Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 45–51.

УДК 511.33

О. В. Синявский
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ, ПРЕДСТАВИМЫХ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Деякі проблеми аналітичної теорії чисел" ОНУ 12.06.2000

Знайдено асимптотичну формулу до сумматорної функції числа зображення натурального n у вигляді добутку суми двох квадратів та числа, що не містить квадрату простого і порівняно з l по модулю q.

Найдена асимптотическая формула для сумматорной функции числа представлений натурального n в виде произведения суммы двух квадратов и числа, которое не содержит квадрата простого и сравнимо с l по модулю q.

The asymptotic formula for summator function of representation number of natural number n as a product of a sum of two squares and of number, which does not contain square of prime and is congruent with l modulo q, is found.

Введение. Пусть $d(n;l,q)$ означает число делителей натурального n, которые сравнимы с l по модулю q, и пусть $D(x;l,q)=\sum_{n\le x} d(n;l,q)$. R. A. Smith и M. V. Subbarao доказали (см.[7]), что при $(l,q)=1$ и $q\le x$

$$D(x;l,q)=xq^{-1}\log x+Cx+O\left((qx)^{1/3}d(q)\log x\right),$$

где $d(q)$ – обычная функция делителей и C – вычислимая постоянная, которая зависит от l и k. Эта формула нетривиальна при $q\le x^{1/2-\varepsilon}$. P. D. Varbanec и P. Zarzycki (см.[8]) решили подобную задачу в случае мнимого квадратичного поля. Они доказали следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* α, γ *– гауссовы целые. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *имеет место*

$$\sum_{N(\omega)\le x} d(\omega;\alpha,\beta)=\pi^2 x\log xN(\gamma)^{-1}+C(\alpha,\gamma)xN(\gamma)^{-1}+$$
$$+O\left((x/N(\gamma))^{1/2+\varepsilon}\right)+O\left((x/N(\alpha_1))^{\vartheta}\right)+O\left(x^{\varepsilon}\right)$$

где α_1 *– число вида* $\alpha+\beta\gamma$ $(\beta=0,\pm1,\pm i)$ *с наименьшей нормой,* $\vartheta<1/3$, $C(\alpha,\gamma)$ *– вычислимая постоянная, зависящая от* α,γ. $N(\gamma)\le x^{1-\varepsilon}$.

Пусть $R(n;l,q)=\sum_{(u^2+v^2)m=n,\ m\equiv l \pmod q}\mu^2(m)$. Эта функция является обобщением функции $d(n;l,q)$.В этой работе мы будем строить асимптотическую формулу для сумматорной функции $S(x;l,q)=\sum_{n\le x}R(n;l,q)$

Обозначения. Пусть $Q(i)$ – поле гауссовых чисел, $Q(i):=\{\mathrm{a}+\mathrm{b}i\mid \mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbf{Q}, i^2=-1\}$. Для $\alpha=\mathrm{a}+\mathrm{b}i\in Q(i)$ полагаем $N(\alpha)=|\alpha|^2=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$ и называем нормой α, через (n,m) – ОНД n и m; $\mu(n)$, $\varphi(n)$ – соответственно функции Мёбиуса и Эйлера; $d(n)$ – число делителей n. Символ Виноградова "$\ll$" означает то же, что и символ Ландау "O". $e(x)=e^{2\pi ix}$, $x\in\mathbf{R}$.

Основная теорема. *Пусть* $R(n;l,q)$ *означает количество представлений натурального* n *в виде* $n=(u^2+v^2)m$, *где* $u,v,m\in\mathbf{Z}$ *и* $m\equiv l(\mathrm{mod}\,q)$. *Тогда при* $x\to\infty$ *для* $q\le x^{1-\varepsilon}$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{n\le x}R(n;l,q)=\pi x\log xq^{-1}+xq^{-1}\left(L'(2,\chi_0)L^{-2}(2,\chi_0)+\gamma\pi+4L'(1,\chi_4)\right)+$$
$$+x\varphi^{-1}(q)\sum\nolimits^*_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}L(1,\chi)\left(\chi(l)L(2,\chi^2)\right)^{-1}+O\left((x/l)^{\theta}\right)+O_\varepsilon\left((x/q)^{1/2+\varepsilon}\right),$$

где θ *– показатель степени* x *в остаточном члене в проблеме круга,* γ *- постоянная Эйлера,* χ_0 *– главный характер по модулю* q, χ_4 *– неглавный характер по модулю 4, знак * над суммой означает, что суммирование ведётся по всем характерам по модулю* q, *кроме главного.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся ряд вспомогательных результатов.

