УДК 517.9

А. П. Огуленко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЧАСТИЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В работе рассмотрена схема частичного усреднения системы уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. При весьма общих условиях доказана близость решения исходной системы и решения частично усредненной системы, причем частично усредненная система определяется на той же временной шкале. Этот результат, в частности, расширяет область применения численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления на временных шкалах, развитого в предыдущих работах.

MSC: 34N05.
Ключевые слова: временная шкала, метод усреднения, функция зернистости .

Введение. Метод усреднения является важным инструментом в асимптотической теории динамических систем. Он зародился во второй половине XVIII века в работах А. Клеро, Ж. Лагранжа и С. Лапласа по небесной механике. В начале XX века Б. Ван-Дер-Поль применил метод усреднения к дифференциальным уравнениям, описывающим колебания в системах с одной степенью свободы. Однако вопросы строго обоснования метода усреднения оставались открытыми.

Систематическая теория метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений была создана в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [1] и далее развита Н. Н. Боголюбовым и его учениками [2].

В дальнейшем метод усреднения был обоснован для большого числа различных классов динамических систем: дифференциальных уравнений с разрывной и многозначной правой частью, уравнений с производной Хукухары, динамических систем с запаздыванием и проч. Обзор полученных результатов можно найти, например, в [3]. Основное направление этих исследований заключалось в расширении понятия динамической системы и, соответственно, понятия решения такой системы.

С другой стороны, во многом изменился подход к пониманию природы времени в динамических системах. Понятие временной шкалы, впервые введенное С. Хильгером в 1988 году, позволило построить общую теорию динамических систем, одним языком описывающую и непрерывные системы, и дискретные, и — что особенно важно — смешанные случаи. Подробное изложение теории динамических систем на временных шкалах можно найти в [5, 6].

Насколько нам известно, впервые задача усреднения применительно к системам на временных шкалах была рассмотрена A. Slavík в 2012 году [7]. В частности, изучались вопросы близости решения исходной системы на временной шкале и решения усредненного обобщенного дифференциального уравнения. Таким образом, операция усреднения не обеспечивала замкнутости множества решений.

В работе [9] была обоснована схема общего усреднения динамических систем на временных шкалах, в которой усредненная система имела ту же природу,

Получена 23.03.2017

что и исходная. На основании этих результатов был далее развит численно–асимптотический метод решения задач оптимального управления [10, 11].

Предварительные результаты. Приведем основные сведения о временных шкалах, которые необходимы для изложения полученных результатов.

Временная шкала — непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, обозначается символом $\mathbb{T}$. Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператором перехода вперед $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$;
2) оператором перехода назад $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$, (при этом полагается $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ и $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$);
3) функцией зернистости $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет ее тип. Так, при $t < \sigma(t)$ $(\rho(t) < t)$ точка $t \in \mathbb{T}$ называется справа (слева) рассеянной, при $t = \sigma(t)$ $(\rho(t) = t)$ она называется справа (слева) плотной. Плотной называется точка t, для которой $\rho(t) = t = \sigma(t)$, изолированной называется одновременно слева и справа рассеянная точка, т. е. $\rho(t) < t < \sigma(t)$.

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T}\setminus\{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T} : M = \sup\mathbb{T}, \\ & \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 1 (Bohner, Peterson [5]). *Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Число $f^\Delta(t)$ называется Δ-производной функции f в точке t, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (то есть, $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$), что*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Определение 2 (Bohner, Peterson [5]). *Если $f^\Delta(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^\kappa$. Функция $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^\kappa$.*

Если f дифференцируемая в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

Определение 3 (Bohner, Peterson [5]). *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.*

Определение 4 (Bohner, Peterson [5]). *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется rd-непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых rd-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Определение 5 (Bohner, Peterson [5]). *Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D такая, что для всех $t \in D$ выполняется равенство $F^{\Delta}(t) = f(t)$. Эта функция называется пред-первообразной для $f(t)$ и определяется неоднозначно.*

Неопределенный интеграл имеет вид $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$, где C — произвольная константа интегрирования, а $F(t)$ — пред-первообразная для $f(t)$. Далее, если для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ выполняется $F^{\Delta}(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется первообразной функции $f(t)$. Если $t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для всех t. Определенный Δ-интеграл для любых $r,s \in \mathbb{T}$ определяется как $\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$.

