ISSN 2304–1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2012 .–Т. 17, вип. 4 (16).–С. 7–14

М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.7

А.В. Арсирий
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Арсірій А.В. Кусково-сталі системи керування багатозначними траєкторіями із терминальним критерієм якості. У даній статті розглядається задача оптимального керування багатозначними траекторіями. Обгрунтовується можливість звуження множини припустимих керувань до множини кусково сталих функцій.
Ключові слова: задачі керування, багатозначні відображення, диференціальні рівняння з похідною Хукухари, кусково-сталі керовані системи.

Арсирий А.В. Кусочно-постоянные системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначнымитраекториями. Обосновывается возможность сужения множествадопустимых управлений на множество кусочно-постоянных функций.
Ключевые слова: задачи управления, многозначные отображения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары, кусочно-постоянные управляемые системы.

Arsirii A.V. Piecewise constant control systems with terminal criteria of quality. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued trajectories. The possibility of the admissible controls set narrowing to the set of the piecewise constant functions is justified.
Key words: control problem, set-valued map, differential equation with the Hukuhara derivative, piecewise constant control systems.

Введение. В 1969 году F.S. de Blasi и F. Iervolino ввели понятие дифференциального уравнения с производной Хукухары, решением которого является многозначное отображение [7]. В дальнейшем в работах F.S. de Blasi, F. Iervolino и A.J. Brandao Lopes Pinto были доказаны теоремы существования и устойчивости решений для такого типа уравнений [7, 8, 9]. А.А. Толстоногов доказал, что решение дифференциального уравнения с производной Хукухары дает оценку сверху множества достижимости задачи оптимального управления [6]. Исследованием дифференциальных уравнений с производной Хукухары также занимались M. Kisielewich, V. Laksmikantham, N.D. Phu, T.T. Tung, А.Н. Витюк, А.В. Плотников, О.Д. Кичмаренко, Н.В. Скрипник и др [2, 4, 5, 11, 12, 13].

В 80-е годы 20 столетия начала развиваться теория управления при неопределенных начальных условиях, которая сегодня переросла в теорию нечетких управляемых систем. В последнее время, поведение объекта в такого типа системах стали часто описывать нечеткими дифференциальными уравнениями. Производная от нечеткого отображения является обобщением производной Хукухары. Развитие теории управления многозначными траекториями предоставляет возможности в получении новых результатов и в теории управления нечеткими системами.

Данные факты говорят об актуальности исследования систем управления многозначными траекториями.

В данной статье рассматривается задача управления системой, состояние которой описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары, и обосновывается возможность замены исходного допустимого управления на приближенное кусочно-постоянное. Доказываются теоремы о близости соответствующих критериев качества в однозначном и многозначном случаях.

Пусть R^n - n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ – шар радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. [4] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.*

Определение 2. [4] *Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим управляемое дифференциальное уравнение с производной Хукухары стандартного вида:

$$D_h X(t, u) = A(t) X(t, u) + F(t, u), \quad X(0, u) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$; $u(t) \in R^m$, - управляющее воздействие; $X(\cdot, u) : [0, T] \times R^m \to Conv(R^n)$ - многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t, u)$ - производная Хукухары; $A(t)$ - матрица с элементами $a_{ij}(t)$ порядка $(n \times n)$; $F(\cdot, u) : [0, T] \times R^m \to Conv(R^n)$ - многозначное отображение.

Введем следующий критерий качества

$$I(u) = \Phi(X(T, u)), \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to R^1$.

Определение 3. [3] *Множество измеримых функций таких, что $u(t) \in U$ для всех $t \in [0,T]$ будем называть множеством допустимых управлений и обозначать $LU[0,T]$ (или LU).*

Определение 4. [9] *Решением уравнения (1) соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot,u)$, удовлетворяющее (1) почти всюду на $[0,T]$.*

Предположение 1. Будем предполагать, что задача (1),(2) удовлетворяет условиям:
1) матрица $A(t)$ - измерима на $[0,T]$;
2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2(t)} \le a$ для почти всех $t \in [0,T]$;
3) многозначное отображение $F(t,u)$ измеримо по t и непрерывно по u;
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ такая, что $h(F(t,u),\{0\}) \le f(t)$ для почти всех $t \in [0,T]$ и $\forall u \in LU$;
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ и $t \in [0,T]$ существует константа γ такая что

$$h\left(\int\limits_0^t F(s,u_1(s))ds, \int\limits_0^t F(s,u_2(s))ds\right) \le \gamma \left\| \int\limits_0^t u_1(s)ds - \int\limits_0^t u_2(s)ds \right\|;$$

6) отображение $\Phi(\cdot)$ непрерывно на $Conv(R^n)$.

