МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

ЕЛЕКТРОННІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 Прикладна математика

Одеса
ОНУ імені І. І. Мечникова
2026

УДК 517.956,539.3(076)
М545

Укладач:

З. Ю. Журавльова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

Ю. С. Процеров, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Є. М. Страхов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано вченою радою факультету математики,
фізики та інформаційних технологій
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 6 від 6 квітня 2026 р.

М545 **Метод** інтегральних перетворень [Електронний ресурс] : електрон. метод. рек. до практ. занять для здобувачів першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 113 Прикладна математика / уклад.: З. Ю. Журавльова. Одеса : ОНУ імені І. І. Мечникова, 2026. 70 с. 1,4 МБ.

Методичні рекомендації розроблені для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 113 Прикладна математика для опанування матеріалу при підготовці до практичних занять з методу інтегральних перетворень. У методичних рекомендаціях розкривається програма курсу, даються вказівки для опанування лекційним матеріалом на прикладах розв'язання конкретних задач математичної фізики.

УДК 517.956,539.3(076)

Зміст

Вступ

Дані методичні рекомендації присвячені методу інтегральних перетворень у контексті його застосування для розв’язання крайових задач математичної фізики, побудови функції Гріна та розв’язання розривних крайових задач теорії пружності. Даний матеріал дозволить здобувачам вищої освіти познайомитись з методом інтегральних перетворень на прикладі перетворень Фур’є, Лапласа та Ганкеля, побудови функції Гріна та використання її розривних властивостей для розв’язання антиплоских задач теорії пружності для областей з дефектами типу тріщини та жорсткого включення в декартовій системі координат. Дані методичні рекомендації є особливо корисними для здобувачів вищої освіти кафедри математичної фізики, а методи, що тут розглядаються, можуть бути використані при написанні курсових та дипломних робіт.

У методичних рекомендаціях використано наступні позначення:

- на рисунках у постановках задач усі стрілки показують навантаження за віссю 0z;
- штрих позначає похідну за першою змінною, а крапка – за другою;
- Г.Р. – це скорочене позначення довідника Градштейна І.С., Рижика І.М., джерело №6 у списці рекомендованої літератури.

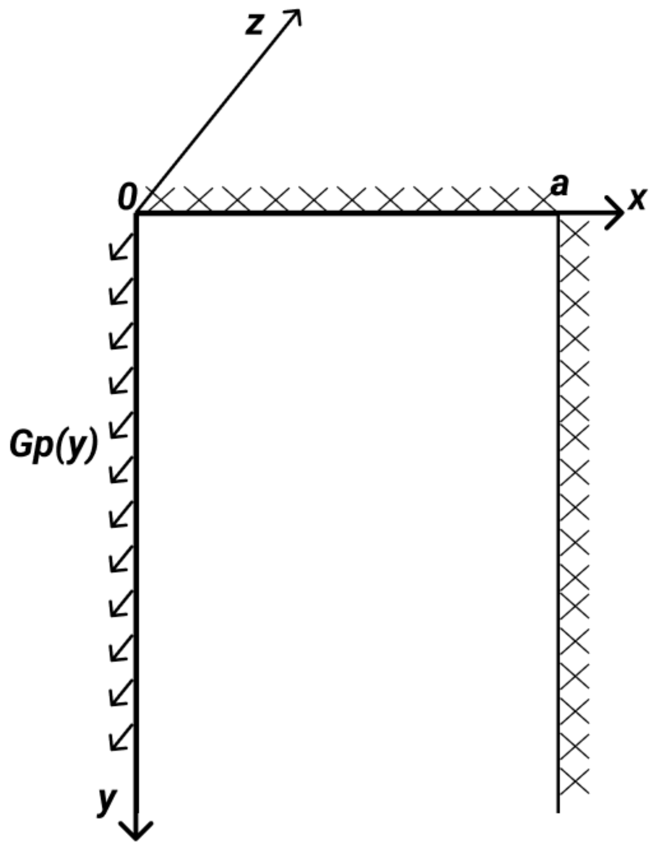
Інтегральне перетворення Фур'є

Застосування інтегрального перетворення Фур'є розглянемо на прикладі антиплоских задач теорії пружності, де шуканою функцією є функція переміщень відносно осі $0z$ - $w(x,y)$ (або $w(r,\theta)$ у полярній системі координат), а напруження τ_{xz},τ_{yz} (або $\tau_{rz},\tau_{\theta z}$ у полярній системі координат) виражаються через похідні функції переміщень.

Приклад 1.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв'язати за допомогою півнескінченного перетворення Фур'є

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, 0<x<a, 0<y<\infty \\ \tau_{xz}|_{x=0}=Gp(y), w|_{x=a}=0, \\ w|_{y=0}=0, w,\tau_{yz}\big|_{y\to\infty}\to 0 \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{xz}=G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz}=G\frac{\partial w}{\partial y}$ в антиплоскій задачі, де $w(x,y)=u_z(x,y)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = p(y), w|_{x=a} = 0, \\ w|_{y=0} = 0, w, \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши півнескінченне синус перетворення Фур'є за змінною y:

$$w_\alpha(x) = \int_0^\infty w(x,y)\sin\alpha y\, dy\ (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty w_\alpha(x)\sin\alpha y\, d\alpha\ \ (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\sin\alpha y$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\alpha y\, dy = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin\alpha y\, dy = \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin\alpha y\, dy + \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin\alpha y\, dy\ \ (3*)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin\alpha y\, dy = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty w(x,y)\sin\alpha y\, dy = \frac{d^2}{dx^2}w_\alpha(x)\ (4*)$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною y ($w|_{y=0} = 0, w, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0$):

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \alpha y \, dy = \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha y \Big|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha y \, dy$$

$$= -\alpha w \cos \alpha y|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha^2 \int_0^\infty w(x,y) \sin \alpha y \, dy = -\alpha^2 w_\alpha(x) \ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w''_\alpha(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною x ($\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = p(y), w|_{x=a} = 0$). Для цього помножимо обидві частини на $\sin \alpha y$ та проінтегруємо по змінній y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha y \, dy\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty w(x,y) \sin \alpha y \, dy\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx} w_\alpha|_{x=0} = p_\alpha, p_\alpha$$

$$= \int_0^\infty p(y) \sin \alpha y \, dy,$$

$$\int_0^\infty w(x,y) \sin \alpha y \, dy\Bigg|_{x=a} = w_\alpha|_{x=a} = 0$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w''_\alpha(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = 0, 0 < x < a \\ w'_\alpha(0) = p_\alpha, w_\alpha(a) = 0 \end{cases} \ (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(x) = C_0 ch\alpha(a-x) + C_1 sh\alpha(a-x)$$

$$w'_\alpha(x) = -C_0 \alpha sh\alpha(a-x) - C_1 \alpha ch\alpha(a-x)$$

$$w_\alpha(a) = 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(x) = C_1 sh\alpha(a-x), w'_\alpha(x) = -C_1 \alpha ch\alpha(a-x)$$

$$w'_\alpha(0) = p_\alpha => -C_1 \alpha ch\alpha a = p_\alpha => C_1 = -\frac{p_\alpha}{\alpha ch\alpha a} =>$$

$$w_\alpha(x) = -p_\alpha \frac{sh\alpha(a-x)}{\alpha ch\alpha a} = -p_\alpha \frac{e^{\alpha(a-x)} - e^{-\alpha(a-x)}}{\alpha(e^{\alpha a} + e^{-\alpha a})}$$

$$= -p_\alpha \frac{e^{-\alpha a}\left(e^{\alpha(a-x)} - e^{-\alpha(a-x)}\right)}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} = -p_\alpha \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha a})} \ (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

$$w(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty p_\alpha \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha a})} \sin \alpha y \, dy$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти p_α

$$w(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty p(\eta) \sin \alpha\eta \, d\eta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha a})} \sin \alpha y \, d\alpha$$

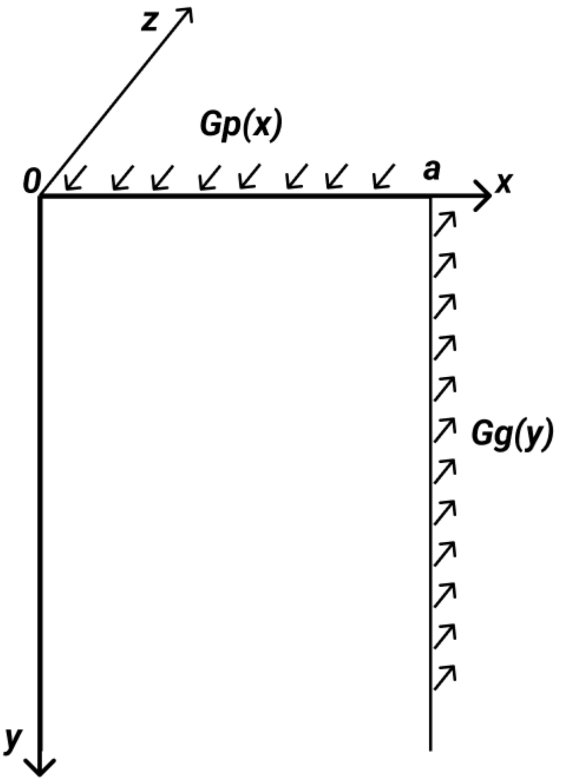
Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty p(\eta) d\eta \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha a})} (\cos \alpha(y-\eta) - \cos \alpha(y+\eta)) \, d\alpha$$

Приклад 2.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв'язати за допомогою півнескінченного перетворення Фур'є

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ \tau_{xz}|_{x=0} = 0, \tau_{xz}|_{x=a} = Gg(y), \\ \tau_{yz}\big|_{y=0} = Gp(x), w, \tau_{yz}\big|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}$ в антиплоскій задачі, де $w(x,y) = u_z(x,y)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a} = g(y), \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x), w, \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши півнескінченне косинус перетворення Фур'є за змінною y:

$$w_\alpha(x) = \int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\, dy \ (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty w_\alpha(x)\cos\alpha y\, d\alpha \ \ (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos\alpha y$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\alpha y\, dx = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\alpha y\, dy = \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\alpha y\, dy + \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\alpha y\, dy \ \ (3*)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\alpha y\, dy = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\, dy = \frac{d^2}{dx^2}w_\alpha(x) \ (4*)$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною y ($\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x), w, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0$):

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\alpha y\,dy = \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha y\bigg|_{y=0}^{y\to\infty} + \alpha\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha y\,dy$$

$$= -p(x) + \alpha w\sin\alpha y|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha^2\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy$$

$$= -\alpha^2 w_\alpha(x) - p(x)\ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = p(x)$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною x ($\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} = g(y)$). Для цього помножимо обидві частини на $\sin\alpha y$ та проінтегруємо по змінній y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha y\,dy\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}w_\alpha|_{x=0} = 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha y\,dy\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy\bigg|_{x=a} = \frac{d}{dx}w_\alpha|_{x=a} = g_\alpha, g_\alpha$$

$$= \int_0^\infty g(y)\cos\alpha y\,dy$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = p(x), 0 < x < a \\ w_\alpha'(0) = 0, w_\alpha'(a) = g_\alpha \end{cases} (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є неоднорідною крайовою задачею, тому для її розв’язання побудуємо функцію Гріна.

Функцію Гріна будемо будувати за наступною формулою

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \psi_0(x)U_0[\Phi(x,\xi)] - \psi_1(x)U_1[\Phi(x,\xi)]$$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв’язків (ФБСР). Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції $\psi_0(x), \psi_1(x)$ такі, що

$$\begin{cases} \psi_0'' - \alpha^2\psi_0 = 0, \\ \psi_0'(0) = 1, \psi_0'(a) = 0' \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_1'' - \alpha^2\psi_1 = 0, \\ \psi_1'(0) = 0, \psi_1'(a) = 1 \end{cases}$$

$$\psi_0(x) = C_{00}sh\alpha(a-x) + C_{01}ch\alpha(a-x), \qquad \psi_1(x) = C_{10}sh\alpha x + C_{11}ch\alpha x$$

$$\psi_0'(x) = -C_{00}\alpha ch\alpha(a-x) - C_{01}\alpha sh\alpha(a-x),$$
$$\psi_1'(x) = C_{10}\alpha ch\alpha x + C_{11}\alpha sh\alpha x$$
$$\psi_0'(a) = 0 \Rightarrow C_{00} = 0, \qquad \psi_1'(0) = 0 \Rightarrow C_{10} = 0$$
$$\psi_0'(0) = 1 \Rightarrow -C_{01}\alpha sh\alpha a = 1, \qquad \psi_1'(a) = 1 \Rightarrow C_{11}\alpha sh\alpha a = 1$$
$$C_{01} = -\frac{1}{\alpha sh\alpha a}, \qquad C_{11} = \frac{1}{\alpha sh\alpha a}$$
$$\psi_0(x) = -\frac{ch\alpha(a-x)}{\alpha sh\alpha a}, \qquad \psi_1(x) = \frac{ch\alpha x}{\alpha sh\alpha a}$$
$$\psi_0(x) = -\frac{e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, \qquad \psi_1(x) = \frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}$$

Фундаментальна функцію, що відповідає даному рівнянню, має наступний вигляд

$$\Phi(x,\xi) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}, \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{sign(x-\xi)}{2}e^{-\alpha|x-\xi|}$$

Підставимо фундаментальну функцію у крайові функціонали задачі

$$U_0[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(0,\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\alpha\xi}$$
$$U_1[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(a,\xi) = \frac{1}{2}e^{-\alpha(a-\xi)}$$

Тоді функція Гріна має наступний вигляд

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|} - \frac{1}{2}e^{-\alpha\xi}\frac{e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha(a-\xi)}\frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}$$
$$= -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}$$
$$-\frac{1}{2\alpha}\frac{e^{-\alpha(x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}$$

Розв’язок крайової задачі можна записати наступним чином:

$$w_\alpha(x) = \int\limits_0^a p(\xi)G(x,\xi)d\xi + g_\alpha \psi_1(x)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^a p(\xi)\left[e^{-\alpha|x-\xi|} + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}\right]d\xi + g_\alpha \frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})} \quad (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв’язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^a p(\xi)\left[e^{-\alpha|x-\xi|} + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}\right]d\xi + g_\alpha \frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}\right\}\cos\alpha y\, d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти g_α

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{-\frac{1}{2\alpha}\int\limits_0^a p(\xi)\left[e^{-\alpha|x-\xi|} + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}\right]d\xi + \int\limits_0^\infty g(\eta)\cos\alpha\eta\, d\eta \frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}\right\}\cos\alpha y\, d\alpha$$

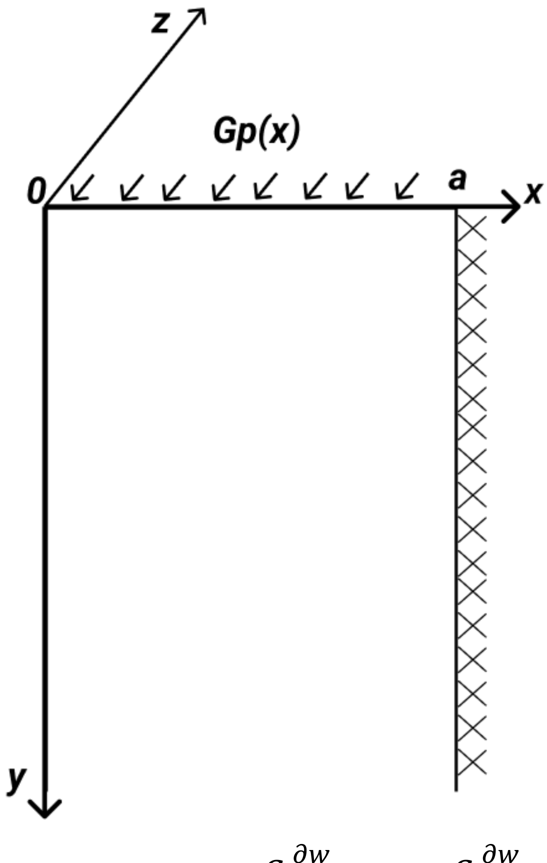
Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^a p(\xi)d\xi\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\Bigg[e^{-\alpha|x-\xi|}$$
$$+\frac{e^{-\alpha(x+\xi)}+e^{-\alpha(2a-x+\xi)}+e^{-\alpha(2a-x-\xi)}+e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}\Bigg]\cos\alpha y\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\eta)d\eta\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(a-x)}+e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}(\cos\alpha(y-\eta)$$
$$+(\cos\alpha(y-\eta))\,d\alpha$$

Приклад 3.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв’язати за допомогою півнескінченного та скінченного перетворення Фур’є

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, 0<x<a, 0<y<\infty\\ \tau_{xz}|_{x=0}=0, w|_{x=a}=0,\\ \tau_{yz}\big|_{y=0}=Gp(x), w,\tau_{yz}\big|_{y\to\infty}\to 0\end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{xz}=G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz}=G\frac{\partial w}{\partial y}$ в антиплоскій задачі, де $w(x,y)=u_z(x,y)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x), w, \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$

I спосіб

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши півнескінченне косинус перетворення Фур'є за змінною y:

$$w_\alpha(x) = \int_0^\infty w(x,y) \cos \alpha y \, dy \ (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w_\alpha(x) \cos \alpha y \, d\alpha \ \ (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos \alpha y$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \alpha y \, dx = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \alpha y \, dx = \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \alpha y \, dx + \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \alpha y \, dx \ \ (3*)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \alpha y \, dx = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty w(x,y) \cos \alpha y \, dy = \frac{d^2}{dx^2} w_\alpha(x) \ (4*)$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною y ($\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x), w, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0$):

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\alpha y\,dy = \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha y\Big|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha y\,dy$$

$$= -p(x) - \alpha w\sin\alpha y|_{y=0}^{y\to\infty} - \alpha^2\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy$$

$$= -\alpha^2 w_\alpha(x) - p(x)\ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = p(x)$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною x ($\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0$). Для цього помножимо обидві частини на $\sin\alpha y$ та проінтегруємо по змінній y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha y\,dy\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy\Bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}w_\alpha|_{x=0} = 0,$$

$$\int_0^\infty w(x,y)\cos\alpha y\,dy\Bigg|_{x=a} = w_\alpha|_{x=a} = 0$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = p(x), 0 < x < a \\ w_\alpha'(0) = 0, w_\alpha(a) = 0 \end{cases} (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є півнеоднорідною крайовою задачею, тому для її розв’язання побудуємо функцію Гріна.