Вспомогательные результаты. Асимптотическую формулу для $S(x;l,q)$ получим, используя метод производящих рядов Дирихле. Мы имеем

$$F(s;l,q)=\sum_n R(n;l,q)n^{-s}=\sum_{u,v}\left(u^2+v^2\right)^{-s}\sum_{m\equiv l(\mathrm{mod}\,q)}m^{-s}\sum_{d^2|m}\mu(d)=Z(s)\sum_d\mu(d)\times$$

$$\times\sum_{m\equiv l(\mathrm{mod}\,q),\,m\equiv 0(\mathrm{mod}\,d^2)}m^{-s}=Z(s)\sum_{(d,q)=1}\mu(d)d^{-2s}\sum_{m\equiv l\bar d^2(\mathrm{mod}\,q)}m^{-s}=Z(s)q^{-s}\sum_{(d,q)=1}\mu(d)d^{-2s}\zeta\left(s,l\bar d^2/q\right)$$

где $d\bar d\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, $Z(s)=\sum_{\alpha\in Z[i]}N(\alpha)^{-1}$, $\mathrm{Re}(s)>1$, $\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$, $\mathrm{Re}(s)>1$, $0<a\le 1$. Представим $F(s;l,q)$ как

$$F(s;l,q)=Z(s)\sum_{(d,q)=1}\mu(d)d^{-2s}\left(q^{-s}\zeta\left(s,l\bar d^2q^{-1}\right)-\left(l\bar d\right)^{-s}\right)+$$
$$+Z(s)l^{-s}\sum_{(d,q)=1,\,d>1}\mu(d)\left(d\bar d\right)^{-2s}+Z(s)l^{-s}=F_1(s;l,q)+F_2(s;l,q)+F_3(s;l)\tag{1}$$

Тогда, в силу теоремы о связи между суммой коэффициентов ряда Дирихле и функцией, задаваемой этим рядом (см. [1]), получим:

$$S(x;l,q)=(2\pi i)^{-1}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT}F(s;l,q)x^s s^{-1}ds+O\left(x^{1+\varepsilon}T\right)=(2\pi i)^{-1}\times$$
$$\times\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT}\left(F_1(s;l,q)+F_2(s;l,q)+F_3(s;l)\right)x^s s^{-1}ds+O\left(x^{1+\varepsilon}T\right)=I_1+I_2+I_3+O\left(x^{1+\varepsilon}T\right)\tag{2}$$

Лемма 1 [4]. *Функция* $\zeta(s,a)$ *регулярна во всей комплексной s-плоскости, за исключением точки* $s=1$, *где она имеет простой полюс с вычетом, равным единице. В окрестности точки* $s=1$ *имеет место разложение*

$$\zeta(s,a)=(s-1)^{-1}+b_0(a)+b_1(a)(s-1)+\ldots,\ \text{где}\ b_0(a)=\gamma+a^{-1}+O(a).$$

Кроме того, при $\mathrm{Re}(s)<0$ *имеет место соотношение Гурвица*

$$\zeta(s,a)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\left(\sin\left(\pi s2^{-1}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\cos(2m\pi a)m^{s-1}+\cos\left(\pi s2^{-1}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sin(2m\pi a)m^{s-1}\right)$$

Лемма 2 [5]. *Функция* $Z(s)$ *регулярна во всей комплексной s-плоскости, за исключением точки* $s=1$, *где она имеет простой полюс с вычетом, равным* π. *Кроме того, она удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа* $\pi^{-s}\Gamma(s)Z(s)=\pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)Z(1-s)$. *В окрестности точки* $s=1$ *для неё имеет место разложение* $Z(s)=\pi(s-1)^{-1}+b_0+b_1(s-1)+\ldots$, *где* $b_0=\pi\gamma+4L'(1,\chi_4)$, γ *– постоянная Эйлера,* $L(s,\chi)$ *– L-функция Дирихле,* χ_4 *– неглавный характер по модулю 4.*

Лемма 3. *Функция* $x^s s^{-1}(F_1(s;l,q)+F_2(s;l,q))$, *определённая выше, регулярна в плоскости* $\mathrm{Re}(s)>1/2$, *за исключением точки* $s=1$, *где она имеет полюс II-го порядка с вычетом, равным*

$$\pi x\log xq^{-1}+xq^{-1}\left(\frac{L'(2,\chi_0)}{L^2(2,\chi_0)}+\gamma\pi+4L'(1,\chi_4)\right)+\frac{x}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}{}^{*}L(1,\chi)\left(\chi(l)L(2,\chi^2)\right)^{-1}-\pi x l^{-1}$$