Теорема 1. [10] *Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям 1)-4) предположения 1.*

Тогда для любого допустимого управления $u(\cdot)$ на сегменте $[0,T]$ существует единственное решение $X(\cdot,u)$ уравнения (1).

Определение 5. [9] *Множеством достижимости $Y(T)$ в момент времени T называется множество всех множеств из пространства $Conv(R^n)$, в которые можно перейти за время T из начального множества X^0 по решениям уравнения (1) при всех возможных управлениях $u(\cdot) \in LU$, т.е.*

$$Y(T) = \{X(T,u) | u(\cdot) \in LU\}$$

Теорема 2. [14] *Множество достижимости $Y(T)$ уравнения (1) является непустой выпуклой и компактной частью пространства $Conv(R^n)$.*

Теорема 3. *Если задача управления (1),(2) удовлетворяет условиям 1)-4),6) предположения 1, то она имеет оптимальное решение.*

Доказательство следует из компактности множества достижимости уравнения (1), согласно предыдущей теореме, и непрерывности отображения $\Phi(\cdot)$.

В дальнейшем в качестве множества допустимых управлений будем рассматривать произвольные прямоугольные области $U = \prod\limits_{j=1}^{n} [u_{min}^j, u_{max}^j]$.

Если провести замену исходного измеримого управления $u(t)$ в задаче управления (1),(2) кусочно-постоянной функцией, то решение задачи станет намного более простым. Разработан алгоритм построения приближенного кусочно-постоянного управления.

Теорема 4. [1, 10] *Пусть* $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^n(t))$ *- измеримая функция на отрезке* $[0, T]$ *такая, что* $u^j(t) \in [u^j_{min}, u^j_{max}]$, $\quad j = \overline{1, n}$ *для всех* $t \in [0, T]$. *Разобъем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей* $[(i-1)\Delta, i\Delta]$, $i = \overline{1, k}$, $\Delta = \frac{T}{k}$. *Тогда существует кусочно-постоянная функция* $\overline{u}(t)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\overline{u}(t)$*-постоянная на каждом из отрезков* $[(i-1)\Delta, i\Delta], i = \overline{1, k}$;

2) $\overline{u}_i(t) = \{(\overline{u}^1_i(t), ..., \overline{u}^n_i(t))^T : \overline{u}^j_i(t) \in \{u^j_{min}, u^j_{max}\}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}\}$ *для всех* $t \in [0, T]$;

3) для любого $t \in [0, T]$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t \overline{u}(s)ds \right\| \leq \frac{1}{2} \|u_{max} - u_{min}\| \Delta. \tag{3}$$

где $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$.

Для того, чтобы обосновать возможность сужения исходного множества допустимых управлений на класс кусочно-постоянных фунций, необходимо доказать близость траекторий, соответствующих исходному и приближенному управлениям, а также близость соответствующих критериев качества.

В следующей теореме доказана близость решений уравнения (1), соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 5. [10] *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1. Также пусть* $u(\cdot)$ *- произвольное допустимое управление, а* $X(t, u)$ *- соответствующее ему многозначное решение уравнения (1) с начальным условием* $X(0, u) = X_0$. *Разобъем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(\cdot)$, *согласно теореме 4, и пусть* $X(t, \overline{u})$ *- соответствующее многозначное решение уравнения (1) с начальным условием* $X(0, \overline{u}) = X_0$. *Тогда для всех* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$h(X(t, u), X(t, \overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{4}$$

где $C_1 = \gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

1. Близость значений критериев качества, соответствующих исходному и приближенному управлениям

Покажем близость значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 6. *Пусть задача (1),(2) удовлетворяем условиям предположения и пусть отображение* $\Phi(\cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ. $u(t)$ *- произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени* $[0,T]$. *Разобъем отрезок* $[0,T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(t)$, *согласно теоремы 4. Тогда для всех* $t \in [0,T]$ *выполняется неравенство*

$$|I(u) - I(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{5}$$

где $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Доказательство. Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0;$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно предыдущей теореме справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$|I(u) - I(\overline{u})| = |\Phi(X(t,u)) - \Phi(X(t,\overline{u}))| \leq \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq$$

$$\leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda\gamma e^{aT} (C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|I(u) - I(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

2. Близость значений критериев качества в многозначном случае

Пусть теперь критерий качества для уравнения (1) будет многозначным, то есть

$$J(u) = \Omega(X(T,u)), \tag{6}$$

где $\Omega(\cdot) : Conv(R^n) \to Conv(R^1)$.

Определение 6. [5] *Управление* $u^*(\cdot) \in LU$ *назовем максиминным для задачи (1)(6), если для любого управления* $u(\cdot) \in LU$ *справедливо неравенство*

$$mJ(u) \leq mJ(u^*),$$

где $mA = min\{\, a \mid a \in A, \ A \in Conv(R^1)\}$.