Функцію Гріна будемо будувати за наступною формулою

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \psi_0(x)U_0[\Phi(x,\xi)] - \psi_1(x)U_1[\Phi(x,\xi)]$$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв’язків (ФБСР). Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції $\psi_0(x), \psi_1(x)$ такі, що

$$\begin{cases} \psi_0'' - \alpha^2\psi_0 = 0, \\ \psi_0'(0) = 1, \psi_0(a) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1'' - \alpha^2\psi_1 = 0, \\ \psi_1'(0) = 0, \psi_1(a) = 1 \end{cases}$$

$$\psi_0(x) = C_{00}sh\alpha(a-x) + C_{01}ch\alpha(a-x), \qquad \psi_1(x) = C_{10}sh\alpha x + C_{11}ch\alpha x$$

$$\psi_0'(x) = -C_{00}\alpha ch\alpha(a-x) - C_{01}\alpha sh\alpha(a-x),$$

$$\psi_1'(x) = C_{10}\alpha ch\alpha x + C_{11}\alpha sh\alpha x$$

$$\psi_0(a) = 0 => C_{01} = 0, \qquad \psi_1'(0) = 0 => C_{10} = 0$$

$$\psi_0'(0) = 1 => -C_{00}\alpha ch\alpha a = 1, \qquad \psi_1(a) = 1 => C_{11} ch\alpha a = 1$$

$$C_{00} = -\frac{1}{\alpha ch\alpha a}, \qquad C_{11} = \frac{1}{ch\alpha a}$$

$$\psi_0(x) = -\frac{sh\alpha(a-x)}{\alpha ch\alpha a}, \qquad \psi_1(x) = \frac{ch\alpha x}{ch\alpha a}$$

$$\psi_0(x) = -\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha a})}, \qquad \psi_1(x) = \frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{1+e^{-2\alpha a}}$$

Фундаментальна функцію, що відповідає даному рівнянню, має наступний вигляд

$$\Phi(x,\xi) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}, \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{sign(x-\xi)}{2}e^{-\alpha|x-\xi|}$$

Підставимо фундаментальну функцію у крайові функціонали задачі

$$U_0[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(0,\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\alpha\xi}$$

$$U_1[\Phi(x,\xi)] = \Phi(a,\xi) = -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(a-\xi)}$$

Тоді функція Гріна має наступний вигляд

$$\begin{aligned} G(x,\xi) = &-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|} - \frac{1}{2}e^{-\alpha\xi}\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha a})} \\ &+ \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(a-\xi)}\frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}}{1+e^{-2\alpha a}} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|} \\ &- \frac{1}{2\alpha}\frac{e^{-\alpha(x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x-\xi)} - e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1+e^{-2\alpha a}} \end{aligned}$$

Розв’язок крайової задачі можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} w_\alpha(x) = &\int_0^a p(\xi)G(x,\xi)d\xi \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\int_0^a p(\xi)\left[e^{-\alpha|x-\xi|}\right. \\ &\left. + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x-\xi)} - e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1+e^{-2\alpha a}}\right]d\xi \ (7*) \end{aligned}$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв’язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

$$w(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\int_0^a p(\xi)\left[e^{-\alpha|x-\xi|}\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x-\xi)} - e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1+e^{-2\alpha a}}\right] d\xi \cos\alpha y \, d\alpha$$

Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^a p(\xi)d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha|x-\xi|}\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\alpha(x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x+\xi)} - e^{-\alpha(2a-x-\xi)} - e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{1+e^{-2\alpha a}}\right] \cos\alpha y \, d\alpha$$

<u>II спосіб</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < \infty \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x), w, \left.\dfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне косинус перетворення Фур'є за змінною x:

$$w_\alpha(y) = \int_0^a w(x,y)\cos\alpha x \, dx \,, \alpha = \frac{\pi(2k-1)}{2a}, k = 1,2, \dots (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^\infty w_{\alpha_k}(y)\cos\alpha_k x \quad (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos\alpha x$ та проінтегруємо по x у межах від 0 до a:

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\alpha x \, dx = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cos\alpha x\,dx=\int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\alpha x\,dx+\int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\alpha x\,dx\ \ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos\alpha x\,dx=\frac{d^2}{dy^2}\int_0^a w(x,y)\cos\alpha x\,dx=\frac{d^2}{dy^2}w_\alpha(y)\ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною x ($\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=0, w|_{x=a}=0$):

$$\int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\alpha x\,dx=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha x\right|_{x=0}^{x=a}+\alpha\int_0^a \frac{\partial w}{\partial x}\sin\alpha x\,dx$$

$$=-\alpha w\sin\alpha x|_{x=0}^{x=a}-\alpha^2\int_0^a w(x,y)\cos\alpha x\,dx=-\alpha^2 w_\alpha(y)\ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(y)-\alpha^2 w_\alpha(y)=0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною y ($\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=p(x), w,\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to\infty}\to 0$). Для цього помножимо обидві частини на $\cos\alpha x$ та проінтегруємо по змінній x у межах від 0 до a:

$$\left.\int_0^a \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha x\,dx\right|_{y=0}=\left.\frac{d}{dy}\int_0^a w(x,y)\cos\alpha x\,dx\right|_{y=0}=\left.\frac{d}{dy}w_\alpha\right|_{y=0}=p_\alpha, p_\alpha$$

$$=\int_0^a p(x)\cos\alpha x\,dx,$$

$$\int_0^a w(x,y)\cos\alpha x\,dx\,,\left.\int_0^a \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha x\,dx\right|_{y\to\infty}=w_\alpha,\left.\frac{d}{dy}w_\alpha\right|_{y\to\infty}\to 0$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(y)-\alpha^2 w_\alpha(y)=0, 0<y<\infty \\ w_\alpha'(0)=p_\alpha, w_\alpha, w_\alpha'|_{y\to\infty}\to 0 \end{cases}\ (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(y)=C_0e^{\alpha y}+C_1e^{-\alpha y}$$

$$w'_\alpha(y) = C_0 \alpha e^{\alpha y} - C_1 \alpha e^{-\alpha y}$$

$$w_\alpha, w'_\alpha|_{y\to\infty} \to 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(y) = C_1 e^{-\alpha y}, w'_\alpha(y) = -C_1 \alpha e^{-\alpha y}$$

$$w'_\alpha(0) = p_\alpha => -C_1\alpha = p_\alpha => C_1 = -\frac{p_\alpha}{\alpha} =>$$

$$w_\alpha(y) = -p_\alpha \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \ (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

$$w(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty} p_\alpha \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \cos \alpha_k x$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти p_α

$$w(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a p(\xi) \cos \alpha\xi \, d\xi \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} \cos \alpha_k x$$

Змінимо порядок підсумовування та інтегрування

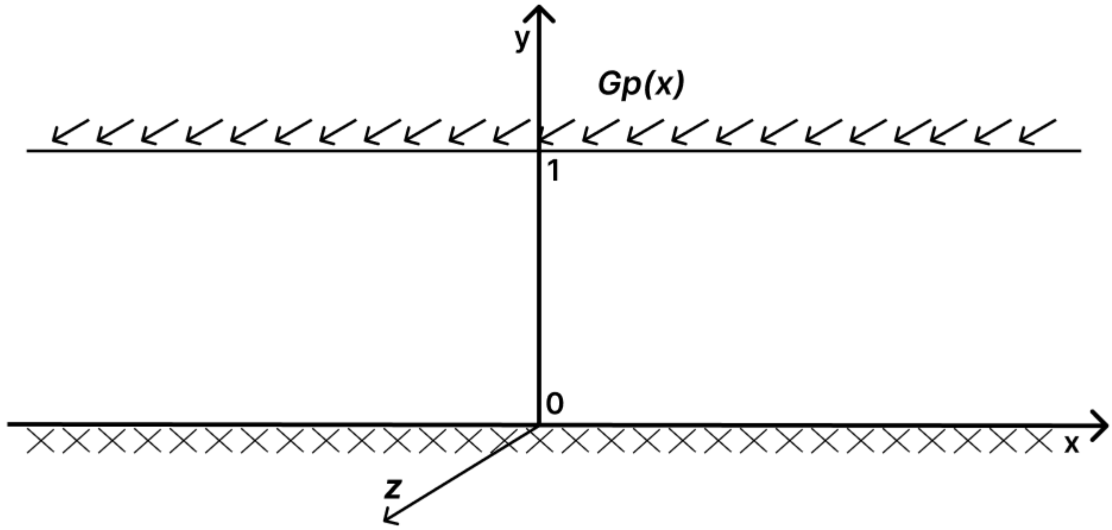
$$w(x,y) = -\frac{1}{a}\int_0^a p(\xi) d\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha y}}{\alpha} (\cos \alpha(\xi - x) + \cos \alpha(\xi + x))$$

У даному випадку розв'язок було отримано швидше ніж першим способом. Тому можна зробити висновок, що доцільно за можливості зводити задачу до одновимірної за тою змінною, за якою крайові умови є однорідними.

Приклад 4.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв'язати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, -\infty < x < \infty, 0 < y < 1 \\ w, \tau_{xz}|_{x\to\pm\infty} \to 0, \\ w|_{y=0} = 0, \tau_{yz}\big|_{y=1} = Gp(x) \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}$ в антиплоскій задачі, де $w(x, y) = u_z(x, y)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, -\infty < x < \infty, 0 < y < 1 \\ w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0, \\ w|_{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=1} = p(x) \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши повне перетворення Фур'є за змінною x:

$$w_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y)e^{i\alpha x}dx \; (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} w_\alpha(y)e^{-i\alpha x}d\alpha \;\; (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по x у межах від $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)e^{i\alpha x}dx = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}e^{i\alpha x}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}e^{i\alpha x}dx \ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}e^{i\alpha x}dx = \frac{d^2}{dy^2}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)e^{i\alpha x}dx = \frac{d^2}{dy^2}w_\alpha(y) \ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною x ($w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}e^{i\alpha x}dx = \frac{\partial w}{\partial x}e^{i\alpha x}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - i\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w}{\partial x}e^{i\alpha x}dx$$

$$= -i\alpha w e^{i\alpha x}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)e^{i\alpha x}dx = -\alpha^2 w_\alpha(y) \ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(y) - \alpha^2 w_\alpha(y) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною y ($w|_{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=1} = p(x)$). Для цього помножимо обидві частини на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по змінній x у межах від $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)e^{i\alpha x}dx\Big|_{y=0} = w_\alpha|_{y=0} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w}{\partial y}e^{i\alpha x}dx\Big|_{y=1} = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)e^{i\alpha x}dx\Big|_{y=1} = \frac{d}{dy}w_\alpha|_{y=1} = p_\alpha, p_\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\alpha x}dx$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(y) - \alpha^2 w_\alpha(y) = 0, 0 < y < 1 \\ w_\alpha(0) = 0, w_\alpha'(1) = p_\alpha \end{cases} \ (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (5*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(y) = C_0 ch\alpha y + C_1 sh\alpha y$$

$$w'_\alpha(y) = C_0 \alpha sh\alpha y + C_1 \alpha ch\alpha y$$

Сталі C_0, C_1 з крайових умов

$$w_\alpha(0) = 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(y) = C_1 sh\alpha y, w'_\alpha(y) = C_1 \alpha ch\alpha y$$

$$w'_\alpha(1) = p_\alpha => C_1 \alpha ch\alpha = p_\alpha => C_1 = \frac{p_\alpha}{\alpha ch\alpha}$$

$$w_\alpha(y) = p_\alpha \frac{sh\alpha y}{\alpha ch\alpha} = p_\alpha \frac{e^{-\alpha(1-y)} - e^{-\alpha(1+y)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha})} \ (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha \frac{e^{-\alpha(1-y)} - e^{-\alpha(1+y)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha})} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти p_α

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \frac{e^{-\alpha(1-y)} - e^{-\alpha(1+y)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha})} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

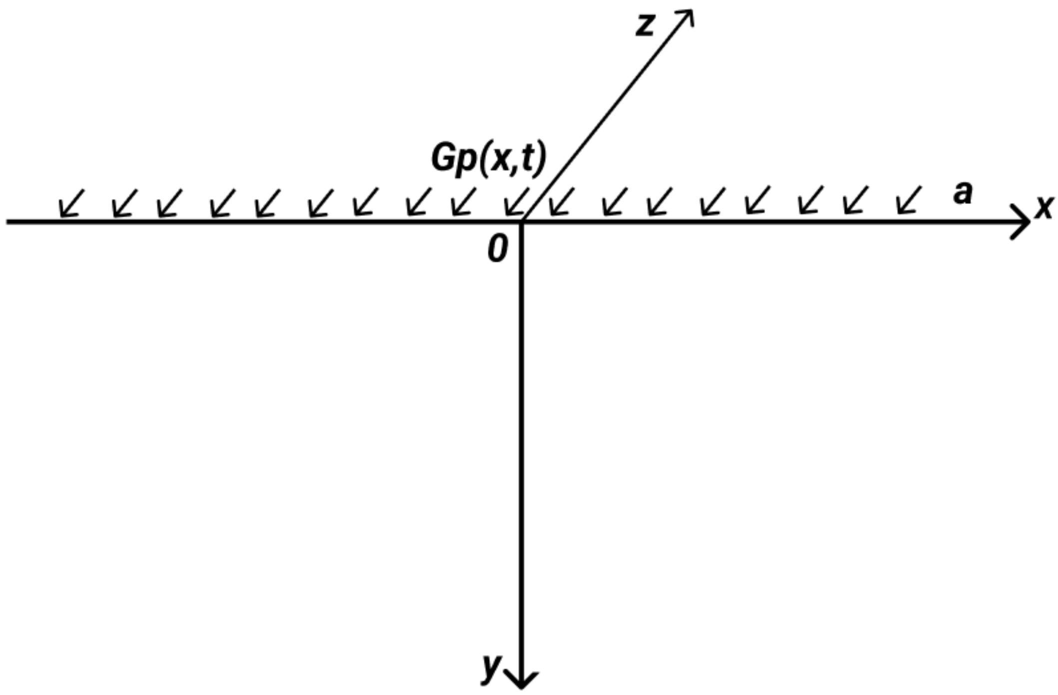
Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-\xi)} \frac{e^{-\alpha(1-y)} - e^{-\alpha(1+y)}}{\alpha(1+e^{-2\alpha})} d\alpha$$

Приклад 5.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв'язати за допомогою інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{\rho}{G} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, t > 0 \\ w, \tau_{xz}|_{x\to\pm\infty} \to 0, \\ \tau_{yz}\big|_{y=0} = Gp(x,t), w, \tau_{yz}\big|_{y\to+\infty} \to 0, \\ w|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{xz} = G\frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G\frac{\partial w}{\partial y}$ в антиплоскій задачі, де $w(x, y, t) = u_z(x, y, t)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, t > 0 \\ w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0} = p(x,t), w, \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y\to+\infty} \to 0, \\ w|_{t=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