Доказательство. Функция $G(s)=(s-1)\sum_{(d,q)=1}\mu(d)d^{-2s}\zeta\left(s,l\bar{d}^2q^{-1}\right)$ является регулярной при $1/2<\mathrm{Re}(s)\le 2$, $|\mathrm{Im}(s)|\le T$, так как в этой области она мажорируется сходящимся числовым рядом $G(s)\le\sum_d\left|d^{-2s}\right|\left|(s-1)\zeta\left(s,l\bar{d}^2q^{-1}\right)\right|<A\sum_d d^{-2\sigma}$, где $\sigma=\mathrm{Re}(s)$, $A=\max\limits_{1/2<\mathrm{Re}(s)\le 2,\,|\mathrm{Im}(s)|\le T}\left|(s-1)\zeta\left(s,l\bar{d}^2q^{-1}\right)\right|$. Тогда

$$x^s s^{-1}(F_1(s;l,q)+F_2(s;l,q))=\left(x(sq)^{-1}\right)^s Z(s)(s-1)^{-1}G(s)-\left(x(sl)^{-1}\right)^s Z(s)$$

регулярна в плоскости $\mathrm{Re}(s)>1/2$, за исключением точки $s=1$, как произведение и разность регулярных функций.

Для вычисления вычета используем другое представление $F(s;l,q)$:

$$F(s;l,q)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{\left(u^2+v^2\right)m=n,\ m\equiv l(\operatorname{mod} q)}\mu^2(m)=\sum_{u,v}\left(u^2+v^2\right)^{-s}\sum_m\mu^2(m)m^{-s}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}\chi(m\bar{l})=$$

$$=\varphi^{-1}(q)\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}Z(s)\chi(\bar{l})\sum_m\mu^2(m)\chi(m)m^{-s}=Z(s)\varphi^{-1}(q)\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}\chi(\bar{l})L(s,\chi)L^{-1}\left(2s,\chi^2\right).$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{s=1}(F_1(s;l,q)+F_2(s;l,q))x^s s^{-1}=\operatorname*{res}_{s=1}F(s;l,q)x^s s^{-1}-\operatorname*{res}_{s=1}F_3(s;l,q)x^s s^{-1}=\pi xq^{-1}\log x+$$

$$+xq^{-1}\left(L'(2,\chi_0)L^{-2}(2,\chi_0)+\gamma\pi+4L'(1,\chi_4)\right)+x\varphi^{-1}(q)\sum_{\chi(\operatorname{mod} q)}{}^{*}\chi(\bar{l})L(1,\chi)L^{-1}\left(2,\chi^2\right)-\pi x l^{-1}$$

Здесь мы использовали разложение функции $Z(s)$ (лемма 2) и функций $L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p|q}\left(1-p^{-1}\right)$, s^{-1}, $\left(xq^{-1}\right)^s$ в окрестности точки $s=1$. □

Лемма 4 [3, теорема 6.1]. *Пусть функция* $S(s)$ *задана рядом Дирихле* $S(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ *и* $S(s,N)=\sum_{n=1}^{N}a_n n^{-s}$. *Тогда для любых вещественных значений* T_0 *и* T *имеет место* $\int_{T_0}^{T_0+T}|S(it,N)|^2dt=\left(T+\theta 4\pi\left(\sqrt{3}\right)^{-1}N\right)\sum_{n\le N}|a_n|^2$, где $-1\le\theta\le 1$.

Лемма 5 [3]. *Пусть* $l,q,n,N\in\mathbf{N}$, $a_n\in\mathbf{C}$ $S(s;l,q,N)=\sum_{n\le N,\ n\equiv l(\operatorname{mod} q)}a_n n^{-s}$. *Тогда для любых вещественных значений* T_0 *и* T *имеет место*

$$\int_{T_0}^{T_0+T}|S(it;l,q,N)|^2dt=\left(T+\theta 4\pi\left(\sqrt{3}\right)^{-1}Nq^{-1}\right)\sum_{n\le N,\ n\equiv l(\operatorname{mod} q)}|a_n|^2,\ \text{где } -1\le\theta\le 1.$$

Лемма 6. *Пусть* $Z(s)$ *– функция, определённая выше. Тогда для* $T>1$ *при* $T\to\infty$ *имеет место оценка* $\int_1^T|Z(1/2+\varepsilon+it)|^2dt\ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}$.