Сформулируем задачу Коши на временной шкале. Пусть задано уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Функция $x(t)$ называется решением этого дифференциального уравнения, если $x(t) \in C^1_{rd}\left([t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\right)$ и при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество. Если, кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет заданному начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

то она называется решением соответствующей начальной задачи или задачи Коши.

В дальнейшем нам понадобится аналог экспоненциальной функции, построенный для произвольной временной шкалы. Вначале выделим важный класс функций:

Определение 6 (Bohner, Peterson [5]). *Функцию $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть регрессивной, если $1 + \mu(t)p(t) \neq 0, t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Множество регрессивных и rd-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.*

Можно показать, что, если $p(t) \in \mathcal{R}$ и $t_0 \in \mathbb{T}$, то задача Коши

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

имеет единственное решение на $\mathbb{T}$. Это решение и будет экспоненциальной функцией, которую обозначают через $e_p(t,t_0)$, указывая на зависимость от функции $p(t)$.

Сформулируем условия существования и единственности решения задачи Коши на произвольной временной шкале.

Определение 7 (Bohner, Peterson [5]). *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:*

1) *rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t,x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;*
2) *ограниченной в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $M > 0$ такая, что $\|f(t,x)\| \leq M$ для любой точки $(t, x) \in Q$;*

3) липшицевой в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \qquad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in Q\ .$$

Теорема 1 (существование и единственность решения, [5]). *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала, X — банахово пространство, $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in X$, $a > 0 : \inf \mathbb{T} \leqslant t_0 - a$ и $\sup \mathbb{T} \geqslant t_0 + a$. Положим*

$$I_a = (t_0 - a, t_0 + a), \qquad U_b = \{x \in X : \|x - x_0\| < b\}\ .$$

Если функция $f : I_a \times U_b \to X$ rd-непрерывная, ограниченная с константой $M > 0$, липшицева с константой $L > 0$, то решение задачи Коши

$$x^{\Delta} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

существует и единственно на интервале $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, где $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1-\varepsilon}{L}\right\}$. Если t_0 — справа рассеянная точка и $\alpha < \mu(t_0)$, то существует единственное решение на интервале $[t_0 - \alpha, \sigma(t_0)]$.

В дальнейшем понадобиться также неравенство Гронуолла, которое мы сформулируем в виде следующей леммы

Лемма (неравенство Гронуолла, [5]). *Пусть y — rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ функция, $p \in \mathcal{R}^+, p \geqslant 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Если справедливо неравенство*

$$y(t) \leqslant \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \qquad \tau \in \mathbb{T}$$

то

$$y(t) \leqslant \alpha e_p(t, t_0), \qquad \tau \in \mathbb{T}\ .$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на временной шкале и леммы Гронуолла можно найти в [5].

Основные результаты. Рассмотрим динамическую систему вида

$$x^{\Delta} = \varepsilon X(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $t \in \mathbb{T}$ — время, заданное временной шкалой. Поставим ей в соответствие следующую систему:

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \widetilde{X}(t,\xi) \quad \xi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

где

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} \left\| X(t,x) - \widetilde{X}(t,x) \right\| \Delta t = 0. \tag{3}$$

Эту последнюю систему (2) мы будем называть частично усредненной, соответствующей исходной системе (1).

Теорема 2 (о частичном усреднении на временной шкале). *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функции $X(t,x)$ и $\widetilde{X}(t,x)$ rd-непрерывны по t, ограничены константой $M > 0$ и удовлетворяют условию Липшица по x с константой $\lambda > 0$;*
2) *предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$;*
3) *решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*
4) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ , \tag{4}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что и исходная, и частично усредненная системы будут иметь единственные решения, продолжимые по времени до тех пор, пока $x(t) \in D$ (соответственно, $\xi(t) \in D$).