1.1. Відповідно до таблиці інтегральних перетворень до даної задачі можна застосувати перетворення Лапласа за змінною t:

$$w_s(x, y) = \int_0^\infty w(x, y, t)e^{-st}dt \; (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} w_s(x, y)e^{st}ds \;\; (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення $e^{-\alpha t}$ та проінтегруємо по t у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) e^{-st} dt = \frac{\rho}{G} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} e^{-st} dt$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} e^{-st} dt + \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e^{-st} dt = \frac{\rho}{G} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} e^{-st} dt \ \ (3*)$$

У інтегралах у лівій частині (3*) змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty w(x, y, t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_s(x, y) \ (4*)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\infty w(x, y, t) e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_s(x, y) \ (5*)$$

Інтеграл у правій частині (3*) інтегруємо по частинам, враховуючи початкові умови за змінною t $(w|_{t=0} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0)$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} e^{-st} dt = \left.\frac{\partial w}{\partial t} e^{-st}\right|_{t=0}^{t\to\infty} + s \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial t} e^{-st} dt$$

$$= swe^{-st}|_{t=0}^{t\to\infty} + s^2 \int_0^\infty w(x, y, t) e^{-st} dx = s^2 w_s(x, y) \ (6*)$$

Підставляючи (4*), (5*), (6*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \frac{\rho s^2}{G} w_s$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінними x, y $(w, \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x\to\pm\infty} \to 0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = p(x, t), w, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y\to+\infty} \to 0)$. Для цього помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення $e^{-\alpha t}$ та проінтегруємо по t у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty w(x, y, t) e^{-st} dt, \left.\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} e^{-st} dt\right|_{x\to\pm\infty} = w_s, \left.\frac{\partial w_s}{\partial x}\right|_{x\to\pm\infty} \to 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} e^{-st} dt \bigg|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty w(x,y,t) e^{-st} dt \bigg|_{y=0} = \frac{\partial w_s}{\partial y}\bigg|_{y=0} = p_s(x), p_s(x)$$

$$= \int_0^\infty p(x,t) e^{-st} dt,$$

$$\int_0^\infty w(x,y,t) e^{-st} dt\,, \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} e^{-st} dt \bigg|_{y\to\infty} = w_s, \frac{\partial w_s}{\partial y}\bigg|_{y\to\infty} \to 0$$

В результаті приходимо до наступної крайової задачі у просторі трансформант Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \dfrac{\rho s^2}{G} w_s, -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty \\ w_s, \dfrac{\partial w_s}{\partial x}\bigg|_{x\to\pm\infty} \to 0, \\ \dfrac{\partial w_s}{\partial y}\bigg|_{y=0} = p_s(x), w_s, \dfrac{\partial w_s}{\partial y}\bigg|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases} \quad (7*)$$

1.2. Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши повне перетворення Фур'є за змінною x:

$$w_{s\alpha}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w_s(x,y) e^{i\alpha x} dx \; (8*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w_s(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_{s\alpha}(y) e^{-i\alpha x} d\alpha \;\; (9*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по x у межах від $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) e^{i\alpha x} dx = \frac{\rho s^2}{G} w_{s\alpha}$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 w_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx \;\; (10*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_S}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^{\infty} w_s(x,y) e^{i\alpha x} dx = \frac{d^2}{dy^2} w_{s\alpha}(y) \ (11*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною x $(w_s, \frac{\partial w_S}{\partial x}\Big|_{x\to\pm\infty} \to 0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{\partial w_S}{\partial x} e^{i\alpha x}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w_S}{\partial x} e^{i\alpha x} dx$$

$$= -i\alpha w_s e^{i\alpha x}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_s(x,y) e^{i\alpha x} dx = -\alpha^2 w_{s\alpha}(y) \ (12*)$$

Підставляючи (11*), (12*) до (10*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w''_{s\alpha}(y) - \left(\alpha^2 + \frac{\rho s^2}{G}\right) w_{s\alpha}(y) = 0$$

Для зручності позначимо $\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{\rho s^2}{G}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$w''_{s\alpha}(y) - \gamma^2 w_{s\alpha}(y) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (8*) до крайових умов вихідної задачі за змінною y $(\frac{\partial w_s}{\partial y}\Big|_{y=0} = p_s(x), w_s, \frac{\partial w_s}{\partial y}\Big|_{y\to\infty} \to 0)$. Для цього помножимо обидві частини на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по змінній x у межах від $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w_s}{\partial y} e^{i\alpha x} dx\Bigg|_{y=1} = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} w_s(x,y) e^{i\alpha x} dx\Bigg|_{y=1} = \frac{d}{dy} w_{s\alpha}|_{y=1} = p_{s\alpha}, p_{s\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x) e^{i\alpha x} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_s(x,y) e^{i\alpha x} dx\,, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w_s}{\partial y} e^{i\alpha x} dx\Bigg|_{y\to\infty} = w_{s\alpha}, \frac{dw_{s\alpha}}{dy}\Bigg|_{y\to\infty} \to 0$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w''_{s\alpha}(y) - \gamma^2 w_{s\alpha}(y) = 0, 0 < y < \infty \\ w'_{s\alpha}(0) = p_{s\alpha}, w_{s\alpha}, \frac{dw_{s\alpha}}{dy}\Big|_{y\to\infty} \to 0 \end{cases} \ (13*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (13*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_{s\alpha}(y) = C_0 e^{\gamma y} + C_1 e^{-\gamma y}$$
$$w'_{s\alpha}(y) = C_0 \gamma e^{\gamma y} - C_1 \gamma e^{-\gamma y}$$

Сталі C_0, C_1 з крайових умов

$$w_{s\alpha}, \frac{dw_{s\alpha}}{dy}\Big|_{y\to\infty} \to 0 => C_0 = 0 => w_{s\alpha}(y) = C_1 e^{-\gamma y}, w'_{s\alpha}(y) = -C_1 \gamma e^{-\gamma y}$$

$$w'_{s\alpha}(0) = p_{s\alpha} => -C_1\gamma = p_{s\alpha} => C_1 = -\frac{p_{s\alpha}}{\gamma} =>$$

$$w_{s\alpha}(y) = -p_{s\alpha}\frac{e^{-\gamma y}}{\gamma} = -p_{s\alpha}\frac{e^{-y\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}} \ (14*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

3.1. Застосовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Фур'є (9*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (14*), отримуємо

$$w_s(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p_{s\alpha}\frac{e^{-y\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти $p_{s\alpha}$

$$w_s(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_s(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\frac{e^{-y\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}} e^{-i\alpha x} d\alpha \ (15*)$$

3.2. Застосовуючи формулу обернення інтегрального перетворення Лапласа (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (15*), отримуємо

$$w(x,y,t) = -\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_s(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\frac{e^{-y\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}} e^{-i\alpha x} d\alpha\, e^{st} ds$$

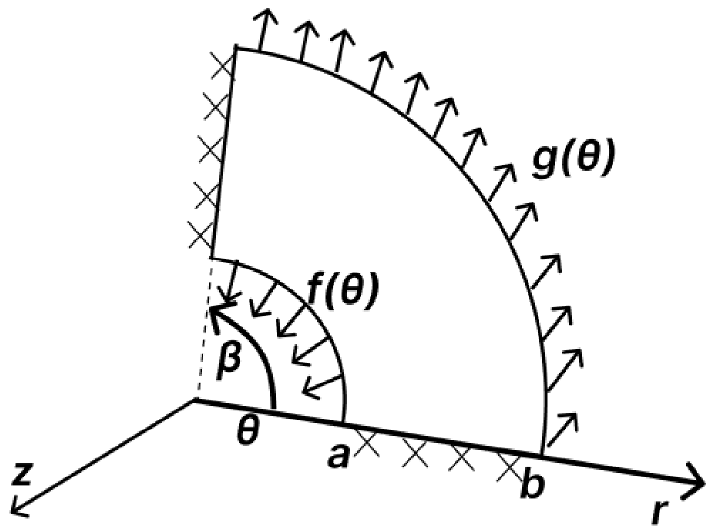
Підставимо сюди вираз для трансформанти $p_s(\xi)$

$$w(x,y,t)$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} p(\xi,\tau)e^{-s\tau}d\tau\, e^{i\alpha\xi}d\xi\frac{e^{-y\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{\rho s^2}{G}}} e^{-i\alpha x} d\alpha\, e^{st} ds$$

Приклад 6.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв’язати за допомогою інтегрального перетворення, вибраного оптимальним чином

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=0,0< \ a<r<b<\infty,0<\theta<\beta, \\ \tau_{rz}|_{r=a}=Gf(\theta),\tau_{rz}|_{r=b}=Gg(\theta),0<\theta<\beta, \\ w|_{\theta=0}=0,w|_{\theta=\beta}=0,a<r<b \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{rz}=G\frac{\partial w}{\partial r},\tau_{\theta z}=G\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$ в антиплоскій задачі, де $w(r,\theta)=u_z(r,\theta)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=0,0< \ a<r<b<\infty,0<\theta<\beta, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\theta),\left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b}=g(\theta),0<\theta<\beta, \\ w|_{\theta=0}=0,w|_{\theta=\beta}=0,a<r<b \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Зауважимо, що крайові умови по θ є однорідними, тому зручніше буде звести задачу до одновимірної, застосувавши інтегральне перетворення за змінною θ.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне синус перетворення Фур’є за змінною θ:

$$w_\alpha(r)=\int_0^\beta w(r,\theta)\sin\alpha\theta\,d\theta\,,\alpha=\frac{\pi k}{\beta},k=1,2,\dots(1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,\theta)=\frac{2}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}w_{\alpha_k}(r)\sin\alpha_k\theta \quad (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\sin\alpha\theta$ та проінтегруємо по θ у межах від 0 до β:

$$\int_0^{\beta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]\sin\alpha\theta\, d\theta=0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^{\beta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]\sin\alpha\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\beta}r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\sin\alpha\theta\, d\theta+\int_0^{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\sin\alpha\theta\, d\theta \quad (3*)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^{\beta}r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\sin\alpha\theta\, d\theta=r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\int_0^{\beta}w(r,\theta)\sin\alpha\theta\, d\theta$$

$$=r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_\alpha(r)}{dr}\right) \quad (4*)$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною θ ($w|_{\theta=0}=0, w|_{\theta=\beta}=0$):

$$\int_0^{\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\sin\alpha\theta\, d\theta=\frac{\partial w}{\partial\theta}\sin\alpha\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\beta}-\alpha\int_0^{\beta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\alpha\theta\, d\theta$$

$$=-\alpha w\cos\alpha\theta|_{\theta=0}^{\theta=\beta}-\alpha^2\int_0^{\beta}w(r,\theta)\sin\alpha\theta\, d\theta=-\alpha^2 w_\alpha(r) \quad (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_\alpha(r)}{dr}\right)-\alpha^2 w_\alpha(r)=0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною r ($\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta), \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = g(\theta)$). Для цього помножимо обидві частини на $\sin\alpha\theta$ та проінтегруємо по θ у межах від 0 до β:

$$\left.\int_0^\beta \frac{\partial w}{\partial r}\sin\alpha\theta\,d\theta\right|_{r=a} = \frac{d}{dr}\left.\int_0^\beta w(r,\theta)\sin\alpha\theta\,d\theta\right|_{r=a} = w'_\alpha|_{r=a} = f_\alpha, f_\alpha$$

$$= \int_0^\beta f(\theta)\sin\alpha\theta\,d\theta,$$

$$\left.\int_0^\beta \frac{\partial w}{\partial r}\sin\alpha\theta\,d\theta\right|_{r=b} = \frac{d}{dr}\left.\int_0^\beta w(r,\theta)\sin\alpha\theta\,d\theta\right|_{r=b} = w'_\alpha|_{r=b} = g_\alpha, g_\alpha$$

$$= \int_0^\beta g(\theta)\sin\alpha\theta\,d\theta$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} r\big(rw'_\alpha(r)\big)' - \alpha^2 w_\alpha(r) = 0, a < r < b \\ w'_\alpha(a) = f_\alpha, w'_\alpha(b) = g_\alpha \end{cases} \quad (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Диференціальне рівняння у (6*) є рівнянням Ейлера та, за допомогою підстановки $r = ae^t$, його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$r = ae^t, t = \ln\frac{r}{a}$$

$$v(t) = w_\alpha(ae^t) = w_\alpha(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = r$$

Тоді

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw_\alpha}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = rw'_\alpha(r),$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\big(rw'_\alpha(r)\big) = \frac{d}{dr}\big(rw'_\alpha(r)\big)\cdot\frac{dr}{dt} = r\big(rw'_\alpha(r)\big)'$$

При $r = a, t = 0$, при $r = b, t = \ln\frac{b}{a}$.

Позначимо для зручності $l = \ln\frac{b}{a}$.

$$w'_\alpha(a) = f_\alpha => v'(0) = af_\alpha$$

$$w'_\alpha(b) = g_\alpha => v'(l) = bg_\alpha$$

Тобто, після даної заміни крайова задача (6*) приймає наступний вигляд

$$\begin{cases} v'' - \alpha^2 v = 0, 0 < t < l \\ v'(0) = af_\alpha, v'(l) = bg_\alpha \end{cases} \quad (7*)$$

Одновимірна крайова задача (7*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$v(t) = C_0 ch\alpha t + C_1 sh\alpha t$$

$$v'(t) = \alpha C_0 sh\alpha t + \alpha C_1 ch\alpha t$$

$$v'(0) = af_\alpha \Rightarrow \alpha C_1 = af_\alpha \Rightarrow C_1 = \frac{a}{\alpha} f_\alpha \Rightarrow v(t) = C_0 ch\alpha t + \frac{a}{\alpha} f_\alpha sh\alpha t, v'(t) = \alpha C_0 sh\alpha t + af_\alpha ch\alpha t$$

$$v'(l) = bg_\alpha \Rightarrow \alpha C_0 sh(\alpha l) + af_\alpha ch(\alpha l) = bg_\alpha \Rightarrow C_0 = \frac{bg_\alpha - af_\alpha ch(\alpha l)}{\alpha sh(\alpha l)} \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{bg_\alpha - af_\alpha ch(\alpha l)}{\alpha sh(\alpha l)} ch\alpha t + \frac{a}{\alpha} f_\alpha sh\alpha t = g_\alpha \frac{bch\alpha t}{\alpha sh(\alpha l)} + \frac{a}{\alpha} f_\alpha \frac{sh\alpha t sh(\alpha l) - ch\alpha t ch(\alpha l)}{sh(\alpha l)} = g_\alpha \frac{bch\alpha t}{\alpha sh(\alpha l)} - \frac{a}{\alpha} f_\alpha \frac{ch\big(\alpha(l-t)\big)}{sh(\alpha l)} = g_\alpha \frac{b}{\alpha} \frac{e^{-\alpha(l-t)} + e^{-\alpha(l+t)}}{1 - e^{-2\alpha l}} - f_\alpha \frac{a}{\alpha} \frac{e^{-\alpha t} + e^{-\alpha(2l-t)}}{1 - e^{-2\alpha l}}$$

Повертаючись до $w_\alpha(r)$, отримуємо розв'язок у просторі трансформант

$$w_\alpha(r) = g_\alpha \frac{b}{\alpha} \frac{e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{r}{a}\right)} + e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{r}{a}\right)}}{1 - e^{-2\alpha \ln\frac{b}{a}}} - f_\alpha \frac{a}{\alpha} \frac{e^{-\alpha \ln\frac{r}{a}} + e^{-\alpha\left(2\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{r}{a}\right)}}{1 - e^{-2\alpha \ln\frac{b}{a}}} = g_\alpha \frac{b}{\alpha} \frac{e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{r}\right)} + e^{-\alpha\left(\ln\frac{br}{a^2}\right)}}{1 - e^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-2\alpha}}} - f_\alpha \frac{a}{\alpha} \frac{e^{-\alpha \ln\frac{r}{a}} + e^{-\alpha\left(\ln\frac{b^2}{ar}\right)}}{1 - e^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-2\alpha}}} = g_\alpha \frac{b}{\alpha} \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{a^2}{br}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} - f_\alpha \frac{a}{\alpha} \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^\alpha + \left(\frac{ar}{b^2}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \quad (8*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (8*), отримуємо

$$w(r,\theta) = \frac{2}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_\alpha \frac{b}{\alpha} \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^\alpha + \left(\frac{a^2}{br}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} - f_\alpha \frac{a}{\alpha} \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^\alpha + \left(\frac{ar}{b^2}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \right] \sin \alpha_k \theta$$

Підставимо сюди вирази для трансформант f_α, g_α

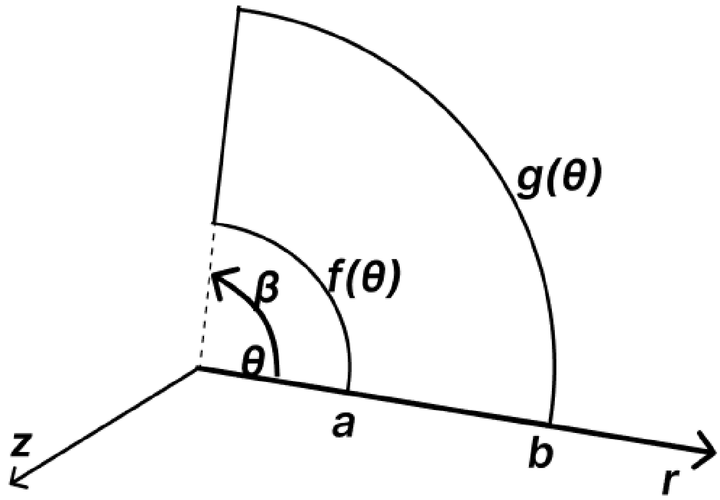
$$w(r,\theta)=\frac{2}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^{\beta} g(\varphi)\sin\alpha\varphi\,d\varphi\,\frac{b}{\alpha}\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a^2}{br}\right)^{\alpha}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\beta} f(\varphi)\sin\alpha\varphi\,d\varphi\,\frac{a}{\alpha}\frac{\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha}+\left(\frac{ar}{b^2}\right)^{\alpha}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}}\right]\sin\alpha_k\theta$$

Приклад 7.

