

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Математичне моделювання розповсюдження епідемії між містами»
«Mathematical modeling of the spread of the epidemic between cities»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Бутник Михайло Ігорович

Керівник д.фіз.-мат.н., доц. Скрипник Н. В. _____
(підпис)

Рецензент д.фіз.-мат.н., доц. Кічмаренко О. Д.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ р.

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № ____ від _____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

(підпис) (прізвище, ініціали)

(підпис) (прізвище, ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Модель SIR.....	6
Постановка задачі	6
Моделювання епідемічної хвилі.....	10
Випадок двох міст.....	10
Випадок трьох міст.....	12
Випадок чотирьох міст.....	15
Випадок п'яти міст.....	18
Узагальнення	22
Аналіз результатів.....	23
РОЗДІЛ 2. Модель SEIR	26
Розрахунок математичної моделі.....	26
Моделювання епідемічної хвилі.....	30
Випадок двох міст.....	30
Випадок трьох міст.....	32
Моделювання розвитку епідемії на реальних даних.....	34
ВИСНОВКИ.....	38
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	40
ДОДАТКИ	41

ВСТУП

Епідемія — тип хвороби, яка є новою для даної популяції впродовж періоду збереження імунної «пам'яті» та поширюється зі швидкістю, що значно перевищує очікувану, ґрунтуючись на попередньому досвіді (тобто, числі нових випадків за одиницю часу) [2]. У даній роботі ми будемо розглядати епідемію згідно з визначенням в українському законодавстві: «епідемія — масове поширення інфекційного захворювання серед населення відповідної території за короткий проміжок часу», що не відповідає світовому визначенню, яке поширює поняття епідемії на усі випадки масового ураження, в тому числі й отруєння.

Звичайну захворюваність для даної місцевості, кліматичного сезону та в певних історичних умовах називають спорадичною. Це, найчастіше, окремі поодинокі випадки захворювань, що не мають зв'язку між собою. У тих випадках, коли інфекційну захворюваність на певній території реєструють стало, постійно, протягом багатьох років, використовують термін «ендемія» або «ендемічне захворювання». Підвищення рівня захворюваності через сезонні коливання не є епідемією. Хвороба, що поширюється впродовж епідемії, може бути як інфекційною, так і неінфекційною [1].

Термін «епідемія» використовують, коли захворювання охоплює значні регіони. У разі надзвичайно широкого поширення епідемії (кілька країн, чи навіть кілька континентів) часто вживають термін пандемія. У країнах розвиненої медицини в спеціальній літературі не вживають цей термін, а використовують поняття «спалах». У вітчизняній літературі ще використовують і поняття «епідемічний спалах» — розуміють при цьому підвищення захворюваності, що обмежується невеликою територією і яке перебігає короткий час [1].

Епідемія тісно належить до поняття «епідемічний процес» — безперервність передачі інфекції від хворих людей або хворих тварин (джерела інфекції) здоровим людям. У природних умовах цей процес іде більш-менш збалансовано, але якщо змінюються певні чинники, то спотворення перебігу

епідемічного процесу спричинює високу інтенсивність передачі інфекції і це призводить до розвитку епідемії.

Математичне моделювання в епідеміології дає змогу змодельовати появу й поширення хвороботворних мікроорганізмів. Для цього населення поділяють на певні групи осіб, в залежності від стану здоров'я та рівня поширення збудника в популяції. Однією з базових моделей, яка була успішно дослідженою, стала модель Кермака-МакКендріка, побудована в 1927—1933 роках [6].

Ця модель відома як полігамна модель епідеміології, а також слугує базовою математичною моделлю, яка дає змогу зрозуміти складну динаміку та основні особливості епідеміологічних систем. В найпростішому випадку населення поділяють на дві групи: сприйнятливих до захворювання осіб (позначають, як S — від англ. *susceptible*), та осіб інфікованих патогеном (позначають, як I — від англ. *infected*). Таким чином, патогенна взаємодія базується на феноменологічних припущеннях, на основі яких побудована математична модель. Для дослідження цих моделей використовують звичайні диференціальні рівняння. В подальшому використанні цих моделей, також описується кількість осіб, які одужали й мають імунітет (позначають, як R — від англ. *recovered*) та кількість заражених осіб під час інкубаційного періоду (тих, які були інфіковані, але ще не є заразними; позначають, як E — від англ. *exposed*)[5]. Так з'явилися найбільш розповсюджені типи математичних моделей в епідеміології — SIR та $SEIR$, які ми будемо розглядати у цій роботі.

Отримавши змогу моделювати поширення інфекційних патогенів у полігамних моделях, стає можливим спрогнозувати різні властивості патогена, наприклад, поширення (загальну кількість осіб інфікованих від епідемії) та тривалість епідемії [3].

Проте, у таких моделях не досліджується питання про умови виникнення епідемічної хвилі, яка може по черзі охопити декілька міст, і необхідного для цього взаємозв'язку транспортних потоків. Тому було вирішено виконати дослідження, результатом якого стало б отримання потрібних умов для виникнення хвилі. У даній роботі ми спробуємо вирішити поставлені питання у

рамках полігамних моделей типу SIR та SEIR з їх доповненням транспортними потоками. Відповідно, потрібно побудувати дискретні моделі, які б відтворювали рух хвилі, і знайти обмеження на інтенсивність транспортних потоків, що забезпечують її виникнення.

РОЗДІЛ 1. Модель SIR

Постановка задачі

Розглянемо спочатку випадок одного міста. В першій частині нашого дослідження, застосовуючи системний підхід до побудови найпростішої моделі епідемії, обмежимося врахуванням тільки трьох груп індивідів: сприйнятливі, заражені, імунні.

Нехай S , I , R – чисельності цих груп. Складемо рівняння сталості загальної чисельності всіх груп $S + I + R = N = \text{const}$. Оберемо механізм зараження «через зустріч сприйнятливого із зараженим». Тоді розвиток епідемії буде описуватися рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I, \end{cases}$$

$$\beta = 1/T, \alpha = 1/N \cdot C, S(0) = S^0 > 0, I(0) = I^0 > 0, R(0) = R^0 \geq 0,$$

де T – характерна тривалість хвороби, C – час контакту, достатній для інфікування [4].

Умовою виникнення епідемії в початковий момент часу $t = 0$ є додатня похідна $\frac{dI}{dt}$, вирахована у цей момент часу:

$$\frac{dI}{dt}(0) > 0 \text{ або } (\alpha S(0)I(0) - \beta I(0)) > 0$$

Тепер розглянемо випадок n міст. У якості моделі територіального розташування міст, через які проходить епідемічна хвиля, береться послідовність n точок на прямій, де i -а точка відповідає i -ому місту. Транспортні потоки як переносники інфекції пов'язують кожну точку з усіма іншими, розрізняючись інтенсивністю перенесення. Для спрощення аналізу припустимо, що міста ідентичні одне одному за чисельністю населення, транспортним обслуговуванням та контактами населення всередині міста, а прямі контакти

мешканців одного міста з мешканцями іншого, крім як через транспорт, відсутні. Переміщення мешканців з міста до міста будемо вважати зменшуючимся за інтенсивністю з віддаленням гостьового міста від вихідного. З огляду на такий характер переміщень, задаємо симетричну матрицю інтенсивностей переміщень P зі зменшуючимися по обидва боки від діагоналей рядковими елементами:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{12} > p_{13} > \cdots > p_{1n} > 0,$$

$$p_{21} > p_{23} > \cdots > p_{2n} > 0, p_{ij} = p_{ji}, i \neq j$$

$$\dots$$

Крім того, будемо вимагати $p_{ij} = p_{(i+1)(j-1)}$, $i = 1, \dots; j = 2, \dots; i \neq j$, що еквівалентно зсуву $(i+1)$ -ого рядка щодо i -ого на один елемент вправо. Цим задається ідентичність транспортного обслуговування n міст. Нехай S_i, I_i, R_i – відповідно число сприйнятливих, інфікованих і імунних осіб в i -ому місті, N_i – загальне їх число. Без урахування транспортних зв'язків розвиток епідемії в i -му місті мав би локальний характер, описаний через контакти сприйнятливих з інфікованими:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\alpha I_i S_i, \frac{dI_i}{dt} = \alpha I_i S_i - \beta I_i, \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i, i = \overline{1, n}$$

Для включення до цієї моделі транспортних потоків необхідно ввести додаткові припущення щодо частки інфікованих осіб серед частини населення, що переміщається. Це особливо важливо у випадку віддалених одне від одного міст, коли транспортні потоки виконують основну роль у поширенні інфекції. Припустимо, що структура контингенту осіб, які прямують з i -ого міста до j -ого (S_{ij}, I_{ij}, R_{ij}) , повторює у певній пропорції структуру населення i -ого міста:

$$S_{ij} : I_{ij} : R_{ij} = S_i : I_i : R_i.$$

Введемо коефіцієнт пропорційності δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$), що відображає відношення місткості транспортних засобів, що зв'язує i -е місто з j -м, до числа

жителів i -ого міста. Тоді інтенсивність транспортного потоку з i -ого міста до j -ого з урахуванням $S_i + I_i + R_i = N_i$ отримає значення:

$$p_{ij} = S_{ij} + I_{ij} + R_{ij} = \delta_{ij} S_i + \delta_{ij} I_i + \delta_{ij} R_i = \delta_{ij} N_i.$$

Аналогічно для p_{ji} . У цьому випадку кількісна зміна структури населення i -ого та j -ого міст за рахунок припливу і відтоку жителів за одиницю часу $\Delta t = 1$ складе:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= -\delta_{ij} S_i + \delta_{ji} S_j, \Delta I_i = -\delta_{ij} I_i + \delta_{ji} I_j, \Delta R_i = -\delta_{ij} R_i + \delta_{ji} R_j, \\ \Delta S_j &= \delta_{ij} S_i - \delta_{ji} S_j, \Delta I_j = \delta_{ij} I_i - \delta_{ji} I_j, \Delta R_j = \delta_{ij} R_i - \delta_{ji} R_j, \\ \Delta S_i + \Delta I_i + \Delta R_i &= -\delta_{ij} N_i + \delta_{ji} N_j, \Delta S_j + \Delta I_j + \Delta R_j = \delta_{ij} N_i - \delta_{ji} N_j. \end{aligned}$$

Разом з тим, кількісні зміни епідеміологічного характеру за той самий відрізок часу $\Delta t = 1$ складуть:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= -\alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i, \Delta I_i = \alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i - \beta I_i, \Delta R_i = \beta I_i, \\ \Delta S_j &= -\alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} I_i \right) S_j, \Delta I_j = \alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} I_i \right) S_j - \beta I_j, \Delta R_j = \beta I_j. \end{aligned}$$

Об'єднуючи транспортні зміни з епідеміологічними і переходячи до диференціальних рівнянь, отримаємо наступну модель розвитку просторово-часового процесу у системі з n міст:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = -\alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j \right) S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} S_i + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} S_j, \\ \frac{dI_i}{dt} = \alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j \right) S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_i + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} I_j - \beta I_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} R_i + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} R_j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Припустимо, що в момент часу $t = 0$ у кожному з n міст вже є деяка кількість інфікованих і задано початковий розподіл інфікованих осіб по всіх містах:

$$t = 0: I_i(0) > 0, i = \overline{1, n}.$$

Далі припустимо, що в першому місті число інфікованих осіб більше, ніж в інших: $I_1(0) > I_i(0), i = \overline{2, n}$. (1.2)

Будемо вважати, що у першому місті в початковий момент часу виконується умова початку епідемії, а у інших містах – не виконується:

$$t = 0: \frac{dI_1}{dt}(0) > 0, \frac{dI_i}{dt}(0) < 0, i = \overline{2, n}. \quad (1.3)$$

Потрібно знайти такі умови інтенсивності транспортних потоків δ_{ij} , при яких для системи (1.1) виконуються умови (1.2) і (1.3).

Отже, перше наше завдання полягає у пошуку обмежень для δ_{ij} , що забезпечують виконання умов (1.2) і (1.3): $0 < \delta_{ij} < \widehat{\delta}_{ij}$.