Доказательство. В самом деле, из хорошо известного факта $Z(s)=\zeta(s)L(s,\chi_4)$, где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, следует, что

$$\int_{-T}^{T}\left|Z(1/2+\varepsilon+it)\right|^2 dt=\int_{-T}^{T}\left|\zeta(1/2+\varepsilon+it)\right|^2\left|L(1/2+\varepsilon+it,\chi_4)\right|^2 dt \ll$$
$$\ll\sqrt{\int_1^T\left|\zeta(1/2+\varepsilon+it)\right|^4 dt\int_1^T\left|L(1/2+\varepsilon+it,\chi_4)\right|^4 dt}\,.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши-Шварца для интегралов. Для оценки интегралов, стоящих в подкоренном выражение, воспользуемся оценками четвёртых моментов для дзета-функции и L-функции Дирихле:

$$\int_1^T\left|\zeta(1/2+\varepsilon+it)\right|^4 dt \ll T^{1+\varepsilon},\quad \int_1^T\left|L(1/2+\varepsilon+it,\chi_4)\right|^4 dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Эти оценки можно получить, используя результаты из [3], глава X. Поэтому $\int_1^T\left|Z(1/2+\varepsilon+it)\right|^2 dt \ll_\varepsilon T^{1+\varepsilon}$. Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 7. *Пусть* $s=\sigma+it$, $-2\le\sigma\le 2$, τ *– любое комплексное число с условием* $\arg\tau=\left(\pi/2-t^{-1}\right)\operatorname{sign}(\operatorname{Im}s)$. *Тогда существует постоянная* $t_0>1$, *такая, что равномерно по* $|t|>t_0$, τ *имеет место приближённое функциональное уравнение*

$$\zeta(s,\alpha)=2^{-1}\sum_{|n+\alpha|\le x\log x}\left(F\left(s,|n+\alpha|(\tau\pi)^{1/2}\right)+\xi_n F\left(1+s,|n+\alpha|(\tau\pi)^{1/2}\right)\right)|n+\alpha|^{-s}+$$
$$+\pi^{-(1-2s)/2}\Gamma((1-s)/2)(2\Gamma(s/2))^{-1}\sum_{|n|\le y\log y}F\left(1-s,|n|(\pi/\tau)^{1/2}\right)e(-n\alpha)|n|^{s-1}+$$
$$+\pi^{-(1-2s)/2}\Gamma((2-s)/2)(2\Gamma((1+s)/2))^{-1}\sum_{|n|\le y\log y}\eta_n F\left(-s,|n|(\pi/\tau)^{1/2}\right)|n|^{s-1}+O\left(x^{-M}+y^{-M}\right)$$

Здесь $\xi_n=\begin{cases}\operatorname{sign}(n), & \text{если } n\ne 0\\ 1, & \text{иначе}\end{cases}$, $\eta_n=-i\operatorname{sign}(n)\,e(n\alpha)$, $x=\dfrac{\sqrt{|t|}}{|\tau|\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{2}}|\tau|$,

$M>0$ *любая постоянная. Причём, равномерно по всем указанным параметрам*

$$F(\omega,X)=l+O\left(\exp\left(-|X|^2|t|^{-1}\right)\left(|X||t|^{-1/2}\right)^{\operatorname{Re}(\omega)}\left(1+\left|\,|t|^{1/2}2^{-1}-|X|^2|t|^{-1/2}\right|\right)^{-1}\right),\ \text{где } l=1,$$

если $|n+\alpha|\le x$ *и* $|n|\le y$, *и* $l=0$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi(s;\alpha,\beta)=\sum_{n\in\mathbf{Z},\ n\ne-\alpha}e(n\beta)|n+\alpha|^{-s},\ \operatorname{Re}(s)>1 \text{ и } \Phi(s,\alpha)=\zeta(s,\alpha)-\zeta(s,1-\alpha).$$

Следуя методу доказательства, изложенному в [1], глава III, можно получить функциональное уравнение для $\varphi(s;\alpha,\beta)$

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\varphi(s;\alpha,\beta)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\varphi(1-s;\beta,-\alpha)e(-\alpha\beta). \tag{7.1}$$

Далее, в силу соотношения Гурвица (лемма 1) имеем:

$$\Phi(s,\alpha)==i^{-1}2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\cos(\pi s/2)\sum_{m=1}^{\infty}(e(m\alpha)-e(-m\alpha))m^{s-1}.$$

Поскольку $\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\pi\sin^{-1}(\pi z)$ и $\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$, то, полагая здесь $z=(1-s)/2$, получим

$$\Phi(s,\alpha)=-i\pi^{s-1/2}\Gamma((2-s)/2)\Gamma^{-1}((1+s)/2)\sum_{m=-\infty,\ m\ne0}^{\infty}e(m\alpha)\operatorname{sign}(m)|m|^{s-1}.$$

