Представляет интерес рассмотреть значения напряжений  $\tau_{\varphi z}(r, \varphi)$  и  $\tau_{rz}(r, \varphi)$ , возникающих на ортогональных площадках при различных углах в точках приложения силы. Результаты численных исследований приведены для исходных данных:  $\omega_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $G_1 = 1$ ,  $G_2 = 10$ ,  $a = 5$ ,  $b = 10$ . На рис.1 и рис.2 приведены графики изменения напряжения вдоль линии действия сдвигающей силы. На рис. 1 приведены значения для напряжения  $\tau_{\varphi z}$ . Из этого рисунка видно, что на промежутке приложения силы это напряжение имеет максимум, близкий к середине. На втором рисунке представлены значения для  $\tau_{rz}$ . Здесь видно, что значения напряжения имеет максимум в точке начала действия силы, затем значения стремятся к некоторому постоянному значению. Отметим, что значения  $\tau_{rz}$  больше чем соответствующие им значения  $\tau_{\varphi z}$  и при приближении к нулю значения обоих напряжений стремятся к бесконечности. Отметим, что при изменении значений модулей сдвига, напряжение менялось пропорционально этому изменению. На рис. 3 и рис. 4 приведены значения напряжений  $\tau_{\varphi z}$  и  $\tau_{rz}$  в зависимости от угла  $\varphi$ . На обоих графиках видно, что с увеличением угла значения напряжений линейно увеличиваются.

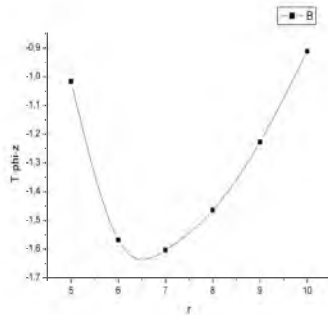


Рис. 1

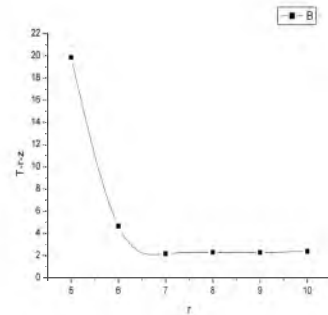


Рис. 2

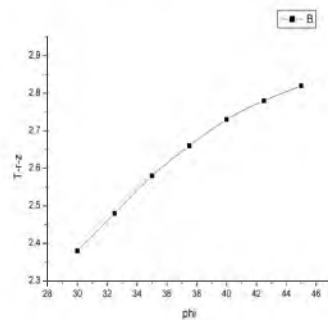


Рис. 3

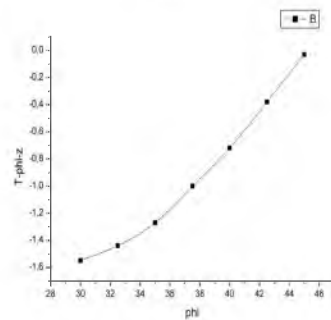


Рис. 4

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

1. Поставленная в работе задача решена точно, с использованием подхода, предложенного в [1].
2. Задача для двуслойной клиновидной области может быть решена в плоской постановке.
3. Изменения соотношений модулей сдвига приводит к пропорциональному изменению напряжений.

1. **Попов Г. Я.** К решению краевых задач механики и математической физики для слоистых сред [текст] / Г. Я. Попов // Известия академии наук армянской ССР. – 1978. – Т. 31, № 2. – С. 34–47.
2. **Акопян В. С.** О продольном сдвиге неоднородного составного клина [текст] / В. С. Акопян // Известия академии наук армянской ССР. – 1994. – Т. 47, № 1-2. – С. 21–27.
3. **Прокофьев А. П.** Контактная задача для составного клина [текст] / А. П. Прокофьев // Взаимодействие в механике конструкций. – 1980. – С. 52–59.
4. **Айзикович С. М.** Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред [текст] / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. В. Белоконь. – ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – 240 с.