Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 69–75

УДК 517.946

П. В. Керекеша, Н. Я. Тихоненко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
"Загальна теорія наближених методів" ОНУ 24.10.2002 р.

Провадиться аналітичне дослідження та обґрунтовується метод наближеного розв'язання змішаної граничної задачі для рівняння Лапласа в однозв'язній області, обмеженій двома простими гладкими кривими.

Производится аналитическое исследование и обосновывается метод приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в односвязной области, ограниченной двумя простыми гладкими кривыми.

The paper investigates the analytical research and substantiates the method of approximated solution of mixed boundary problem for Laplas's equation in 1-connected domain bounded plan smooth curves.

1. Введение и постановка задачи. Пусть D – односвязная область, ограниченная контуром $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1, Γ_2 – простые гладкие кривые; $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1; z_2\}$. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

в области D, которое на границе Γ удовлетворяет условию

$$A\frac{\partial u}{\partial n} + Bu = \varphi, \tag{1.2}$$

где A, B и φ – известные функции точек контура Γ.

Как известно [1], в общей постановке задача (1.1), (1.2) является весьма сложной и в общем случае она еще не решена. Известны ее решения лишь для некоторых канонических областей, в частности для полосы, полуплоскости [2] и других, и то лишь в том случае, когда функции A и B являются *константами*.

В настоящей работе рассмотрим два важных с практической точки зрения случая задачи (1.1), (1.2).

Случай 1: $B = 1$, $A = 0$ на Γ_1.

Случай 2: $A = 1$, $B = 0$ на Γ_1.

В обоих случаях A и B – непрерывные и отличные от нуля на Γ_2 *функции*, такие, что $A^{-1}B > 0$ на Γ_2. Для определенности в случае 1 задачу (1.1), (1.2) будем называть первой смешанной краевой задачей, а в случае 2 – второй смешанной краевой задачей для уравнения Лапласа.

Известно, что существует функция

$$z = z(w) = x(\alpha, \beta) + iy(\alpha, \beta),\ (z(-\infty) = z_1,\ z(+\infty) = z_2),$$

конформно отображающая полосу $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < h$ в область D. При помощи этого отображения смешанные задачи для уравнения Лапласа в односвязной области сводятся к соответствующим смешанным задачам для уравнения Лапласа в полосе. Этот факт базируется на инвариантности оператора Лапласа при конформном отображении [3], гладкости контуров Γ_1 и Γ_2 и известной [3] формулы

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = |z'(w)| \frac{\partial u}{\partial n}.$$

В связи с этим обстоятельством рассматриваемая проблема приводится к решению двух смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в полосе. Для определенности рассмотрим сначала вторую смешанную задачу Лапласа в полосе.

2. Исследование второй смешанной задачи для уравнения Лапласа в полосе. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0, \ -\infty < \alpha < +\infty, \ 0 < \beta < h, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha, 0) = g_1(\alpha), \ \ -\infty < \alpha < +\infty, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha, h) + b(\alpha) u(\alpha, h) = g_2(\alpha), \ -\infty < \alpha < +\infty, \tag{2.3}$$

где $b(\alpha) > 0$ – известная непрерывная функция на вещественной оси R, а $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2(R)$ – известные функции.

Решение $u(\alpha, \beta)$ задачи (2.1)–(2.3) ищем в пространстве функций, непрерывных вместе с частными производными до второго порядка включительно в полосе $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < h$, и таких, что

$$\int_R |u(\alpha, \beta)|^2 \, d\alpha \le \text{const},$$

$$\int_R |u_\beta(\alpha, \beta)|^2 \, d\alpha \le \text{const}, \ \beta \in [0; h]. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Если функция* $b(\alpha) > 0$, *то решение задачи* (2.1)–(2.3), *удовлетворяющее условиям* (2.4), *единственно.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $u_1(\alpha, \beta) \ne u_2(\alpha, \beta)$ – различные решения задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющие условиям (2.4). Рассмотрим функцию $v = u_1 - u_2$ и применим формулу Дирихле [4] для функции $u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta)$ в неограниченной области. Поскольку функция $v(\alpha, \beta)$ является решением однородной задачи (2.1)–(2.3), то применительно к полосе из формулы Дирихле получим

$$\int_R \int_0^h \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha \, d\beta + \int_R b(\alpha) v^2(\alpha, h) \, d\alpha = 0. \tag{2.5}$$

Если функция $b(\alpha) > 0$, то равенство (2.5) будет справедливым лишь при условии, что каждый из интегралов в его левой части равен нулю. Откуда следует, что градиент функции $v(\alpha, \beta)$ равен нулю в каждой точке полосы, т.е. $v(\alpha, \beta) = \text{const}$. Однако функция $v(\alpha,\beta)$, как разность двух функций из $L_2(R)$, должна принадлежать $L_2(R)$. Это возможно, если $v(\alpha,\beta)=0$, т.е. $u_1(\alpha,\beta)=u_2(\alpha,\beta)$.

Применим теперь к уравнению (2.1) интегральное преобразование Фурье по переменной α. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно образа Фурье $U(x,\beta)$ функции $u(x,\beta)$. Его решение имеет вид

$$U(x,\beta)=A(x)\operatorname{ch}x\beta+B(x)\operatorname{sh}x(h-\beta),\ x\in R,\ \beta\in[0;h], \tag{2.6}$$

где $A(x)$, $B(x)$ – произвольные функции параметра x. Используя условие (2.2), из (2.6) получим

$$U(x,\beta)=A(x)\operatorname{ch}x\beta+G_1(x)\operatorname{sh}x(h-\beta)/x\operatorname{ch}xh, \tag{2.7}$$

где

$$G_1(x)=(Vg_1)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R g_1(x)e^{ix\alpha}dx,\ x\in R.$$

Из (2.7) следует, что

$$U(x,h)=A(x)\operatorname{ch}xh,$$

$$U_\beta(x,h)=xA(x)\operatorname{sh}xh-\frac{G_1(x)}{\operatorname{ch}xh}. \tag{2.8}$$

Из условий (2.4) и представлений (2.8) следует, что функции

$A(x)\operatorname{ch}xh$, $xA(x)\operatorname{sh}xh\in L_2(R)$.

К равенствам (2.8) применим обратное преобразование Фурье. Соответственно получим

$$u(\alpha,h)=0{,}5[a(\alpha+ih)+a(\alpha-ih)],$$

$$u_\beta(\alpha,h)=0{,}5i\,[a(\alpha+ih)-a(\alpha-ih)]'-g_3(\alpha), \tag{2.9}$$

где

$$a(\alpha)=(V^{-1}A)(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R A(x)e^{-ix\alpha}dx,$$

$$g_3(\alpha)=\left(V^{-1}\frac{G_1(x)}{\operatorname{ch}xh}\right). \tag{2.10}$$

Подставляя теперь (2.9) в краевое условие (2.3) для определения функции $a(\alpha)$, получим дифференциальную задачу Карлемана (ДЗК)

$$i\,[a(\alpha+ih)-a(\alpha-ih)]'+b(\alpha)[a(\alpha+ih)+a(\alpha-ih)]=2[g_2(\alpha)+g_3(\alpha)]. \tag{2.11}$$

Решение ДЗК (2.11) будем искать в виде [5]

$$a(\alpha)=\frac{1}{4h}\int_R\frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}dt,\ -h<\operatorname{Im}\alpha<h. \tag{2.12}$$

При этом будем предполагать, что неизвестная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси R, а $\varphi'(t)\in L_2(R)$.

В силу этого, согласно [5],

$$a'(\alpha) = \frac{1}{4h}\int_R \frac{\varphi'(t)}{\mathrm{ch}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}\,dt\,,\ -h < \mathrm{Im}\,\alpha < h\,. \tag{2.13}$$

Согласно работе [5], для предельных значений функций $a(\alpha)$ и $a'(\alpha)$ имеют место соответственно следующие представления

$$a(\alpha \pm ih) = \frac{\varphi(\alpha)}{2} \pm \frac{i}{4h}\int_R \frac{\varphi(t)}{\mathrm{sh}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}\,dt\,,$$

$$a'(\alpha \pm ih) = \frac{\varphi'(\alpha)}{2} \pm \frac{i}{4h}\int_R \frac{\varphi'(t)}{\mathrm{sh}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}\,dt\,.$$

Подставив эти равенства в (2.11), получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (СИДУ)

$$\int_R \frac{\varphi'(t)}{\mathrm{sh}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}\,dt + b(\alpha)\varphi(\alpha) = 2h\,g(\alpha)\,, \tag{2.14}$$

где

$$g(\alpha) = g_2(\alpha) + g_3(\alpha)\,.$$

Теперь решение СИДУ (2.14) сведем к решению СИДУ на отрезке, сделав замену переменной

$$\alpha = \frac{h}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\,,\ t = \frac{h}{\pi}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\,.$$

Тогда СИДУ (2.14) примет вид

$$Kw = \gamma(\xi)w(\xi) - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2h}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}\,w'(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi)\,, \tag{2.15}$$

где

$$w(\xi) = \varphi\left(\frac{h}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),\ \gamma(\xi) = b\left(\frac{h}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),\ f(\xi) = g\left(\frac{h}{\pi}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}\right). \tag{2.16}$$

В силу тождественных преобразований смешанная краевая задача (2.1)–(2.3) и СИДУ (2.15) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) выражаются через решения СИДУ (2.15) по формулам (2.16), (2.12), $A(x) = (Va)(x)$, (2.7) и $u(\alpha,\beta) = (V^{-1}U)(\alpha,\beta)$. Отметим также, что в силу тождественных преобразований функции $\gamma(\xi) \in C[-1:1] = C$, $\gamma(\xi) \in L_2[-1:1] = L_2$ и в условиях теоремы 1 СИДУ (2.15) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $L_{2\rho}[-1:1] = L_{2\rho}$, $\rho = (1-\xi^2)^{-0,5}$.

Следует отметить, что первые исследования, посвященные решению задачи (2.1)–(2.3), принадлежат одному из соавторов [6]. Там же был намечен путь ее приближенного решения. При этом вопросы обоснования метода ее приближенного решения и сходимости ее приближенных решений к точным не рассматривались. В работе [7] при рассмотрении конкретной прикладной задачи, сводящейся к решению задачи (2.1)–(2.3), вопросы обоснования метода приближенного ее решения были затронуты, но с довольно жесткими ограничениями, накладываемыми на заданные функции. В предлагаемой работе обоснование метода приближенного решения задачи (2.1)–(2.3) производится с общих позиций, что дает возможность установить его осуществимость, сходимость и оценки скорости сходимости приближенных решений задачи (2.1)–(2.3) к ее точному решению в зависимости от конструктивных свойств известных функций, входящих в ее условия.

3. Приближенное решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Пусть $X = L_{2\rho}$ $(Y = L_{2\rho})$ – пространство решений (правых частей) СИДУ (2.15). Его приближенное решение ищем в виде

$$w_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} w_k T_k(\xi), \tag{3.1}$$

где $T_k(\xi)$ – многочлены Чебышева первого рода. Тогда, подставив (3.1) в уравнение (2.15) и исходя из известных соотношений

$$T_l'(\xi) = lU_{l-1}(\xi), \quad \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}\,U_{l-1}(\tau)}{\tau-\xi} d\tau = -\pi T_l(\xi), \quad l = 1, 2, \ldots,$$

где $U_l(\xi)$ – многочлены Чебышева второго рода, получим

$$Kw_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma(\xi) T_k(\xi) w_k + \frac{\pi}{2h}\sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=1}^{n} k T_k(\xi) w_k = f(\xi). \tag{3.2}$$

Из (3.2) для определения неизвестных w_k получим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} A_{jk} w_k + \frac{\pi}{2h} \sum_{k=1}^{n} k B_{jk} w_k = f_j, \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.3}$$

где

$$A_{jk} = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-0,5} \gamma(\xi) T_j(\xi) T_k(\xi)\, d\xi, \quad f_j = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-0,5} f(\xi) T_j(\xi)\, d\xi,$$

$$B_{jk} = \int_{-1}^{1} T_j(\xi) T_k(\xi)\, d\xi = \begin{cases} 0, & k+j - \text{нечетно}, \\ \dfrac{4jk}{[j^2-(k+1)^2][j^2-(k-1)^2]}, & k+j - \text{четно}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть функция* $b(\alpha) > 0$ *и* $\gamma(\xi) \in C$. *Если функция* $f(\xi) \in L_{2\rho}$, *то система уравнений* (3.3) *однозначно разрешима при достаточно больших* n, *а приближенные решения* $w_n(\xi)$ *СИДУ* (2.15) *сходятся в пространстве* $L_{2\rho}$ *к его точному решению* $w(\xi)$, *т.е.*

$$\left\| w(\xi) - w_n(\xi) \right\|_{L_{2\rho}} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Если к тому же функции $\gamma(\xi) \in C^{(r)}$, $f(\xi) \in L_{2\rho}^{(r)}$, $r \ge 1$, то *приближенные решения СИДУ* (2.15) *сходятся к его точному решению со скоростью*

$$\left\| w(\xi) - w_n(\xi) \right\|_{L_{2\rho}} = O(n^{-r}). \tag{3.5}$$

Если же функции $\gamma(\xi)$, $f(\xi) \in H_\alpha^{(r)}$, то *приближенные решения СИДУ* (2.15) *сходятся к его точному решению со скоростью*

$$\left\| w(\xi) - w_n(\xi) \right\|_{L_{2\rho}} = O(n^{-r-\alpha}). \tag{3.6}$$

Доказательство. В условиях теоремы в силу теоремы 1 определенный формулой (2.15) оператор $K: X \to Y$ непрерывно обратим. Обозначим $X_n = Y_n$ – множество агрегатов вида (3.1). Тогда $X_n \subset X_{n+1} \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$, $\dim X_n = \dim Y_n = n+1$. Пусть P_n – оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(\xi) \in Y$ отрезок ее ряда Фурье вида [4]

$$(P_n f)(\xi) = \sum_{k=0}^{n} f_k T_k(\xi), \quad f_k = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{-0,5} f(\xi) T_k(\xi)\, d\xi .$$

Ясно, что $P_n : Y \to Y_n$ и обладает [4] свойствами $P_n^2 = P_n$, $\|P_n\| = 1$. Тогда на основании представления (3.2) систему уравнений (3.3) можно [5] записать в виде $K_n = P_n K w_n = P_n f$, где $K_n = P_n K$ – приближенный оператор. Теперь для завершения доказательства теоремы 2 на основании результатов работы [8] достаточно проверить выполнимость условий теорем 1 и 7 работы [9, стр. 10–19].

Построим теперь приближенное решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Пусть w_k^*, $k = \overline{0,n}$, – решения системы уравнений (3.3). Тогда приближенное решение СИДУ (2.15) имеет вид $w_n^*(\xi) = \sum_{k=0}^{n} w_k^* T_k(\xi)$. Значит, приближенное решение СИДУ (2.14) будет таким $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} w_k^* T_k[\mathrm{th}(2h)^{-1}\pi t]$. При этом для приближенных решений СИДУ (2.14) имеют место оценки скорости сходимости в пространстве $L_2(R)$ к его точным решениям, аналогичные соответственно оценкам (3.4)–(3.6). Тогда приближенные решения ДЗК (2.11) строятся по формуле

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{4h} \int_R \frac{\varphi_n[\mathrm{th}(2h)^{-1}\pi t]}{\mathrm{ch}(2h)^{-1}\pi(t-\alpha)}\, dt, \quad -h < \mathrm{Im}\,\alpha < h. \tag{3.7}$$

Из представлений (2.12) и (3.7) легко получаются оценки, аналогичные соответственно оценкам (3.4)–(3.6), скорости сходимости в пространстве $L_2(R)$ приближенных решений ДЗК (2.11) к ее точному решению. Тогда в соответствии с (2.7) приближенные решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) строятся по формуле

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [A_n(x)\,\mathrm{ch}\, x\beta + G_1(x)\,\mathrm{sh}\, x(h-\beta)/x\,\mathrm{ch}\, xh]\, e^{-ix\alpha} dx,$$

$$\alpha \in R, \ \beta \in [0:h],$$

где $A_n(x) = (V^{-1} a_n)(x)$.

Теперь из равенства

$$u(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [A(x) - A_n(x)]\,\mathrm{ch}\, x\beta\, e^{-ix\alpha} dx, \ \alpha \in R, \ \beta \in [0:h]$$

на основании интегрального равенства Парсеваля и теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть функция* $b(\alpha) > 0$; *функции* $b(\alpha) \in C(R)$, $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2(R)$. *Тогда приближенные решения* $u_n(\alpha,\beta)$ *смешанной краевой задачи* (2.1)–(2.3) *сходятся к ее точному решению, т.е.*

$$\left\| u(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) \right\|_{L_2(R)} \to 0\,,\ n \to \infty\,;\ \beta \in [0:h]\,.$$

Если к тому же функции $b(\alpha) \in C^{(r)}$, $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2^{(r)}(R)$, $r \ge 1$, *то приближенные решения смешанной краевой задачи* (2.1)–(2.3) *сходятся к ее точному решению со скоростью*

$$\left\| u(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) \right\|_{L_2(R)} = O(n^{-r})\,,\ \beta \in [0:h]\,.$$

Если же функции $b(\alpha) \in H_{\alpha_1}^{(r)}(R)$, $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2^{(r)}(R) \cap H_{\alpha_1}^{(r)}(R)$, *то приближенные решения смешанной краевой задачи* (2.1)–(2.3) *сходятся к ее точному решению со скоростью*

$$\left\| u(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) \right\|_{L_2(R)} = O(n^{-r-\alpha_1})\,,\ \beta \in [0:h]\,.$$

Замечание 1. По приведенной выше схеме производится аналитическое исследование и построение приближенного решения первой смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе.

Замечание 2. Аналогичным образом с некоторыми дополнениями производится исследование первой и второй смешанных краевых задач для уравнения Пуассона в полосе.

Замечание 3. Метод приближенного решения СИДУ (2.15), изложенный в работе, является обобщением известного метода ортогональных многочленов [10] приближенного решения интегральных уравнений с П-ядрами.

1. **Миранда К.** Уравнения с частными производными эллиптического типа.– М.: ИЛ, 1957.– 446 с.
2. **Черский Ю. И.** Задачи математической функции, сводящиеся к задаче Римана // Труды Тбилисск. ин-та матем. АН ГрузССР.– 1968. –Т. 28.– С. 209–246.
3. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
4. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики.– М.: Высшая школа, 1979.– 709 с.
5. **Керекеша П. В.** Симметрическая задача Карлемана для полосы с параллельным сдвигом на вещественную ось // ДАН України.– 1998.– №6.– С. 29–33.
6. **Керекеша П. В.** Смешанные краевые гармонические задачи для полосы с граничными условиями, содержащими переменные коэффициенты / Одесск. ун-т. –Одесса, 1987. – Деп. в УкрНИИНТИ 9.02.87, № 643–Ук87.
7. **Керекеша П. В.** Кручення підкріплених стержнів симетричного профілю // ДАН України. –1998.– № 5. – С. 50–58.
8. **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций.– Л.: ЛГУ, 1977.– 184 с.
9. **Габдулхаев Б. Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.– Казань: КГУ, 1980.– 232 с.
10. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.– М: Наука, 1982.– 342 с.

Получено 15.11.2002 г.