Откуда следует функциональное уравнение для $\Phi(s,\alpha)$

$$\pi^{-s/2}\Gamma((1+s)/2)\Phi(s,\alpha)=-i\pi^{-(1-s)/2}\Gamma((2-s)/2)\Psi(1-s,\alpha) \tag{7.2}$$

где $\Psi(s,\alpha)=\sum_{m=-\infty,\ m\ne0}^{\infty}\left(-ie(m\alpha)\operatorname{sign}(m)|m|^{-s}\right)$. Отсюда, т. к. функции $\varphi(s;\alpha,\beta)$ и $\Phi(s,\alpha)$

обладают функциональными уравнениями римановского типа, то в силу теоремы А. Ф. Лаврика (см. [2]) для них существуют приближённые функциональные уравнения

$$\varphi(s;\alpha,0)=\sum_{|n+\alpha|\le x\log x}F\left(s,|n+\alpha|(\tau\pi)^{1/2}\right)|n+\alpha|^{-s}+\pi^{-(1-2s)/2}\Gamma((1-s)/2)(2\Gamma(s/2))^{-1}\times$$

$$\times\sum_{|n|\le y\log y}F\left(1-s,|n|(\pi/\tau)^{1/2}\right)e(-n\alpha)|n|^{s-1}+O\left(x^{-M}+y^{-M}\right)$$

и $\Phi(s,\alpha)=\sum_{|n+\alpha|\le x\log x}\xi_nF\left(1+s,|n+\alpha|(\tau\pi)^{1/2}\right)|n+\alpha|^{-s}+$

$$+\pi^{-(1-2s)/2}\Gamma((2-s)/2)(2\Gamma((1+s)/2))^{-1}\sum_{|n|\le y\log y}\eta_nF\left(-s,|n|(\pi/\tau)^{1/2}\right)|n|^{s-1}+O\left(x^{-M}+y^{-M}\right)$$

Теперь заметим, что из определения функций $\zeta(s,\alpha)$ и $\varphi(s;\alpha,\beta)$ следует, что $\varphi(s;\alpha,0)=\zeta(s,\alpha)-\zeta(s,1-\alpha)$ и, следовательно, $\zeta(s,\alpha)=(\varphi(s;\alpha,0)+\Phi(s,\alpha))/2$. Утверждение леммы следует из (7.1) и (7.2). □

Лемма 8. *Пусть* $l,q\in\mathbf{N}$, $0<l<q$, $T>1$. *Тогда при* $T\to\infty$ *справедлива оценка*

$$\int_1^{1+T}\left|q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\zeta\left(1/2+\varepsilon+it,l\bar{d}^2q^{-1}\right)-\left(l\bar{d}^2\right)^{-(1/2+\varepsilon+it)}\right|^2dt\ll T^{1+\varepsilon}q^{-1}.$$

Доказательство. Мы воспользуемся результатом, полученным в лемме 7. При $s=1/2+\varepsilon+it$ имеем

$$q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\zeta(1/2+\varepsilon+it,l/q)=\sum\nolimits_{n\le X,\ n\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}n^{-(1/2+\varepsilon+it)}+\pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\times$$

$$\times\Gamma((1/2-\varepsilon-it)/2)\,(2\Gamma((1/2+\varepsilon+it)/2))^{-1}\sum\nolimits_{|n|\le y}e(-nl/q)|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)}+$$

$$+\pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}(2\Gamma((3/2+\varepsilon+it)/2))^{-1}\sum\nolimits_{|n|\le y}i\ \mathrm{sign}(n)\,e(nl/q)\,|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)}+$$

$$+O\left(\sum_{\substack{n\le X\log x,\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}n^{-(1/2+\varepsilon)}e\left(-n^2/\left(2X^2|\tau|\right)\right)\left(n\left(2X^2|\tau|\right)^{-1/2}\right)^{3/2+\varepsilon}\left(1+t^{1/2}/2\left|1-n^2\left(X^2|\tau|\right)^{-1}\right|^{-1}\right)\right)$$

$$+O\left(\sum_{n\le y\log y}(qn)^{-(1/2+\varepsilon)}e\left(-n^2|\tau|/\left(2y^2\right)\right)\left(n\left(|\tau|/\left(2y^2\right)\right)^{1/2}\right)^{3/2-\varepsilon}\left(1+t^{1/2}/2\left|1-n^2|\tau|y^{-2}\right|^{-1}\right)\right)\quad(8.1)$$

$$+O\left(x^{-M}q^{-1/2}+y^{-M}q^{-1/2}\right)$$

Здесь $X=xq$. В первом остатке разобьём интервал суммирования на три части

$$1\le n\le X(|\tau|/2)^{1/2},\ X(|\tau|/2)^{1/2}<n\le X(2|\tau|)^{1/2},\ X(2|\tau|)^{1/2}<n\le X\log x.$$