Запишем эти системы в интегральной форме:

$$\begin{aligned} x(t) = \quad & x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\Delta s, \\ \xi(t) = \quad & x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \widetilde{X}(t, \xi(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Оценим норму разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \xi(t)\| &= \left\| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| = \\ = \ & \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - X(s, \xi(s)) \right] \Delta s + \int_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \ & \varepsilon \int_{t_0}^{t} \| X(s, x(s)) - X(s, \xi(s)) \| \Delta s + \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant \ & \lambda\varepsilon \int_{t_0}^{t} \| x(s) - \xi(s) \| \Delta s + \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| . \qquad (*) \end{aligned}$$

Обозначим последнее слагаемое

$$J = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\|$$

и оценим его на промежутке временной шкалы $\left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]$.

Построим разбиение промежутка следующим образом: зададимся диаметром разбиения δ, положим первую точку разбиения равной t_0, а дальнейшие точки определим по формуле

$$t_i = \begin{cases} \sup{(t_{i-1}, t_{i-1} + \delta]}, & \text{если} \quad t_{i-1} + \delta \in \mathbb{T}, \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{если} \quad t_{i-1} + \delta \notin \mathbb{T}. \end{cases}$$

Можно показать ([6], с. 120) , что построенное таким образом разбиение обладает следующим свойством: для любого i либо $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$ (будем считать, что в этом случае $i \in I_\delta$), либо $t_i - t_{i-1} > \delta$ и $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ (тогда $i \in I_\sigma$). Пусть $N = |I_\delta| + |I_\sigma|$.

По свойствам интегралов имеем

$$J = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| =$$

$$= \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(s, \xi(s) - X(s, \xi_i) \right] \Delta s - \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right] \Delta s + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(s, \xi_i) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right] \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - X(s, \xi_k) \right] \Delta s -$$

$$- \int\limits_{t_k}^{t} \left[\widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s + \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi_k) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s -$$

$$\left. - \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[X(s, \xi_k) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s \right\|.$$

Перегруппировывая однотипные слагаемые в последнем выражении и пользуясь свойствами норм и интегралов, получаем далее

$$J \leqslant \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \| X(s, \xi(s) - X(s, \xi_i) \| \, \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \| X(s, \xi(s)) - X(s, \xi_k) \| \, \Delta s \right) +$$

$$+ \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{X}(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right\| \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left\| \widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right\| \Delta s \right) +$$

$$+\left(\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_{i+1}}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s-\int\limits_{t_0}^{t_i}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t_k}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|\right)+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|.$$

Мажорируем каждое из трех выражений в круглых скобках, увеличивая количество слагаемых в суммах до максимально возможного на отрезке $t\in\left[t_0,L\varepsilon^{-1}\right]$:

$$J\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s))-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s+\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\widetilde{X}(s,\xi(s))-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right\|\Delta s+$$

$$+\,\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_{i+1}}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_i}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+$$

$$+\,\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|. \tag{5}$$

Первые две суммы в последнем выражении оценим, воспользовавшись условием Липшица. Вначале оценим приращение траектории $\xi(s)$:

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s=\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|x_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{s}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau-x_0-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_i}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s=$$

$$=\varepsilon^2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s\leqslant\varepsilon^2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}M\int\limits_{t_i}^{s}\Delta\tau\Delta s=$$

$$=\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Получаем для первой оцениваемой суммы

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s)-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|\xi(s)-\xi_i\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s.$$

Пусть $i\in I_\sigma$. Тогда

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s)-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s=$$

$$=\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{\sigma(t_i)}(s-t_i)\,\Delta s=\lambda\varepsilon^2M\mu(t_i)\,(t_i-t_i)=0.$$

Пусть теперь $i \in I_\delta$. Тогда

$$\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s) - X(s,\xi_i)\| \, \Delta s \leqslant \lambda\varepsilon^2 M \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i)\, \Delta s =$$

$$= \lambda\varepsilon^2 M \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta \Delta s \leqslant \lambda\varepsilon^2 M \delta^2.$$

Итак, получаем для первой суммы

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s)) - X(s,\xi_i)\| \, \Delta s \leqslant \sum_{i\in I_\delta} \lambda\varepsilon^2 M\delta^2.$$

Воспользуемся условием теоремы 4). Именно, положим $\delta < \mu_0$. Легко видеть, что тогда $|I_\delta| < \dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0 = \dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Значит, для всех $N > N_0$ и $\delta = \dfrac{L}{N\varepsilon}$ имеем $\delta < \mu_0$ и оценка примет вид