Записати антиплоску задачу у термінах переміщень та розв'язати за допомогою інтегрального перетворення, вибраного оптимальним чином

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=0, 0< \ a<r<b<\infty, 0<\theta<\beta, \\ w|_{r=a}=f(\theta), w|_{r=b}=g(\theta), 0<\theta<\beta, \\ \tau_{\theta z}|_{\theta=0}=0, \tau_{\theta z}|_{\theta=\beta}=0, a<r<b \end{cases}$$



Враховуючи, що $\tau_{rz}=G\frac{\partial w}{\partial r}, \tau_{\theta z}=G\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$ в антиплоскій задачі, де $w(r,\theta)=u_z(r,\theta)$, перепишемо дану задачу у термінах переміщень

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=0, 0< \ a<r<b<\infty, 0<\theta<\beta, \\ w|_{r=a}=f(\theta), w|_{r=b}=g(\theta), 0<\theta<\beta, \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}=0, \left.\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\right|_{\theta=\beta}=0, a<r<b \end{cases}$$

Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Зауважимо, що крайові умови по θ є однорідними, тому зручніше буде звести задачу до одновимірної, застосувавши інтегральне перетворення за змінною θ.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне косинус перетворення Фур'є за змінною θ:

$$w_\alpha(r) = \int_0^\beta w(r,\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta\,, \alpha = \frac{\pi k}{\beta}, k = 1,2,\ldots (1*)$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,\theta) = \frac{1}{\beta}\left[w_0(r) + 2\sum_{k=1}^{\infty} w_{\alpha_k}(r)\cos\alpha_k\theta\right] (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos\alpha\theta$ та проінтегруємо по θ у межах від 0 до β:

$$\int_0^\beta \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]\cos\alpha\theta\, d\theta = 0$$

Розбиваємо інтеграл, що стоїть у лівій частині даної рівності на 2 доданки

$$\int_0^\beta \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]\cos\alpha\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^\beta r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\cos\alpha\theta\, d\theta + \int_0^\beta \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\cos\alpha\theta\, d\theta \;\; (3*)$$

У першому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^\beta r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\cos\alpha\theta\, d\theta = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\int_0^\beta w(r,\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta$$

$$= r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_\alpha(r)}{dr}\right) (4*)$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задані крайові умови за змінною θ ($\left.\frac{\partial w}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial\theta}\right|_{\theta=\beta} = 0$):

$$\int_0^\beta \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\cos\alpha\theta\, d\theta = \frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\alpha\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\beta} + \alpha\int_0^\beta \frac{\partial w}{\partial\theta}\sin\alpha\theta\, d\theta$$

$$= \alpha w\sin\alpha\theta|_{\theta=0}^{\theta=\beta} - \alpha^2\int_0^\beta w(r,\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta = -\alpha^2 w_\alpha(r)\ (5\,*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_\alpha(r)}{dr}\right) - \alpha^2 w_\alpha(r) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною r ($w|_{r=a} = f(\theta), w|_{r=b} = g(\theta)$). Для цього помножимо обидві частини на $\cos\alpha\theta$ та проінтегруємо по θ у межах від 0 до β:

$$\left.\int_0^\beta w(r,\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta\right|_{r=a} = w_\alpha|_{r=a} = f_\alpha, f_\alpha = \int_0^\beta f(\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta,$$

$$\left.\int_0^\beta w(r,\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta\right|_{r=b} = w_\alpha|_{r=b} = g_\alpha, g_\alpha = \int_0^\beta g(\theta)\cos\alpha\theta\, d\theta$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} r\big(rw'_\alpha(r)\big)' - \alpha^2 w_\alpha(r) = 0, a < r < b \\ w_\alpha(a) = f_\alpha, w_\alpha(b) = g_\alpha \end{cases} \quad (6\,*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Диференціальне рівняння у (6*) є рівнянням Ейлера та, за допомогою підстановки $r = ae^t$, його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$r = ae^t, t = \ln\frac{r}{a}$$

$$v(t) = w_\alpha(ae^t) = w_\alpha(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = r$$

Тоді

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw_\alpha}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = rw'_\alpha(r),$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d}{dt}\big(rw'_\alpha(r)\big) = \frac{d}{dr}\big(rw'_\alpha(r)\big)\cdot\frac{dr}{dt} = r\big(rw'_\alpha(r)\big)'$$

При $r = a, t = 0$, при $r = b, t = \ln\frac{b}{a}$.

Позначимо для зручності $l = \ln\frac{b}{a}$.

Тобто, після даної заміни крайова задача (6*) приймає наступний вигляд

$$\begin{cases} v'' - \alpha^2 v = 0, 0 < t < l \\ v(0) = f_\alpha, v(l) = g_\alpha \end{cases} \quad (7*)$$

<u>Розглянемо випадок $\alpha \neq 0$.</u>

Одновимірна крайова задача (7*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$v(t) = C_0 ch\alpha t + C_1 sh\alpha t$$

$$v(0) = f_\alpha => C_0 = f_\alpha => v(t) = f_\alpha ch\alpha t + C_1 sh\alpha t$$

$$v(l) = g_\alpha => f_\alpha ch(\alpha l) + C_1 sh(\alpha l) = g_\alpha => C_1 = \frac{g_\alpha - f_\alpha ch(\alpha l)}{sh(\alpha l)} =>$$

$$v(t) = f_\alpha ch\alpha t + \frac{g_\alpha - f_\alpha ch(\alpha l)}{sh(\alpha l)} sh\alpha t = f_\alpha \frac{ch\alpha t sh(\alpha l) - sh\alpha t ch(\alpha l)}{sh(\alpha l)} + g_\alpha \frac{sh\alpha t}{sh(\alpha l)}$$

$$= f_\alpha \frac{sh\big(\alpha(l-t)\big)}{sh(\alpha l)} + g_\alpha \frac{sh\alpha t}{sh(\alpha l)}$$

$$= f_\alpha \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(2l-t)}}{1 - e^{-2\alpha l}} + g_\alpha \frac{e^{-\alpha(l-t)} - e^{-\alpha(l+t)}}{1 - e^{-2\alpha l}}$$

Повертаючись до $w_\alpha(r)$, отримуємо розв'язок у просторі трансформант

$$w_\alpha(r) = f_\alpha \frac{e^{-\alpha \ln\frac{r}{a}} - e^{-\alpha\left(2\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{r}{a}\right)}}{1 - e^{-2\alpha\ln\frac{b}{a}}} + g_\alpha \frac{e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{r}{a}\right)} - e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{a} + \ln\frac{r}{a}\right)}}{1 - e^{-2\alpha\ln\frac{b}{a}}}$$

$$= f_\alpha \frac{e^{-\alpha\ln\frac{r}{a}} - e^{-\alpha\left(\ln\frac{b^2}{ar}\right)}}{1 - e^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-2\alpha}}} + g_\alpha \frac{e^{-\alpha\left(\ln\frac{b}{r}\right)} - e^{-\alpha\left(\ln\frac{br}{a^2}\right)}}{1 - e^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-2\alpha}}}$$

$$= f_\alpha \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^\alpha - \left(\frac{ar}{b^2}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} + g_\alpha \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^\alpha - \left(\frac{a^2}{br}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \quad (8*)$$

<u>Розглянемо випадок $\alpha = 0$.</u>

У даному випадку крайова задача приймає вигляд

$$\begin{cases} v'' = 0, 0 < t < l \\ v(0) = f_0, v(l) = g_0 \end{cases} \quad (9*)$$

Одновимірна крайова задача (9*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$v(t) = C_0 + C_1 t$$

$$v(0) = f_0 => C_0 = f_0 => v(t) = f_0 + C_1 t$$

$$v(l) = g_0 \Rightarrow f_0 + C_1 l = g_0 \Rightarrow C_1 = \frac{g_0 - f_0}{l} \Rightarrow$$

$$v(t) = f_0 + \frac{g_0 - f_0}{l} t = f_0 \frac{l - t}{l} + g_0 \frac{t}{l}$$

Повертаючись до $w_0(r)$, отримуємо розв'язок у просторі трансформант

$$w_0(r) = f_0 \frac{\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} + g_0 \frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} = f_0 \frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + g_0 \frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \quad (10*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманих розв'язків у просторі трансформант (8*), (10*), отримуємо

$$w(r,\theta) = \frac{1}{\beta}\left[f_0 \frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + g_0 \frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_\alpha \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^\alpha - \left(\frac{ar}{b^2}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} + g_\alpha \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^\alpha - \left(\frac{a^2}{br}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \right] \cos\alpha_k\theta \right]$$

Підставимо сюди вирази для трансформант f_α, g_α

$$w(r,\theta) = \frac{1}{\beta}\left[\int_0^\beta f(\varphi)d\varphi \frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}} + \int_0^\beta g(\varphi)d\varphi \frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}} \right.$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^\beta f(\varphi)\cos\alpha\varphi\, d\varphi \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^\alpha - \left(\frac{ar}{b^2}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\beta g(\varphi)\cos\alpha\varphi\, d\varphi \frac{\left(\frac{r}{b}\right)^\alpha - \left(\frac{a^2}{br}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha}} \right] \cos\alpha_k\theta \right]$$

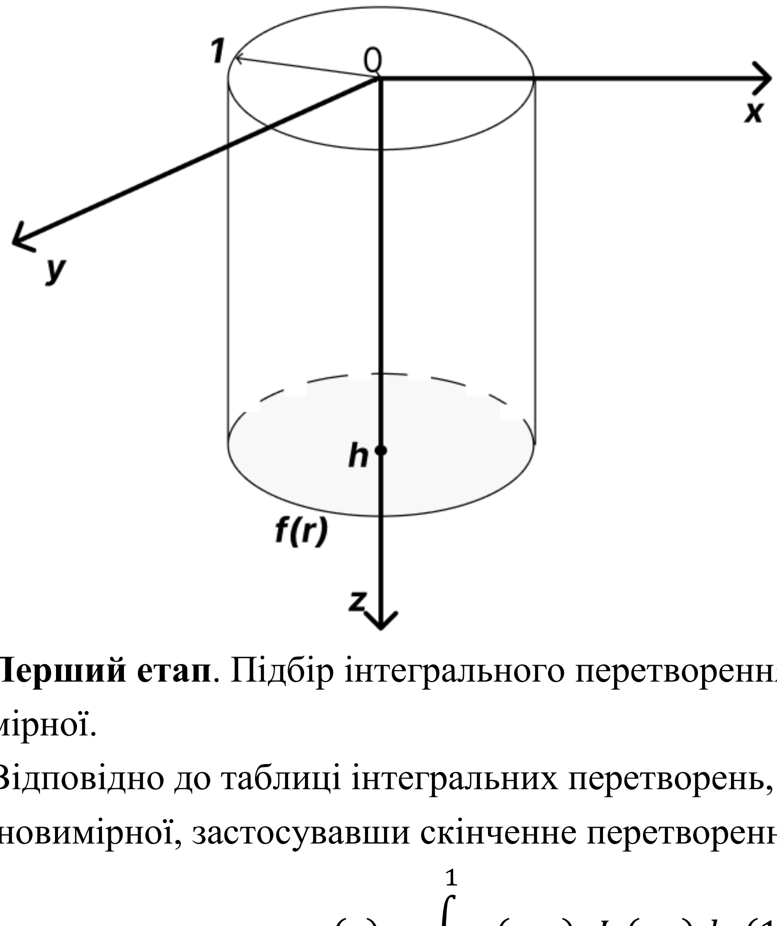
Інтегральне перетворення Ганкеля

Застосування інтегрального перетворення Ганкеля розглянемо на прикладі задач теплопровідності, де шуканою функцією є функція температури - $w(r, z)$. На границі може бути задана як сама температура, так і тепловий потік (нормальна похідна від $w(r, z)$).

Приклад 1.

Розв'язати крайову задачу теплопровідності за допомогою перетворення Ганкеля

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, 0 < r < 1, 0 < z < h, \\ \left(|w|, \left|\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|\right)\Big|_{r\to 0} < \infty, w|_{r=1} = 0, \\ w|_{z=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=h} = f(r) \end{cases}$$



Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне перетворення Ганкеля за змінною r:

$$w_\alpha(z) = \int_0^1 w(r, z) r J_0(\alpha r) dr \; (1*)$$

де $\alpha_k > 0$ – корені рівняння $J_0(\alpha) = 0$.

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} w_\alpha(z)\frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1^2(\alpha_k)} \ (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення $rJ_0(\alpha r)$ та проінтегруємо по r у межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] rJ_0(\alpha r)dr$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)J_0(\alpha r)dr + \int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} rJ_0(\alpha r)dr \ \ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} rJ_0(\alpha r)dr = \frac{d^2}{dz^2}\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr = \frac{d^2}{dz^2} w_\alpha(z) \ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи крайові умови за змінною r ($\left.\left(|w|, \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|\right)\right|_{r\to 0} < \infty, w|_{r=1} = 0$), а також те, що функції Бесселя задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right) + \alpha^2 J_0(\alpha r) = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)J_0(\alpha r)dr = \frac{\partial w}{\partial r} rJ_0(\alpha r)\bigg|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial r} r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)dr$$

$$= -wr\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\bigg|_{r=0}^{r=1} + \int_0^1 w(r,z)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right)dr$$

$$= \int_0^1 w(r,z)r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right) \pm \alpha^2 J_0(\alpha r)\right]dr$$

$$= -\alpha^2\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr = -\alpha^2 w_\alpha(z) \ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(z) - \alpha^2 w_\alpha(z) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною z ($w|_{z=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=h} = f(r)$). Для цього помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення $rJ_0(\alpha r)$ та проінтегруємо по r у межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 w(r,z) r J_0(\alpha r) dr\Bigg|_{z=0} = w_\alpha|_{z=0} = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial z} r J_0(\alpha r) dr\Bigg|_{z=h} = \frac{d}{dz}\int_0^1 w(r,z) r J_0(\alpha r) dr\Bigg|_{z=h} = \frac{d}{dz} w_\alpha\Big|_{z=h} = f_\alpha, f_\alpha$$

$$= \int_0^1 f(r) r J_0(\alpha r) dr$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(z) - \alpha^2 w_\alpha(z) = 0, 0 < z < h \\ w_\alpha(0) = 0, w_\alpha'(h) = f_\alpha \end{cases} \quad (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(z) = C_0 ch\alpha z + C_1 sh\alpha z$$
$$w_\alpha'(z) = C_0 \alpha sh\alpha z + C_1 \alpha ch\alpha z$$

Сталі C_0, C_1 знайдемо з крайових умов

$$w_\alpha(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \Rightarrow w_\alpha(z) = C_1 sh\alpha z, w_\alpha'(z) = C_1 \alpha ch\alpha z$$

$$w_\alpha'(h) = f_\alpha \Rightarrow C_1 \alpha ch\alpha h = f_\alpha \Rightarrow C_1 = \frac{f_\alpha}{\alpha ch\alpha h} \Rightarrow$$

$$w_\alpha(z) = f_\alpha \frac{sh\alpha z}{\alpha ch\alpha h} = f_\alpha \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h+z)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha h})} \quad (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв’язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

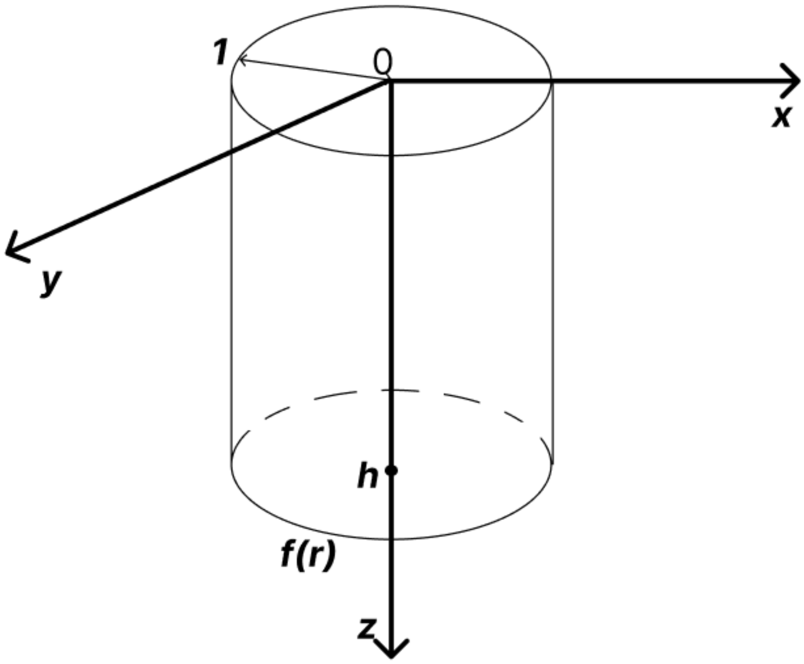
$$w(r,z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h+z)}}{\alpha(1 + e^{-2\alpha h})} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1^2(\alpha_k)}$$

де $f_\alpha = \int_0^1 f(r) r J_0(\alpha r) dr$.