Таким же способом разобьём сумму во втором остатке

$$1\le n\le y(2|\tau|)^{-1/2},\ y(2|\tau|)^{-1/2}<n\le y\left(2|\tau|^{-1}\right)^{1/2},\ y\left(2|\tau|^{-1}\right)^{1/2}<n\le y\log y.$$

Следовательно, для четвёртого и пятого члена в (8.1) имеем

$$\sum\nolimits_1=\sum\nolimits_{11}+\sum\nolimits_{12}+\sum\nolimits_{13},\ \sum\nolimits_2=\sum\nolimits_{21}+\sum\nolimits_{22}+\sum\nolimits_{23}.$$

Далее

$$\sum\nolimits_{11}\ll\sum\nolimits_{n\le x_1,\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,q)}n^{-(1/2+\varepsilon)}\left(n/\left(2X^2|\tau|\right)^{1/2}\right)^{3/2+\varepsilon}t^{-1/2}\ll\left(X|\tau|^{1/2}\right)^{3/2+\varepsilon}t^{-1/2}\left(1+X^2|\tau|q^{-1}\right)$$

$$\sum\nolimits_{13}\ll\sum_{\substack{2x_1<n\le X\log x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}n^{-(1/2+\varepsilon)}\left(n\left(2X^2|\tau|\right)^{-1/2}\right)^{3/2+\varepsilon}X^2|\tau|n^{-2}t^{-1/2}\ll\left(X|\tau|^{1/2}t^{-1}\right)^{1/2+\varepsilon}q^{-1}\log x$$

$$\sum\nolimits_{21} \ll \sum\nolimits_{n\le y_1} (qn)^{-(1/2-\varepsilon)}\left(n\left(|\tau|/\left(2y^2\right)\right)^{1/2}\right)^{3/2-\varepsilon} t^{-1/2} \ll y^{1/2+\varepsilon}\left(qt|\tau|^{1/2}\right)^{-1/2}$$

$$\sum\nolimits_{23} \ll \sum\nolimits_{2y_1<n\le y\log y} (qn)^{-(1/2-\varepsilon)}\left(ny^{-1}\sqrt{|\tau|/2}\right)^{3/2-\varepsilon} y^2\left(|\tau|n^2t^{1/2}\right)^{-1} \ll \left(y/\left(|\tau|^{1/2}t\right)\right)^{1/2+\varepsilon} q^{-1/2}\log y$$

Здесь $x_1 = X\sqrt{|\tau|2^{-1}}$, $y_1 = y\sqrt{(|\tau|2)^{-1}}$. В сумме $\sum_{12}$ интервал суммирования разобьем на $O(\log X)$ участков вида: $X\sqrt{|\tau|\left(1-2^j t^{-1/2}\right)} < n \le X\sqrt{|\tau|\left(1-2^{j-1}t^{-1/2}\right)}$, $j>0$; $X\sqrt{|\tau|\left(1-t^{-1/2}\right)} < n \le X\sqrt{|\tau|\left(1+t^{-1/2}\right)}$; $X\sqrt{|\tau|\left(1+2^{j-1}t^{-1/2}\right)} < n \le X\sqrt{|\tau|\left(1+2^j t^{-1/2}\right)}$, $j>0$. Заметим, что суммирование по каждому из этих участков даёт вклад не более чем $\left(X|\tau|^{1/2}\right)^{-3/2+\varepsilon} 2^{-j}\, 2^j X^2|\tau|/\left(qt^{1/2}\right) = X^{1/2+\varepsilon}|\tau|^{1/4+\varepsilon}/\left(qt^{5/4}\right)$.

Поэтому $\sum_{12} \ll X^{1/2+\varepsilon}|\tau|^{1/4+\varepsilon}/\left(qt^{5/4}\right)\log X$, и аналогично $\sum_{22} \ll y^{1/2+\varepsilon}\left(qt|\tau|^{1/2}\right)^{-1/2}\log y$.