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s)) - X(s,\xi_i)\| \, \Delta s \leqslant \sum_{i\in I_\delta} \lambda\varepsilon^2 M \frac{L^2}{\varepsilon^2 N^2} = \sum_{i\in I_\delta} \frac{\lambda M L^2}{N^2} < \frac{\lambda M L^2}{N} \ .$$

Аналогичным образом получаем оценку и второй суммы в (5):

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|\widetilde{X}(s,\xi(s)) - \widetilde{X}(s,\xi_i)\right\| \Delta s < \frac{\lambda M L^2}{N} \ .$$

Далее, в силу условия 2) теоремы существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \cdot \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x) - \widetilde{X}(s,x)\right] \Delta s \right\| < \varepsilon \cdot t f(t) \leqslant F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[t_0, L\varepsilon^{-1}]} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, в оценке (5) последние три выражения мажорируются выражением $2NF(\varepsilon)$.

Итак, окончательно получаем оценку сверху для (5):

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,\xi(s)) - \widetilde{X}(s,\xi(s))\right] \Delta s \right\| \leqslant \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Вернемся к оценке разности решений исходной и частично усредненной систем $(*)$:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\| \, \Delta s + \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Тогда, вследствие неравенства Гронуолла имеем

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \left(\frac{2\lambda ML^2}{N}+2NF(\varepsilon)\right)\cdot e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0)\ .$$

Очевидно, что $e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) < e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)$. Далее, так как $1+\lambda\varepsilon\mu(t)>0$, то по определению экспоненты имеем

$$e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)=\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}}\frac{\ln(1+\lambda\varepsilon\mu(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right)<\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}}\frac{\lambda\varepsilon\mu(\tau)}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right)<e^{\lambda L}\ .$$

Выберем теперь N достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2\lambda ML^2}{N}e^{\lambda L}\leqslant\frac{\eta}{2}\ .$$

Зафиксируем это значение и выберем ε_0 достаточно малым, чтобы при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполнялось

$$2NF(\varepsilon)e^{\lambda L}\leqslant\frac{\eta}{2}\ .$$

Тогда

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\eta,\qquad t\in\left[t_0,\frac{L}{\varepsilon}\right],$$

что и требовалось доказать. ■

Легко показать, что аналог теоремы Боголюбова на временных шкалах, доказанный в [9], является частным случаем теоремы 2 при специальном выборе правой части частично усредненной системы (если соответствующий предел существует):

$$\widetilde{X}(t,x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t,x)\Delta t\equiv\overline{X}(x).$$

Условия доказанной теоремы можно ослабить, исключив требование липшицевости правой части исходной системы (1). При этом теряется единственность решения исходной системы и следующая теорема устанавливает близость к $\xi(t)$ всего пучка решений системы (1), начинающихся в точке $x(0)$.

Теорема 3. *Пусть в области $Q=\{t\in\mathbb{T},x\in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t{,}x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M>0$ и равномерно непрерывна по x относительно t;*

2) *функция $\widetilde{X}(t{,}x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M>0$ и удовлетворяет условию Липшица по x с константой $\lambda>0$;*

3) *предел (3) существует равномерно относительно $x\in D$;*

4) решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условие $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;

5) существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ ,$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Пользуясь условием 2) теоремы, получаем оценку

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\| \, \Delta s + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, x(s)) \right] \Delta s \right\|.$$

Обозначим последнее слагаемое через J. Чтобы оценить максимальное значение J на промежутке $I = \left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]$, воспользуемся δ-разбиением аналогично доказательству предыдущей теореме. Обозначая $x(t_i) = x_i$, $i = \overline{0,N}$ и повторяя выкладки, имеем

$$\begin{gathered} J \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s, x(s) - X(s, x_i)\| \, \Delta s + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{X}(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, x_i) \right\| \Delta s + \\ + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int\limits_{t_0}^{t_{i+1}} \left[X(s, x_i) - \widetilde{X}(s, x_i) \right] \Delta s \right\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \left[X(s, x_i) - \widetilde{X}(s, x_i) \right] \Delta s \right\| + \\ + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x_k) - \widetilde{X}(s, x_k) \right] \Delta s \right\|. \end{gathered} \tag{6}$$