Приклад 2.

Розв'язати крайову задачу теплопровідності за допомогою перетворення Ганкеля

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0, 0<r<1, 0<z<h, \\ \left(|w|,\left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|\right)\Big|_{r\to 0}<\infty, \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1}=0, \\ w|_{z=0}=0, w|_{z=h}=f(r) \end{cases}$$



Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне перетворення Ганкеля за змінною r:

$$w_\alpha(z)=\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr \quad (1*)$$

де $\alpha_k>0$ – корені рівняння $J_1(\alpha)=0$.

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,z)=2\sum_{k=1}^{\infty} w_\alpha(z)\frac{J_0(\alpha_k r)}{J_0^2(\alpha_k)} \quad (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення $rJ_0(\alpha r)$ та проінтегруємо по r у межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] rJ_0(\alpha r)dr$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)J_0(\alpha r)dr + \int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}rJ_0(\alpha r)dr \ \ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}rJ_0(\alpha r)dr = \frac{d^2}{dz^2}\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr = \frac{d^2}{dz^2}w_\alpha(z) \ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи крайові умови за змінною r $\left(\left(|w|, \left|\frac{\partial w}{\partial r}\right|\right)\Big|_{r\to 0} < \infty, \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0\right)$, а також $J_0'(r) = -J_1(r)$ та те, що функції Бесселя задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right) + \alpha^2 J_0(\alpha r) = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)J_0(\alpha r)dr = \frac{\partial w}{\partial r}rJ_0(\alpha r)\Big|_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)dr$$

$$= -wr\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\Big|_{r=0}^{r=1} + \int_0^1 w(r,z)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right)dr$$

$$= \int_0^1 w(r,z)r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(\alpha r)\right) \pm \alpha^2 J_0(\alpha r)\right]dr$$

$$= -\alpha^2\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr = -\alpha^2 w_\alpha(z) \ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(z) - \alpha^2 w_\alpha(z) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною z $(w|_{z=0} = 0, w|_{z=h} = f(r))$. Для цього помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення $rJ_0(\alpha r)$ та проінтегруємо по r у межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 w(r,z)rJ_0(\alpha r)dr\Bigg|_{z=0} = w_\alpha|_{z=0} = 0,$$

$$\left.\int_0^1 w(r,z) r J_0(\alpha r) dr\right|_{z=h} = w_\alpha|_{z=h} = f_\alpha, f_\alpha = \int_0^1 f(r) r J_0(\alpha r) dr$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(z) - \alpha^2 w_\alpha(z) = 0, 0 < z < h \\ w_\alpha(0) = 0, w_\alpha(h) = f_\alpha \end{cases} \quad (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(z) = C_0 ch\alpha z + C_1 sh\alpha z$$

Сталі C_0, C_1 знайдемо з крайових умов

$$w_\alpha(0) = 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(z) = C_1 sh\alpha z$$

$$w_\alpha(h) = f_\alpha => C_1 sh\alpha h = f_\alpha => C_1 = \frac{f_\alpha}{sh\alpha h} =>$$

$$w_\alpha(z) = f_\alpha \frac{sh\alpha z}{sh\alpha h} = f_\alpha \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h+z)}}{1 - e^{-2\alpha h}} \quad (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв’язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

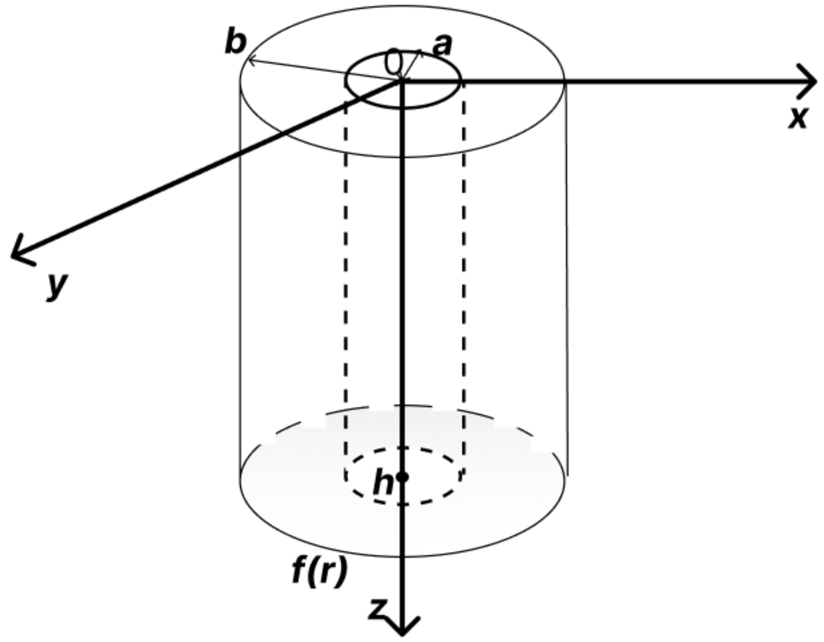
$$w(r,z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \frac{e^{-\alpha(h-z)} - e^{-\alpha(h+z)}}{1 - e^{-2\alpha h}} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_0^2(\alpha_k)}$$

де $f_\alpha = \int_0^1 f(r) r J_0(\alpha r) dr$.

Приклад 3.

Розв’язати крайову задачу теплопровідності за допомогою перетворення Ганкеля

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, 0 < \ a < r < b < \infty, 0 < z < h, \\ w|_{r=a} = 0, w|_{r=b} = 0, \\ w|_{z=0} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=h} = f(r) \end{cases}$$



Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне перетворення Ганкеля за змінною r:

$$w_\alpha(z) = \int_a^b w(r,z) r X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) dr \; (1*)$$

де $X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) = J_0\left(\alpha \frac{r}{a}\right) N_0(\alpha) - J_0(\alpha) N_0\left(\alpha \frac{r}{a}\right)$, $J_0(r), N_0(r)$ – функції Бесселя першого та другого роду відповідно, $\alpha_k > 0$ – корені рівняння $X\left(\alpha \frac{b}{a}\right) = J_0\left(\alpha \frac{b}{a}\right) N_0(\alpha) - J_0(\alpha) N_0\left(\alpha \frac{b}{a}\right) = 0$.

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_\alpha(z) \frac{X\left(\alpha_k \frac{r}{a}\right)}{\|X_k\|^2} \; (2*)$$

де $\frac{1}{\|X_k\|^2} = \frac{\pi^2 \alpha_k^2 J_0^2\left(\alpha_k \frac{b}{a}\right)}{2a^2\left[J_0^2(\alpha_k) - J_0^2\left(\alpha_k \frac{b}{a}\right)\right]}$.

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення $rX\left(\alpha \frac{r}{a}\right)$ та проінтегруємо по r у межах від a до b:

$$\int_a^b \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

$$=\int_a^b \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr+\int_a^b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr \ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=\frac{d^2}{dz^2}\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=\frac{d^2}{dz^2}w_\alpha(z) \ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи крайові умови за змінною r $(w|_{r=a}=0, w|_{r=b}=0)$, а також те, що функції Бесселя задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}J_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}N_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}N_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0$$

а отже

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=\frac{\partial w}{\partial r}rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=a}^{r=b}-\int_a^b \frac{\partial w}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

$$=-wr\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=a}^{r=b}+\int_a^b w(r,z)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)dr$$

$$=\int_a^b w(r,z)r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)\pm\frac{\alpha^2}{a^2}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right]dr$$

$$=-\frac{\alpha^2}{a^2}\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=-\frac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z) \ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(z)-\frac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z)=0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною z $\left(w|_{z=0}=0, \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_{z=h}=f(r)\right)$. Для цього помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення $rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)$ та проінтегруємо по r у межах від a до b:

$$\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\Bigg|_{z=0} = w_\alpha|_{z=0} = 0,$$

$$\int_a^b \frac{\partial w}{\partial z}rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\Bigg|_{z=h} = \frac{d}{dz}\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\Bigg|_{z=h} = \frac{d}{dz}w_\alpha\Big|_{z=h} = f_\alpha, f_\alpha$$

$$= \int_a^b f(r)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(z) - \frac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z) = 0, 0 < z < h \\ w_\alpha(0) = 0, w_\alpha'(h) = f_\alpha \end{cases} \quad (6*)$$

Другий етап. Розв'язання задачі у просторі трансформант.

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(z) = C_0 ch\frac{\alpha}{a}z + C_1 sh\frac{\alpha}{a}z$$

$$w_\alpha'(z) = C_0\frac{\alpha}{a}sh\frac{\alpha}{a}z + C_1\frac{\alpha}{a}ch\frac{\alpha}{a}z$$

Сталі C_0, C_1 знайдемо з крайових умов

$$w_\alpha(0) = 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(z) = C_1 sh\frac{\alpha}{a}z, w_\alpha'(z) = C_1\frac{\alpha}{a}ch\frac{\alpha}{a}z$$

$$w_\alpha'(h) = f_\alpha => C_1\frac{\alpha}{a}ch\frac{\alpha}{a}h = f_\alpha => C_1 = \frac{f_\alpha}{\frac{\alpha}{a}ch\frac{\alpha}{a}h} =>$$

$$w_\alpha(z) = f_\alpha\frac{sh\frac{\alpha}{a}z}{\frac{\alpha}{a}ch\frac{\alpha}{a}h} = af_\alpha\frac{e^{-\frac{\alpha}{a}(h-z)} - e^{-\frac{\alpha}{a}(h+z)}}{\alpha\left(1 + e^{-\frac{2\alpha h}{a}}\right)} \quad (7*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманого розв'язку у просторі трансформант (7*), отримуємо

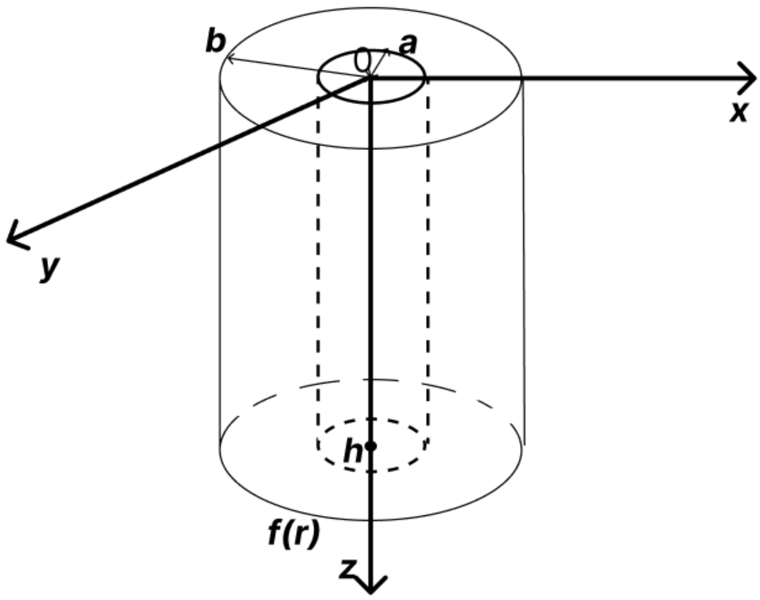
$$w(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} af_\alpha\frac{e^{-\frac{\alpha}{a}(h-z)} - e^{-\frac{\alpha}{a}(h+z)}}{\alpha\left(1 + e^{-\frac{2\alpha h}{a}}\right)}\frac{X\left(\alpha_k\frac{r}{a}\right)}{\|X_k\|^2}$$

де $f_\alpha = \int_a^b f(r) r X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) dr$.

Приклад 4.

Розв'язати крайову задачу теплопровідності за допомогою перетворення Ганкеля

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, 0 < a < r < b < \infty, 0 < z < h, \\ \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b} = 0, \\ w|_{z=0} = 0, w|_{z=h} = f(r) \end{cases}$$



Перший етап. Підбір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної.

Відповідно до таблиці інтегральних перетворень, дану задачу можна звести до одновимірної, застосувавши скінченне перетворення Ганкеля за змінною r:

$$w_\alpha(z) = \int_a^b w(r,z) r X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) dr \ (1*)$$

де $X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) = J_0\left(\alpha \frac{r}{a}\right) N_1(\alpha) - J_1(\alpha) N_0\left(\alpha \frac{r}{a}\right)$, $J_0(r), N_0(r)$ – функції Бесселя першого та другого роду відповідно, $\alpha_k > 0$ – корені рівняння $J_1\left(\alpha \frac{b}{a}\right) N_1(\alpha) - J_1(\alpha) N_1\left(\alpha \frac{b}{a}\right) = 0$.

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(r,z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_\alpha(z)\frac{X\left(\alpha_k \frac{r}{a}\right)}{\|X_k\|^2}\ (2*)$$

де $\frac{1}{\|X_k\|^2}=\begin{cases}\frac{\pi^2\alpha_k^2 J_1^2\left(\alpha_k\frac{b}{a}\right)}{2a^2\left[J_1^2(\alpha_k)-J_1^2\left(\alpha_k\frac{b}{a}\right)\right]}, k>0,\\ \frac{2}{b^2-a^2}, k=0\end{cases}.$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на ядро інтегрального перетворення $rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)$ та проінтегруємо по r у межах від a до b:

$$\int_a^b\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr+\int_a^b\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\ (3*)$$

У другому інтегралі змінюємо порядок інтегрування та диференціювання:

$$\int_a^b\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=\frac{d^2}{dz^2}\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr=\frac{d^2}{dz^2}w_\alpha(z)\ (4*)$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи крайові умови за змінною r ($\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a}=0, \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=b}=0$), а також $J_0'(r)=-J_1(r)\,, N_0'(r)=-N_1(r)$, тобто $X'\left(\alpha\frac{b}{a}\right)=0$ та те, що функції Бесселя задовольняють рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}J_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}N_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}N_0\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0$$

а отже

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)=0$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr = \frac{\partial w}{\partial r}rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=a}^{r=b} - \int_a^b \frac{\partial w}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

$$= -wr\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\Big|_{r=a}^{r=b} + \int_a^b w(r,z)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right)dr$$

$$= \int_a^b w(r,z)r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right) \pm \frac{\alpha^2}{a^2}X\left(\alpha\frac{r}{a}\right)\right]dr$$

$$= -\frac{\alpha^2}{a^2}\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr = -\frac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z)\ (5*)$$

Підставляючи (4*), (5*) до (3*), отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант:

$$w_\alpha''(z) - \frac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z) = 0$$

Застосуємо інтегральне перетворення (1*) до крайових умов вихідної задачі за змінною z ($w|_{z=0} = 0, w|_{z=h} = f(r)$). Для цього помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення $rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)$ та проінтегруємо по r у межах від a до b:

$$\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\Bigg|_{z=0} = w_\alpha|_{z=0} = 0,$$

$$\int_a^b w(r,z)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr\Bigg|_{z=h} = w_\alpha|_{z=h} = f_\alpha, f_\alpha = \int_a^b f(r)rX\left(\alpha\frac{r}{a}\right)dr$$

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} w_\alpha''(z) - \dfrac{\alpha^2}{a^2}w_\alpha(z) = 0, 0 < z < h \\ w_\alpha(0) = 0, w_\alpha(h) = f_\alpha \end{cases} (6*)$$

Другий етап. Розв’язання задачі у просторі трансформант.