Собирая теперь оценки $\sum_{11}, \sum_{12}, \sum_{13}, \sum_{21}, \sum_{22}, \sum_{23}$ и полагая $|\tau| \ll 1$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(1/2+\varepsilon+it,l/q)}{q^{(1/2+\varepsilon+it)}} &= \sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, q)}} \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon+it}} + \pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\frac{\Gamma\left((1/2-\varepsilon-it)2^{-1}\right)}{2\Gamma\left((1/2+\varepsilon+it)2^{-1}\right)}\sum_{|n|\le y} e(-nl/q)|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)} + \\ &+ \pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\frac{\Gamma\left((3/2-\varepsilon-it)2^{-1}\right)}{2\Gamma\left((3/2+\varepsilon+it)2^{-1}\right)}\sum_{|n|\le y} i\,\mathrm{sign}(n)e(nl/q)|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)} + \\ &+ O\left(\left(t^{1/4}q^{1/2}\right)^{-1+\varepsilon}\right) + O\left(q^{-1/2}t^{-M/2}\right)\end{aligned} \tag{8.2}$$

где постоянные в символах O не зависят от t, x, q, y, M.

Теперь, учитывая, что $x \ll T^{1/2}$, $y \ll T^{1/2}$, из (8.2) получим

$$\int_{-T}^{T}\left|q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\zeta(1/2+\varepsilon+it,l/q) - l^{-(1/2+\varepsilon+it)}\right|^2 dt \ll \int_{1}^{T}\left|q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\zeta(1/2+\varepsilon+it,l/q) - l^{-(1/2+\varepsilon+it)}\right|^2 dt \ll$$

$$\ll \int_1^T\left|\sum_{n\le X,\, n\equiv l(\mathrm{mod}\, q)} n^{-(1/2+\varepsilon+it)}\right|^2 dt + \int_1^T\left|\pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\frac{\Gamma\left((1/2-\varepsilon-it)2^{-1}\right)}{2\Gamma\left((1/2+\varepsilon+it)2^{-1}\right)}\sum_{|n|\le y} e(-nl/q)|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)}\right|^2 dt +$$

$$+\int_1^T\left|\pi^{it}q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\frac{\Gamma\left((3/2-\varepsilon-it)2^{-1}\right)}{2\Gamma\left((3/2+\varepsilon+it)2^{-1}\right)}\sum_{|n|\le y} i\,\mathrm{sign}(n)e(nl/q)|n|^{-(1/2-\varepsilon-it)}\right|^2 dt + T/q = I_1 + I_2 + I_3 + T/q$$

Оценивая I_1 с помощью леммы 5, а интегралы I_2, I_3 с помощью леммы 4, имеем $I_1 + I_2 + I_3 \ll T^{1+\varepsilon}q^{-1}$. Что завершает доказательство леммы. □

Лемма 9. *Пусть* $F_1(s;l,q)$, $F_2(s;l,q)$ *определены в (1), тогда в области* $1/2+\varepsilon \le \sigma \le 1+\varepsilon$, $|t| \ge t_0 > 1$, $s=\sigma+it$ *справедлива оценка*

$$F_1(s;l,q) + F_2(s;l,q) \ll_\varepsilon \left(q^{-1-\varepsilon}\right)^{2(\sigma-1/2-\varepsilon)}\left(t^{3/4+\varepsilon}\right)^{2(1+\varepsilon+\sigma)}$$

где постоянная в символе $\ll$ *зависит от* ε *и не зависит от* σ *и* t.

Доказательство. На прямой $\mathrm{Re}(s) = 1+\varepsilon$ имеем

$$F_1 + F_2 \ll_\varepsilon q^{-1-\varepsilon} + l^{-1-\varepsilon}\sum_{k\ge 1} d(k)(kq+1)^{-2(1+\varepsilon)} \ll_\varepsilon q^{-1-\varepsilon}$$

На прямой $\mathrm{Re}(s) = 1/2+\varepsilon$ из (8.2) получаем $q^{-(1/2+\varepsilon+it)}\zeta(1/2+\varepsilon+it,l/q) \ll t^{1/4+\varepsilon}$.

Далее, если мы используем $\zeta(\sigma+it) \ll t^{(1-\sigma)/3}\log t$, $t \ge t_0$, $1/2 \le \sigma \le 1$ (см. [4]), то из этого следует, что $Z(1/2+\varepsilon+it) = \zeta(1/2+\varepsilon+it)L(1/2+\varepsilon+it,\chi_4) \ll t^{1/3+\varepsilon}$.

Тогда $F_1(1/2+\varepsilon+it;l,q)+F_2(1/2+\varepsilon+it;l,q) \ll t^{7/12+\varepsilon}$.