В силу условия 1) теоремы для любого $\gamma > 0$ существует $\gamma_1 > 0$ такое, что $\|X(s, x(s)) - X(s, x_i)\| \leqslant \gamma$ как только $\|x(s) - x_i\| \leqslant \gamma_1$. Оценим приращение траектории $x(s)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\begin{gathered} \|x(s) - x_i\| = \left\| x_0 + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{s} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau - x_0 - \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_i} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau \right\| = \\ = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_i}^{s} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau \right\| \leqslant \varepsilon M \int\limits_{t_i}^{s} \Delta\tau = \varepsilon M (s - t_i). \end{gathered}$$

Пусть $i \in I_\delta$. Тогда $\|x(s) - x_i\| \leqslant \varepsilon M \delta$ и выбрав достаточно малое δ, можно добиться выполнения неравенства $\|x(s) - x_i\| \leqslant \gamma_1$, откуда следует оценка

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s, x(s) - X(s, x_i)\| \, \Delta s \leqslant \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma \Delta s \leqslant \gamma\delta, \quad i \in I_\delta.$$

Если же $i \in I_\sigma$, то по определению множества индексов I_σ и свойствам Δ-интегралов получаем, что

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s)-X(s,x_i)\|\,\Delta s = \int\limits_{t_i}^{\sigma(t_i)} \|X(s,x(s)-X(s,x_i)\|\,\Delta s =$$
$$= \mu(t_i)\,\|X(t_i,x(t_i)-X(t_i,x_i)\| = 0, \quad i \in I_\sigma.$$

В итоге для первой суммы в (6) имеем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s))-X(s,x_i)\|\,\Delta s \leqslant \varepsilon \sum_{i\in I_\delta} \gamma\delta.$$

Воспользуемся условием теоремы 5). Если предположить, что $\delta < \mu_0$, то $|I_\delta| < \dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0 = \dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Тогда для всех $N > N_0$ и $\delta = \min\left\{\dfrac{L}{N\varepsilon}, \dfrac{\gamma_1}{\varepsilon M}\right\}$ имеем одновременно $\delta < \mu_0$ и $\varepsilon M\delta \leqslant \gamma_1$, что позволяет оценить сумму:

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s))-X(s,x_i)\|\,\Delta s \leqslant \varepsilon \sum_{i\in I_\delta} \gamma\delta \leqslant \varepsilon N\gamma \frac{L}{N\varepsilon} = L\gamma.$$

Оценку второй суммы в (6) проделаем точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, используя условие Липшица. В итоге получаем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|\widetilde{X}(s,x(s))-\widetilde{X}(s,x_i)\right\|\Delta s < \frac{\lambda M L^2}{N}\ .$$

Далее, в силу условия 3) теоремы существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \cdot \left\|\int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x)-\widetilde{X}(s,x)\right]\Delta s\right\| < \varepsilon \cdot t f(t) \leqslant F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[t_0,L\varepsilon^{-1}]} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, в оценке (6) последние три слагаемых в совокупности мажорируются выражением $2NF(\varepsilon)$.

Собирая вместе все последние оценки, получаем окончательно

$$\varepsilon \left\|\int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x(s))-\widetilde{X}(s,x(s))\right]\Delta s\right\| \leqslant L\gamma + \frac{\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Дальнейшее доказательство проводится аналогично последней части доказательства теоремы 2 с использованием неравенства Гроноулла. ■

Следуя схеме доказательства, приведенного в [8], можно ослабить условие равномерной сходимости предела (3). Доказательство использует лишь свойства функций $X(t,x)$ и $\widetilde{X}(t,x)$, относящиеся к переменной x и перенос его на системы, заданные на временной шкале, не представляет сложности. Приведем формулировку теоремы.

Теорема 4. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$, где D замкнуто, выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t,x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M > 0$ и равномерно непрерывна по x относительно t;*
2) *функция $\widetilde{X}(t,x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M > 0$ и удовлетворяет локальному условию Липшица по x с константой $\lambda > 0$;*
3) *предел (3) существует в каждой точке $x \in D$;*
4) *решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условие $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*
5) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ ,$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Идентично приведенному в [8]. Упомянем лишь, что идея доказательства сводится к демонстрации выполнения всех условий теоремы 3. ∎

Заключение. В работе рассмотрена система уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. При весьма общих условиях доказана близость решения исходной системы и решения частично усредненной системы, поставленной ей в соответствие, причем частично усредненная система определяется на той же временной шкале. Этот результат, в частности, расширяет область применения численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления, представленного ранее в [10, 11].

