Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 84–87

УДК 517.911

А. Н. Витюк

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Диференціальні включення і оптимальне керування" ОНУ 23.03.2001 р.

Розглядається метод усереднення для диференціальних включень

$$D_0^\alpha y(x) \in \varepsilon^\alpha F(x, y(x)),$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $D_0^\alpha y(x)$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$.

Рассматривается метод усреднения для дифференциальных включений

$$D_0^\alpha y(x) \in \varepsilon^\alpha F(x, y(x)),$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $D_0^\alpha y(x)$ – производная Римана – Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$.

Averaging method is investigate for differential inclusions

$$D_0^\alpha y(x) \in \varepsilon^\alpha F(x, y(x)),$$

where $\varepsilon > 0$ – is a small parameter, $D_0^\alpha y(x)$ – is a Riemann – Liouville derivative of order $\alpha \in (0,1)$.

Интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка вызван их многочисленными приложениями во многих областях науки [1,2]. Исследованием условий существования решений аналога задачи Коши для таких дифференциальных уравнений посвящено ряд работ (см. [1,3] и библиографию в них).

Настоящая работа посвящена обоснованию метода усреднения для дифференциальных включений дробного порядка.

Отметим, что первые работы по обоснованию метода усреднения для включения $\dot{x} \in \varepsilon F(t,x)$ были выполнены В. А. Плотниковым. Впоследствии этот метод для дифференциальных включений был предметом изучения многих авторов [4].

1. Ниже используем обозначения работы [5]. Пусть E^n – пространство n-мерных векторов с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ; $R_+ = [0,+\infty)$; $\operatorname{comp} E^n$ – пространство непустых и компактных подмножеств E^n с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$; $\rho(\cdot,\cdot)$ – расстояние между точкой и множеством в E^n; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера; $I_0^\alpha f(x)$ и $D_0^\alpha f(x)$, соответственно интеграл и производная Римана – Лиувилля порядка $0 < \alpha < 1$ от функции $f(x)$

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)dt;$$

$$f_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} f(x).$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$D_0^\alpha y(x) \in \varepsilon^\alpha F(x, y(x)), \quad y_{1-\alpha}(0) = \theta, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где $F(x,y): R_+ \times D \to \operatorname{comp} E^n$, $D \subset E^n$ – непустое открытое и связное подмножество E^n, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Решением задачи (1) на $(0,a]$ называем [5] функцию $y(x):(0,a]\to E^n$ такую, что $y(x)\in C\big((0,a],E^n\big)$; $y_{1-\alpha}(x)\in AC\big([0,a],E^n\big)$; $y_{1-\alpha}(0)=\theta$ и $D_0^\alpha y(x)\in\varepsilon^\alpha F\big(x,y(x)\big)$ для п.в. $x\in(0,a]$.

Предположим, что:

а) отображение $F(\cdot,y):R_+\to \operatorname{comp}E^n$ измеримо для каждого $y\in D$;

б) $h\big(F(x,u),F(x,v)\big)\le K\|u-v\|$ для $u,v\in D$ и почти всех (п.в.) $x\in R_+$;

в) $h\big(F(x,y),\{\theta\}\big)\le M$ для $y\in D$ и п.в. $x\ge 0$.

Рассмотрим далее включение

$$D_0^\alpha z(x)\in\varepsilon^\alpha G\big(x,z(x)\big),\quad z_{1-\alpha}(0)=\theta, \tag{2}$$

причем отображение $G:D\times E^n\to\operatorname{comp}E^n$ такое, что равномерно относительно $x\ge 0$ и $y\in D$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^\alpha}\int_x^{x+T}(x+T-t)^{\alpha-1}h\big(F(x,y),G(x,y)\big)dx=0. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть:*

1) *отображения* $F,G:R_+\times D\to\operatorname{comp}E^n$ *удовлетворяет условиям* а), б), в), *и равномерно относительно* $x\ge 0$ *и* $y\in D$ *существует предел* (3).

2) *решения задач* (1), (2) *при* $0<\varepsilon\le\bar\varepsilon$ *и* $x\ge 0$ *лежат в области* D *вместе с некоторой их* δ *-окрестностью.*

Тогда для любых $0<\eta\le\delta$ *и* $L>0$ *существует такое* $\varepsilon_0(\eta,L)\le\bar\varepsilon$, *что для* $0<\varepsilon\le\bar\varepsilon$ *и* $x\in\big[0,L\varepsilon^{-1}\big]$ *каждому решению* $y(x)$ *задачи* (1) *можно поставить в соответствие такое решение* $z(x)$ *задачи* (2), *что* $\|y(x)-z(x)\|\le\eta$ *и наоборот.*

Доказательство. Предварительно заметим следующее. Так как $y_{1-\alpha}(0)=\theta$, то решение включения (1) представимо в виде

$$y(x)=\frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

где $y(x)$ – некоторый измеримый селектор многозначного отображения $F\big(x,y(x)\big)$. Отсюда и условия в) следует, что $\lim\limits_{x\to+0}y(x)=\theta$. Полагая $y(0)=\theta$, получим, что $y(x)\in C\Big(\big[0,L\varepsilon^{-1}\big],E^n\Big)$.

Пусть $y(x)$ – иекоторое решение задачи (1) на промежутке $\big[0,L\varepsilon^{-1}\big]$, который покроем равномерной сеткой с узлами $x_i=i\tau,\tau=\dfrac{L}{\varepsilon m}$, $i=\overline{0,m}$.

Построим функцию $\varphi(x):\big[0,L\varepsilon^{-1}\big]\to E^n$ следующим образом. Пусть $\psi_i(x):[x_i,x_{i+1}]\to E^n$ такой измеримый селектор отображения $F\big(x,y(x_i)\big)$, что для $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$\|\varphi(x)-\psi_i(x)\|=\rho\big(\varphi(x),F\big(x,y(x_i)\big)\big)\le$$

$$\le h\big(F\big(x,y(x)\big),F\big(x,y(x_i)\big)\big)\le K\|y(x)-y(x_i)\|. \tag{5}$$

Если $\psi(x):\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]\to E^n$ такая функция, что $\psi(x)=\psi_i(x)$ для $x\in[x_i,x_{i+1})$, $i=\overline{0,m}$, то положим

$$u(x)=\frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\psi(t)dt. \tag{6}$$

В силу (4) для $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$\|y(x)-y(x_i)\|=$$

$$=\frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int_0^{x_i}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt+\int_{x_i}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt-\int_0^{x_i}(x_i-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt\right\|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon^\alpha\mathrm{M}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{x_i}\left[(x_i-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}\right]dt+\int_{x_i}^{x}(x-t)^{\alpha-1}dt\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon^\alpha\mathrm{M}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[x_i^\alpha-x^\alpha+2(x-x_i)^\alpha\right]\le\frac{2\varepsilon^\alpha\mathrm{M}\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{2\mathrm{M}L^\alpha}{m^a\Gamma(\alpha+1)}. \tag{7}$$

Аналогично доказываем, что для $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$\|u(x)-u(x_i)\|\le\frac{2\mathrm{M}L^\alpha}{m^\alpha\Gamma(\alpha+1)}. \tag{8}$$

Далее с учетом (4) – (7)

$$\|y(x_{i+1})-u(x_{i+1})\|\le\frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{i}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\|y(t)-\varphi_j(t)\|(x_{i+1}-t)^{\alpha-1}dt\le$$

$$\le\frac{2\mathrm{M}L^\alpha\,\varepsilon^\alpha\,\tau^\alpha\,(i+1)^\alpha}{m^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha)\,\alpha}\le\frac{2\mathrm{MK}}{m^\alpha}\left(\frac{L^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2. \tag{9}$$

Согласно (3) для фиксированных m и $\eta_1>0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta_1,m)\le\bar{\varepsilon}$, что для $0<\varepsilon\le\bar{\varepsilon}$

$$\left(\frac{\varepsilon m}{L}\right)^\alpha\int_{x_j}^{x_j+\tau}(x_j+\tau+t)^{\alpha-1}h\big(F(t,y(x_j)),G(t,y(x_j))\big)dt\le\frac{\eta_1}{m^{1-\alpha}}. \tag{10}$$

Так как $\psi_j(x)\in F(x,y(x_j))$, $x\in[x_j,x_{j+1}]$, то существует такой измеримый селектор $v_j(x)\in G(x,y(x_j))$, $x\in[x_j,x_{j+1}]$, что

$$\left(\frac{\varepsilon m}{L}\right)^\alpha\int_{x_j}^{x_j+\tau}(x_j+\tau-t)^{\alpha-1}\|\psi_j(t)-v_j(t)\|dt\le\frac{\eta}{m^{1-\alpha}} \tag{11}$$

Если $\gamma(x)=v_j(x)$, $x\in[x_j,x_{j+1})$, а

$$\xi(x)=\frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\gamma(t)dt, \tag{12}$$

то, как и выше, получаем для $x\in[x_i,x_{i+1})$

$$\|\xi(x)-\xi(x_i)\|\le\frac{2\mathrm{M}L^\alpha}{m^\alpha\Gamma(1+\alpha)}. \tag{13}$$

Кроме того, в силу (11)

$$\| u(x_i)-\xi(x_i)\| \le \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(x_i-t)^{\alpha-1}\|\psi_j(t)-v_j(t)\|dt \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{L^\alpha}{m^\alpha\varepsilon^\alpha}\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{\varepsilon m}{L}\right)^\alpha\int_{x_j}^{x_{j+1}}(x_j-t)^{\alpha-1}\|\psi_j(t)-v_j(t)\|dt \le$$

$$\le \frac{L^\alpha m}{\Gamma(\alpha)m^\alpha}\cdot\frac{\eta_1}{m^{1-\alpha}}=\frac{L^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\eta_1 . \qquad (14)$$

Используя оценки (7)–(9), (13), (14), получаем, что для $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$\rho\left(D_0^\alpha\xi(x),G(x,\xi(x))\right)=\varepsilon^\alpha\rho\left(v_i(x),G(x,\xi(x))\right)\le$$

$$\varepsilon^\alpha h\left(G(x,y(x_i)),G(x,\xi(x))\right)\le\varepsilon^\alpha K\|y(x_i)-\xi(x)\|\le$$

$$\le\varepsilon^\alpha K\left(\|y(x_i)-u(x_i)\|+\|u(x_i)-\xi(x_i)\|+\|\xi(x_i)-\xi(x)\|\right)\le\varepsilon^\alpha K\lambda ,$$

где $\lambda = \mathrm{A}\cdot m^{-\alpha}+\mathrm{B}\eta_1$, $\mathrm{A}=\dfrac{2\mathrm{M}L^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\left(1+\dfrac{\mathrm{K}L^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)$, $\mathrm{B}=\dfrac{L^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$.

Существует ([5], теорема 1) такое решение $z(x)$ задачи (2), что для $x\in\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$

$$\|\xi(x)-z(x)\|\le\lambda\left(\mathrm{E}_\alpha\left(\mathrm{K}L^\alpha\right)-1\right), \qquad (15)$$

где $\mathrm{E}_\alpha(z)$ – функция Миттаг – Леффлера [1, с. 33].

Следовательно, для $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,m-1}$, в силу оценок (7), (8), (13), (14), (15)

$$\|y(x)-z(x)\|\le\|y(x)-y(x_i)\|+\|y(x_i)-u(x_i)\|+\|u(x_i)-\xi(x_i)\|+\|\xi(x_i)-\xi(x)\|+$$

$$+\|\xi(x)-z(x)\|\le\mathrm{T}\cdot m^{-\alpha}+\mathrm{P}\cdot\eta_1 ,$$

где постоянные T,P зависят от $\mathrm{K},\mathrm{M},L,\alpha$.

Если $\eta_1<\dfrac{\eta}{2\mathrm{P}}$, $m>\left(\dfrac{2\mathrm{T}}{\eta}\right)^{1/\alpha}$ то $\|y(x)-z(x)\|\le\eta$ для $x\in\left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$ и $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

1. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.– Минск: Наука и техника, 1987.– 687 с.
2. **Oldham K. B., Spanier J.** The fractional calculus.– N. Y.; London: Acad. Press, 1974.– 234 p.
3. **Килбас А. А., Бонилла В., Трухилло Х.** Нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций // Доклады РАН.– 2000.– Т. 374, № 4.– С. 445–449.
4. **Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы.– Одесса: АстроПринт, 1999.– 354 с.
5. **Витюк А.Н.** Существование решений многозначных дифференциальных уравнений дробного порядка // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2000.– Т.5, вып. 3. Фіз.-мат. науки. – С. 75–78.
6. **Благодатских В. И.** Теория дифференциальных включений.– М.: Изд-во МГУ, 1979.– 88 с.