Знайдемо послідовно рішення задачі (1.1) – (1.3) для випадку двох міст, а потім для випадків трьох, чотирьох і п'яти міст. Після цього спробуємо узагальнити модель для n міст та реалізувати її програмно.

Моделювання епідемічної хвилі

Випадок двох міст. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку двох міст мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}I_1 + \delta_{21}I_2 - \beta I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}I_2 + \delta_{12}I_1 - \beta I_2.\end{aligned}$$

Нехай для кожного з двох міст виконується умова (1.2). Для виконання умови (1.3) вимагатимемо:

$$\begin{aligned}\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}I_1 + \delta_{21}I_2 - \beta I_1 &> 0, \\ \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}I_2 + \delta_{12}I_1 - \beta I_2 &< 0.\end{aligned}$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймемо $\delta_{12} = \delta_{21}$. При отриманні всіх коефіцієнтів δ_{ij} ми будемо виконувати ділення на певні вирази. Для того, щоб при діленні не змінився знак, тут і надалі будемо вимагати додатність цих виразів. З першої нерівності випливає:

$$\delta_{12} > \frac{I_1(\beta - \alpha S_1)}{\alpha S_1 I_2 - I_1 + I_2}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\delta_{12} < \frac{I_2(\beta - \alpha S_2)}{\alpha S_2 I_1 - I_2 + I_1}.$$

Об'єднуючи, отримаємо наступне обмеження на вибір δ_{12} і δ_{21} :

$$\frac{I_1(\beta - \alpha S_1)}{\alpha S_1 I_2 - I_1 + I_2} < \delta_{12} < \frac{I_2(\beta - \alpha S_2)}{\alpha S_2 I_1 - I_2 + I_1}.$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{12} і δ_{21} задаємо наступні початкові дані, що задовольняють умові (1.2): $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.0003$, $S_1 = 850$, $I_1 = 150$, $R_1 = 0$, $S_2 = 950$, $I_2 = 50$, $R_2 = 0$.

Відповідно до обраних даних, отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{12} і δ_{21} : $-0.0648 < \delta_{12} < 0.2665$.

З огляду на раніше зазначені обмеження на δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$) отримаємо:

$$0 < \delta_{12} < 0.2665.$$

Виберемо $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.003$, яке задовольняє отриманому обмеженню.

Модель епідемії для випадку двох міст з урахуванням отриманих даних була реалізована мовою Python (див. ДОДАТОК А). Результат даного практичного експерименту наочно представлений на Рис. 1.1.

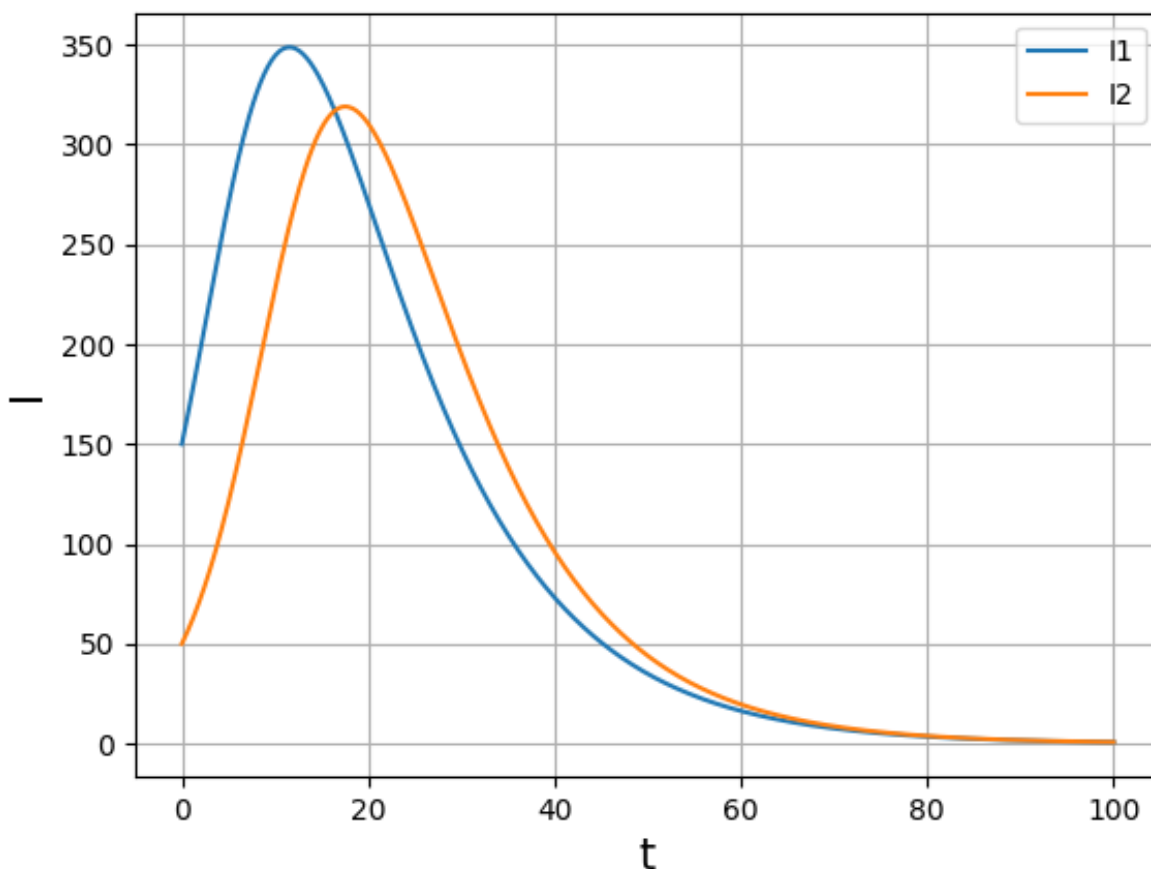


Рис. 1.1. Реалізація моделі для випадку двох міст

На рисунку можемо побачити, що в першому місті виникає досить сильний епідемічний спалах, досягає свого піку при $t \approx 11.5$, а потім настає спад. Епідемія у другому місті виникає через деякий час після першого, затримка становить ≈ 5 одиниць часу. До того ж, загальна кількість інфікованих у другому місті помітно менша, ніж в першому. Після цього у першому місті починається процес одужання, і кількість інфікованих осіб зменшується, потім процес одужання відбувається і в другому місті.

Випадок трьох міст. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку трьох міст мають вигляд:

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 - \beta I_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 - \beta I_2,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 - \beta I_3.$$

Нехай виконується умова (1.2). Для виконання умови (1.3) вимагатимемо:

$$\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 - \beta I_1 > 0,$$

$$\alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 - \beta I_2 < 0,$$

$$\alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 - \beta I_3 < 0.$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймемо $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$. З першої нерівності отримаємо:

$$\delta_{13} > \frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_3 - I_1 + I_3}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\delta_{23} < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_3 - I_2 + I_3}.$$

З третьої нерівності отримаємо:

$$\delta_{13} < \frac{\delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_1 - I_3 + I_1}.$$

Об'єднуючи, отримаємо наступні обмеження на вибір δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} і δ_{32} :

$$\frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_3 - I_1 + I_3} < \delta_{13} < \frac{\delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_1 - I_3 + I_1},$$

$$0 < \delta_{23} < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_3 - I_2 + I_3}.$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} і δ_{32} задаємо наступні початкові дані для третього міста, що задовольняють умові (1.2): $S_3 = 970$, $I_3 = 30$, $R_3 = 0$. Використовуємо початкові дані для перших двох міст, визначені раніше, і вибране значення для $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.003$.

Відповідно до введених і наявних даних, отримаємо інтервал для вибору δ_{23} і δ_{32} : $0 < \delta_{23} < 0.845$.

Беручи до уваги, що матриця переміщень – симетрична матриця зі зменшуючимися по обидві сторони від діагоналей елементами, оберемо $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.001$, що задовольняє отриманому обмеженню.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{13} і δ_{31} , використовуючи при його розрахунку обране значення для $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.001$:

$$-0.0352 < \delta_{13} < 0.2046 \Rightarrow 0 < \delta_{13} < 0.2046.$$

Виберемо $\delta_{13} = \delta_{31} = 0.002$.

Результат реалізації моделі для випадку трьох міст представлений на Рис. 1.2. На цьому рисунку показано, що спалах епідемії в третьому місті виникає не відразу після спалаху в другому, бо потрібен якийсь час для того, щоб кількість інфікованих осіб у третьому місті виросла, але часовий проміжок між ними зовсім невеликий.

Рівень спалаху в третьому місті незначно нижче, ніж у другому, на відміну від різниці між кількістю інфікованих у першому місті і у двох наступних. Причина цього у значно більшій кількості інфікованих на момент часу $t(0)$, а відповідно і у значно більшій кількості контактів з інфекцією всередині першого міста.

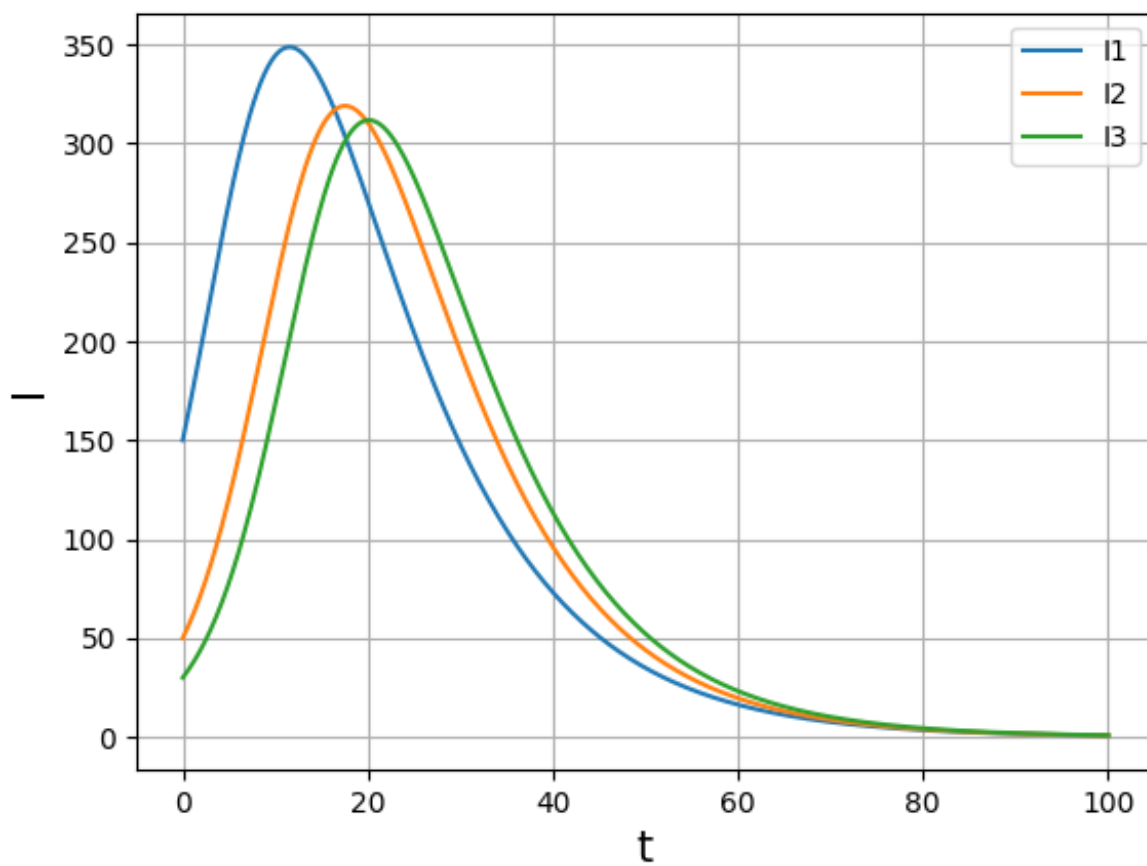


Рис. 1.2. Реалізація моделі для випадку трьох міст

Випадок чотирьох міст. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку чотирьох міст мають вигляд:

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 - \beta I_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 - \beta I_2,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 - \beta I_3,$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \alpha(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 - \delta_{43}I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 - \beta I_4.$$

Нехай виконується умова (1.2). Для виконання умови (1.3) вимагатимемо:

$$\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 - \beta I_1 > 0,$$

$$\alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 - \beta I_2 < 0,$$

$$\alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 - \beta I_3 < 0,$$

$$\alpha(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 - \delta_{43}I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 - \beta I_4 < 0.$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймаємо $\delta_{14} = \delta_{41}$, $\delta_{24} = \delta_{42}$, $\delta_{34} = \delta_{43}$. З першої нерівності отримаємо:

$$\delta_{14} > \frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) + \delta_{13}(I_1 - I_3 - \alpha I_3 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 - I_1 + I_4}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\delta_{24} < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) + \delta_{23}(I_2 - I_3 - \alpha I_3 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_4 - I_2 + I_4}.$$

З третьої нерівності отримаємо:

$$\delta_{34} < \frac{\delta_{13}(I_3 - I_1 - \alpha I_1 S_3) + \delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_4 - I_3 + I_4}.$$

І з останньої нерівності випливає:

$$\delta_{14} < \frac{\delta_{24}(I_4 - I_2 - \alpha I_2 S_4) + \delta_{34}(I_4 - I_3 - \alpha I_3 S_4) - \alpha I_4 S_4 + \beta I_4}{\alpha S_4 I_1 - I_4 + I_1}.$$

Об'єднуючи, отримаємо наступні обмеження на вибір δ_{14} , δ_{41} , δ_{24} , δ_{42} , δ_{34} і δ_{43} :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) + \delta_{13}(I_1 - I_3 - \alpha I_3 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_4 - I_1 + I_4} < \delta_{14} < \\ & < \frac{\delta_{24}(I_4 - I_2 - \alpha I_2 S_4) + \delta_{34}(I_4 - I_3 - \alpha I_3 S_4) - \alpha I_4 S_4 + \beta I_4}{\alpha S_4 I_1 - I_4 + I_1}, \\ & 0 < \delta_{24} < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) + \delta_{23}(I_2 - I_3 - \alpha I_3 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_4 - I_2 + I_4}, \\ & 0 < \delta_{34} < \frac{\delta_{13}(I_3 - I_1 - \alpha I_1 S_3) + \delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_4 - I_3 + I_4}. \end{aligned}$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{14} , δ_{41} , δ_{24} , δ_{42} , δ_{43} і δ_{34} задаємо наступні початкові дані для четвертого міста, що задовольняють умові (1.2): $S_4 = 985$, $I_4 = 15$, $R_4 = 0$.

Використовуємо початкові дані для перших трьох міст, зазначені раніше, і обрані значення для $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.003$, $\delta_{13} = \delta_{31} = 0.002$ і $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.001$.

Відповідно до введених і раніше отриманих даних, маємо інтервал для вибору δ_{24} і δ_{42} : $0 < \delta_{24} < 0.315$.

Виберемо $\delta_{24} = \delta_{42} = 0.0005$, що задовольняє отриманому обмеженню.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{43} і δ_{34} :

$$0 < \delta_{34} < 0.573.$$

Так як матриця переміщень – симетрична матриця зі зменшуючимися по

обидві сторони від діагоналей елементами, виберемо $\delta_{43} = \delta_{34} = 0.0001$.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{41} і δ_{14} :
використовуючи при його розрахунку вибрані значення для δ_{24} і δ_{34} :

$$-0.0165 < \delta_{14} < 0.1735 \Rightarrow 0 < \delta_{14} < 0.1735.$$

Виберемо $\delta_{41} = \delta_{14} = 0.001$, що задовольняє отриманому вище обмеженню.

Результат реалізації моделі для випадку чотирьох міст представлений на Рис. 1.3.

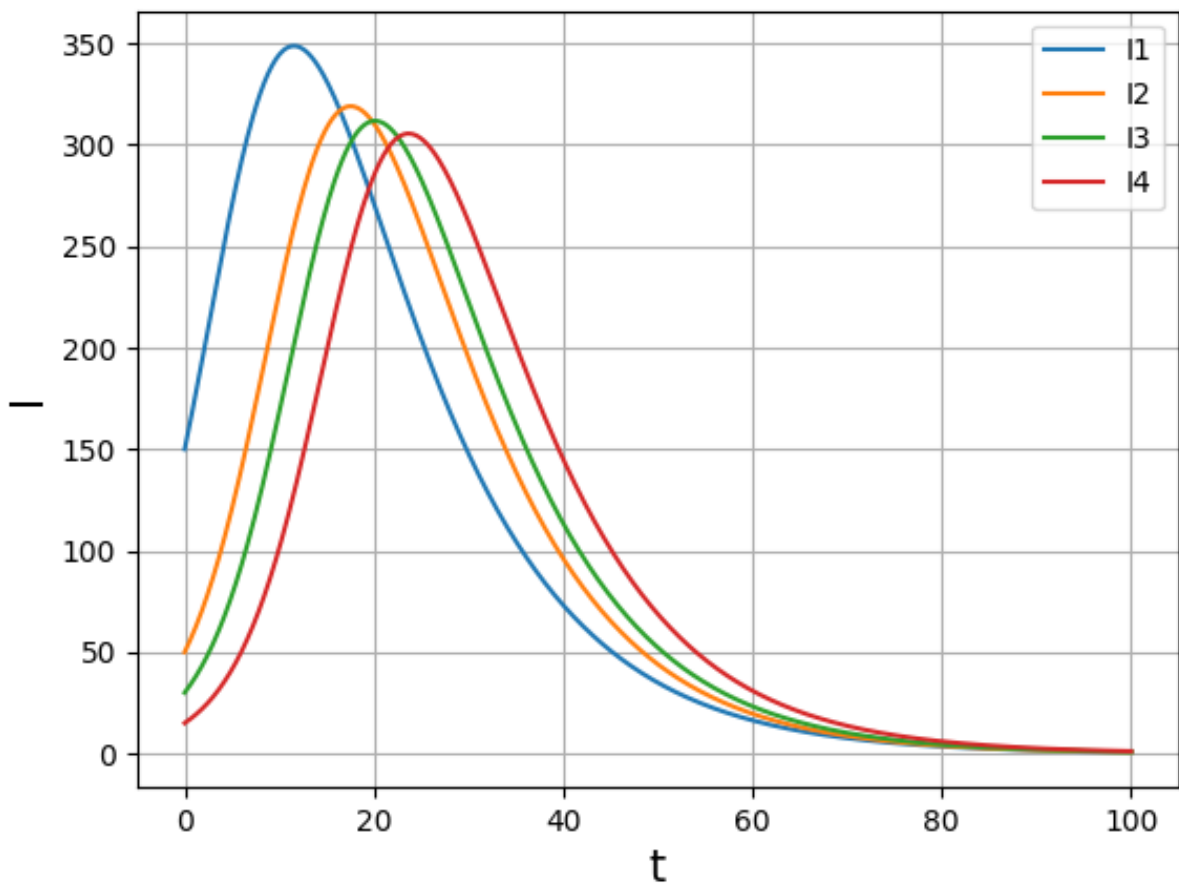


Рис. 1.3. Реалізація моделі для випадку чотирьох міст

З рисунка видно, що спалах епідемії в четвертому місті виникає після невеликої затримки. Кількість інфікованих осіб росте трохи повільніше. Це може бути спричинено зниженням початкової кількості інфікованих, про цю особливість говорить більш плавне зростання графіка для четвертого міста. При цьому піковий рівень інфекції залишається майже на тому ж рівні, що й у попередньому місті.

Випадок п'яти міст. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку п'яти міст мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{dt} &= \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 + \delta_{51}I_5)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 - \delta_{15}I_1 + \\ &\quad + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 + \delta_{51}I_5 - \beta I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 + \delta_{52}I_5)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 - \delta_{25}I_2 + \\ &\quad + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 + \delta_{52}I_5 - \beta I_2, \\ \frac{dI_3}{dt} &= \alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 + \delta_{53}I_5)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 - \delta_{35}I_3 + \\ &\quad + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 + \delta_{53}I_5 - \beta I_3, \\ \frac{dI_4}{dt} &= \alpha(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 + \delta_{54}I_5)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 - \delta_{43}I_4 - \delta_{45}I_4 + \\ &\quad + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 + \delta_{54}I_5 - \beta I_4, \\ \frac{dI_5}{dt} &= \alpha(I_5 + \delta_{15}I_1 + \delta_{25}I_2 + \delta_{35}I_3 + \delta_{45}I_4)S_5 - \delta_{51}I_5 - \delta_{52}I_5 - \delta_{53}I_5 - \delta_{54}I_5 + \\ &\quad + \delta_{15}I_1 + \delta_{25}I_2 + \delta_{35}I_3 + \delta_{45}I_4 - \beta I_5.\end{aligned}$$

Нехай виконується умова (1.2). Для виконання умови (1.3) вимагатимемо:

$$\begin{aligned}\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 + \delta_{51}I_5)S_1 - \delta_{12}I_1 - \delta_{13}I_1 - \delta_{14}I_1 - \delta_{15}I_1 + \delta_{21}I_2 + \\ + \delta_{31}I_3 + \delta_{41}I_4 + \delta_{51}I_5 - \beta I_1 &> 0, \\ \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 + \delta_{52}I_5)S_2 - \delta_{21}I_2 - \delta_{23}I_2 - \delta_{24}I_2 - \delta_{25}I_2 + \delta_{12}I_1 + \\ + \delta_{32}I_3 + \delta_{42}I_4 + \delta_{52}I_5 - \beta I_2 &< 0, \\ \alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 + \delta_{53}I_5)S_3 - \delta_{31}I_3 - \delta_{32}I_3 - \delta_{34}I_3 - \delta_{35}I_3 + \delta_{13}I_1 + \\ + \delta_{23}I_2 + \delta_{43}I_4 + \delta_{53}I_5 - \beta I_3 &< 0, \\ \alpha(I_4 + \delta_{14}I_1 + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 + \delta_{54}I_5)S_4 - \delta_{41}I_4 - \delta_{42}I_4 - \delta_{43}I_4 - \delta_{45}I_4 + \delta_{14}I_1 + \\ + \delta_{24}I_2 + \delta_{34}I_3 + \delta_{54}I_5 - \beta I_4 &< 0, \\ \alpha(I_5 + \delta_{15}I_1 + \delta_{25}I_2 + \delta_{35}I_3 + \delta_{45}I_4)S_5 - \delta_{51}I_5 - \delta_{52}I_5 - \delta_{53}I_5 - \delta_{54}I_5 + \delta_{15}I_1 + \\ + \delta_{25}I_2 + \delta_{35}I_3 + \delta_{45}I_4 - \beta I_5 &< 0.\end{aligned}$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймаємо $\delta_{15} = \delta_{51}$, $\delta_{25} = \delta_{52}$, $\delta_{35} = \delta_{53}$, $\delta_{45} = \delta_{54}$. З першої нерівності отримаємо:

$$\delta_{15} >$$

$$> \frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) + \delta_{13}(I_1 - I_3 - \alpha I_3 S_1) + \delta_{14}(I_1 - I_4 - \alpha I_4 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_5 - I_1 + I_5}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\begin{aligned} & \delta_{25} < \\ & < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) + \delta_{23}(I_2 - I_3 - \alpha I_3 S_2) + \delta_{24}(I_2 - I_4 - \alpha I_4 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_5 - I_2 + I_5}. \end{aligned}$$

З третьої нерівності отримаємо:

$$\begin{aligned} & \delta_{35} < \\ & < \frac{\delta_{13}(I_3 - I_1 - \alpha I_1 S_3) + \delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) + \delta_{34}(I_3 - I_4 - \alpha I_4 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_5 - I_3 + I_5}. \end{aligned}$$

З четвертої нерівності отримаємо:

$$\begin{aligned} & \delta_{45} < \\ & < \frac{\delta_{14}(I_4 - I_1 - \alpha I_1 S_4) + \delta_{24}(I_4 - I_2 - \alpha I_2 S_4) + \delta_{34}(I_4 - I_3 - \alpha I_3 S_4) - \alpha I_4 S_4 + \beta I_4}{\alpha S_4 I_5 - I_4 + I_5}. \end{aligned}$$

І з останньої нерівності випливає:

$$\begin{aligned} & \delta_{15} < \\ & < \frac{\delta_{25}(I_5 - I_2 - \alpha I_2 S_5) + \delta_{35}(I_5 - I_3 - \alpha I_3 S_5) + \delta_{45}(I_5 - I_4 - \alpha I_4 S_5) - \alpha I_5 S_5 + \beta I_5}{\alpha S_5 I_1 - I_5 + I_1}. \end{aligned}$$

Об'єднуючи, отримаємо наступні обмеження на вибір δ_{15} , δ_{51} , δ_{25} , δ_{52} , δ_{35} і δ_{53} , δ_{45} і δ_{54} :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{12}(I_1 - I_2 - \alpha I_2 S_1) + \delta_{13}(I_1 - I_3 - \alpha I_3 S_1) + \delta_{14}(I_1 - I_4 - \alpha I_4 S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_5 - I_1 + I_5} \\ & < \delta_{15} < \\ & < \frac{\delta_{25}(I_5 - I_2 - \alpha I_2 S_5) + \delta_{35}(I_5 - I_3 - \alpha I_3 S_5) + \delta_{45}(I_5 - I_4 - \alpha I_4 S_5) - \alpha I_5 S_5 + \beta I_5}{\alpha S_5 I_1 - I_5 + I_1}, \\ & 0 < \delta_{25} < \\ & < \frac{\delta_{12}(I_2 - I_1 - \alpha I_1 S_2) + \delta_{23}(I_2 - I_3 - \alpha I_3 S_2) + \delta_{24}(I_2 - I_4 - \alpha I_4 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \beta I_2}{\alpha S_2 I_5 - I_2 + I_5}, \\ & 0 < \delta_{35} < \\ & < \frac{\delta_{13}(I_3 - I_1 - \alpha I_1 S_3) + \delta_{23}(I_3 - I_2 - \alpha I_2 S_3) + \delta_{34}(I_3 - I_4 - \alpha I_4 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \beta I_3}{\alpha S_3 I_5 - I_3 + I_5}, \end{aligned}$$

$$0 < \delta_{45} < \frac{\delta_{14}(I_4 - I_1 - \alpha I_1 S_4) + \delta_{24}(I_4 - I_2 - \alpha I_2 S_4) + \delta_{34}(I_4 - I_3 - \alpha I_3 S_4) - \alpha I_4 S_4 + \beta I_4}{\alpha S_4 I_5 - I_4 + I_5}.$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{15} , δ_{51} , δ_{25} , δ_{52} , δ_{53} , δ_{35} , δ_{54} і δ_{45} задаємо наступні початкові дані для п'ятого міста, що задовольняють умові (1.2): $S_5 = 999$, $I_5 = 1$, $R_5 = 0$.

Використовуємо початкові дані для перших чотирьох міст, зазначені раніше, і всі попередньо обрані значення для δ_{ij} .

Відповідно до введених і раніше отриманих даних, маємо інтервал для вибору δ_{25} і δ_{52} : $0 < \delta_{25} < 0.1978$.

Виберемо $\delta_{25} = \delta_{52} = 0.0001$, що задовольняє отриманому обмеженню.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{53} і δ_{35} :

$$0 < \delta_{35} < 0.212.$$

Так як матриця переміщень – симетрична матриця зі зменшуючимися по обидві сторони від діагоналей елементами, виберемо $\delta_{53} = \delta_{35} = 0.00005$.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{45} і δ_{54} :

$$0 < \delta_{45} < 0.229.$$

Виберемо $\delta_{45} = \delta_{54} = 0.00001$, що задовольняє отриманому обмеженню.

Розрахуємо інтервал для вибору δ_{15} і δ_{51} , використовуючи при його розрахунку вибрані значення для δ_{25} , δ_{35} і δ_{45} :

$$-0.001 < \delta_{15} < 0.152 \Rightarrow 0 < \delta_{15} < 0.152.$$

Виберемо $\delta_{51} = \delta_{15} = 0.001$, що задовольняє отриманому вище обмеженню.

Результат реалізації моделі для випадку п'яти міст представлений на Рис.

1.4.

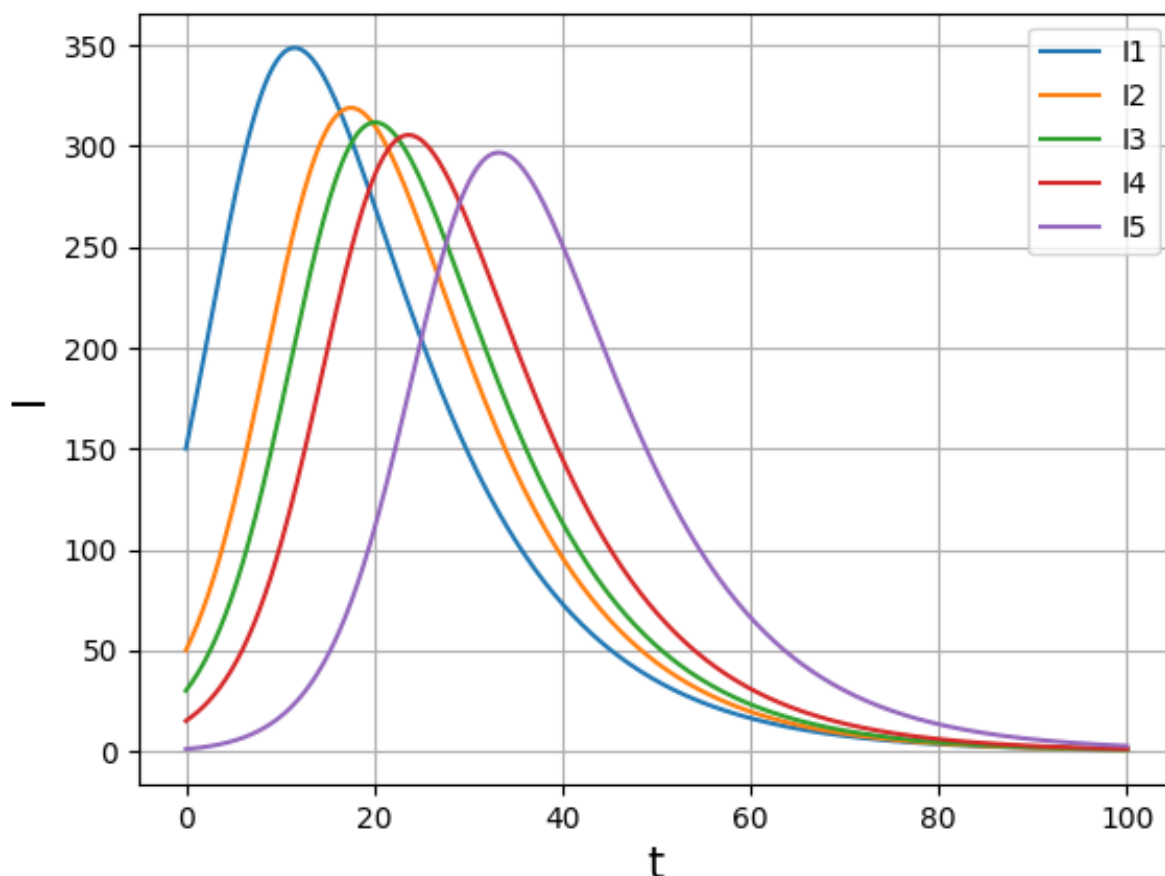


Рис. 1.4. Реалізація моделі для випадку п'яти міст

На рисунку можемо побачити, що спалах епідемії в п'ятому місті виникає після значної часової затримки. Кількість інфікованих осіб росте повільно. Це може бути пов'язано з великою віддаленістю розглянутого міста від попередніх і низьким рівнем транспортних переміщень, а також із мінімальною кількістю інфікованих осіб (1 особа) у місті на момент $t(0)$. Незважаючи на це, пікова кількість інфікованих у п'ятому місті, хоч і менша, ніж у попередньому, але не набагато.

Узагальнення

Ми вже отримали модель розвитку просторово-часового процесу у системі з n міст (1.1) раніше. Тепер спробуємо узагальнити методику пошуку коефіцієнтів інтенсивності переміщень. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку n міст матимуть вигляд:

$$\frac{dI_j}{dt} = \alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ij} I_i \right) S_j - I_j \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ji} + \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ij} I_i - \beta I_j, j = \overline{1, n} \quad (1.4)$$

Нехай для кожного з n міст виконується умова (1.2). Для виконання умови (1.3) вимагатимемо для (1.4) додатність (> 0) при $j = 1$ і від'ємність (< 0) при $j = \overline{2, n}$.

З цих нерівностей отримаємо такі вирази для визначення коефіцієнтів δ_{ij} :

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \delta_{i1} (I_1 - I_i - \alpha I_i S_1) - \alpha I_1 S_1 + \beta I_1}{\alpha S_1 I_n - I_1 + I_n} < \delta_{1n} < \\ & < \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \delta_{in} (I_n - I_i - \alpha I_i S_n) - \alpha I_n S_n + \beta I_n}{\alpha S_n I_1 - I_n + I_1}, \\ & \delta_{jn} < \frac{\sum_{i \neq j, i=1}^{n-1} \delta_{ij} (I_j - I_i - \alpha I_i S_j) - \alpha I_j S_j + \beta I_j}{\alpha S_j I_n - I_j + I_n}, j = \overline{2, n-1} \end{aligned}$$

Враховуючи все вищевказане, отримаємо математичну модель розповсюдження епідемії між n містами типу SIR з доповненням транспортними потоками.

Ця модель була реалізована мовою Python (див. ДОДАТОК А). Перед запуском програми необхідно заповнити файл з розподілом населення по категоріям (S, I, R) для кожного з n міст (див. ДОДАТОК Б). Після запуску програми необхідно ввести T – характерну тривалість хвороби, C – час контакту, достатній для інфікування і кількість міст n (від двох). Після цього програма буде розраховувати обмеження для коефіцієнтів δ_{ij} і пропонувати користувачу визначити їх значення з вирахованого проміжку. Результатом роботи програми буде модель розповсюдження епідемії між n містами.

Аналіз результатів

В результаті теоретичного дослідження були знайдені умови на інтенсивність транспортних потоків δ_{ij} , при яких для системи рівнянь, що представляє собою математичну модель розвитку епідемії в декількох містах, виконуються умови виникнення епідемічної хвилі. Таким чином, поставлена задача про пошук обмежень для δ_{ij} , які забезпечують виконання умов (1.2) і (1.3) була вирішена повністю.

Рішення даного завдання було знайдено послідовно для випадку двох міст, а потім для випадків трьох, чотирьох і п'яти міст. Були задані конкретні початкові дані, на підставі яких були обчислені обмеження.

Знайдені значення інтервалів, а також обрані значення представлені у Таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Коефіцієнт пропорційності	Нижня межа значення δ_{ij}	Обране значення δ_{ij}	Верхня межа значення δ_{ij}
$\delta_{12} = \delta_{21}$	-0.065	0.003	0.2665
$\delta_{13} = \delta_{31}$	-0.035	0.002	0.205
$\delta_{23} = \delta_{32}$	0	0.001	0.845
$\delta_{14} = \delta_{41}$	-0.0165	0.001	0.1735
$\delta_{24} = \delta_{42}$	0	0.0005	0.315
$\delta_{34} = \delta_{43}$	0	0.0001	0.573
$\delta_{15} = \delta_{51}$	-0.001	0.0005	0.152
$\delta_{25} = \delta_{52}$	0	0.0001	0.198
$\delta_{35} = \delta_{53}$	0	0.00005	0.212
$\delta_{45} = \delta_{54}$	0	0.00001	0.229

Таблиця обмежень δ_{ij}

У експерименті були використані початкові дані, вибрані відповідно до вимог і значення коефіцієнтів з обчислених інтервалів. Після цього модель була узагальнена для n міст, мовою Python була написана програма, яка реалізує рух епідемічної хвилі (модель типу SIR) для випадку n міст.

Також, був проведений деякий аналіз впливу тривалості захворювання і часу контакту, необхідного для зараження, на тривалість спалаху і пікову кількість інфікованих, а також на саму появу епідемії.

У нашому експерименті ми взяли тривалість захворювання у 10 одиниць часу. Розглянемо ситуацію, коли тривалість захворювання становить відповідно 5 і 15 одиниць часу (Рис. 1.5).

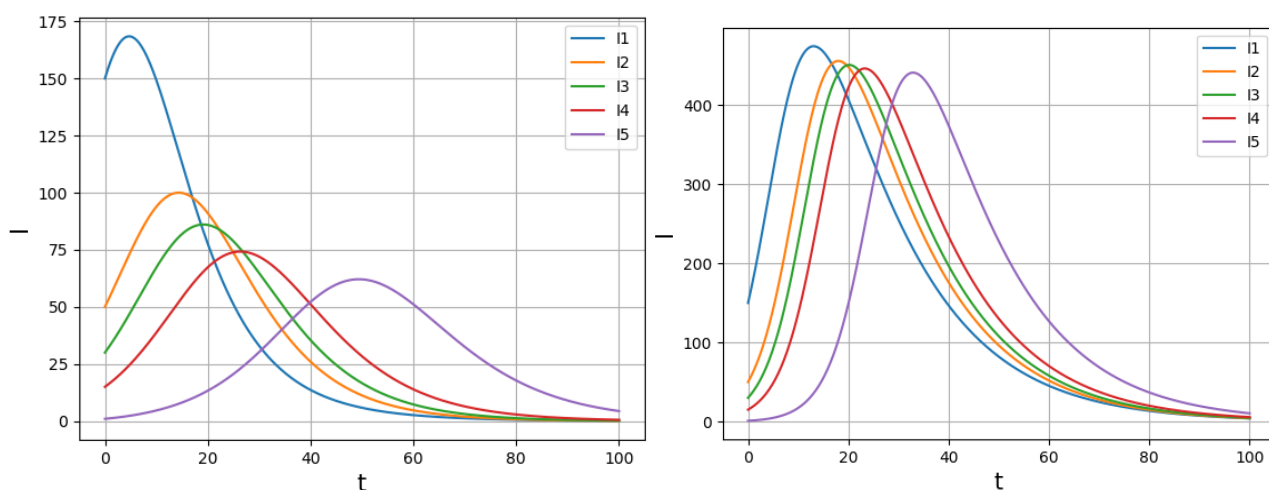


Рис. 1.5. Вплив тривалості захворювання на епідемічну хвилю

Як бачимо, зі збільшенням тривалості захворювання значно збільшується пікова кількість інфікованих і навіть тривалість епідемії у перших містах, проте у подальшому тривалість епідемії при меншій тривалості захворювання збільшується, оскільки потрібно більше часу для розповсюдження інфекції. За тривалості захворювання менше 4 днів, при незмінних інших умовах, епідемічна хвиля навіть не розпочнеться.

Також, ми брали тривалість контакту, необхідного для зараження, ≈ 3.333 одиниць часу. Розглянемо ситуацію, коли час контакту, необхідного для зараження, становить відповідно $6\frac{2}{3}$ і 2 одиниці часу (Рис. 1.6).

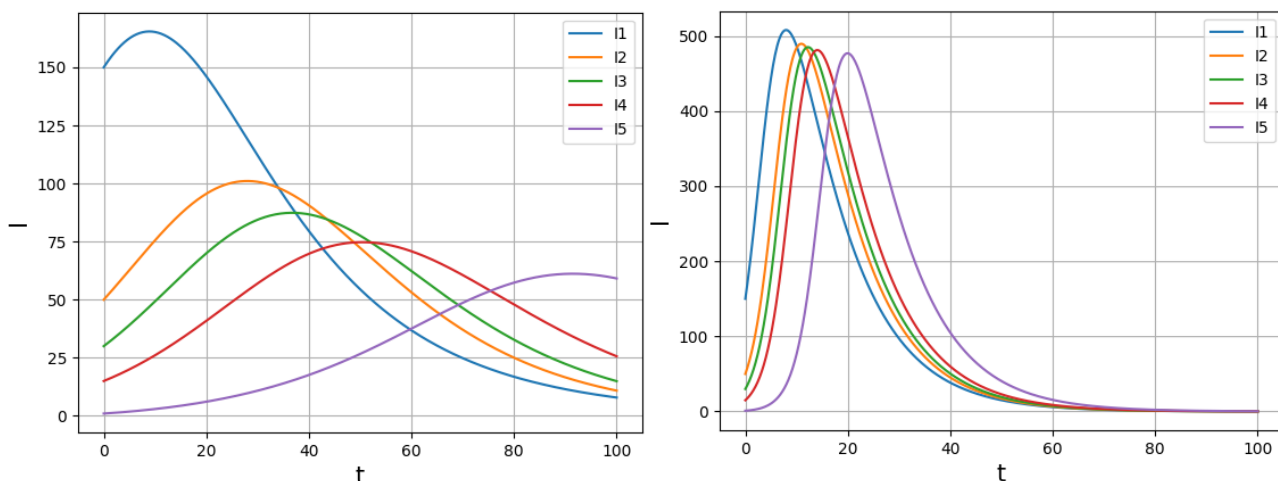


Рис. 1.6. Вплив тривалість контакту, необхідного для зараження

Можемо побачити, що зі зменшенням тривалості контакту, необхідного для зараження, значно збільшується пікова кількість інфікованих (майже до половини всього населення міста), але і зменшується тривалість епідемії. Зі збільшенням часу контакту все навпаки, адже потрібно значно більше часу для інфікування інших осіб. За тривалості необхідного контакту більше 7-8 днів, при незмінних інших умовах, епідемічна хвиля також не розпочнеться.

РОЗДІЛ 2. Модель SEIR

Розрахунок математичної моделі

В другій частині нашого дослідження будемо враховувати вже чотири групи індивідів: сприйнятливі, заражені, заразні та імунні.

Нехай S , E , I , R – чисельності цих груп. Складемо рівняння сталості загальної чисельності всіх груп $S + E + I + R = N = \text{const}$. Оберемо механізм зараження «через зустріч сприйнятливого із заразним». Тоді розвиток епідемії буде описуватися рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \\ \frac{dE}{dt} = \alpha SI - \gamma E, \\ \frac{dI}{dt} = \gamma E - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I, \end{cases}$$

$$\beta = 1/T, \alpha = 1/N \cdot C, \gamma = 1/P, S(0) = S^0 > 0, E(0) = E^0 > 0, I(0) = I^0 \geq 0, \\ R(0) = R^0 \geq 0,$$

де T – характерна тривалість хвороби, C – час контакту, достатній для інфікування, P – характерна тривалість інкубаційного періоду [4].

Умовою виникнення епідемії в початковий момент часу $t = 0$ є додатня похідна $\frac{dE}{dt}$, вирахована у цей момент часу:

$$\frac{dE}{dt}(0) > 0 \text{ або } (\alpha S(0)I(0) - \gamma E(0)) > 0$$

Тепер розглянемо випадок n міст. Усі припущення щодо територіального розташування міст, через які проходить епідемічна хвиля, транспортних потоків, чисельності населення, транспортного обслуговування та контактів населення введемо аналогічно до першої частини цього дослідження.

Нехай S_i , E_i , I_i , R_i – відповідно число сприйнятливих, заражених, заразних і імунних осіб в i -ому місті, N_i – загальне їх число. Без урахування

транспортних зв'язків розвиток епідемії в i -му місті мав би локальний характер, описаний через контакти сприйнятливих із заразними:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\alpha I_i S_i, \frac{dE}{dt} = \alpha I_i S_i - \gamma E_i, \frac{dI_i}{dt} = \gamma E_i - \beta I_i, \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i, i = \overline{1, n}$$

Для включення до цієї моделі транспортних потоків необхідно ввести додаткові припущення щодо частки інфікованих осіб серед частини населення, що переміщається. Аналогічно до першої частини дослідження припустимо, що структура контингенту осіб, які прямують з i -ого міста до j -ого ($S_{ij}, E_{ij}, I_{ij}, R_{ij}$), повторює у певній пропорції структуру населення i -ого міста:

$$S_{ij} : E_{ij} : I_{ij} : R_{ij} = S_i : E_i : I_i : R_i.$$

Введемо коефіцієнт пропорційності δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$), що відображає відношення місткості транспортних засобів, що зв'язує i -е місто з j -м, до числа жителів i -ого міста. Тоді інтенсивність транспортного потоку з i -ого міста до j -ого з урахуванням $S_i + E_i + I_i + R_i = N_i$ отримає значення:

$$p_{ij} = \delta_{ij} S_i + \delta_{ij} E_i + \delta_{ij} I_i + \delta_{ij} R_i = \delta_{ij} N_i.$$

Аналогічно для p_{ji} . У цьому випадку кількісна зміна структури населення i -ого та j -ого міст за рахунок припливу і відтоку жителів за одиницю часу $\Delta t = 1$ складе:

$$\Delta S_i = -\delta_{ij} S_i + \delta_{ji} S_j, \Delta E_i = -\delta_{ij} E_i + \delta_{ji} E_j, \Delta I_i = -\delta_{ij} I_i + \delta_{ji} I_j, \Delta R_i = -\delta_{ij} R_i + \delta_{ji} R_j,$$

$$\Delta S_j = \delta_{ij} S_i - \delta_{ji} S_j, \Delta E_j = \delta_{ij} E_i - \delta_{ji} E_j, \Delta I_j = \delta_{ij} I_i - \delta_{ji} I_j, \Delta R_j = \delta_{ij} R_i - \delta_{ji} R_j,$$

$$\Delta S_i + \Delta E_i + \Delta I_i + \Delta R_i = -\delta_{ij} N_i + \delta_{ji} N_j, \Delta S_j + \Delta E_j + \Delta I_j + \Delta R_j = \delta_{ij} N_i - \delta_{ji} N_j.$$

Разом з тим, кількісні зміни епідеміологічного характеру за той самий відрізок часу $\Delta t = 1$ складуть:

$$\Delta S_i = -\alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i, \Delta E_i = \alpha \left(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_j \right) S_i - \gamma E_i, \\ \Delta I_i = \gamma E_i - \beta I_i, \Delta R_i = \beta I_i,$$

$$\Delta S_j = -\alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} I_j \right) S_j, \Delta E_j = \alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j} \delta_{ji} I_j \right) S_j - \gamma E_j,$$

$$\Delta I_j = \gamma E_j - \beta I_j, \Delta R_j = \beta I_j.$$

Об'єднуючи транспортні зміни з епідеміологічними і переходячи до диференціальних рівнянь, отримаємо наступну модель розвитку просторово-часового процесу у системі з n міст:

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = -\alpha(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j) S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} S_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} S_j, \\ \frac{dE_i}{dt} = \alpha(I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j) S_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} E_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} E_j - \gamma E_i, \\ \frac{dI_i}{dt} = \gamma E_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} I_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} I_j - \beta I_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = \beta I_i - \sum_{j \neq i} \delta_{ij} R_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ji} R_j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Припустимо, що в момент часу $t = 0$ у кожному з n міст вже є деяка кількість заражених і задано початковий розподіл осіб по всіх містах:

$$t = 0: E_i(0) > 0, i = \overline{1, n}.$$

Далі припустимо, що в першому місті число заражених осіб більше, ніж в інших: $E_1(0) > E_i(0), i = \overline{2, n}$.

$$(2.2)$$

Будемо вважати, що у першому місті в початковий момент часу виконується умова початку епідемії, а у інших містах – не виконується:

$$t = 0: \frac{dE_1}{dt}(0) > 0, \frac{dE_i}{dt}(0) < 0, i = \overline{2, n}. \quad (2.3)$$

Потрібно знайти такі умови інтенсивності транспортних потоків δ_{ij} , при яких для системи (2.1) виконуються умови (2.2) і (2.3).

Рівняння, що описують зміну кількості заражених осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку n міст матимуть вигляд:

$$\frac{dE_j}{dt} = \alpha \left(I_j + \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ij} I_i \right) S_j - E_j \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ji} + \sum_{i \neq j, i=1}^n \delta_{ij} E_i - \gamma E_j,$$

$$j = \overline{1, n} \quad (2.4)$$

Нехай для кожного з n міст виконується умова (2.2). Для виконання умови (2.3) вимагатимемо для (2.4) додатність (> 0) при $j = 1$ і від'ємність (< 0) при $j = \overline{2, n}$.

З цих нерівностей отримаємо такі вирази для визначення коефіцієнтів δ_{ij} :

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \delta_{i1} (E_1 - E_i - \alpha I_i S_1) - \alpha I_1 S_1 + \gamma E_1}{\alpha S_1 I_n - E_1 + E_n} < \delta_{1n} < \\ & < \frac{\sum_{i=2}^{n-1} \delta_{in} (E_n - E_i - \alpha I_i S_n) - \alpha I_n S_n + \gamma E_n}{\alpha S_n I_1 - E_n + E_1}, \\ & \delta_{jn} < \frac{\sum_{i \neq j, i=1}^{n-1} \delta_{ij} (E_j - E_i - \alpha I_i S_j) - \alpha I_j S_j + \gamma E_j}{\alpha S_j I_n - E_j + E_n}, j = \overline{2, n-1} \end{aligned}$$

Враховуючи все вищевказане, отримаємо математичну модель розповсюдження епідемії між n містами типу SEIR з її доповненням транспортними потоками.

Ця модель була реалізована мовою Python (див. ДОДАТОК А). Перед запуском програми необхідно заповнити файл з розподілом населення по категоріям (S, E, I, R) для кожного з n міст (див. ДОДАТОК В). Після запуску програми необхідно ввести T – характерну тривалість хвороби, C – час контакту, достатній для інфікування, P – характерну тривалість інкубаційного періоду і кількість міст n (від двох). Після цього програма буде розраховувати обмеження для коефіцієнтів δ_{ij} і пропонувати користувачу визначити їх значення з вирахованого проміжку. Результатом роботи програми буде модель розповсюдження епідемії між n містами.

Моделювання епідемічної хвилі

За аналогією з першою частиною дослідження, знайдемо послідовно рішення задачі (2.1) – (2.3) для випадку двох та трьох міст.

Випадок двох міст. Рівняння, що описують зміну кількості заражених осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку двох міст мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}E_1 + \delta_{21}E_2 - \gamma E_1, \\ \frac{dE_2}{dt} &= \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}E_2 + \delta_{12}E_1 - \gamma E_2.\end{aligned}$$

Нехай для кожного з двох міст виконується умова (2.2). Для виконання умови (2.3) вимагатимемо:

$$\begin{aligned}\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2)S_1 - \delta_{12}E_1 + \delta_{21}E_2 - \gamma E_1 &> 0, \\ \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1)S_2 - \delta_{21}E_2 + \delta_{12}E_1 - \gamma E_2 &< 0.\end{aligned}$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймемо $\delta_{12} = \delta_{21}$. При отриманні всіх коефіцієнтів δ_{ij} ми знову ж таки будемо виконувати ділення на певні вирази. Для того, щоб при діленні не змінився знак, тут і надалі будемо вимагати додатність цих виразів. З першої нерівності випливає:

$$\delta_{12} > \frac{\gamma E_1 - \alpha I_1 S_1}{\alpha S_1 I_2 - E_1 + E_2}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\delta_{12} < \frac{\gamma E_2 - \alpha I_2 S_2}{\alpha S_2 I_1 - E_2 + E_1}.$$

Об'єднуючи, отримаємо наступне обмеження на вибір δ_{12} і δ_{21} :

$$\frac{\gamma E_1 - \alpha I_1 S_1}{\alpha S_1 I_2 - E_1 + E_2} < \delta_{12} < \frac{\gamma E_2 - \alpha I_2 S_2}{\alpha S_2 I_1 - E_2 + E_1}.$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{12} і δ_{21} задаємо наступні початкові дані, що задовольняють умові (2.2): $\beta = \frac{1}{14}$, $\alpha = 0,0005$, $\gamma = 0.2$, $S_1 = 850$, $E_1 = 100$, $I_1 = 50$, $R_1 = 0$, $S_2 = 950$, $E_2 = 30$, $I_2 = 20$, $R_2 = 0$.

Відповідно до обраних даних, отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{12} і δ_{21} : $-0.037 < \delta_{12} < 0.02033$.

З огляду на раніше зазначені обмеження на δ_{ij} ($0 < \delta_{ij} < 1$) отримаємо:

$$0 < \delta_{12} < 0.02033.$$

Виберемо $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.003$, яке задовольняє отриманому обмеженню.

Модель епідемії для випадку двох міст з урахуванням отриманих даних була реалізована мовою Python (див. ДОДАТОК А). Результат даного практичного експерименту наочно представлений на Рис. 2.1.

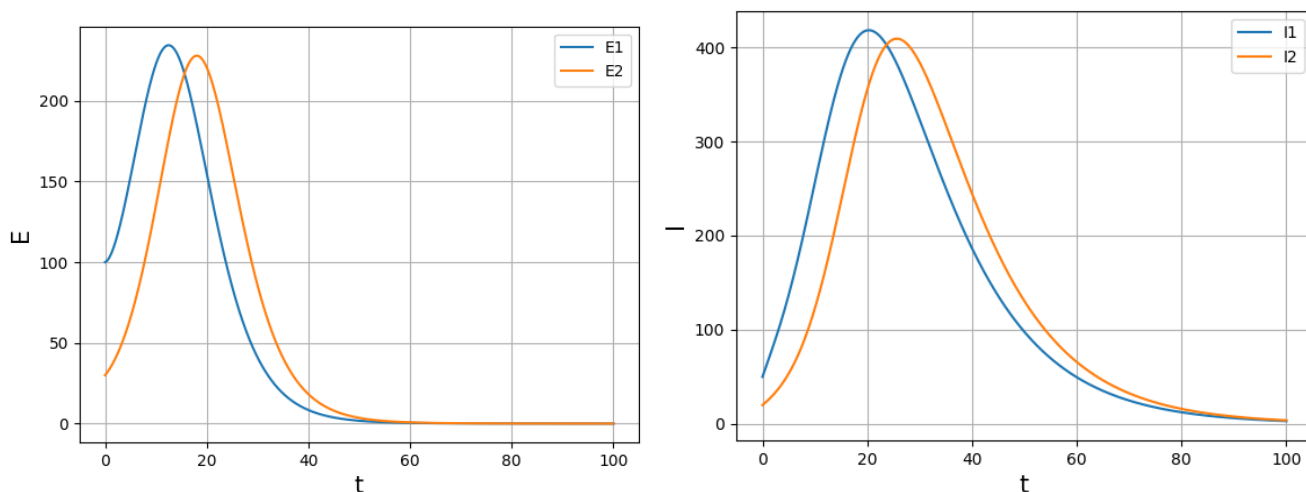


Рис. 2.1. Реалізація моделі для випадку двох міст

На рисунку можемо побачити, що в першому місті виникає досить сильна хвиля зараження, пік якої припадає на $t \approx 12$, а потім починається масове закінчення інкубаційного періоду і перехід хвороби у активну фазу, пік якої припадає на $t \approx 20$. Хвиля зараження у другому місті виникає через деякий час після першого, затримка становить ≈ 6 одиниць часу, після цього хвороба так само переходить в активну фазу. До того ж, загальна кількість заражених, а потім відповідно і хворіючих у другому місті менша, ніж в першому. Після цього у першому місті починається процес одужання, і кількість хворіючих осіб зменшується, потім процес одужання відбувається і в другому місті.

Випадок трьох міст. Рівняння, що описують зміну кількості інфікованих осіб за одиницю часу $\Delta t = 1$, для випадку трьох міст мають вигляд:

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}E_1 - \delta_{13}E_1 + \delta_{21}E_2 + \delta_{31}E_3 - \gamma E_1,$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}E_2 - \delta_{23}E_2 + \delta_{12}E_1 + \delta_{32}E_3 - \gamma E_2,$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}E_3 - \delta_{32}E_3 + \delta_{13}E_1 + \delta_{23}E_2 - \gamma E_3.$$

Нехай виконується умова (2.2). Для виконання умови (2.3) вимагатимемо:

$$\alpha(I_1 + \delta_{21}I_2 + \delta_{31}I_3)S_1 - \delta_{12}E_1 - \delta_{13}E_1 + \delta_{21}E_2 + \delta_{31}E_3 - \gamma E_1 > 0,$$

$$\alpha(I_2 + \delta_{12}I_1 + \delta_{32}I_3)S_2 - \delta_{21}E_2 - \delta_{23}E_2 + \delta_{12}E_1 + \delta_{32}E_3 - \gamma E_2 < 0,$$

$$\alpha(I_3 + \delta_{13}I_1 + \delta_{23}I_2)S_3 - \delta_{31}E_3 - \delta_{32}E_3 + \delta_{13}E_1 + \delta_{23}E_2 - \gamma E_3 < 0.$$

З огляду на симетричність матриці інтенсивності переміщень, приймемо $\delta_{13} = \delta_{31}$, $\delta_{23} = \delta_{32}$. З першої нерівності отримаємо:

$$\delta_{13} > \frac{\delta_{21}(E_1 - E_2 - \alpha I_2 S_2) - \alpha I_1 S_1 + \gamma E_1}{\alpha S_1 I_3 - E_1 + E_3}.$$

З другої нерівності випливає:

$$\delta_{23} < \frac{\delta_{12}(E_2 - E_1 - \alpha I_1 S_2) - \alpha I_2 S_2 + \gamma E_2}{\alpha S_2 I_3 - E_2 + E_3}.$$

З третьої нерівності отримаємо:

$$\delta_{13} < \frac{\delta_{23}(E_3 - E_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \gamma E_3}{\alpha S_3 I_1 - E_3 + E_1}.$$

Об'єднуючи, отримаємо наступні обмеження на вибір δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} і δ_{32} :

$$\frac{\delta_{21}(E_1 - E_2 - \alpha I_2 S_2) - \alpha I_1 S_1 + \gamma E_1}{\alpha S_1 I_3 - E_1 + E_3} < \delta_{13} < \frac{\delta_{23}(E_3 - E_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \gamma E_3}{\alpha S_3 I_1 - E_3 + E_1},$$

$$0 < \delta_{23} < \frac{\delta_{23}(E_3 - E_2 - \alpha I_2 S_3) - \alpha I_3 S_3 + \gamma E_3}{\alpha S_3 I_1 - E_3 + E_1}.$$

Для пошуку конкретних значень для δ_{13} , δ_{31} , δ_{23} і δ_{32} задаємо наступні початкові дані для третього міста, що задовольняють умові (2.2): $S_3 = 985$, $E_3 = 10$, $I_3 = 5$, $R_3 = 0$. Використовуємо початкові дані для перших двох міст, визначені раніше, і вибране значення для $\delta_{12} = \delta_{21} = 0.003$.

Відповідно до введених і наявних даних, отримаємо інтервал для вибору δ_{23} і δ_{32} : $0 < \delta_{23} < 0.215$.

Беручи до уваги, що матриця переміщень – симетрична матриця зі зменшуючимися по обидві сторони від діагоналей елементами, оберемо $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.001$, що задовольняє отриманому обмеженню.

Аналогічно отримаємо наступний інтервал для вибору δ_{13} і δ_{31} , використовуючи при його розрахунку обране значення для $\delta_{23} = \delta_{32} = 0.001$:

$$-0.0043 < \delta_{13} < 0.01213 \Rightarrow 0 < \delta_{13} < 0.01213.$$

Виберемо $\delta_{13} = \delta_{31} = 0.002$.

Результат реалізації моделі для випадку трьох міст представлений на Рис. 2.2. На цьому рисунку ми бачимо приблизне повторення ситуації з першими містами, епідемічна хвиля доходить до третього міста дещо пізніше і кількість інфікованих у ньому дещо менше, порівняно з попереднім містом. Здебільшого, все залежить від наявних початкових даних, наприклад, кількість заражених осіб у першому місті на початку значно більше, ніж у другому і третьому, внаслідок цього і пік кількості заражених у цьому місті помітно вищий.

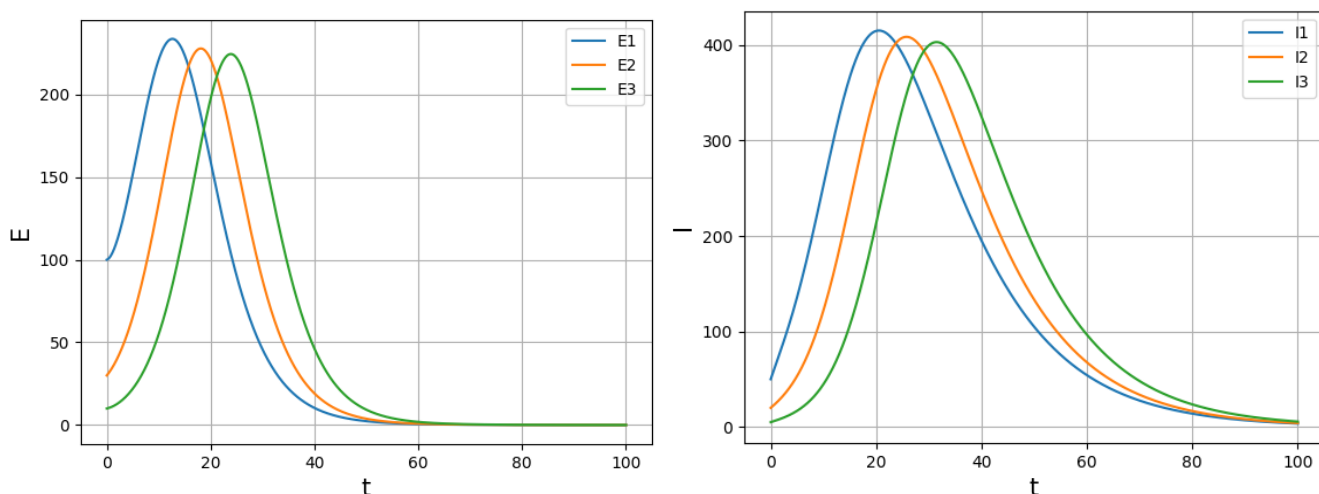


Рис. 2.2. Реалізація моделі для випадку трьох міст

Моделювання розвитку епідемії на реальних даних

Проведемо експеримент зі створеною програмою, взявши певні дані, які стосуються коронавірусної хвороби COVID-19. Епідемія COVID-19 в Україні розпочалася в березні 2020 року. Відповідно до нашої моделі розглянемо три міста з приблизно однаковою кількістю населення, які можна уявно поєднати прямою: Тернопіль, Хмельницький та Кропивницький. Відстань між першими двома містами значно менше, ніж відстань між ними і третім містом, що теж відповідає логіці нашого дослідження і дозволить обрати відповідні коефіцієнти інтенсивності транспортного сполучення. Як кількість населення візьмемо середнє значення кількості населення у зазначених містах: 235 тис. чол.

Будемо поетапно розглядати роботу програми з реальними даними. Спершу оберемо модель, яку ми хочемо використовувати:

```
Please enter 1 if you want to simulate a SIR model, or enter 2 if
you want to simulate a SEIR model: 2
```

Тепер введемо дані щодо характерної тривалості хвороби COVID-19, часу контакту, достатнього для інфікування та характерної тривалості інкубаційного періоду (тут і надалі в цьому експерименті вважатимемо за одиницю часу день):

```
Please enter the average contact time sufficient for infection: 1
Please enter the average duration of the disease: 15
Please enter the average duration of the incubation period: 6
```

Також зазначимо необхідну нам кількість міст:

```
Please enter the number of cities (from 2)

3
```

Тепер будемо обирати δ_{ij} з проміжків, які вирахає програма:

```
Select the delta12 value from the range (0.011974, 0.094019): 0.02
Select the delta23 value from the range (0.000000, 0.078095): 0.0000001
Select the delta13 value from the range (0.000334, 0.064931): 0.0004
```

Коефіцієнти, які стосуються третього міста, будемо обирати значно меншими, згідно зі згаданою вище відстанню між містами. Оберемо коефіцієнт інтенсивності транспортного сполучення між другим та третім містом дуже малим і подивимось, як це вплине на нашу модель. Одразу можемо зауважити, що коефіцієнт інтенсивності транспортного сполучення між першим та третім

містом ми не зможемо обрати так само, адже в нас є обмеження знизу, без якого не почнеться хвиля епідемії. Варто додати, що і обране значення для δ_{23} теж повпливало на вирахуванні обмеження для δ_{13} , адже це значення враховується у розрахунках.

Результати роботи програми можемо побачити на Рис. 2.3 і Рис. 2.4. Вони свідчать про те, що епідемічна хвиля COVID-19 майже одразу виникне у Тернополі та Хмельницькому, а от у Кропивницькому до її виникнення пройде певний проміжок часу. До того ж, якщо кількість осіб-переносників вірусу спочатку різко зростає, а потім так само різко спадає, то кількість осіб з активною фазою хвороби після стрімкого зростання спадає плавніше. На мою думку, це можна пояснити значно тривалішим строком перебігу власне хвороби, ніж інкубаційного періоду. Також можна спостерігати цілком логічне часове явище, коли спочатку у великої кількості заражених осіб проходить інкубаційний період, а вже після його закінчення йде різке зростання групи осіб, у яких хвороба перебуває у активній фазі (I).

Що ж стосується реалістичності проведеного експерименту, якщо подивитися на розвиток першої епідемічної хвилі COVID-19, можемо побачити:

На Тернопільщині повідомлення про перші підтверджені випадки захворювання на COVID-19 почали надходити з 24 березня 2020 року. Пік першої хвилі прийшовся на кінець квітня того ж року, а 28 травня МОЗ оприлюднило інформацію щодо спаду кількості захворювань і подолання основної частини першої епідемічної хвилі (з 24 березня минуло 65 днів) [7]. В тому результаті, що ми отримали, все збігається: пік захворюваності припадає на ~ 30 день, а на 65 день епідемічна хвиля прямує до закінчення.

Стосовно ж кількості хворих, наша модель, на щастя, дає значно більший результат, ніж було насправді, але це й не дивно. Наша модель не враховує, що епідемічна хвиля відбувалася в умовах вже діючих карантинних обмежень, що контакти захворівших осіб з навколишнім світом було мінімізовано, були вжиті численні засоби індивідуальної безпеки, а також обмежено транспортне сполучення. Однак отримані результати є певним доказом ефективності

вищезгаданих методів боротьби з епідеміями і ми повинні мати на увазі, що у випадку ігнорування/незапровадження цих заходів під час епідемій, епідемічна ситуація може стати схожою на отриманий нами результат. Задля цього і будуються математичні моделі, завдяки яким можна прогнозувати розвиток епідемій і планувати, як їх долати.