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов – Киев : Изд-во АН СССР, 1937. — 363 с.
2. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – М. : Наука, 1974. — 503 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников – Изд-во Лыбидь, Киев-Одесса, 1992. — 188 с.

4. **Hilger S.** Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.
5. **Bohner M.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications / M. Bohner, A. Peterson – Birkhäuser Basel, 2001. — 358 p.
6. **Advances** in Dynamic Equations on Time Scales / M. Bohner, A. Peterson et al. – Springer, 2002. — 368 p.
7. **Slavík A.** Averaging dynamic equations on time scales / Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2012. - Vol. 388, No. 2. - p. 996-1012.
8. **Плотников В. А.** Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида / В. А. Плотников, А. Т. Яровой // Укр. мат. журн. – 1979. – №2. – С. 166–171.
9. **Огуленко А. П.** Схема полного усреднения на временных шкалах / А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко // Вестник Одесск. нац. ун-та. Матем. и мех. – 2012. – Т.17, вып. 4 (16). – С. 67–77.
10. **Ogulenko A. P.** Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scales / A. P. Ogulenko, O. D. Kichmarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 212, No. 3. – P. 290–304.
11. **Kichmarenko O. D.** Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales / O. D. Kichmarenko, A. P. Ogulenko // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2017. – Vol. 56, No. 1. – pp. 33–43.

Огуленко О. П.
ЧАСТКОВЕ УСЕРЕДНЕННЯ СИСТЕМ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Резюме

В роботі розглянута схема часткового усереднення системи рівнянь на часовій шкалі з малим параметром в правій частині. При досить загальних умовах доведено близкість розв'язку вихідної системи та розв'язку частково усередненної системи, причому частково усереденена система визначається на тій самій часовій шкалі. Цей результат, зокрема, розширює область застосування чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування на часових шкалах, розвиненого в попередніх роботах.
Ключові слова: часова шкала, метод усереднення, функція зернистості .

Ogulenko A. P.
PARTIAL AVERAGING OF THE SYSTEMS ON TIME SCALES

Summary

The scheme of partial averaging of systems with small parameter on time scales was established. A proximity of solutions of given and partially averaged system of equations was proved under sufficiently general conditions. Obtained results extend an application area for previously developed numerically–asymptotic method of solution for optimal control problems on time scales.
Key words: time scale, averaging method, graininess function.

REFERENCES

1. Krylov, N. M. & Boholiubov, N. N. (1937). *Vvedenye v nelyneinuiu mekhanyku*, Izd-vo AN SSSR, 363 p.

2. Boholiubov, N. N. & Mitropolskyi, Yu. A. (1974). *Asymptotycheskye metody v teoryy nelyneinykh kolebanyi*, Moscow: Nauka, 503 p.

3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usrednenyia v zadachakh upravlenyia*, Izd-vo Lybid, Kyev-Odessa, 188 p.

4. Hilger, S. (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. thesis, Universität Würzburg.

5. Bohner, M. & Peterson, A. (2001). *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkhäuser Basel, 358 p.

6. Bohner, M. Peterson, A. et al. (2002). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Springer, 368 p.

7. Slavík, A. (2012). Averaging dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 388, no. 2., pp. 996–1012.

8. Plotnikov, V. A. & Yarovoi, A. T. (1979). Obosnovanye odnoi skhemy usrednenyia dlia system standartnoho vida, *Ukr. mat. zhurn.*, no. 2, pp. 166–171.

9. Ohulenko, A. P. & Kichmarenko, O. D. (2012). Skhema polnoho usrednenyia na vremennыkh shkalakh, *Vestnyk Odessk. nats. un-ta. Matem. y mekh.*, vol. 17, issue 4(16), pp. 67–77.

10. Ogulenko, A. P. & Kichmarenko, O. D. (2016). Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scalesi, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 212, no. 3, pp. 290–304.

11. Kichmarenko, O. D. & Ogulenko, A. P. (2017). Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 56, no. 1, pp. 33–43.