<u>Розглянемо випадок $\alpha \neq 0$.</u>

Одновимірна крайова задача (6*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв’язок можна записати через ФСР як

$$w_\alpha(z) = C_0 ch\frac{\alpha}{a}z + C_1 sh\frac{\alpha}{a}z$$

Сталі C_0, C_1 знайдемо з крайових умов

$$w_\alpha(0) = 0 => C_0 = 0 => w_\alpha(z) = C_1 sh\frac{\alpha}{a}z$$

$$w_\alpha(h) = f_\alpha => C_1 sh\frac{\alpha h}{a} = f_\alpha => C_1 = \frac{f_\alpha}{sh\frac{\alpha h}{a}} =>$$

$$w_\alpha(z) = f_\alpha \frac{sh\frac{\alpha}{a}z}{sh\frac{\alpha h}{a}} = f_\alpha \frac{e^{-\frac{\alpha}{a}(h-z)} - e^{-\frac{\alpha}{a}(h+z)}}{1 - e^{-\frac{2\alpha h}{a}}} \ (7*)$$

<u>Розглянемо випадок $\alpha = 0$.</u>

У даному випадку крайова задача (6*) приймає наступний вигляд

$$\begin{cases} w_0''(z) = 0, 0 < z < h \\ w_0(0) = 0, w_0(h) = f_0 \end{cases} (8*)$$

Одновимірна крайова задача (8*) є крайовою задачею з однорідним рівнянням, тому її розв'язок можна записати через ФСР як

$$w_0(z) = C_0 + C_1 z$$

Сталі C_0, C_1 знайдемо з крайових умов

$$w_0(0) = 0 => C_0 = 0 => w_0(z) = C_1 z$$

$$w_0(h) = f_0 => C_1 h = f_0 => C_1 = \frac{f_0}{h} =>$$

$$w_0(z) = f_0 \frac{z}{h} \ (9*)$$

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Застосовуючи формулу обернення (2*) до отриманих розв'язків у просторі трансформант (7*), (9*), отримуємо

$$w(r,z) = f_0 \frac{z}{h} \frac{X\left(\alpha_0 \frac{r}{a}\right)}{\|X_0\|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_\alpha \frac{e^{-\frac{\alpha}{a}(h-z)} - e^{-\frac{\alpha}{a}(h+z)}}{1 - e^{-\frac{2\alpha h}{a}}} \frac{X\left(\alpha_k \frac{r}{a}\right)}{\|X_k\|^2}$$

де $f_\alpha = \int_a^b f(r) r X\left(\alpha \frac{r}{a}\right) dr$.

Побудова фундаментальної функції та функції Гріна

Приклад 1.

Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$\begin{cases} u''(x) - \alpha^2 u(x) = f(x), 0 < x < a \\ u'(0) = 0, u'(a) = 0 \end{cases}$$

за допомогою фундаментальної функції.

Фундаментальна функцію, що відповідає даному рівнянню, має наступний вигляд

$$\Phi(x,\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|x-\xi|}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{sign(x-\xi)}{2} e^{-\alpha|x-\xi|} \quad (1*)$$

Підставимо фундаментальну функцію у крайові функціонали задачі

$$U_0[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,\xi) = -\frac{1}{2} e^{-\alpha\xi}$$

$$U_1[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(a,\xi) = \frac{1}{2} e^{-\alpha(a-\xi)}$$

Як бачимо, фундаментальна функція (1*) не задовольняє жодній з крайових умов вихідної задачі, тобто потрібно буде 2 рази скористатися теоремою, будуючи функцію Гріна за формулою

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \frac{\widetilde{U}_m[\Phi] U_m[\Phi]}{U_m\left[\widetilde{U}_m[\Phi]\right]}$$

де

$$U_m[\Phi] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{m,j} \frac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}\bigg|_{x=a} + \beta_{m,j} \frac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}\bigg|_{x=b} \right],$$

$$\widetilde{U}_m[\Phi] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\alpha_{m,j} \frac{\partial^j \Phi}{\partial \xi^j}\bigg|_{\xi=a} + \beta_{m,j} \frac{\partial^j \Phi}{\partial \xi^j}\bigg|_{\xi=b} \right]$$

1. **Застосуємо теорему за першою крайовою умовою**

Підставимо фундаментальну функцію $\Phi(x,\xi)$ (1*) у крайовий функціонал $\widetilde{U}_0[\Phi]$, тобто застосуємо до неї першу крайову умову вихідної задачі, але за змінною ξ, враховуючи, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{sign(\xi - x)}{2} e^{-\alpha|x-\xi|}$$

$$\widetilde{U}_0[\Phi(x,\xi)] = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(x,0) = -\frac{1}{2} e^{-\alpha x}$$

Обчислимо вираз $U_0\left[\widetilde{U}_0[\Phi]\right]$:

$$U_0\left[\widetilde{U}_0[\Phi]\right]=\left.\frac{\partial \widetilde{U}_0[\Phi(x,\xi)]}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x}\right|_{x=0}=\frac{\alpha}{2}$$

Тоді

$$G_0(x,\xi)=\Phi(x,\xi)-\frac{\widetilde{U}_0[\Phi]U_0[\Phi]}{U_0\left[\widetilde{U}_0[\Phi]\right]}=-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}-\frac{\left(-\frac{1}{2}e^{-\alpha x}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-\alpha\xi}\right)}{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha(x+\xi)}=-\frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|x-\xi|}+e^{-\alpha(x+\xi)}\right)\ (2\,*)$$

2. Застосуємо теорему за другою крайовою умовою

Підставимо фундаментальну функцію $G_0(x,\xi)$ (2*) у другу крайову умову задачі, враховуючи, що

$$\frac{\partial G_0}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(sign(x-\xi)e^{-\alpha|x-\xi|}+e^{-\alpha(x+\xi)}\right)$$

$$U_1[G_0]=\frac{\partial G_0}{\partial x}(a,\xi)=\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha(a-\xi)}+e^{-\alpha(a+\xi)}\right)$$

Підставимо фундаментальну функцію $G_0(x,\xi)$ (2*) у крайовий функціонал $\widetilde{U}_1[G_0]$, тобто застосуємо до неї першу крайову умову вихідної задачі, але за змінною ξ, враховуючи, що

$$\frac{\partial G_0}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(sign(\xi-x)e^{-\alpha|x-\xi|}+e^{-\alpha(x+\xi)}\right)$$

$$\widetilde{U}_1[G_0(x,\xi)]=\frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x,a)=\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha(a-x)}+e^{-\alpha(a+x)}\right)$$

Обчислимо вираз $U_1\left[\widetilde{U}_1[G_0]\right]$:

$$U_1\left[\widetilde{U}_1[G_0]\right]=\left.\frac{\partial \widetilde{U}_1[G_0(x,\xi)]}{\partial x}\right|_{x=a}=\left.\frac{\alpha}{2}\left(e^{-\alpha(a-x)}-e^{-\alpha(a+x)}\right)\right|_{x=a}=\frac{\alpha}{2}\left(1-e^{-2\alpha a}\right)$$

Тоді

$$G(x,\xi) = G_0(x,\xi) - \frac{\widetilde{U}_1[G_0]U_1[G_0]}{U_1\left[\widetilde{U}_1[G_0]\right]}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)$$

$$- \frac{\left[\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(e^{-\alpha(a-\xi)} + e^{-\alpha(a+\xi)}\right)\right]}{\frac{\alpha}{2}(1-e^{-2\alpha a})}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right) - \frac{1}{2\alpha}\frac{\left(e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(a+x)}\right)\left(e^{-\alpha(a-\xi)} + e^{-\alpha(a+\xi)}\right)}{1-e^{-2\alpha a}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)$$

$$- \frac{1}{2\alpha}\frac{e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a+x+\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|}$$

$$- \frac{1}{2\alpha}\frac{e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(2a+x+\xi)} + e^{-\alpha(x+\xi)}(1-e^{-2\alpha a})}{1-e^{-2\alpha a}}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|x-\xi|} - \frac{1}{2\alpha}\frac{e^{-\alpha(2a-x-\xi)} + e^{-\alpha(2a+x-\xi)} + e^{-\alpha(2a-x+\xi)} + e^{-\alpha(x+\xi)}}{1-e^{-2\alpha a}}$$

Дана функція ідентична тій, що була побудована раніше для крайової задачі такої структури, але іншим способом.

Відмітимо, що даний спосіб краще використовувати, якщо фундаментальна функція задовольняє одну з крайових умов. У іншому випадку простіше будувати функцію Гріна за другим способом.

Приклад 2.

Для крайової задачі

$$\begin{cases} u''(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), 0 < x < a \\ u'(0) = 0, u'(a) = 0 \end{cases}$$

за допомогою методу інтегральних перетворень побудувати фундаментальну функцію, що задовольняє диференціальне рівняння та першу крайову умову. А потім з її допомогою побудувати функцію Гріна.

1. **Побудова фундаментальної функції.**

Для побудови фундаментальної функції, яка б задовольняла першій крайовій умові, скористаємось півнескінченним косинус-перетворенням Фур’є:

$$u_\alpha = \int_0^\infty u(x)\cos\alpha x\,dx$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty u_\alpha \cos\alpha x\,d\alpha \quad (1*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\cos\alpha x$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty \left(u''(x) - \lambda^2 u(x)\right)\cos\alpha x\,dx = \int_0^\infty u''(x)\cos\alpha x\,dx - \lambda^2 u_\alpha = f_\alpha$$

де $f_\alpha = \int_0^a f(x)\cos\alpha x\,dx$.

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи задану крайову умову ($u'(0) = 0$) та додатково вважаючи, що функція $u(x)$ та її похідна прямують до нуля на нескінченності ($u, u'|_{x\to\infty} \to 0$):

$$\int_0^\infty u''(x)\cos\alpha x\,dx = u'(x)\cos\alpha x|_{x=0}^{x\to\infty} + \alpha\int_0^\infty u'(x)\sin\alpha x\,dx$$

$$= \alpha u(x)\sin\alpha x|_{x=0}^{x\to\infty} - \alpha^2\int_0^\infty u(x)\cos\alpha x\,dx = -\alpha^2 u_\alpha$$

Таким чином отримали наступне алгебраїчне рівняння відносно u_α

$$-(\alpha^2 + \lambda^2)u_\alpha = f_\alpha$$

Звідси отримуємо

$$u_\alpha = -\frac{f_\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2} \quad (2*)$$

Застосуємо формулу обернення (1*) до (2*):

$$u(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_\alpha \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2 + \lambda^2}d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти f_α:

$$u(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^a f(\xi)\cos\alpha\xi\,d\xi \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2 + \lambda^2}d\alpha$$

Змінимо порядок інтегрування

$$u(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^a f(\xi)d\xi \int_0^\infty \frac{\cos\alpha(x-\xi) + \cos\alpha(x+\xi)}{\alpha^2 + \lambda^2}d\alpha$$

Для обчислення інтегралів вигляду $\int_0^{\infty}\frac{\cos \alpha z}{\alpha^2+\lambda^2}d\alpha$ скористаємось формулою Г.Р. 3.723(2)

$$2.\quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\beta^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2\beta}e^{-a\beta} \qquad [a>0,\ \operatorname{Re}\beta>0].$$

При цьому будемо враховувати умову додатності аргументів

$$u(x) = -\frac{1}{2|\lambda|}\int_0^a f(\xi)\left(e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right)d\xi$$

Таким чином фундаментальна функція вихідної крайової задачі, що задовольняє першій крайовій умові має наступний вигляд

$$\Phi(x,\xi) = -\frac{1}{2|\lambda|}\left(e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right)\ (3*)$$

2. Побудова функції Гріна.

Побудуємо функцію Гріна за формулою

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \frac{\widetilde{U}_m[\Phi]U_m[\Phi]}{U_m\left[\widetilde{U}_m[\Phi]\right]}$$

де

$$U_m[\Phi] = \sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_{m,j}\frac{\partial^j\Phi}{\partial x^j}\bigg|_{x=a} + \beta_{m,j}\frac{\partial^j\Phi}{\partial x^j}\bigg|_{x=b}\right],$$

$$\widetilde{U}_m[\Phi] = \sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_{m,j}\frac{\partial^j\Phi}{\partial \xi^j}\bigg|_{\xi=a} + \beta_{m,j}\frac{\partial^j\Phi}{\partial \xi^j}\bigg|_{\xi=b}\right]$$

При цьому будемо враховувати, що фундаментальна функція (3*) не задовольняє лише другій крайовій умові.

Підставимо фундаментальну функцію $\Phi(x,\xi)$ (3*) у крайовий функціонал $U_1[\Phi]$, тобто застосуємо до неї другу крайову умову вихідної задачі, враховуючи, що

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[sign(x-\xi)e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right]$$

$$U_1[\Phi] = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(a,\xi) = \frac{1}{2}\left[e^{-|\lambda|(a-\xi)} + e^{-|\lambda|(a+\xi)}\right]$$

Підставимо фундаментальну функцію $\Phi(x,\xi)$ (3*) у крайовий функціонал $\widetilde{U}_1[\Phi]$, тобто застосуємо до неї другу крайову умову вихідної задачі, але за змінною ξ, враховуючи, що

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left[sign(\xi-x)e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right]$$

$$\widetilde{U}_1[\Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(x,a) = \frac{1}{2}\left[e^{-|\lambda|(a-x)} + e^{-|\lambda|(x+a)}\right]$$

Обчислимо вираз $U_1\left[\widetilde{U}_1[\Phi]\right]$:

$$U_1\left[\widetilde{U}_1[\Phi]\right] = \frac{\partial \widetilde{U}_1[\Phi]}{\partial x}\bigg|_{x=a} = \frac{|\lambda|}{2}\left[e^{-|\lambda|(a-x)} - e^{-|\lambda|(x+a)}\right]\bigg|_{x=a} = \frac{|\lambda|}{2}\left(1 - e^{-2a|\lambda|}\right)$$

Тоді

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \frac{\widetilde{U}_1[\Phi]U_1[\Phi]}{U_1\left[\widetilde{U}_1[\Phi]\right]}$$

$$= -\frac{1}{2|\lambda|}\left(e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right)$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left[e^{-|\lambda|(a-x)} + e^{-|\lambda|(x+a)}\right]\frac{1}{2}\left[e^{-|\lambda|(a-\xi)} + e^{-|\lambda|(a+\xi)}\right]}{\frac{|\lambda|}{2}\left(1 - e^{-2a|\lambda|}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2|\lambda|}\left(e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right)$$

$$-\frac{1}{2|\lambda|}\frac{e^{-|\lambda|(2a-x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a+x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a-x+\xi)} + e^{-|\lambda|(2a+x+\xi)}}{1 - e^{-2a|\lambda|}}$$

$$= -\frac{1}{2|\lambda|}e^{-|\lambda||x-\xi|}$$

$$-\frac{1}{2|\lambda|}\frac{e^{-|\lambda|(2a-x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a+x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a-x+\xi)} + e^{-|\lambda|(2a+x+\xi)} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\left(1 - e^{-2a|\lambda|}\right)}{1 - e^{-2a|\lambda|}}$$

$$= -\frac{1}{2|\lambda|}e^{-|\lambda||x-\xi|} - \frac{1}{2|\lambda|}\frac{e^{-|\lambda|(2a-x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a+x-\xi)} + e^{-|\lambda|(2a-x+\xi)} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}}{1 - e^{-2a|\lambda|}}$$

Дана функція ідентична тій, що була побудована у попередньому прикладі з точністю до заміни змінних.

Приклад 3.

Побудувати функцію Гріна самоспряженої крайової задачі

$$\begin{cases} u''(x) - \alpha^2 u(x) = f(x), 0 < x < a \\ u'(0) = 0, u'(a) = 0 \end{cases}$$

Зауважимо, що дана задача є частковим випадком крайової задачі (при $p = -1, q = -\alpha^2$)

$$\begin{cases} L_2 y(x) = -(py')' + qy = f(x), a_0 < x < a_1, \\ U_i[y] = \alpha_{i0} y(a_i) + \alpha_{i1} y'(a_i) = 0, i = 0{,}1 \end{cases}$$

яка, як відомо, є самоспряженою.