Определение 7. [5] *Управление $u^*(\cdot) \in LU$ назовем максимаксным для задачи (1)(6), если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство*

$$MJ(u) \le MJ(u^*),$$

где $MA = max\{\, a \mid a \in A,\ A \in Conv(R^1)\}$.

Будут справедливы теоремы о близости максиминных и максмимаксных значений критериев качества, соответствующих исходному допустимому и построенному кусочно-постоянному управлениям.

Теорема 7. *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ. $u(t)$ - произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени $[0,T]$. Разобъем отрезок $[0,T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(t)$, согласно теоремы 4. Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \le C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{7}$$

где $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Доказательство. Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0,$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно теореме 5 справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \le C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$h(J(u), J(\overline{u})) = h(\Omega(X(t,u)), \Omega(X(t,\overline{u}))) \le \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \le$$

$$\le \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

С другой стороны

$$mJ(u) \le mJ(\overline{u}) \le mJ(u) + \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Таким образом

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \le \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}(C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|mJ(u) - mJ(\overline{u})| \le C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям 1)-5) предположения 1 и пусть отображение* $\Omega(\cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ. $u(t)$ *- произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени* $[0,T]$. *Разобъем отрезок* $[0,T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(t)$, *согласно теоремы 4. Тогда для всех* $t \in [0,T]$ *выполняется неравенство*

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{8}$$

где $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $X(t,u)$ - решение уравнения (1) при управлении $u(t)$, а $X(t,\overline{u})$ - решение уравнения (1) при управлении $\overline{u}(t)$, то есть

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0,$$

$$D_h X(t,\overline{u}) = A(t)X(t,\overline{u}) + F(t,\overline{u}), \quad X(0,\overline{u}) = X_0.$$

Согласно теореме 5 справедлива оценка

$$h(X(t,u), X(t,\overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ и согласно предыдущей оценке

$$h(J(u), J(\overline{u})) = h(\Omega(X(t,u)), \Omega(X(t,\overline{u}))) \leq \lambda h(X(t,u), X(t,\overline{u}))| \leq$$

$$\leq \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

С другой стороны

$$MJ(u) \leq MJ(\overline{u}) \leq MJ(u) + \lambda C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Таким образом

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Обозначим $C_2 = \lambda C_1$, т.е. $C_2 = \lambda\gamma e^{aT}(C_1 = \gamma e^{aT}$ из теоремы 5). Тогда

$$|MJ(u) - MJ(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|.$$

Теорема доказана.

Заключение.

В статье рассматривалась задача управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Состояние системы в задаче описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. Обоснована возможность сужения множества допустимых управлений на класс кусочно-постоянных функций. Доказана теорема, показывающая близость решений исходной и усредненной задач по значениям критериев качества, соответственно, в однозначном и многозначном случаях.

1. **Арсирий А.В., Плотников А.В.** Системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества // Украинский математический журнал. – Киев: 2009. – Т.61 (№ 8). – С. 1141 – 1146.
2. **Кичмаренко О.Д.** Усреднение в задачах управления системами с запаздыванием // Диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-матем. наук. Одесса, 2005.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления – М., 1972. – 576с.
4. **Плотников А.В., Скрипник Н.В.** Дифференциальные уравнения с “четкой” и нечеткой многозначной многозначной правой частью. Асимптотические методы – Одесса: “Астропринт”, 2009. – 191 с.
5. **Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы – Одесса: “Астропринт”, 1999. – 354с.
6. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве – Новосибирск: Наука, 1986. – 296с.
7. **de Blasi F.S., Iervolino F.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll.Unione Mat.Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4–5. – P. 491 – 501.
8. **de Blasi F.S., Iervolino F.** Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll.Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941 – 949.
9. **Brandao Lopes Pinto A.J., de Blasi F.S., Iervolino F.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. U.M.I. – 1970. – № 4. – P.534 – 538.
10. **Plotnikov A.V., Arsiry A.V.** Piecewise Constant Control Set Systems // American Journal of Computational and Applied Mathematics – 2011. – 1(2). – P.89 – 93.
11. **Kisielewicz M.** Differential inclusion and optimal control – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
12. **Laksmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.** Theory of set differential equations in metric spaces // Cambridge Scientific Publishers, 2006. – 204p.
13. **Phu N.D., Tung T.T.** Multivalued Differential Equations – VNU-HCM City : Publishing House, 2005.
14. **Plotnikov A.V., Komleva T.A., Arsiry A.V.** Necessary and sufficient optimality conditions for a control fuzzy linear problem // Int. J. Industrial Mathematics – 2009. – 1(3). – P.197 – 207.