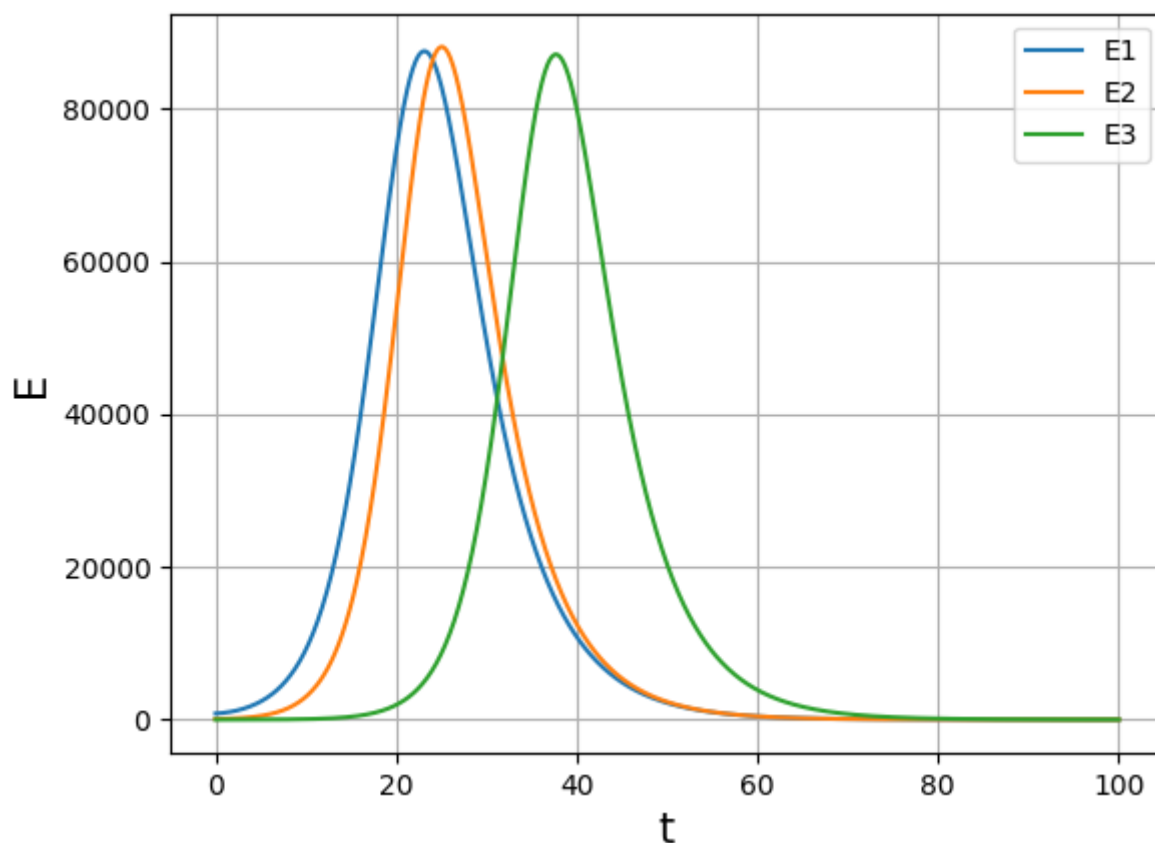


Рис 2.3. Графік кількості заражених осіб з плином часу

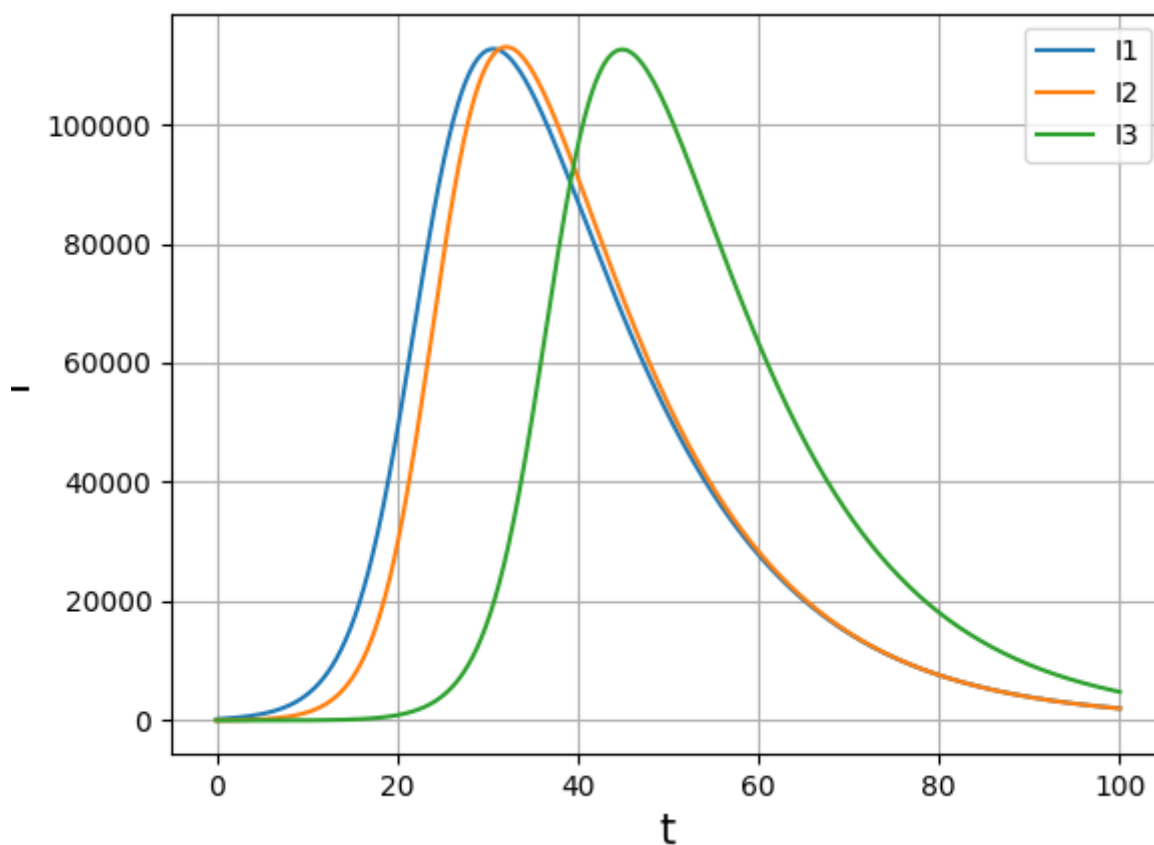


Рис. 2.4. Графік кількості хворіючих осіб з плином часу

Програма була запущена з таким початковим розподілом населення:

```
234000, 800, 200, 0
234900, 95, 5, 0
234998, 2, 0, 0
```

ВИСНОВКИ

Побудовані математичні моделі описують рух епідемічної хвилі для випадку декількох міст, які знаходяться на одній лінії. Цілком логічно і експериментально доведено, що характер і поведінка хвиль епідемії багато в чому залежить від заданих початкових даних. При цьому при зміні початкових умов необхідно проводити перерахунок всіх коефіцієнтів послідовно для кожного міста, задля чого і була створена програмна реалізація моделей.

Основними труднощами, які виникли при побудові моделей, є трудомісткі обчислення та необхідність їх запрограмувати. Було відмічено, що обсяг необхідних обчислень зростає зі збільшенням числа міст. Ця умова ускладнює ручне застосування моделі для великого числа міст.

В результаті проведених експериментів було помічено, що загальний рівень інфікованих осіб у кожному місті зменшується в міру віддалення від першого міста. Крім того, потрібна більша кількість часу для появи спалаху. Дані факти можна пояснити обраними коефіцієнтами для транспортної матриці переміщень, а також початковою кількістю інфікованих, що з кожним містом поступово зменшується. Чим далі одне від одного розташовані міста, тим менше вони пов'язані між собою транспортними потоками, у відповідність з чим рівень переданої інфекції нижчий. Це ми побачили особливо виразно під час застосування програми на реальних даних. Також, цей експеримент довів, що побудовані моделі мають право на існування для моделювання різних епідемічних ситуацій з реального світу, хоч для цього і потрібно деяка підготовка початкових даних, а у подальшому і розширення моделей для більшої варіативності.

Додатково було проаналізовано, що зменшення часу контакту, необхідного для інфікування, і збільшення тривалості захворювання збільшує силу епідемічного спалаху, а протилежні зміни – навпаки, будуть послаблювати епідемічний спалах, аж до відсутності епідемічної хвилі.

Можна також сказати декілька слів і зробити деякі висновки щодо використаних типів моделей. SIR–модель набула популярності через простоту побудови та використання. Її застосування дозволяє точно моделювати епідемії грипу та інших захворювань у великих містах, вводити нові параметри та аналізувати різні сценарії. А за SEIR моделлю розвиваються по-справжньому небезпечні епідемії, оскільки тривалий інкубаційний період може перешкоджати своєчасному виявленню захворювання. У цьому випадку є ризик, що захворювання охопить значну кількість індивідумів у популяції, перш ніж будуть вжиті заходи протидії, що ми власне спостерігали під час експерименту.

Можна зробити висновок, що моделювання епідемій є цілком актуальним напрямом, завдяки якому можна досить вірогідно прогнозувати розвиток тієї чи іншої хвороби, чи може вона призвести до епідемії і як взагалі буде розвиватися.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрейчин М. А. Епідеміологія / М. Андрейчин, В. Копча. – К. : Тернопіль Укрмедкнига, 2000. — 382 с.
2. Загальна епідеміологія: навч. посібник / Н. О. Виноград, З. П. Василішин, Л. П. Козак, Т. А. Романенко — К. : ВСВ «Медицина», 2010. — 176 с.
3. Колесін І. Д. Математичні моделі епідемій: навч. посібник / І. Колесін, Е. Житкова. – К. : НДІФ СПбДУ, 2004. — 92 с.
4. Capasso V. The Mathematical Structure of Epidemic Systems // Springer Verlag, 1993. — p. 144.
5. Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927. Vol.115, No 772. p. 700-721.
6. May R. M., Anderson R. M. Infectious diseases of humans: dynamics and control // Oxford [Oxfordshire]: Oxford University Press, 1991. — p. 78.
7. Коронавірусна хвороба 2019 (Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії) [Електронний ресурс] / Режим доступу : https://uk.wikipedia.org/wiki/Коронавірусна_хвороба_2019


```

def calc_sir(y, j):
    sum_1 = sum_2 = sum_3 = sum_4 = sum_5 = sum_6 = 0
    for i in range(n):
        if i != j:
            sum_1 += delta[i][j] * y[3 * i + 1]
            sum_2 += delta[j][i] * y[3 * j]
            sum_3 += delta[i][j] * y[3 * i]
            sum_4 += delta[j][i] * y[3 * j + 1]
            sum_5 += delta[j][i] * y[3 * j + 2]
            sum_6 += delta[i][j] * y[3 * i + 2]
    dy_1 = -a * (y[3 * j + 1] + sum_1) * y[3 * j] - sum_2 + sum_3
    dy_2 = a * (y[3 * j + 1] + sum_1) * y[3 * j] - sum_4 + sum_5 - beta * y[3 *
j + 1]
    dy_3 = beta * y[3 * j + 1] - sum_5 + sum_6
    return dy_1, dy_2, dy_3

def calc_seir(y, j):
    sum_1 = sum_2 = sum_3 = sum_4 = sum_5 = sum_6 = sum_7 = sum_8 = 0
    for i in range(n):
        if i != j:
            sum_1 += delta[i][j] * y[4 * i + 2]
            sum_2 += delta[j][i] * y[4 * j]
            sum_3 += delta[i][j] * y[4 * i]
            sum_4 += delta[j][i] * y[4 * j + 1]
            sum_5 += delta[i][j] * y[4 * i + 1]
            sum_6 += delta[j][i] * y[4 * j + 2]
            sum_7 += delta[j][i] * y[4 * j + 3]
            sum_8 += delta[i][j] * y[4 * i + 3]
    dy_1 = -a * (y[4 * j + 2] + sum_1) * y[4 * j] - sum_2 + sum_3
    dy_2 = a * (y[4 * j + 2] + sum_1) * y[4 * j] - sum_4 + sum_5 - gamma * y[4 *
j + 1]
    dy_3 = gamma * y[4 * j + 1] - sum_6 + sum_1 - beta * y[4 * j + 2]
    dy_4 = beta * y[4 * j + 2] - sum_7 + sum_8
    return dy_1, dy_2, dy_3, dy_4

def diff(t, y):
    dy = np.zeros((3 * n, 1)) if sir else np.zeros((4 * n, 1))
    for i in range(n):
        if sir:
            dy[3 * i], dy[3 * i + 1], dy[3 * i + 2] = calc_sir(y, i)
        else:
            dy[4 * i], dy[4 * i + 1], dy[4 * i + 2], dy[4 * i + 3] =
calc_seir(y, i)
    return dy

sir = False
tmp = 0
while tmp != 1 and tmp != 2:
    tmp = int(input("Please enter 1 if you want to simulate a SIR model, or
enter 2 if you want to simulate a SEIR "
                    "model: "))
if tmp == 1:
    sir = True
a = 1 / (1000 * float(input("Please enter the average contact time sufficient
for infection: ")))
beta = 1 / float(input("Please enter the average duration of the disease: "))
if not sir:
    gamma = 1 / float(input("Please enter the average duration of the incubation
period: "))

```

```

n = 0
while n < 2:
    print("Please enter the number of cities (from 2)")
    n = int(input())
f = open('data_sir.txt', 'r') if sir else open('data_seir.txt', 'r')
lines = f.readlines()
s0 = []
e0 = []
i0 = []
r0 = []
for ln in lines:
    ln = ln.split(' ')
    s0.append(int(ln[0]))
    if sir:
        i0.append(int(ln[1]))
        r0.append(int(ln[2].rstrip()))
    else:
        e0.append(int(ln[1]))
        i0.append(int(ln[2]))
        r0.append(int(ln[3].rstrip()))
y0 = []
for i in range(n):
    y0.append(s0[i])
    if not sir:
        y0.append(e0[i])
    y0.append(i0[i])
    y0.append(r0[i])
delta = calc_delta(n, s0, i0, i0, beta) if sir else calc_delta(n, s0, i0, e0,
gamma)
check_delta()
print(delta)
t0, t1 = 0, 100 # start and end
t = np.linspace(t0, t1, 1000) # the points of evaluation of solution
y = np.zeros((len(t), len(y0))) # array for solution
y[0, :] = y0
r = integrate.ode(diff).set_integrator("dopri5") # choice of method
r.set_initial_value(y0, t0) # initial values
for i in range(1, t.size):
    y[i, :] = r.integrate(t[i]) # get one more value, add it to the array
    if not r.successful():
        raise RuntimeError("Could not integrate")
for i in range(n):
    if sir:
        plt.plot(t, y[:, 3 * i + 1])
    else:
        plt.figure(1)
        plt.plot(t, y[:, 4 * i + 2])
        plt.figure(2)
        plt.plot(t, y[:, 4 * i + 1])
legend1 = []
legend2 = []
for i in range(n):
    legend1.append('I' + str(i + 1))
    legend2.append('E' + str(i + 1))
if sir:
    plt.legend(legend1)
    plt.xlabel('t', fontsize=15)
    plt.ylabel('I', fontsize=15)
    plt.grid(True)
else:
    plt.figure(1)
    plt.legend(legend1)
    plt.xlabel('t', fontsize=15)

```

```
plt.ylabel('I', fontsize=15)
plt.grid(True)
plt.figure(2)
plt.legend(legend2)
plt.xlabel('t', fontsize=15)
plt.ylabel('E', fontsize=15)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Додаток Б

Приклад заповнення файлу «data_sir.txt», який використовується у програмі (Додаток А), з розподілом населення по категоріям (S , I , R) для кожного з n міст (тут $n = 6$).

```
850, 150, 0
900, 100, 0
950, 50, 0
970, 30, 0
985, 15, 0
999, 1, 0
```

Додаток В

Приклад заповнення файлу «data_seir.txt», який використовується у програмі (Додаток А), з розподілом населення по категоріям (S, E, I, R) для кожного з n міст (тут $n = 8$).

```
700, 250, 50, 0
800, 160, 40, 0
850, 120, 30, 0
900, 90, 10, 0
950, 50, 0, 0
970, 30, 0, 0
990, 10, 0, 0
999, 1, 0, 0
```