Тому для побудови функції Гріна скористаємось формулою

$$G(x,\xi)=\begin{cases}C_0\psi_0(\xi)\psi_1(x), x<\xi,\\ C_0\psi_0(x)\psi_1(\xi), \xi<x\end{cases}$$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв'язків (ФБСР). Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції $\psi_0(x),\psi_1(x)$ такі, що

$$\begin{cases}\psi_0''-\alpha^2\psi_0=0,\\ \psi_0'(0)=1,\psi_0'(a)=0\end{cases}, \quad \begin{cases}\psi_1''-\alpha^2\psi_1=0,\\ \psi_1'(0)=0,\psi_1'(a)=1\end{cases}$$

$$\psi_0(x)=C_{00}sh\alpha(a-x)+C_{01}ch\alpha(a-x), \qquad \psi_1(x)=C_{10}sh\alpha x+C_{11}ch\alpha x$$

$$\psi_0'(x)=-C_{00}\alpha ch\alpha(a-x)-C_{01}\alpha sh\alpha(a-x),$$

$$\psi_1'(x)=C_{10}\alpha ch\alpha x+C_{11}\alpha sh\alpha x$$

$$\psi_0'(a)=0 => C_{00}=0, \qquad \psi_1'(0)=0 => C_{10}=0$$

$$\psi_0'(0)=1 => -C_{01}\alpha sh\alpha a=1, \qquad \psi_1'(a)=1 => C_{11}\alpha sh\alpha a=1$$

$$C_{01}=-\frac{1}{\alpha sh\alpha a}, \qquad C_{11}=\frac{1}{\alpha sh\alpha a}$$

$$\psi_0(x)=-\frac{ch\alpha(a-x)}{\alpha sh\alpha a}, \qquad \psi_1(x)=\frac{ch\alpha x}{\alpha sh\alpha a}$$

$$\psi_0(x)=-\frac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, \qquad \psi_1(x)=\frac{e^{-\alpha(a-x)}+e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}$$

Отримуємо

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-C_0\dfrac{e^{-\alpha\xi}+e^{-\alpha(2a-\xi)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}\dfrac{e^{-\alpha(a-x)}+e^{-\alpha(a+x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, x<\xi,\\ -C_0\dfrac{e^{-\alpha x}+e^{-\alpha(2a-x)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}\dfrac{e^{-\alpha(a-\xi)}+e^{-\alpha(a+\xi)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, \xi<x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-C_0\dfrac{e^{-\alpha(a-x+\xi)}+e^{-\alpha(3a-x-\xi)}+e^{-\alpha(a+x+\xi)}+e^{-\alpha(3a+x-\xi)}}{\alpha^2(1-e^{-2\alpha a})^2}, x<\xi,\\ -C_0\dfrac{e^{-\alpha(a+x-\xi)}+e^{-\alpha(3a-x-\xi)}+e^{-\alpha(a+x+\xi)}+e^{-\alpha(3a-x+\xi)}}{\alpha^2(1-e^{-2\alpha a})^2}, \xi<x\end{cases}$$

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}=\begin{cases}C_0\dfrac{-e^{-\alpha(a-x+\xi)}-e^{-\alpha(3a-x-\xi)}+e^{-\alpha(a+x+\xi)}+e^{-\alpha(3a+x-\xi)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})^2}, x<\xi,\\ C_0\dfrac{e^{-\alpha(a+x-\xi)}-e^{-\alpha(3a-x-\xi)}+e^{-\alpha(a+x+\xi)}-e^{-\alpha(3a-x+\xi)}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})^2}, \xi<x\end{cases}$$

Для знаходження сталої C_0 скористаємось умовою

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)}=1$$

Тобто

$$C_0\left(\frac{e^{-\alpha a}-e^{-\alpha(3a-2\xi)}+e^{-\alpha(a+2\xi)}-e^{-3\alpha a}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})^2}\right.$$
$$\left.-\frac{-e^{-\alpha a}-e^{-\alpha(3a-2\xi)}+e^{-\alpha(a+2\xi)}+e^{-3\alpha a}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})^2}\right)=1 =>$$
$$C_0\left(\frac{2e^{-\alpha a}-2e^{-3\alpha a}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})^2}\right)=1 =>$$
$$C_0\left(\frac{2e^{-\alpha a}}{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}\right)=1 => C_0=\frac{\alpha(1-e^{-2\alpha a})}{2e^{-\alpha a}}$$

Тоді

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-\alpha(-x+\xi)}+e^{-\alpha(2a-x-\xi)}+e^{-\alpha(x+\xi)}+e^{-\alpha(2a+x-\xi)}}{2\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, x<\xi,\\ -\dfrac{e^{-\alpha(x-\xi)}+e^{-\alpha(2a-x-\xi)}+e^{-\alpha(x+\xi)}+e^{-\alpha(2a-x+\xi)}}{2\alpha(1-e^{-2\alpha a})}, \xi<x\end{cases}$$
$$=-\frac{e^{-\alpha|x-\xi|}+e^{-\alpha(2a-x-\xi)}+e^{-\alpha(x+\xi)}+e^{-\alpha(2a-|x-\xi|)}}{2\alpha(1-e^{-2\alpha a})}$$

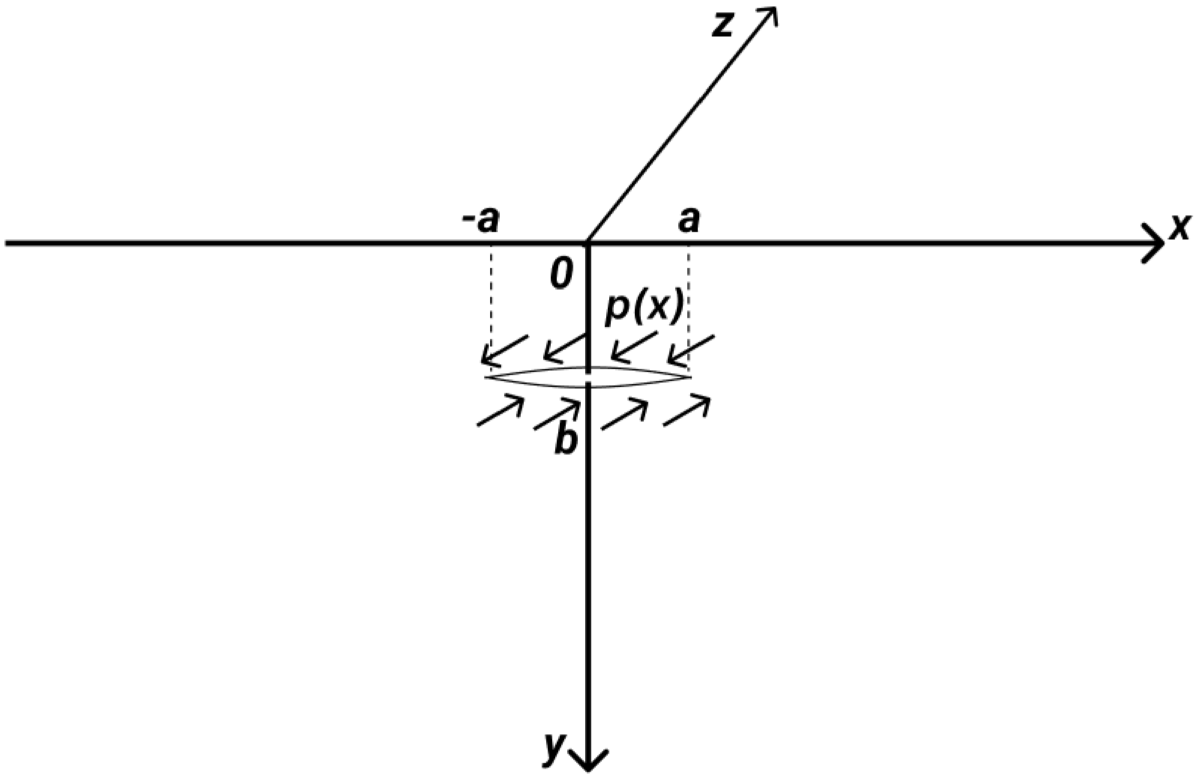
Вона є еквівалентною функції Гріна, що була побудована іншим способом.

Розв’язання розривних крайових задач за допомогою розривних властивостей функції Гріна

Приклад 1.

Розглядається пружна півплощина $-\infty < x < +\infty, 0 < y < \infty$, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації. Грань $y = 0$ вільна від навантаження. Усередині півплощини на відрізку $y = b, -a < x < a$ розташована тріщина, на берегах якої задано зсувне навантаження інтенсивності $p(x)$.

Записати математичне формулювання крайової задачі. За допомогою розривних властивостей функції Гріна знайти вирази для поля переміщень та напружень, що залежать від невідомої функції стрибка, та записати сингулярне інтегральне рівняння для її відшукання.



1. Запишемо математичне формулювання крайової задачі.

Крайову задачу можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} w''(x,y) + w^{\cdot\cdot}(x,y) = 0, -\infty < x < +\infty, 0 < y < \infty, y \neq 0, \\ \tau_{yz}(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty, \\ \langle w(x,b)\rangle = w(x,b-0) - w(x,b+0) = \chi(y) \neq 0, -a < x < a, \\ \left\langle \tau_{yz}(x,b)\right\rangle = \tau_{yz}(x,b-0) - \tau_{yz}(x,b+0) = 0, -a < x < a, \\ \tau_{yz}(x,b-0) = p(x), -a < x < a \end{cases}$$

або у термінах переміщень

$$\begin{cases} w''(x,y) + w^{\cdot\cdot}(x,y) = 0, -\infty < x < +\infty, 0 < y < \infty, y \neq 0, \\ w^{\cdot}(x,0) = 0, -\infty < x < +\infty, \\ \langle w(x,b) \rangle = w(x,b-0) - w(x,b+0) = \chi(y) \neq 0, -a < x < a, (1*) \\ \langle w^{\cdot}(x,b) \rangle = w^{\cdot}(x,b-0) - w^{\cdot}(x,b+0) = 0, -a < x < a, \\ w^{\cdot}(x,b-0) = p(x)/G, -a < x < a \end{cases}$$

2. Вибір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної розривної крайової задачі.

Для того, щоб звести вихідну задачу до одновимірної розривної крайової задачі, його потрібно застосувати по тій змінній, по якій неперервні і переміщення, і напруження, тобто в даному випадку – по x. За даною змінною можна застосувати повне перетворення Фур'є

$$w_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) e^{i\alpha x} dx$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_\alpha(y) e^{-i\alpha x} d\alpha \ \ (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $e^{i\alpha x}$ та проінтегруємо по x у межах від $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [w''(x,y) + w^{\cdot\cdot}(x,y)] e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} w''(x,y) e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} w^{\cdot\cdot}(x,y) e^{i\alpha x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w''(x,y) e^{i\alpha x} dx + \frac{d^2}{dy^2} w_\alpha(y) = 0$$

Перший інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи, що на нескінченності переміщення та напруження повинні прямувати до нуля ($w|_{x\to\pm\infty} = 0, w'|_{x\to\pm\infty} = 0$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} w''(x,y) e^{i\alpha x} dx = \left[w'(x,y) e^{i\alpha x} \right] \Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} w'(x,y) e^{i\alpha x} dx$$

$$= -i\alpha \left\{ \left[w(x,y) e^{i\alpha x} \right] \Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) e^{i\alpha x} dx \right\} = -\alpha^2 w_\alpha(y)$$

Таким чином рівняння у просторі трансформант приймає вигляд

$$w_\alpha''(y) - \alpha^2 w_\alpha(y) = 0$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до крайової умови вихідної задачі за змінною y ($w^{\cdot}(x,0) = 0$), отримуємо

$$w'_\alpha(0) = 0$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до умов на дефекті вихідної задачі ($\langle w(x,b)\rangle = \chi(y) \neq 0, \langle w^{\cdot}(x,b)\rangle = 0$), отримуємо

$$\langle w_\alpha(b)\rangle = w_\alpha(b-0) - w_\alpha(b+0) = \chi_\alpha,$$
$$\langle w'_\alpha(b)\rangle = w'_\alpha(b-0) - w'_\alpha(b+0) = 0,$$

де $\chi_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-a}^{a} \chi(x) e^{i\alpha x} dx$

В результаті приходимо до наступної одновимірної розривної крайової задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} w''_\alpha(y) - \alpha^2 w_\alpha(y) = 0, 0 < y < \infty, \\ w'_\alpha(0) = 0, \\ \langle w_\alpha(b)\rangle = \chi_\alpha, \langle w'_\alpha(b)\rangle = 0 \end{cases} \qquad (3*)$$

3. Розв'язання крайової задачі у просторі трансформант

Розв'язок розривної крайової задачі (3*) будемо розшукувати за формулою

$$w_\alpha(y) = \int_a^b f(\eta) G(y,\eta) d\eta + \sum_{j=0}^{n-1} A_j \psi_j(y) + \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j \widetilde{w}_j(y), a < y < b$$

яка в даному випадку приймає вигляд

$$w_\alpha(y) = \chi_\alpha \widetilde{w}_0(y) + 0 \cdot \widetilde{w}_1(y)$$

Фундаментальну базисну систему розривних розв'язків (ФБСРР) $\widetilde{w}_j(y)$ знайдемо за формулою

$$\widetilde{w}_{n-1-m}(y) = (-1)^{m+1} \left[P_0(b) G^{0,m}(y,b) + \sum_{i=1}^{m} C_{mi} G^{0,m-1}(y,b) \right], m = \overline{0, n-1}, C_{mi} = const$$

де

$$(-1)^{m-k} C_{mk} P_0^{-1}(b) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{mi} \langle G_b^{n-1-m+k, m-i}\rangle + P_0(b) \langle G_b^{n-1-m+k, m}\rangle,$$
$$k = \overline{2, m},$$
$$(-1)^{m+1} C_{m1} = P_0^2(b) \langle G_b^{n-m,m}\rangle, \qquad m = \overline{1, n-1}$$

Тут $n = 2, m = 0{,}1, P_0(y) \equiv 1$, тобто

$$m = 1: \widetilde{w}_0(y) = G^{0,1}(y,b) + C_{11} G^{0,0}(y,b) = \frac{\partial G}{\partial \eta}(y,b) + C_{11} G(y,b),$$
$$m = 0: \widetilde{w}_1(y) = -G^{0,0}(y,b) = -G(y,b)$$

де

$$C_{11} = \langle G_b^{1,1}\rangle$$

При цьому для самоспряженої крайової задачі

$$\langle G_\xi^{m,m} \rangle = 0, m = \overline{0, n-1}$$

тобто

$$C_{11} = \langle G_\xi^{1,1} \rangle = 0$$

Тоді

$$\widetilde{w}_0(y) = \frac{\partial G}{\partial \eta}(y, b)$$

Скористаємось побудованою раніше функцією Гріна крайової задачі (3*)

$$G(y,\eta) = -\frac{e^{-|\alpha||y-\eta|} + e^{-|\alpha|(y+\eta)}}{2|\alpha|}$$

Тоді

$$\widetilde{w}_0(y) = \frac{\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)}}{2}$$

Таким чином отримали розв'язок розривної крайової задачі (3*)

$$w_\alpha(y) = \chi_\alpha \frac{\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)}}{2} \quad (4*)$$

4. Обернення інтегрального перетворення

Застосуємо формулу обернення (2*) до розв'язку у просторі трансформант (4*):

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\alpha \left(\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)} \right) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти χ_α:

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \left(\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)} \right) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-\xi)} \left(\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)} \right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{sgn}(b-y) e^{-|\alpha||y-b|} + e^{-|\alpha|(y+b)} \right) [\cos\alpha(x-\xi)$$
$$- i \sin\alpha(x-\xi)] d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) d\xi \int_{0}^{\infty} \left(\operatorname{sgn}(b-y) e^{-\alpha|y-b|} + e^{-\alpha(y+b)} \right) \cos\alpha(x-\xi)\, d\alpha$$

Для обчислення інтегралів вигляду $\int_0^\infty e^{-\alpha z} \cos \alpha x \, d\alpha$ скористаємось формулою Г.Р. 3.893(2)

$$2 \quad \int_0^\infty e^{-px} \cos (qx + \lambda) \, dx = \frac{1}{p^2 + q^2} (p \cos \lambda - q \sin \lambda)$$

$$[p > 0].$$

Тоді

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \left(\frac{b - y}{(y - b)^2 + (x - \xi)^2} + \frac{b + y}{(b + y)^2 + (x - \xi)^2} \right) d\xi \quad (5*)$$

Отримуємо формули для напружень

$$\tau_{xz} = Gw'(x, y) = \frac{G}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b - y}{(y - b)^2 + (x - \xi)^2} + \frac{b + y}{(b + y)^2 + (x - \xi)^2} \right) d\xi$$

$$= -\frac{G}{\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \left(\frac{(b - y)(x - \xi)}{((y - b)^2 + (x - \xi)^2)^2} + \frac{(b + y)(x - \xi)}{((b + y)^2 + (x - \xi)^2)^2} \right) d\xi$$

$$\tau_{yz} = Gw^{\cdot}(x, y) = \frac{G}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b - y}{(y - b)^2 + (x - \xi)^2} + \frac{b + y}{(b + y)^2 + (x - \xi)^2} \right) d\xi$$

$$= \frac{G}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \left(-\frac{(x - \xi)^2 - (y - b)^2}{((y - b)^2 + (x - \xi)^2)^2} + \frac{(x - \xi)^2 - (b + y)^2}{((b + y)^2 + (x - \xi)^2)^2} \right) d\xi$$