Теперь, применяя принцип Фрагмена-Линделёфа, получим утверждение леммы.□

Доказательство основной теоремы. Мы имеем $\sum_{n\le x/l} r(n) = (2\pi i)^{-1}\int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} Z(s)l^{-s}x^s s^{-1}ds + O\left(x^{1+\varepsilon}T^{-1}\right)$, где $r(n)$ – количество представлений натурального n в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Но сумма слева равна $\pi x/l + O\left((x/l)^{\theta}\right)$, где θ – показатель степени остаточного члена в проблеме круга(см., например, [6], где $\theta = 7/22+\varepsilon$).

Тогда $I_3 = \pi x/l + O\left((x/l)^{\theta}\right) + O\left(x^{1+\varepsilon}T^{-1}\right)$. Далее,

$$I_1 + I_2 = \operatorname*{res}_{s=1}(F_1+F_2) + (2\pi i)^{-1}\left(\int_{1/2+\varepsilon-iT}^{1/2+\varepsilon+iT} F_1 x^s s^{-1}ds + \int_{1/2+\varepsilon-iT}^{1/2+\varepsilon+iT} F_2 x^s s^{-1}ds + \right.$$

$$\left. + \int_{1/2+\varepsilon+iT}^{1+\varepsilon+iT}(F_1+F_2)x^s s^{-1}ds + \int_{1/2+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon-iT}(F_1+F_2)x^s s^{-1}ds\right) = \operatorname*{res}_{s=1}F(s;l,q) + I_{11} + I_{21} + I_{12} + I_{22}$$

Интегралы I_{12} и I_{22} оцениваются одинаково. С помощью леммы 9 имеем

$$I_{12} + I_{22} \ll x^{1/2+\varepsilon}T^{-1/4}.$$

Оценим I_{11}. Используя результаты, полученные в леммах 6 и 8, получим

$$I_{11} \ll x^{1/2+\varepsilon}\sum_{(d,q)=1} d^{-(1+\varepsilon)}\left(\int_{\substack{1\\ \mathrm{Re}(s)=1/2+\varepsilon}}^{T} |Z(s)|^2|s|^{-1}|ds|\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_{\substack{1\\ \mathrm{Re}(s)=1/2+\varepsilon}}^{T} \left|q^{-s}\zeta\left(s, l\bar{d}^2 q^{-1}\right) - \left(l\bar{d}^2\right)^{-s}\right|^2 |s|^{-1}|ds|\right)^{1/2} \ll_{\varepsilon} (x/q)^{1/2+\varepsilon}T^{\varepsilon}$$

Далее, $$I_{21} \ll (x/l)^{1/2+\varepsilon}\sum_{d>1,\,(d,q)=1}\left(d\bar{d}\right)^{-(1+\varepsilon)}\left(\int_{\substack{1\\ \mathrm{Re}(s)=1/2+\varepsilon}}^{T} |Z(s)|^2|s|^{-1}|ds|\right)^{1/2}\left(\int_{\substack{1\\ \mathrm{Re}(s)=1/2+\varepsilon}}^{T} |s|^{-1}|ds|\right)^{1/2} \ll$$

$$\ll (x/l)^{1/2+\varepsilon}T^{\varepsilon}\sum_{k>1}(kq+1)^{-(1+\varepsilon)} = (x/l)^{1/2+\varepsilon}T^{\varepsilon}q^{-(1+\varepsilon)}.$$

Следовательно, $I_{11} + I_{21} \ll_{\varepsilon} (x/q)^{1/2+\varepsilon}T^{\varepsilon}$. Теперь, если положим $T = x$ и учтём оценки интегралов I_{11}, I_{21}, I_{12}, I_{22}, I_3, то получим утверждение теоремы. □

1. **Карацуба А. А.** Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука, 1975. – 182 с.
2. **Лаврик А. Ф.** Приближённые функциональные уравнения функций Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1968. – Т. 32, № 1. – С.134–185.
3. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
4. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана. – М.: ИЛ, 1953. – 406 с.
5. **Hecke E.** Uber eine neue Art von Zeta-funktionen und ihre Beziechungen zur Vertielung der Primzahlen // Math. Zeitseh. – 1920. – Bd. 6. – S. 11–51.
6. **Mozzochi C. J., Ivaniec H.** On the Divisor and Cirkle // Journ. Numb. Theor. – 1988. – № 29. – P. 60–93.
7. **Smith R. A., Subbarao M. V.** The average number of divisors in an arithmetic progression // Canad. Math. Bull. – 1981. – 24, № 1 – P. 37–41.
8. **Varbanec P. D., Zarzycki P.** Divisors of the Gaussian Integers in an Arithmetic Progression // Journ. Numb. Theor. – 1989. – V. 33, № 2. – P. 152–169.