5. Сингулярне інтегральне рівняння для відшукання невідомої функції стрибка

Відмітимо, що отримані вирази для напружень не є остаточним результатом, так як вони містять невідому функцію стрибка $\chi(\xi)$. Для її знаходження потрібно реалізувати умову на тріщині

$$\tau_{yz}(x, b - 0) = p(x), -a < x < a$$

що приведе до сингулярного інтегрального рівняння

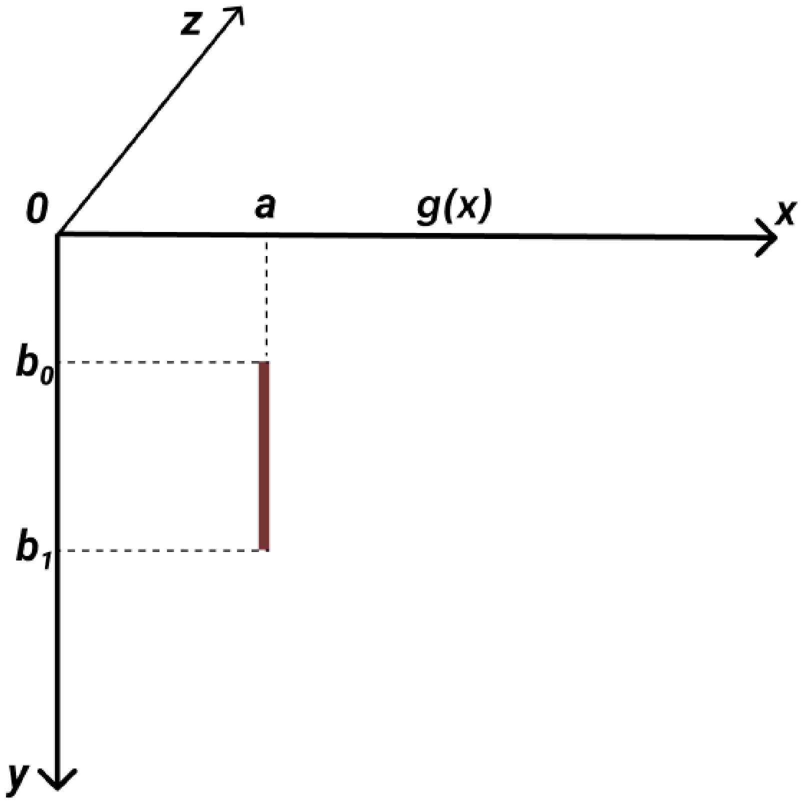
$$\frac{G}{2\pi} \int_{-a}^{a} \chi(\xi) \left(-\frac{1}{(x - \xi)^2} + \frac{(x - \xi)^2 - 4b^2}{(4b^2 + (x - \xi)^2)^2} \right) d\xi = p(x), -a < x < a$$

Дане рівняння можна розв'язати методом ортогональних поліномів.

Приклад 2.

Розглядається пружна чвертьплощина $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$, що знаходиться в умовах антиплоскої деформації. На грані $y = 0$ задано переміщення $g(x)$. Грань $x = 0$ вільна від прикладеного навантаження. Усередині чвертьплощини на відрізку $x = a, b_0 < y < b_1$ розташовано нерухоме жорстке включення.

Записати математичне формулювання крайової задачі. За допомогою розривних властивостей функції Гріна знайти вирази для поля переміщень та напружень, що залежать від невідомої функції стрибка, та записати сингулярне інтегральне рівняння для її відшукання.



1. Запишемо математичне формулювання крайової задачі.

Крайову задачу можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} w''(x,y) + w^{\cdot\cdot}(x,y) = 0, 0 < x < \infty, x \neq a, 0 < y < \infty, \\ w(x,0) = g(x), 0 < x < \infty, \\ \tau_{xz}(0,y) = 0, 0 < y < \infty, \\ \langle w(a,y)\rangle = w(a-0,y) - w(a+0,y) = 0, b_0 < y < b_1, \\ \langle \tau_{xz}(a,y)\rangle = \tau_{xz}(a-0,y) - \tau_{xz}(a+0,y) = \chi(y) \neq 0, b_0 < y < b_1, \\ w(a-0,y) = 0, b_0 < y < b_1 \end{cases}$$

або у термінах переміщень

$$\begin{cases} w''(x,y) + \ddot{w}(x,y) = 0, 0 < x < \infty, x \neq a, 0 < y < \infty, \\ w(x,0) = g(x), 0 < x < \infty, \\ w'(0,y) = 0, 0 < y < \infty, \\ \langle w(a,y) \rangle = w(a-0,y) - w(a+0,y) = 0, b_0 < y < b_1, \\ \langle w'(a,y) \rangle = w'(a-0,y) - w'(a+0,y) = \chi(y)/G \neq 0, b_0 < y < b_1, \\ w(a-0,y) = 0, b_0 < y < b_1 \end{cases} \quad (1*)$$

2. Вибір інтегрального перетворення та зведення задачі до одновимірної розривної крайової задачі.

Для того, щоб звести вихідну задачу до одновимірної розривної крайової задачі, його потрібно застосувати по тій змінній, по якій неперервні і переміщення, і напруження, тобто в даному випадку – по y. За даною змінною можна застосувати внескінченне синус перетворення Фур'є

$$w_\alpha(x) = \int_0^\infty w(x,y) \sin \alpha y \, dy$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w_\alpha(x) \sin \alpha y \, d\alpha \quad (2*)$$

Помножимо обидві частини диференціального рівняння крайової задачі на $\sin \alpha y$ та проінтегруємо по y у межах від 0 до ∞:

$$\int_0^\infty [w''(x,y) + \ddot{w}(x,y)] \sin \alpha y \, dy = \frac{d^2}{dx^2} w_\alpha(x) + \int_0^\infty \ddot{w}(x,y) \sin \alpha y \, dy$$

Другий інтеграл інтегруємо по частинам, враховуючи крайову умову за змінною y ($w(x,0) = g(x)$) та те, що на нескінченності переміщення та напруження повинні прямувати до нуля ($w, \dot{w}|_{y \to \infty} = 0$):

$$\int_0^\infty \ddot{w}(x,y) \sin \alpha y \, dy = \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha y \Big|_{y=0}^{y \to \infty} - \alpha \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha y \, dy$$

$$= -\alpha w \cos \alpha y|_{y=0}^{y \to \infty} - \alpha^2 \int_0^\infty w(x,y) \sin \alpha y \, dy = \alpha g(x) - \alpha^2 w_\alpha(x)$$

Таким чином рівняння у просторі трансформант приймає вигляд

$$w_\alpha''(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = -\alpha g(x)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до крайової умови вихідної задачі за змінною x ($w'(0,y) = 0$), отримуємо

$$w_\alpha'(0) = 0$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до умов на дефекті вихідної задачі ($\langle w(a,y)\rangle = 0, \langle w'(a,y)\rangle = \chi(y)/G$), отримуємо

$$\langle w_\alpha(a)\rangle = w_\alpha(a-0) - w_\alpha(a+0) = 0,$$
$$\langle w'_\alpha(a)\rangle = w'_\alpha(a-0) - w'_\alpha(a+0) = \chi_\alpha/G,$$

де $\chi_\alpha = \int_0^\infty \chi(y)\sin\alpha y\,dy = \int_{b_0}^{b_1} \chi(y)\sin\alpha y\,dy$

В результаті приходимо до наступної одновимірної розривної крайової задачі у просторі трансформант

$$\begin{cases} w''_\alpha(x) - \alpha^2 w_\alpha(x) = -\alpha g(x), 0 < x < \infty, \\ w'_\alpha(0) = 0, \\ \langle w_\alpha(a)\rangle = 0, \langle w'_\alpha(a)\rangle = \chi_\alpha/G \end{cases} \qquad (3*)$$

3. Розв'язання крайової задачі у просторі трансформант

Розв'язок розривної крайової задачі (3*) будемо розшукувати за формулою

$$w_\alpha(x) = \int_a^b f(\xi)G(x,\xi)d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} A_j\psi_j(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j\widetilde{w}_j(x)\,, a < x < b$$

яка в даному випадку приймає вигляд

$$w_\alpha(x) = \int_a^b f(\xi)G(x,\xi)d\xi + 0\cdot\widetilde{w}_0(x) + \frac{\chi_\alpha}{G}\widetilde{w}_1(x)$$

Фундаментальну базисну систему розривних розв'язків (ФБСРР) $\widetilde{w}_j(x)$ знайдемо за формулою

$$\widetilde{w}_{n-1-m}(x) = (-1)^{m+1}\left[P_0(a)G^{0,m}(x,a) + \sum_{i=1}^{m} C_{mi}G^{0,m-1}(x,a)\right], m = \overline{0, n-1}, C_{mi} = const$$

Тут $n = 2, m = 0{,}1, P_0(y) \equiv 1$, тобто

$$m = 1: \widetilde{w}_0(x) = G^{0,1}(x,a) + C_{11}G^{0,0}(x,a) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,a) + C_{11}G(x,a),$$
$$m = 0: \widetilde{w}_1(x) = -G^{0,0}(x,a) = -G(x,a)$$

Скористаємось побудованою раніше функцією Гріна крайової задачі (3*)

$$G(x,\xi) = -\frac{e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}}{2\alpha}$$

Тоді

$$\widetilde{w}_1(x) = -G(x,a) = \frac{e^{-\alpha|x-a|} + e^{-\alpha(x+a)}}{2\alpha}$$

Таким чином отримали розв'язок розривної крайової задачі (3*)

$$w_\alpha(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(\xi)\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)d\xi + \frac{\chi_\alpha}{2G}\frac{e^{-\alpha(a-x)} + e^{-\alpha(x+a)}}{\alpha} \quad (4*)$$

4. Обернення інтегрального перетворення

Застосуємо формулу обернення (2*) до розв'язку у просторі траснформант (4*):

$$w(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty g(\xi)\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)d\xi \right.$$
$$\left. + \frac{\chi_\alpha}{2G}\frac{e^{-\alpha|x-a|} + e^{-\alpha(x+a)}}{\alpha}\right\}\sin\alpha y\, d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty g(\xi)\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)d\xi \sin\alpha y\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{\pi G}\int_0^\infty \chi_\alpha \frac{e^{-\alpha|x-a|} + e^{-\alpha(x+a)}}{\alpha}\sin\alpha y\, d\alpha$$

Підставимо сюди вираз для трансформанти χ_α:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty g(\xi)\left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)d\xi \sin\alpha y\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{\pi G}\int_0^\infty \int_{b_0}^{b_1} \chi(\eta)\sin\alpha\eta\, d\eta \frac{e^{-\alpha|x-a|} + e^{-\alpha(x+a)}}{\alpha}\sin\alpha y\, d\alpha$$

Змінимо порядок інтегрування

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)d\xi \int_0^\infty \left(e^{-\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha(x+\xi)}\right)\sin\alpha y\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2\pi G}\int_{b_0}^{b_1} \chi(\eta)d\eta \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha|x-a|} + e^{-\alpha(x+a)}}{\alpha}[\cos\alpha(y-\eta)$$
$$- \cos\alpha(y+\eta)]d\alpha$$

Для обчислення інтегралів вигляду $\int_0^\infty e^{-\alpha z}\sin\alpha X\, d\alpha$ скористаємось формулою Г.Р. 3.893(1)

3.893

1. $$\int_0^\infty e^{-px}\sin(qx+\lambda)\,dx = \frac{1}{p^2+q^2}(q\cos\lambda + p\sin\lambda) \quad [p > 0].$$

а для обчислення інтегралів вигляду $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}(\cos\alpha y_1 - \cos\alpha y_2)d\alpha$ скористаємось формулою Г.Р. 3.948(2)

$$\textbf{2.}\quad \int_0^\infty e^{-\beta x}(\cos ax - \cos bx)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\beta^2}{a^2+\beta^2}$$

$$[\operatorname{Re}\beta > 0], \ \textbf{(сравни 3.951 3.).}$$

Тоді

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left(\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} + \frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{1}{4\pi G}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\left(\ln\frac{(y+\eta)^2+(a-x)^2}{(y-\eta)^2+(a-x)^2} + \ln\frac{(y+\eta)^2+(a+x)^2}{(y-\eta)^2+(a+x)^2}\right)d\eta$$

Отримуємо формули для напружень

$$\tau_{xz} = Gw'(x,y)$$
$$= \frac{G}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} + \frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{(y+\eta)^2+(a-x)^2}{(y-\eta)^2+(a-x)^2}\right.$$
$$\left.+\ln\frac{(y+\eta)^2+(a+x)^2}{(y-\eta)^2+(a+x)^2}\right)d\eta$$
$$= -\frac{2G}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left(\frac{y(x-\xi)}{((x-\xi)^2+y^2)^2} + \frac{y(x+\xi)}{((x+\xi)^2+y^2)^2}\right)d\xi$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\left(\frac{a-x}{(y-\eta)^2+(a-x)^2} - \frac{a-x}{(y+\eta)^2+(a-x)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{a+x}{(y+\eta)^2+(a+x)^2} - \frac{a+x}{(y-\eta)^2+(a+x)^2}\right)d\eta$$

$$\tau_{yz} = Gw^{\cdot}(x,y)$$

$$= \frac{G}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}+\frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right)d\xi$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{(y+\eta)^2+(a-x)^2}{(y-\eta)^2+(a-x)^2}\right.$$

$$\left.+\ln\frac{(y+\eta)^2+(a+x)^2}{(y-\eta)^2+(a+x)^2}\right)d\eta$$

$$= \frac{G}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left(\frac{(x-\xi)^2-y^2}{((x-\xi)^2+y^2)^2}+\frac{(x+\xi)^2-y^2}{((x+\xi)^2+y^2)^2}\right)d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\left(\frac{y+\eta}{(y+\eta)^2+(a-x)^2}-\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(a-x)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{y+\eta}{(y+\eta)^2+(a+x)^2}-\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(a+x)^2}\right)d\eta$$

5. Сингулярне інтегральне рівняння для відшукання невідомої функції стрибка

Відмітимо, що отримані вирази для напружень не є остаточним результатом, так як вони містять невідому функцію стрибка $\chi(\eta)$. Для її знаходження потрібно реалізувати умову на включенні

$$w(a-0,y)=0, b_0<y<b_1$$

що приведе до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi G}\int_{b_0}^{b_1}\chi(\eta)\left(-2\ln|y-\eta|+2\ln(y+\eta)+\ln\frac{(y+\eta)^2+4a^2}{(y-\eta)^2+4a^2}\right)d\eta$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left(\frac{y}{(a-\xi)^2+y^2}+\frac{y}{(a+\xi)^2+y^2}\right)d\xi\,, b_0<y<b_1$$

Дане рівняння можна розв’язати методом ортогональних поліномів.

Список рекомендованої літератури

1. Вакал Є. С., Ловейкін А. В. Методи математичної фізики в прикладах і задачах : навч. посіб. – Київ : Видавець Кравченко Я.О., 2020. 188 с. URL: http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2021/04/vakal_lovejkin_metody-matematychnoi-fizyky-v-prykladakh-i-zadachakh.pdf

2. Тацій Р., Стасюк М., Пазен О. Елементи математичного моделювання та прикладної математики : навч. посіб. – Львів : ЛДУ БЖД, 2021. 182 с. URL: https://sci.ldubgd.edu.ua/bitstream/123456789/8278/1/%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%95%D0%9C%D0%9C%D0%9F%D0%9C%20%284%29.pdf

3. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень : навч. посіб. – Одеса : Астропринт, 2005. 184 с.

4. Вайсфельд Н. Д., Реут В. В. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2018. 194 с.

5. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Реут В. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги : монографія. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. 160 с.

6. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products, 6th edition. Academic Press, 2000. 1163 p.

7. Попов Г. Я., Абдыманапов С. А., Ефимов В. В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач : навч. посіб. – Алматы : Изд. Рауан, 1999. 113 с.

Навчальне видання

МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

ЕЛЕКТРОННІ МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності 113 Прикладна математика

Електронне практичне видання

Укладач:
Журавльова Зінаїда Юріївна

В авторській редакції

Затв. авт. 28.05.2026. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 1,4 МБ. Зам. № 3160.

Видавець:
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Змієнка Всеволода, буд. 2, м. Одеса, 65001, Україна
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 8592 від 23.03.2026 р.
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua