

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

**«Вісесиметрична задача кручення зрізаного конуса зі
сферичною тріщиною»**

**«Axisymmetric torsion problem for a truncated cone
containing a spherical crack»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Стасюк Владислав Дмитрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Вайсфельд
Н. Д.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № _____ від _____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ		3
1 Теоретична частина		4
1.1	Постановка задачі	4
1.2	Приведення поставленої задачі до одновимірної розривної крайової задачі	5
1.3	Розв'язання одновимірної розривної крайової задачі	6
1.4	Отримання інтегрального рівняння	9
1.5	Розв'язання інтегрального рівняння методом ортогональних поліномів	14
1.6	Визначення коефіцієнта інтенсивності напружень	18
2 Чисельні розрахунки		21
2.1	Власні значення та квадрати норм функцій Лежандра	21
2.2	Коефіцієнт інтенсивності напружень	22
Висновки		30
Список літератури		31
3 Додатки		33
3.1	Додаток 1	33
3.2	Додаток 2	34
3.3	Додаток 3	35
3.4	Додаток 4	36
3.5	Додаток 5	38

ВСТУП

Конічні об'єкти часто використовуються в інженерній практиці та будівництві, що робить дослідження їхнього напруженого стану важливою задачею як з практичної точки зору, так і з точки зору розвитку математичних методів для вирішення таких проблем. Особливий інтерес представляють тіла, які містять дефекти у вигляді сферичних або конічних тріщин, оскільки ці дефекти суттєво впливають на міцність відповідних конструкцій. У даній роботі розглядається вісесиметрична задача кручення зрізаного конуса (зрізаного по сферичній поверхні), що містить сферичну тріщину. Конічна поверхня закріплена, а вісесиметричне дотичне напруження, яке прикладене до сферичної поверхні, викликає кручення.

Існує відносно небагато досліджень, присвячених напруженому стану еластичних конусів (суцільних, порожнистих, зрізаних по сферичних поверхнях) [1–4], що здебільшого пов'язано з відсутністю відповідних інтегральних перетворень. Г.Я. Попов запропонував нові інтегральні перетворення [5, 6] з ядрами у вигляді асоційованих функцій Лежандра, що дозволили вирішити низку нових задач для еластичних конусів, включаючи ті, що містять дефекти, такі як тріщини. Використовуючи ці інтегральні перетворення, було вирішено кілька вісесиметричних задач теорії пружності для конусів у [7–9]. Присутність конічних та сферичних дефектів у конусі розглядалася у [10–12]. Нестанціонарні задачі для еластичних конусів, включаючи ті, що містять тріщини, розглядалися в [13–16].

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1.1 Постановка задачі

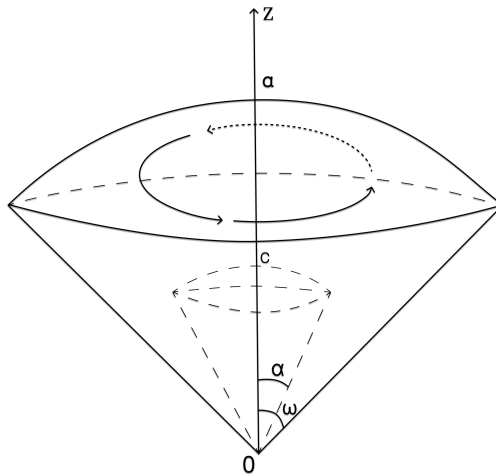


Рис. 1.1. Зрізаний конус зі сферичною тріщиною, до якого прикладене вісесиметричне дотичне навантаження

У сферичній системі координат (r, θ, φ) розглядається конус, зрізаний по сферичній поверхні, що займає область $0 < r < a$, $0 \leq \theta < \omega$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. До сферичної поверхні $r = a$ прикладене вісесиметричне дотичне навантаження з інтенсивністю $p(\theta)$, що викликає кручення. Конічна поверхня $\theta = \omega$ є нерухомо закріпленою. У цьому випадку ненульовими є тільки кутове переміщення $W(r, \theta)$ і два дотичних напруження

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} W \right), \quad \tau_{\theta\varphi}(r, \theta) = Gr \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} - \cot(\theta) W \right),$$

де G — модуль зсуву матеріалу конуса.

Переміщення $W(r, \theta)$ має задовольняти наступному диференціальному

рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{W}{\sin^2 \theta} = 0, \quad (1)$$

із крайовими умовами

$$W|_{\theta=\omega} = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_{r=a} = \rho(\theta), \quad (2)$$

та умовою $W(0, \theta) = 0$ у вершині конуса.

Всередині конуса є сферична тріщина на ділянці $r = c$, $0 \leq \theta < \alpha$, края якої вільні від напружень. При переході через тріщину переміщення $W(r, \theta)$ зазнає невідомого скачка $f(\theta)$, а напруження $\tau_{r\varphi}$ на краях тріщини дорівнює нулю. Це призводить до наступних умов

$$\langle W \rangle = W(c - 0, \theta) - W(c + 0, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < \alpha, \quad (3)$$

де

$$f(\theta) = 0, \quad \alpha < \theta < \omega \quad \text{і} \quad \tau_{r\varphi}|_{r=c \pm 0} = 0, \quad 0 < \theta < \alpha, \quad (4)$$

звідки випливає

$$\langle \tau_{r\varphi} \rangle = \tau_{r\varphi}(c - 0, \theta) - \tau_{r\varphi}(c + 0, \theta) = 0. \quad (5)$$

Крім того, має виконуватися умова замкнутості тріщини

$$f(\alpha) = 0. \quad (6)$$

1.2 Приведення поставленої задачі до одномірної розривної крайової задачі

Для зведення сформульованої задачі (1)-(5) до одномірної задачі, застосуємо інтегральне перетворення Лежандра, запропоноване Г.Я. Поповим [5]

$$W_k(r) = \int_0^\omega W(r, \theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

з формулою оберненого перетворення

$$W(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(r) \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2},$$

де ν_k — це невід'ємні корені рівняння $P_{\nu}^1(\cos \omega) = 0$.

Застосування цього інтегрального перетворення описане в Додатку 1. Таким чином, у області трансформант отримуємо одномірну розривну крайову задачу

$$r^2 W_k''(r) + 2r W_k'(r) - \nu_k(\nu_k + 1) W_k(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad r \neq c,$$

$$W_k'(a) - \frac{1}{a} W_k(a) = \frac{P_k}{G}, \quad W_k(0) = 0,$$

$$\langle W_k \rangle = W_k(c-0) - W_k(c+0) = f_k,$$

$$\langle \tau_{r\varphi, k} \rangle = \tau_{r\varphi, k}(c-0) - \tau_{r\varphi, k}(c+0) = 0,$$

де

$$f_k = \int_0^{\alpha} f(\theta) P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

та

$$\tau_{r\varphi, k}(r) = Gr \left(\frac{1}{r} W_k(r) \right)' = G \left(W_k'(r) - \frac{1}{r} W_k(r) \right).$$

1.3 Розв'язання одномірної розривної крайової задачі

Рішення одновимірної розривної крайової задачі будуватимемо у вигляді суми безперервного розв'язку $U_k(r)$ і розривного розв'язку $V_k(r)$

$$W_k(r) = U_k(r) + V_k(r)$$

Неперервний розв'язок $U_k(r)$ є розв'язком крайової задачі

$$r^2 U_k''(r) + 2r U_k'(r) - \nu_k(\nu_k + 1) U_k(r) = 0, \quad 0 < r < a,$$

$$U'_k(a) - \frac{1}{a}U_k(a) = \frac{P_k}{G}; \quad U_k(0) = 0,$$

і воно має вигляд

$$U_k(r) = \frac{aP_k}{G(\nu_k - 1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_k}, \quad 0 < r < a. \quad (7)$$

Розривний розв'язок $V_k(r)$ є розв'язком розривної крайової задачі

$$r^2V_k''(r) + 2rV_k'(r) - \nu_k(\nu_k + 1)V_k(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad r \neq c,$$

$$V'_k(a) - \frac{1}{a}V_k(a) = 0; \quad V_k(0) = 0,$$

$$\langle V_k \rangle = V_k(c-0) - V_k(c+0) = f_k,$$

$$\langle \tau_{r\varphi, k} \rangle = \tau_{r\varphi, k}(c-0) - \tau_{r\varphi, k}(c+0) = 0.$$

Щоб побудувати розривний розв'язок, необхідно знайти функцію Гріна $G_k(r, \rho)$ для крайової задачі

$$r^2V_k''(r) + 2rV_k'(r) - \nu_k(\nu_k + 1)V_k(r) = 0, \quad 0 < r < a, \quad r \neq c,$$

$$aV'_k(a) - V_k(a) = 0; \quad V_k(0) = 0.$$

Виведення функції Гріна наведено в Додатку 2 і має вигляд

$$G_k(r, \rho) = -\frac{\nu_k + 2}{a(\nu_k - 1)(2\nu_k + 1)} \left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{\nu_k} - \frac{1}{2\nu_k + 1} \begin{cases} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k}, & 0 < r < \rho < a, \\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu_k}, & 0 < \rho < r < a. \end{cases}$$

Доведено, що побудована функція $G_k(r, \rho)$ має такі властивості

$$G_k(r, c) \quad i \quad \frac{\partial^2 G_k(r, \rho)}{\partial r \partial \rho} \Big|_{\rho=c}$$

неперервні при переході від точки $r = c - 0$ до точки $r = c + 0$, тоді як похідні

$$\frac{\partial G_k(r, c)}{\partial r} \quad i \quad \frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c}$$

терплять стрибки відповідно $-\frac{1}{c^2}$ та $\frac{1}{c^2}$ при такому переході. Тоді розривний розв'язок має вигляд

$$V_k(r) = c^2 \left[\langle V_k(c) \rangle \frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \langle V_k(c) \rangle G_k(r, c) \right]$$

З умов на дефекті отримуємо

$$\begin{aligned} \langle V_k(c) \rangle &= V_k(c-0) - V_k(c+0) = f_k \\ \langle \tau_{r\varphi, k} \rangle &= \tau_{r\varphi, k}(c-0) - \tau_{r\varphi, k}(c+0) = \\ &= G \left[V'_k(c-0) - \frac{1}{c} V_k(c-0) \right] - G \left[V'_k(c+0) - \frac{1}{c} V_k(c+0) \right] = \\ &= G \left[\langle V'_k(c) \rangle - \frac{1}{c} \langle V_k(c) \rangle \right] = 0 \end{aligned}$$

З цього випливає, що

$$\langle V'_k(c) \rangle = \frac{1}{c} \quad \text{і} \quad \langle V_k(c) \rangle = \frac{1}{c} f_k.$$

Тоді розривним розв'язком буде

$$V_k(r) = c^2 \left[f_k \frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} f_k G_k(r, c) \right] = c^2 \left[\frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} G_k(r, c) \right] f_k$$

Розв'язок неперервної крайової задачі є сума неперервного і розривного розв'язків

$$W_k(r) = \frac{a P_k}{G(\nu_k - 1)} \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k} + c^2 \left[f_k \frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} G_k(r, c) \right].$$

Далі, використовуючи формулу оберненого перетворення, отримуємо

$$\begin{aligned} W(r, \theta) &= \frac{a}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\nu_k - 1} \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \\ &\quad + c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} G_k(r, c) \right] f_k \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Отриманий вираз для переміщення містить невідому величину f_k - трансформанту стрибка зміщення на тріщині. Виходячи з умови (4) на тріщині, отримаємо інтегральне рівняння для визначення цього стрибка.

1.4 Отримання інтегрального рівняння

Розглянемо інтеграл

$$f_k = \int_0^\alpha f(\eta) P_{\nu_k}^1(\cos \eta) \sin \eta d\eta$$

і проінтегруємо по частинах

$$f_k = [f(\eta) \sin \eta \cdot P_{\nu_k}^1(\cos \eta)]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{d}{d\eta} (f(\eta) \sin \eta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta) d\eta$$

Через умову замкнутості тріщини (6) позаінтегральний доданок обернеться в нуль. Позначимо нову невідому функцію

$$g(\eta) = \frac{d}{d\eta} (f(\eta) \sin \eta)$$

В результаті отримали

$$f_k = \int_0^\alpha g(\eta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta) d\eta$$

Підставимо це представлення для f_k у вираз (8) для $W(r, \theta)$ і змінимо порядок сумування та інтегрування (за $r \neq c$ ряд буде сходиться рівномірно)

$$W(r, \theta) = \frac{a}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\nu_k - 1} \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_k - 1} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} - \int_0^\alpha g(\eta) \left[\sum_{k=1}^{\infty} c^2 \left(\frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} G_k(r, c) \right) \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \right] d\eta$$

Щоб знайти невідому функцію $g(\eta)$, скористаємося умовою відсутності напруження на краях тріщини $\tau_{r\varphi}|_{r=c\pm 0} = 0$, $0 < \theta < \alpha$. Для цього знайдемо

вираз для напруження

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} W(r, \theta) \right)$$

Застосуємо цей оператор до виразів

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k} \right] = \frac{\nu_k - 1}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k - 1}$$

$$c^2 r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial G_k(r, \rho)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=c} - \frac{1}{c} G_k(r, c) \right) \right] = G_k^*(r, c)$$

де

$$G_k^*(r, c) = 2c^2 \frac{\nu_k + 2}{2\nu_k + 1} \left(\frac{r}{c} \right)^{\nu_k - 1} \cdot a^{-2\nu_k - 1} + \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{c} \right)^{\nu_k}, & r < c, \\ \frac{1}{r^2} \left(\frac{c}{r} \right)^{\nu_k}, & r > c. \end{cases}$$

Відповідно, отримуємо

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi}(r, \theta) = \frac{a}{G} \sum_{k=1}^{\infty} P_k \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k - 1} \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \\ - G \int_0^\alpha g(\eta) \left[\sum_{k=1}^{\infty} G_k^*(r, c) \frac{P_{\nu_k}^1(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \right] d\eta \end{aligned}$$

Якщо $r \neq c$, то з отриманого виразу для $G_k^*(r, c)$ видно, що відповідні ряди рівномірно сходяться. Отже, ми можемо інтегрувати цей вираз по θ , враховуючи, що

$$\int P_{\nu_k}^1(\cos \theta) d\theta = P_{\nu_k}^0(\cos \theta)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \int \tau_{r\varphi}(r, \theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \left(\frac{r}{a} \right)^{\nu_k - 1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \\ - G \int_0^\alpha g(\eta) \left[\sum_{k=1}^{\infty} G_k^*(r, c) \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \right] d\eta + A(r) \end{aligned}$$

де $A(r)$ — це деяка функція.

Для того, щоб отримати інтегральне рівняння для $g(\eta)$, слід взяти границю при $r \rightarrow c \pm 0$ і прирівняти отриманий вираз до нуля. Використовуючи формулу для $G_k^*(r, c)$, отримуємо

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} P_k \left(\frac{c}{a}\right)^{\nu_k-1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \\ & - G \int_0^\alpha g(\eta) \left[2c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k + 2}{2\nu_k + 1} a^{-2\nu_k-1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \right] d\eta + A_0 = 0, \quad 0 \leq \theta < \alpha \end{aligned}$$

де $A_0 = A(c)$ є невідомою константою.

Дослідимо на збіжність отримані ряди, використовуючи відому асимптотику функцій Лежандра [17]

$$P_{\nu_k}^0(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cdot \nu_k^{-\frac{1}{2}} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

$$P_{\nu_k}^0(\cos \eta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \eta}} \cdot \nu_k^{-\frac{1}{2}} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \eta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

а також отриману в Додатку 3 асимптотику для

$$\nu_k \sim \frac{\pi}{\omega} k; \quad \|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2 \sim \frac{\omega}{\pi} \nu_k, \quad k \rightarrow \infty \quad (9)$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k \left(\frac{c}{a}\right)^{\nu_k-1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

буде рівномірно збігатися, оскільки умова $c < a$ виконана, а також враховуючи (9)

$$\frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \sim \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cdot \nu_k^{-\frac{3}{2}} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

Позначимо його суму як

$$M(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \left(\frac{c}{a} \right)^{\nu_k-1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

Наступний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k + 2}{2\nu_k + 1} a^{-2\nu_k-1} \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

також рівномірно збігається, оскільки асимптотика його загального члена така

$$\frac{a^{-2\nu_k-1}}{\omega \sqrt{\sin \theta \cdot \sin \eta}} \cdot \nu_k^{-2} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \eta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

Позначимо його суму як

$$R(\theta, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k + 2}{2\nu_k + 1} \cdot a^{-2\nu_k-1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

Стосовно останнього ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2},$$

з асимптотики його загального члена

$$\frac{2}{\omega \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \cdot \frac{1}{\nu_k} \cos \left(\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \eta - \frac{\pi}{4} \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

впливає, що ряд умовно збігається. У Додатку 4 було виконано виокремлення та сумування його повільно збіжної частини, яка набуває наступного вигляду

$$\frac{1}{2\omega \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \left[-\ln \frac{1}{|\theta - \eta|} + \ln \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right)}{|\theta - \eta|} + \frac{\omega - (\theta + \eta)}{2} \right] + N(\theta, \eta),$$

де

$$N(\theta, \eta) = \sum_{k=1}^N \left[\frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} - \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} (\cos \nu_k(\theta + \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)) \right],$$

а також

$$\lim_{|\theta - \eta| \rightarrow 0} \ln \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right)}{|\theta - \eta|} = \ln \frac{\pi}{2\omega}.$$

Отже, інтегральне рівняння для функції $g(\eta)$ приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{G}{2\omega c \sqrt{\sin \theta}} \int_0^\alpha \frac{g(\eta)}{\sqrt{\sin \eta}} \ln \frac{1}{|\theta - \eta|} d\eta - G \int_0^\alpha g(\eta) \left[2c^2 R(\theta, \eta) + \frac{1}{c} N(\theta, \eta) + \right. \\ \left. \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \left(\ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta|}{|\theta - \eta|} + \frac{\omega - (\theta + \eta)}{2} \right) \right] d\eta \\ = -M(\theta) - A_0, \quad 0 \leq \theta < \alpha \end{aligned}$$

Помножимо отримане рівняння на $2\omega c \sqrt{\sin \theta}$ та введемо нову невідому функцію

$$\varphi(\eta) = \frac{g(\eta)}{\sqrt{\sin \eta}}$$

Тоді інтегральне рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \varphi(\eta) \ln \frac{1}{|\theta - \eta|} d\eta - \int_0^\alpha \varphi(\eta) K(\theta, \eta) d\eta \\ = -2\omega G^{-1} \sqrt{\sin \theta} (M(\theta) + A_0), \quad 0 \leq \theta < \alpha \quad (10) \end{aligned}$$

де $K(\theta, \eta)$ можна записати як

$$\begin{aligned} K(\theta, \eta) = 2\omega c \sqrt{\sin \theta \sin \eta} \left[2c^2 R(\theta, \eta) + \frac{1}{c} N(\theta, \eta) \right] \\ + \ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta|}{|\theta - \eta|} + \frac{\omega - (\theta + \eta)}{2} \end{aligned}$$

1.5 Розв'язання інтегрального рівняння методом ортогональних поліномів

У отриманому інтегральному рівнянні (10) спочатку виконаємо заміну змінних, щоб перетворити інтервал інтегрування з $(0; \alpha)$ на інтервал $(-1; 1)$

$$\theta = \frac{\alpha}{2}(t + 1); \quad \eta = \frac{\alpha}{2}(\xi + 1)$$

У результаті приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \ln \frac{1}{|t - \xi|} d\xi - \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \left[K^*(t, \xi) - \ln \frac{2}{\alpha} \right] d\xi = \\ = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t + 1)} (M^*(t) + A_0) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^*(\xi) &= \varphi \left(\frac{\alpha}{2}(\xi + 1) \right), \\ M^*(t) &= M \left(\frac{\alpha}{2}(t + 1) \right), \\ K^*(t, \xi) &= K \left(\frac{\alpha}{2}(t + 1), \frac{\alpha}{2}(\xi + 1) \right) \end{aligned}$$

Наявність спектрального співвідношення [18]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - y|} \cdot \frac{T_n(y)}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \begin{cases} \ln 2, & n = 0, \\ \frac{1}{n} T_n(x), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

дозволяє використати метод ортогональних поліномів [18] для розв'язання отриманого інтегрального рівняння. Шукатимемо розв'язок у вигляді розкладу бажаної функції в ряд за поліномами Чебишева першого роду $T_n(\xi)$

$$\varphi^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* T_k(\xi)$$

Підставимо розклад для $\varphi^*(\xi)$ в інтегральне рівняння і використаємо спектральне співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[K^*(t, \xi) - \ln \frac{2}{\alpha} \right] d\xi \\ = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} (M^*(t) + A_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \varphi_k^* T_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} K^*(t, \xi) d\xi + \ln \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\ = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} (M^*(t) + A_0) \end{aligned}$$

де

$$\gamma_k = \begin{cases} \pi \ln 2, & k = 0, \\ \frac{\pi}{k}, & k \geq 1 \end{cases}$$

Враховуючи умови ортогональності поліномів Чебишева

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi) T_j(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \delta_{kj} |T_k(\xi)|^2,$$

$$|T_k(\xi)|^2 = \begin{cases} \pi, & k = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & k \geq 1 \end{cases},$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

та враховуючи, що $T_0(\xi) = 1$, маємо

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \pi \delta_{k0}$$

тобто

$$\ln \frac{2}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \pi \ln \frac{2}{\alpha} \varphi_0^*$$

Помножимо отримане рівняння на $\frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ та проінтегруємо по t від -1 до 1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(t) T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} K^*(t, \xi) d\xi +$$

$$+ \ln \frac{2}{\alpha} \varphi_0^* \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} (M^*(t) + A_0) dt$$

Застосуємо умову ортогональності

$$\pi^2 B_j \varphi_j^* - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* B_{jk} + \pi^2 \ln \frac{2}{\alpha} \varphi_0^* \delta_{j0} = C_j + A_0 D_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

де

$$B_j = \begin{cases} \ln 2, & j = 0, \\ \frac{1}{j}, & j \geq 1 \end{cases}$$

$$B_{jk} = \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} K^*(t, \xi) d\xi;$$

$$C_j = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} M^*(t) \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} dt;$$

$$D_j = -\frac{4\omega c}{\alpha G} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} dt;$$

Нормалізуємо отриману нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Поділимо на π^2 і $\sqrt{B_j}$, і введемо $\psi_j = \sqrt{B_j} \varphi_j^*$, $\varphi_j^* = \frac{1}{\sqrt{B_j}} \psi_j$. Тоді

$$\psi_j - \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk}^* \psi_k + \frac{\ln \frac{2}{\alpha}}{\ln 2} \psi_0 \delta_{j0} = C_j^* + A_0 D_j^*, \quad j = 0, 1, \dots$$

де

$$B_{jk}^* = \frac{B_{jk}}{\sqrt{B_j B_k}}; \quad C_j^* = \frac{C_j}{\sqrt{B_j}}; \quad D_j^* = \frac{D_j}{\sqrt{B_j}}$$

Для обчислення інтегралів виду

$$I(j) = \int_{-1}^1 F(t) \frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

використаємо квадратурну формулу Чебишева [22]

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i); \quad x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n};$$

$$T_j(x_i) = \cos j \cos^{-1} x_i = \cos \frac{j(2i-1)\pi}{2n}$$

Таким чином,

$$I(j) = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n F(x_i) \cos \frac{j(2i-1)\pi}{2n}$$

Оскільки права частина системи містить невідому константу A_0 , цю систему необхідно розв'язувати для двох правих частин C_j^* і D_j^* . Позначимо ці розв'язки як $\tilde{\psi}_j$ і $\tilde{\psi}_j$. Тоді $\psi_j = \tilde{\psi}_j + A_0 \tilde{\psi}_j$. Для знаходження A_0 розглянемо функцію $g(\eta) = \sqrt{\sin \eta} \cdot \varphi(\eta)$ і обчислимо

$$\int_0^\alpha \varphi(\eta) \sqrt{\sin \eta} d\eta = \int_0^\alpha g(\eta) d\eta = \int_0^\alpha \frac{d}{d\eta} (f(\eta) \sin \eta) d\eta = f(\alpha) \sin \alpha = 0$$

з урахуванням умови замикання тріщини (6). З іншого боку,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \varphi(\eta) \sqrt{\sin \eta} d\eta &= \int_{-1}^1 \varphi\left(\frac{\alpha}{2}(\xi+1)\right) \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} \cdot \frac{\alpha}{2} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* T_k(\xi) \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k}{\sqrt{B_k}} \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = \\ &= \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{B_k}} (\tilde{\psi}_k + A_0 \tilde{\psi}_k) \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = 0, \end{aligned}$$

Отже

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\sqrt{B_k}} \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi +$$

$$+A_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\sqrt{B_k}} \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi = 0$$

Звідси знаходимо A_0

$$A_0 = - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\sqrt{B_k}} \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_k}{\sqrt{B_k}} \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} d\xi \right]^{-1}$$

1.6 Визначення коефіцієнта інтенсивності напружень

У задачах теорії пружності для тіл, що містять дефекти у вигляді тріщин або включень, ключовим моментом є визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Його значення використовується у критеріях руйнування, особливо при дослідженні росту тріщин. Коли ми наближаємося до вершини тріщини ззовні, напруження безмежно зростають, і КІН служить мірою концентрації напружень біля вершини тріщини. У випадку задач кручення для тіл КІН визначається як

$$K_{III} = \lim_{\theta \rightarrow \alpha+0} \sqrt{2\pi(\theta - \alpha)} \cdot \tau_{r\varphi}(r, \theta) \Big|_{r=c}$$

Запишемо раніше виведену формулу для дотичного напруження у такій формі

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) \Big|_{r=c} = -\frac{G}{2\omega c} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \int_0^\alpha \varphi(r) \ln \frac{1}{|\theta - r|} dr \right] + \dots$$

де три крапки позначають доданки, що мають скінченну границю при $\theta \rightarrow \alpha + 0$, оскільки при цій границі вони прямують до нуля через множник $\sqrt{2\pi(\theta - \alpha)}$. Беручи до уваги раніше застосовану заміну змінних, отримаємо

$$\tau_{r\varphi}(r, \theta) \Big|_{r=c} = -\frac{G}{2\omega c} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)}} \int_{-1}^1 \varphi^*(t) \ln \frac{1}{|t - \xi|} d\xi \right] + \dots =$$

$$= -\frac{G}{2\omega c} \left[-\frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2}(t+1) \left(\sin \frac{\alpha}{2}(t+1) \right)^{-\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \ln \frac{1}{|t-\xi|} d\xi \right. \\ \left. + \left(\sin \frac{\alpha}{2}(t+1) \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \ln \frac{1}{|t-\xi|} d\xi \right] + \dots$$

Формула для коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) прийме вигляд

$$K_{III} = \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{\alpha\pi(t+1)} \cdot \frac{G}{2\omega c} \left[\frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2}(t+1) \left(\sin \frac{\alpha}{2}(t+1) \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ \left. \cdot \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \ln \frac{1}{|t-\xi|} d\xi - \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(t+1)} \cdot \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \varphi^*(\xi) \ln \frac{1}{|t-\xi|} d\xi \right]$$

Підставляючи в цей вираз

$$\varphi^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* T_k(\xi)$$

отримуємо

$$K_{III} = \frac{G\sqrt{\alpha\pi}}{2\omega c} \lim_{t \rightarrow t+0} \sqrt{t-1} \left[\frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{2}(t+1) \left(\sin \frac{\alpha}{2}(t+1) \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ \left. \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right. \\ \left. - \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}(\xi+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right]$$

Використаємо наступний результат [20]

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \rightarrow \frac{\pi}{k}, \quad \text{коли } t \rightarrow 1+0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \rightarrow -\frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{t-1}} + 2\pi k, \quad \text{коли } t \rightarrow 1+0$$

Тепер ми можемо обчислити границі з використанням наведених формул

$$K_{III} = \frac{G\sqrt{\alpha\pi}}{2\omega c} \left[\frac{\alpha}{4} \cos \alpha (\sin \alpha)^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{t-1} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\sin \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{t-1} \cdot \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\xi|} \cdot \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi] = \\
& = -\frac{G\sqrt{\alpha\pi}}{\sqrt{\sin \alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{t-1} \cdot \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{t-1}} \right] = \frac{\pi G}{4\omega c} \sqrt{\frac{2\alpha\pi}{\sin \alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* \\
& = \frac{\pi G}{4\omega c} \sqrt{\frac{2\alpha\pi}{\sin \alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k}{\sqrt{B_k}}
\end{aligned}$$

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

2.1 Власні значення та квадрати норм функцій Лежандра

Цей розділ представляє числові результати задачі з крайовими умовами для зрізаного конуса з тріщиною. Аналіз використовує власні значення та квадрати норм функцій Лежандра, обчислені для декількох значень кутів ω . Отримані значення наведені в таблицях, які показують перші корені рівняння $P_\nu^1(\cos \omega) = 0$ (Таблиця 2.1) і відповідні значення квадратів норм $\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2$, формулу для підрахунку яких було отримано в Додатку 5. (Таблиця 2.2).

Табл. 2.1. Корені рівняння $P_\nu^1(\cos \omega) = 0$

ν_k/ω	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
ν_0	0	0	0
ν_1	3.19569115	4.40532918	6.83539807
ν_2	6.21952915	8.44711261	12.9082841
ν_3	9.22884936	12.4633288	18.9364457
ν_4	12.2338091	16.4719396	24.9513811
ν_5	15.2368863	20.4772774	30.9606342
ν_6	18.2389812	24.4809096	36.9669291
ν_7	21.2404993	28.4835409	42.9714887
ν_8	24.2416499	32.4855349	48.9749434
ν_9	27.2425521	36.4870981	54.9776515

Табл. 2.2. Значення квадратів норм $\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2$

ν_k/θ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
ν_0	0	0	0
ν_1	9.58707345	17.62131673	41.012388456
ν_2	18.65858745	33.78845048	77.449704667
ν_3	27.68654808	49.85331504	113.61867474
ν_4	36.71528739	65.72775868	149.94807468
ν_5	45.74402673	81.56580796	180.27747462
ν_6	54.77576601	97.40385684	216.60687456
ν_7	63.80750532	113.2419053	252.93627454
ν_8	72.83924463	129.0799534	289.26567444
ν_9	81.87098394	144.9180011	325.59507438

Як можна легко побачити, отримані значення добре узгоджуються з асимптотичними результатами, представленими в Додатку 3.

2.2 Коефіцієнт інтенсивності напружень

Для аналізу стану напруження поблизу тріщини було розраховано коефіцієнт інтенсивності напружень K_{III} для різних геометричних параметрів задачі. Навантаження на конус задавалося у вигляді:

$$P(\theta) = (\omega - \theta)^2$$

Система нескінченних рівнянь була розв'язана чисельно за допомогою методу редукції, що дозволило отримати значення K_{III} для різних геометричних параметрів.

У таблиці 2.3 наведено значення K_{III} при різних значеннях кутів ω , α та висоти тріщини c . У всіх випадках висота конуса a фіксована та дорівнює 1.

Табл. 2.3. Значення K_{III} при різних значеннях ω , α та c

ω	α	$c = 0,2$	$c = 0,4$	$c = 0,6$	$c = 0,8$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0,155663	0,762626	1,764077	3,143673
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{9}$	0,059977	0,077123	0,100427	0,125754
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	0,001843	0,067436	0,548509	2,357553
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	0,083249	0,459596	1,950370	4,870687
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	0,020634	0,097296	0,629133	2,658813
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	0,143740	0,154569	0,238772	0,779116
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	0,105999	0,195196	0,810218	3,178098
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{18}$	0,317546	0,325962	0,356810	0,573336
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{24}$	0,336984	0,344467	0,353022	0,363259

Аналізуючи дані таблиці, можна зробити наступні висновки:

- Вплив висоти тріщини c : При фіксованих кутах ω та α , зі збільшенням висоти тріщини c значення K_{III} зростає. Це очікувано, оскільки більша тріщина призводить до більшого концентрування напружень.
- Вплив кута α : При фіксованому куті ω , зміна кута α впливає на значення K_{III} . З даних видно, що зі збільшенням α значення K_{III} зазвичай зменшується, що вказує на те, що глибина тріщини відіграє важливу роль у розподілі напружень.
- Вплив кута ω : При фіксованих α та c , зі збільшенням кута ω значення K_{III} зменшується. Це пов'язано з тим, що при більшому куті ω конус стає ширшим, і напруження розподіляються більш рівномірно.

На основі отриманих чисельних даних були побудовані графіки залежності

коефіцієнта інтенсивності напружень K_{III} від різних геометричних параметрів.

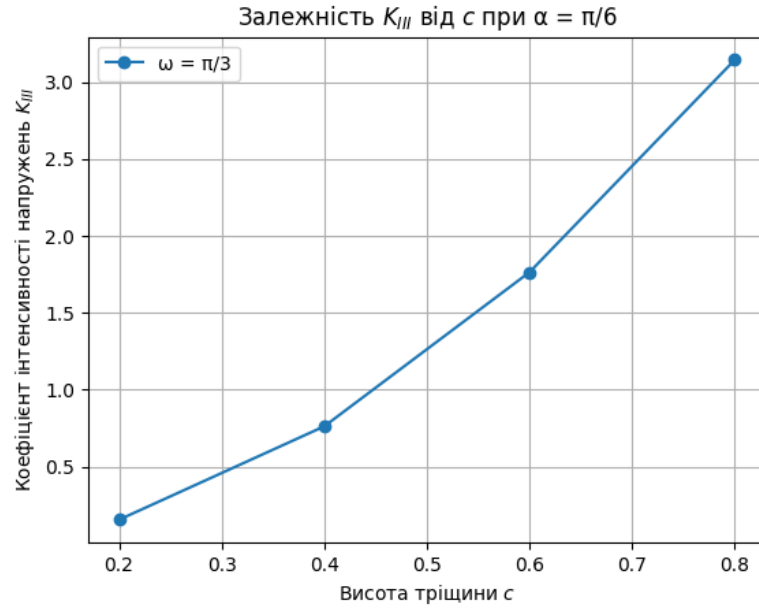


Рис. 2.1. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{3}$ та $\alpha = \frac{\pi}{6}$

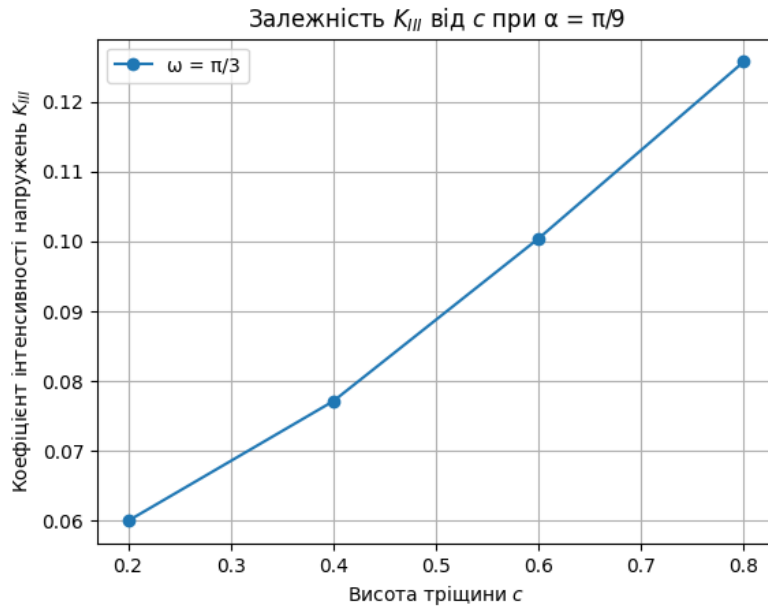


Рис. 2.2. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{3}$ та $\alpha = \frac{\pi}{9}$

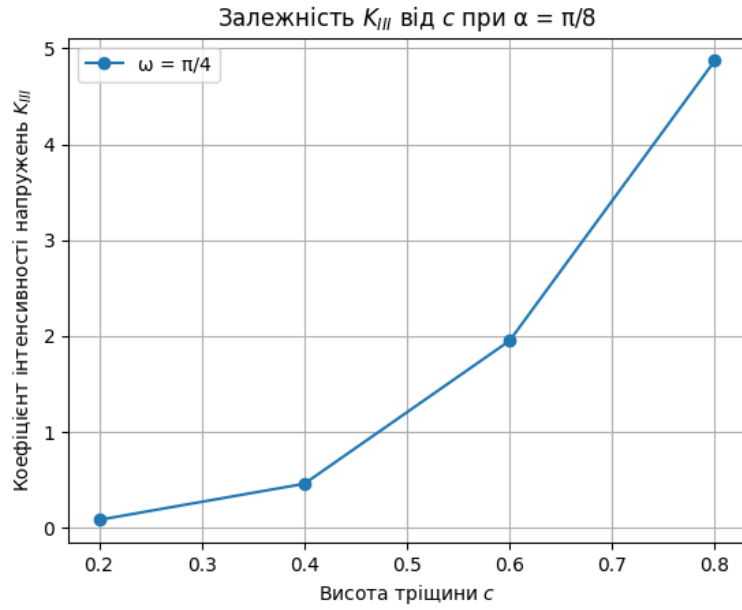


Рис. 2.3. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{4}$ та $\alpha = \frac{\pi}{8}$

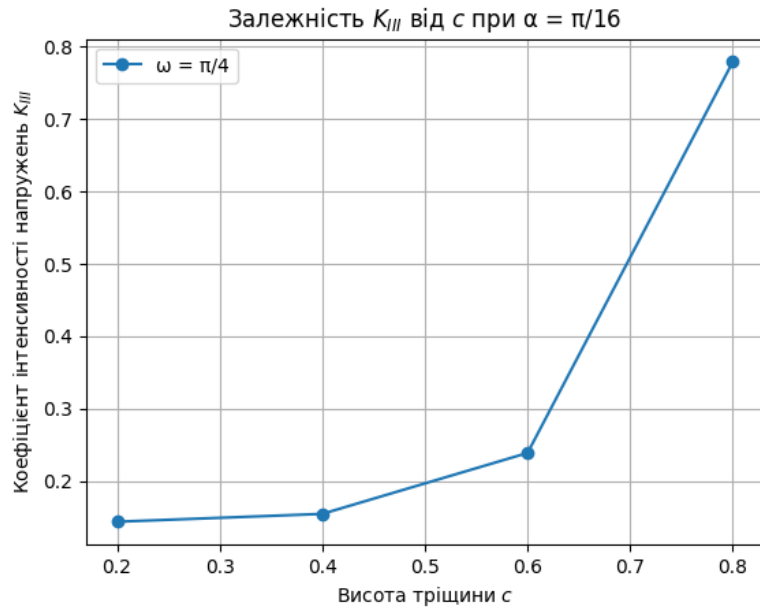


Рис. 2.4. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{4}$ та $\alpha = \frac{\pi}{16}$

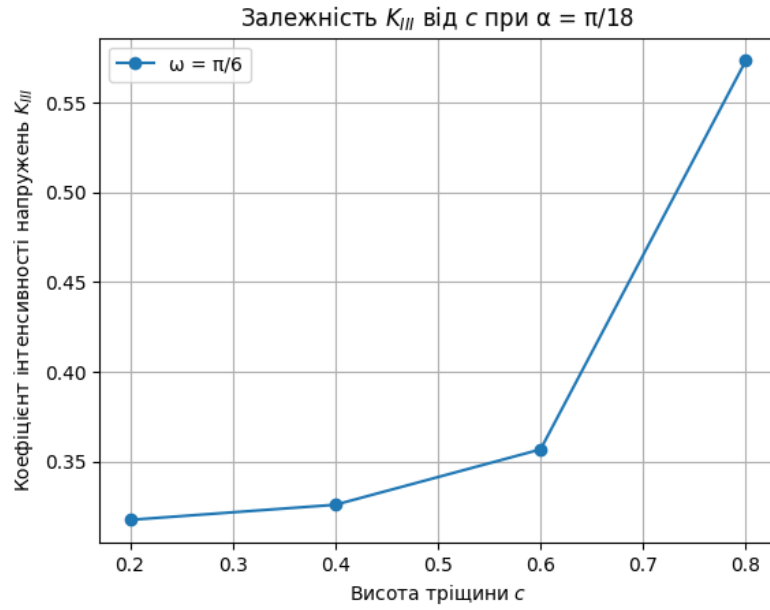


Рис. 2.5. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{6}$ та $\alpha = \frac{\pi}{18}$

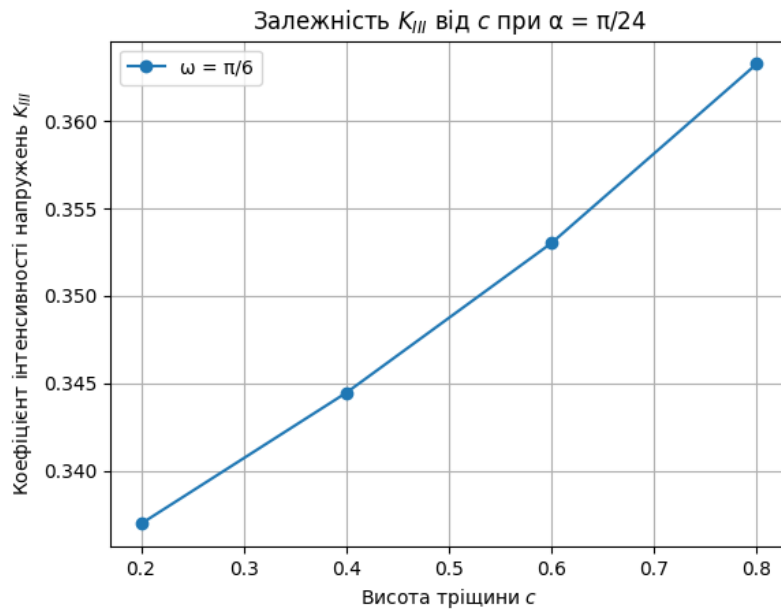


Рис. 2.6. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{6}$ та $\alpha = \frac{\pi}{24}$

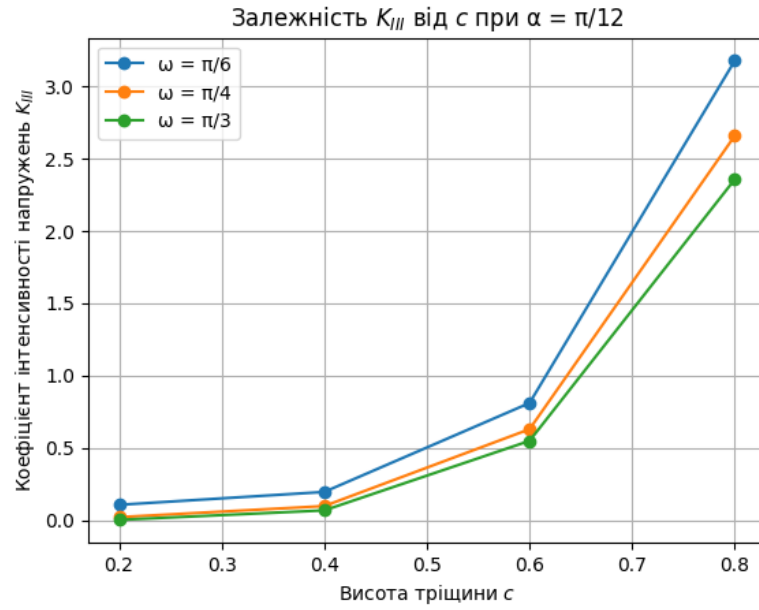


Рис. 2.7. Залежність K_{III} від c при $\alpha = \frac{\pi}{12}$ та різних значеннях ω

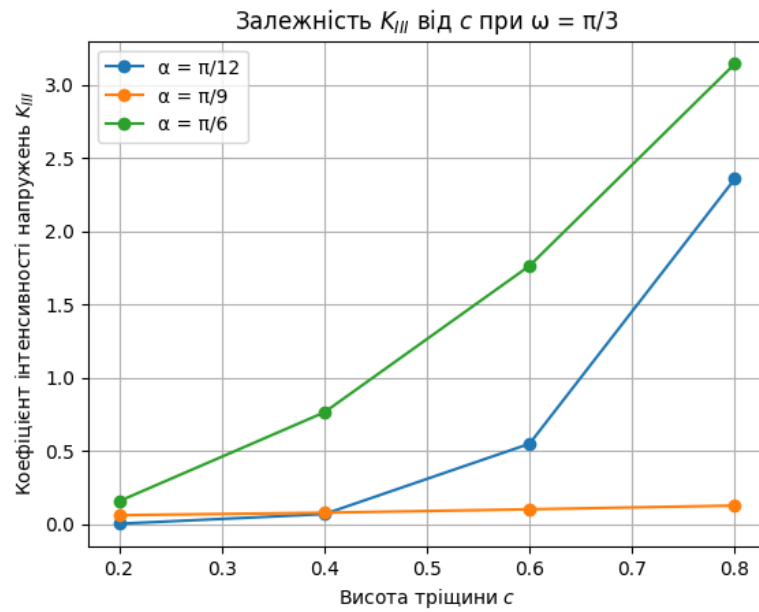


Рис. 2.8. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{3}$ та різних значеннях α

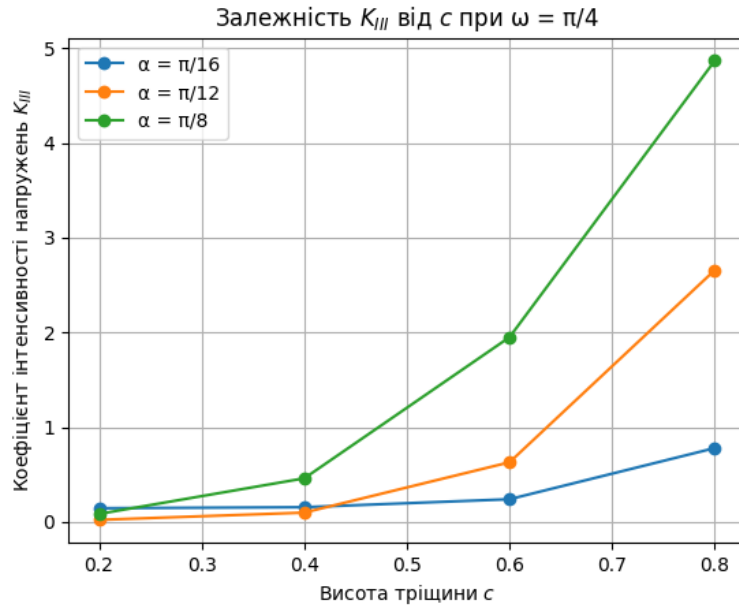


Рис. 2.9. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{4}$ та різних значеннях α

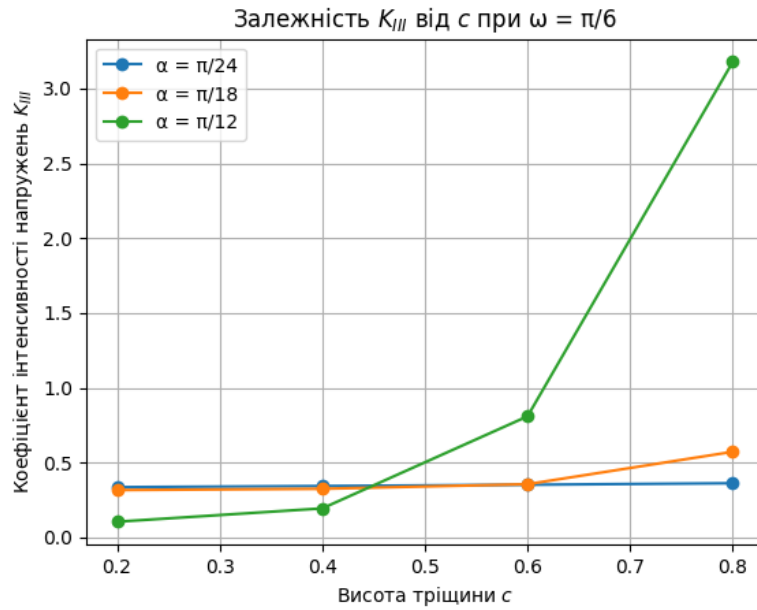


Рис. 2.10. Залежність K_{III} від c при $\omega = \frac{\pi}{6}$ та різних значеннях α

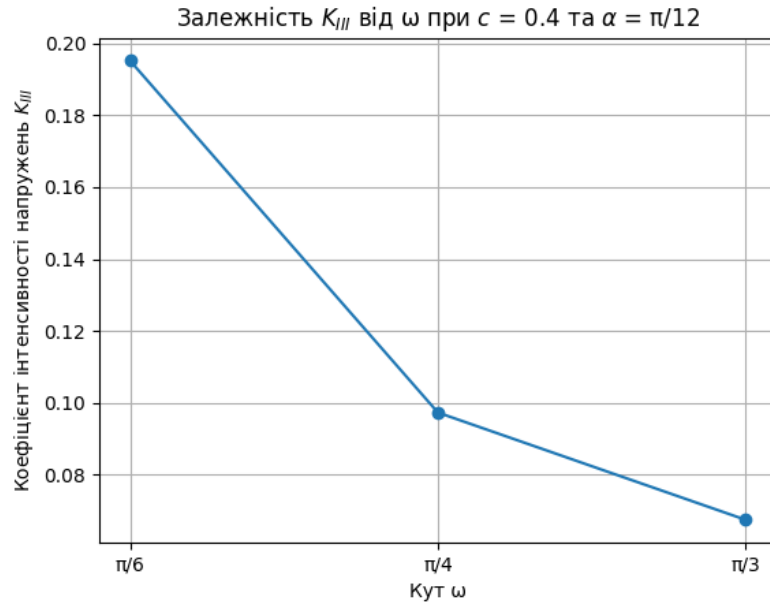


Рис. 2.11. Залежність K_{III} від ω при $c = 0.4$ та $\alpha = \frac{\pi}{12}$

ВИСНОВКИ

У цій роботі була розв'язана вісесиметрична задача кручення зрізаного конуса з сферичною тріщиною за допомогою методу інтегральних перетворень Лежандра. Задачу було зведено до одновимірної розривної крайової задачі, для якої отримано аналітичні розв'язки у вигляді суми безперервних та розривних компонент. У процесі розв'язання були визначені власні значення та корені рівняння $P_\nu^1(\cos \omega) = 0$, а також обчислені відповідні норми $\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2$.

На основі отриманих виразів для переміщень і напружень було виведено інтегральне рівняння для знаходження невідомого стрибка переміщення на тріщині. Це рівняння було розв'язане методом ортогональних поліномів із застосуванням многочленів Чебишева. У результаті були отримані формули для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) K_{III} в околі тріщини, що дозволило провести детальний числовий аналіз впливу геометричних параметрів конуса та тріщини на значення КІН.

Варто відзначити, що результати, отримані в цій роботі, були опубліковані у науковому періодичному журналі «Modern Engineering and Innovative Technologies» (Випуск №35, Німеччина, індексований у базах Copernicus та Google Scholar). Це підкреслює наукову новизну та практичну значущість проведеного дослідження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Das S. Ch. (1956) 'On the Stress in Composite Truncated Cone due to Shearing Stress on the Curved Surface', *Indian Journal of Theoretical Physics*, № 4, p. 82–92.
2. Low R., Arbor A., Weiss H. (1961) 'On a Mixed Boundary Value Problem for an Infinite Elastic Cone', *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, Vol 13, № 3, p. 232–242.
3. T.R. Thompson, R.W. Little. (1970) 'End effects in a truncated semi-infinite cone', *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol 23, № 2, p. 185–196.
4. Будаєв, Б., Морозов, Н. та Нарбут, М. (1994) 'Кручення кругового конуса при статичному та динамічному навантаженні', *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, том 58, № 6, сс. 1097–1100.
5. Попов, Г.Я. (2003) 'Про один метод отримання інтегральних перетворень, що використовується при побудові точних розв'язків крайових задач математичної фізики', *Математичні методи фізико-механічних полів*, том 46, № 3, сс. 74–89.
6. Попов, Г.Я. (2005) 'Уточнення та доповнення до статті "Про один метод отримання інтегральних перетворень, що використовується при побудові точних розв'язків крайових задач математичної фізики"', *Математичні методи фізико-механічних полів*, том 48, № 3, сс. 75–81.
7. Попов, Г.Я. (2005) 'Осьово-симетричні задачі теорії пружності для зрізаного порожнистого конуса', *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, том 69, № 3, сс. 417–426.
8. Вайсфельд, Н.Д., Попов, Г.Я. та Реут, В.В. (2013) 'Вісесиметрична змішана задача теорії пружності для конуса, затиснутого по бічній поверхні з приєднаним сферичним сегментом', *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, том 77, № 1, сс. 70–78.
9. Вайсфельд, Н.Д., Попов, Г.Я. та Реут, А.В. (2014) 'Вісесиметрична задача про напружений стан двічі зрізаного конуса', *Journal of Mathematical Sciences*, том 201, № 2, сс. 229–244.
10. Попов, Г.Я. (2000) 'Задача про напружений стан пружного конуса,

- ослабленого тріщинами', *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, том 64, № 2, сс. 337–348.
11. Попов, Г. та Вайсфельд, Н. (2009) 'Концентрація напружень в околі сферичної тріщини всередині нескінченного пружного конуса', *Operator Theory: Advances and Applications*, том 191, сс. 173–186.
 12. Попов, Г. та Вайсфельд, Н. (2010) 'Розв'язок задачі Мітчелла для пружного нескінченного конуса зі сферичною тріщиною', *Mathematical Problems in Engineering*, том 2010, Article ID 652814, сс. 321–338.
 13. Вайсфельд, Н.Д. (2002) 'Нестационарна задача кручення пружного конуса зі сферичною тріщиною', *Materials Science*, том 38, № 5, сс. 698–708.
 14. Мисов, К. та Вайсфельд, Н. (2020) 'Динамічна концентрація напружень біля сферичної тріщини у двічі зрізаному пружному конусі', *Procedia Structural Integrity*, том 28, сс. 352–357.
 15. Мисов, К. та Вайсфельд, Н. (2021) 'Динамічна концентрація напружень біля конічної тріщини у двічі зрізаному пружному конусі', *Procedia Structural Integrity*, том 33, сс. 365–370.
 16. Вайсфельд, Н.Д. та Місов, К.Д. (2023) 'Хвильове поле двічі зрізаного сферично шаруватого конуса під дією крутного навантаження', *International Applied Mechanics*, том 59, № 6, сс. 734–741.
 17. Н. Bateman, A. Erdelyi (1953) 'Higher transcendental functions', *Vol. 1. N.Y. Mc Graw-Hill. 1953, 296 p.*
 18. Попов, Г.Я., Реут, В.В., Моїсєєв, М.Г. та Вайсфельд, Н.Д. (2010) 'Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навч. посіб. для студ. вузів, які навч. за напрямками підготовки "Прикладна математика "Механіка". *Одеса: Астропринт.*
 19. Процеров, Ю. та Вайсфельд, Н. (2017) 'Задачі кручення скінченних циліндрів, ослаблених кільцевими тріщинами', *Procedia Structural Integrity*, том 3, сс. 526–544.
 20. Abramowitz M., Stegun I. (1964) 'Handbook of Mathematical Functions', *Gov Print, USA, N.Y.*

РОЗДІЛ 3

ДОДАТКИ

3.1 Додаток 1

Помножимо обидві частини рівняння (1) на $P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta$ і інтегруємо по змінній θ від 0 до ω :

$$\int_0^\omega \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta + \\ + \int_0^\omega \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} W \right] P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0$$

У першому інтегралі змінимо порядок інтегрування та диференціювання

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial r} \times \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\omega W P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

У другому інтегралі перший доданок інтегруємо частинами двічі

$$\int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\omega} \sin \omega P_\nu^1(\cos \omega) - W \Big|_{\theta=\omega} \sin \omega \frac{\partial P_\nu^1(\cos \omega)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\omega} \\ + \int_0^\omega W \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \omega \frac{\partial P_\nu^1(\cos \omega)}{\partial \theta} \right) d\theta$$

За рахунок першої з крайових умов (2) другий доданок обернеться в нуль, а для обернення в нуль першого позаінтегрального доданка вимагатимемо, щоб ν_k були ненульовими коренями рівняння $P_\nu^1(\cos \omega) = 0$. Другий інтеграл приймає вигляд

$$\int_0^\omega W \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \right] \sin \theta d\theta$$

Використовуючи рівняння Лежандра

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} P_{\nu_k}^1(\cos \theta) = \nu_k(\nu_k + 1) P_{\nu_k}^1(\cos \theta)$$

цей інтеграл записується як

$$I_2 = -\nu_k(\nu_k + 1) \int_0^\omega W P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -\nu_k(\nu_k + 1) W_k$$

Звідси рівняння в трансформантах буде таким

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W_k}{\partial r} \right) - \nu_k(\nu_k + 1) W_k = 0, \quad 0 < r < a, \quad r \neq c$$

Застосовуючи це інтегральне перетворення до другої граничної умови (2) і до умови при $r = 0$, отримаємо

$$W_k'(a) - \frac{1}{a} W_k(a) = \frac{P_k}{G}, \quad W_k(0) = 0$$

3.2 Додаток 2

Щоб знайти розривний розв'язок, ми будемо функцію Гріна у вигляді

$$G_k(r, \rho) = \begin{cases} a_0 r^{\nu_k} + a_1 r^{-\nu_k-1}, & 0 < r < \rho < a \\ b_0 r^{\nu_k} + b_1 r^{-\nu_k-1}, & 0 < \rho < r < a \end{cases}$$

Використовуючи умови безперервності функції Гріна і стрибка першої похідної, отримуємо

$$\begin{cases} a_0 \rho^{\nu_k} + b_1 \rho^{-\nu_k-1} - a_0 \rho^{\nu_k} - a_1 \rho^{-\nu_k-1} = 0 \\ b_0 \rho^{\nu_k-1} - b_1 (\nu_k + 1) \rho^{-\nu_k-2} - a_0 \nu_k \rho^{\nu_k-1} + a_1 (\nu_k + 1) \rho^{-\nu_k-2} = \frac{1}{\rho^2} \end{cases}$$

З крайової умови $\nu_k(0) = 0$ випливає, що $a_1 = 0$. А з крайової умови

$$a \nu_k'(a) - \nu_k(a) = 0,$$

отримаємо

$$a[b_0\nu_k a^{\nu_k-1} - b_1(\nu_k + 1)a^{-\nu_k-2}] - [b_0a^{\nu_k} + b_1a^{-\nu_k-1}] = 0$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$a_0 = -\frac{\nu_k + 2}{(\nu_k - 1)(2\nu_k + 1)} \left(\frac{\rho}{a^2}\right)^{\nu_k} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{2\nu_k + 1} \rho^{-\nu_k-1}$$

$$b_0 = -\frac{\nu_k + 2}{(\nu_k - 1)(2\nu_k + 1)} \left(\frac{\rho}{a^2}\right)^{\nu_k} \cdot \frac{1}{a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2\nu_k + 1} \rho^{\nu_k}$$

Тоді функція Гріна $G_k(r, \rho)$ має вигляд

$$G_k(r, \rho) = -\frac{\nu_k + 2}{a(\nu_k - 1)(2\nu_k + 1)} \left(\frac{r\rho}{a^2}\right)^{\nu_k} - \frac{1}{2\nu_k + 1} \begin{cases} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\nu_k} \frac{1}{\rho}, & 0 < r < \rho < a \\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\nu_k} \frac{1}{r}, & 0 < \rho < r < a \end{cases}$$

3.3 Додаток 3

Розглянемо асимптотичний вираз для функцій Лежандра [19]

$$P_{\nu_k}^1(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \theta}} \cdot \nu_k^{-\frac{1}{2}} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

Щоб отримати асимптотичний вираз для ν_k , потрібно прирівняти головний член аргументу косинуса до нуля. Ця умова дає

$$\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Розглядаючи великі значення k , можна спростити вираз

$$\nu_k \sim \frac{\pi}{\omega} k, \quad k \rightarrow \infty$$

Підставляючи ці самі формули у вирази для квадратів норм, отримаємо

$$\|P_\nu^1(\cos \theta)\|^2 = \int_0^\omega [P_\nu^1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta$$

Після інтегрування отримуємо

$$\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2 \sim \frac{\omega}{\pi} \nu_k, \quad k \rightarrow \infty$$

3.4 Додаток 4

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

Асимптотика загального члена ряду виглядає так

$$\frac{2}{\omega \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \cdot \nu_k^{-1} \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(\nu_k + \frac{1}{2} \right) \eta - \frac{\pi}{4} \right], \quad k \rightarrow \infty$$

і це означає, що ряд сходиться умовно. Виділимо його слабосхідну частину. Для цього запишемо отриману асимптотику таким чином

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2\omega \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \cdot \nu_k^{-1} \left[\cos \nu_k(\theta - \eta) + \cos \left(\nu_k(\theta + \eta) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{\nu_k^{-1}}{2\omega \sqrt{\sin \theta \sin \eta}} [\cos \nu_k(\theta - \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)] \end{aligned}$$

Перетворюємо ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2}$$

Припустимо, що N досить велике, так що другий ряд можна замінити його асимптотичним виразом, отримаємо

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^N \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} + \\ &+ \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\cos \nu_k(\theta - \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)}{\nu_k} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} - \\ &- \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \cdot \frac{\cos \nu_k(\theta - \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)}{\nu_k} + \\ &+ \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \sum_{k=1}^N \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} + \\ &+ \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} = \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{(\nu_k - 1)(\nu_k + 2)}{2\nu_k + 1} \cdot \frac{P_{\nu_k}^0(\cos \theta) P_{\nu_k}^0(\cos \eta)}{\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2} - \\ &- \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \sum_{k=1}^N \frac{\cos \nu_k(\theta - \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)}{\nu_k} + \\ &+ \frac{1}{2\omega\sqrt{\sin \theta \sin \eta}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \nu_k(\theta - \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)}{\nu_k} \end{aligned}$$

Перший ряд — це кінцева сума, а другий ряд — це ряд, який можна підсумувати за допомогою формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \begin{cases} \sin(kx + a) \\ \cos(kx + a) \end{cases} = \pm \frac{\pi - x}{2} \left\{ \frac{\cos a}{\sin a} \right\} - \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \left\{ \frac{\sin a}{\cos a} \right\}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

при $a = 0$. Таким чином

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \nu_k(\theta + \eta) + \sin \nu_k(\theta + \eta)}{\nu_k} &= \frac{\omega}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{\omega}(\theta - \eta)k + \sin \frac{\pi}{\omega}(\theta - \eta)k}{k} = \\ &= \frac{\omega}{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right) + \left(\frac{\pi - \frac{\pi}{\omega}(\theta + \eta)}{2} \right) \frac{\omega}{\pi} \end{aligned}$$

Виділяємо особливість з першого члена

$$\ln \left(2 \sin \frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right) = -\ln \frac{1}{|\theta - \eta|} + \ln \frac{1}{|\theta - \eta|} + \ln \left(2 \sin \frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right)$$

Тоді

$$= -\ln \frac{1}{|\theta - \eta|} + \ln \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right)}{|\theta - \eta|}$$

Зауважимо, що другий член не має особливості, оскільки

$$\lim_{|\theta - \eta| \rightarrow 0} \ln \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{2\omega} |\theta - \eta| \right)}{|\theta - \eta|} = \ln \frac{\pi}{2\omega}$$

3.5 Додаток 5

Щоб обчислити квадрат норми, скористаємося наступною рівністю

$$\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2 = \int_0^{\omega} [P_{\nu_k}^1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta.$$

Розглянемо рівняння Лежандра відносно $y(\theta) = P_{\nu}^1(\cos \theta)$

$$L[y(\theta)] = -\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} y(\theta) = \nu(\nu + 1) \sin \theta y(\theta),$$

та два його розв'язки $P_{\nu}^1(\cos \theta)$ та $P_{\gamma}^1(\cos \theta)$ при $\nu \neq \gamma$

$$\begin{aligned} L[P_{\nu}^1(\cos \theta)] &= \nu(\nu + 1) \sin \theta P_{\nu}^1(\cos \theta), \\ L[P_{\gamma}^1(\cos \theta)] &= \gamma(\gamma + 1) \sin \theta P_{\gamma}^1(\cos \theta). \end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на $P_\gamma^1(\cos \theta)$, а друге на $P_\nu^1(\cos \theta)$, після чого віднімемо отримані рівності

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP_\nu^1(\cos \theta)}{d\theta} P_\gamma^1(\cos \theta) + \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP_\gamma^1(\cos \theta)}{d\theta} P_\nu^1(\cos \theta) = \\ = [\nu(\nu + 1) - \gamma(\gamma + 1)] \sin \theta P_\nu^1(\cos \theta) P_\gamma^1(\cos \theta) \end{aligned}$$

Проінтегруємо цю тотожність по проміжку $(0, \omega)$

$$\begin{aligned} [\nu(\nu + 1) - \gamma(\gamma + 1)] \int_0^\omega P_\nu^1(\cos \theta) P_\gamma^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ = - \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} P_\gamma^1(\cos \theta) d\theta + \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} P_\nu^1(\cos \theta) d\theta \end{aligned}$$

Перший інтеграл обчислюємо за допомогою інтегрування по частинах

$$\begin{aligned} - \sin \theta \cdot \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot P_\gamma^1(\cos \theta) \Big|_0^\omega + \int_0^\omega \sin \theta \cdot \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} d\theta \\ + \sin \theta \cdot \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot P_\nu^1(\cos \theta) \Big|_0^\omega + \int_0^\omega \sin \theta \cdot \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} d\theta \\ = \sin \omega \cdot \left[P_\nu^1(\cos \theta) \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} - P_\gamma^1(\cos \theta) \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega} \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо рівність

$$\begin{aligned} \int_0^\omega P_\nu(\cos \theta) P_\gamma^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ = \frac{\sin \omega}{\nu(\nu + 1) - \gamma(\gamma + 1)} \left[P_\nu^1(\cos \theta) \frac{\partial P_\gamma^1(\cos \theta)}{\partial \theta} - P_\gamma^1(\cos \theta) \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega}, \gamma \neq \nu \end{aligned}$$

Для обчислення квадрата норми при $(\gamma = \nu)$ цю формулу безпосередньо застосувати не можна, оскільки в правій частині виникає невизначеність.

Тому покладемо в цій формулі $\gamma = \nu + \varepsilon$ і розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega P_\nu^1(\cos \theta) P_{\nu+\varepsilon}^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\sin \omega}{\nu(\nu+1) - (\nu+\varepsilon)(\nu+\varepsilon)} \left[P_\nu^1(\cos \theta) \frac{\partial P_{\nu+\varepsilon}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} - P_{\nu+\varepsilon}^1(\cos \theta) \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega} \end{aligned}$$

Враховуючи, що $\nu(\nu+1) - (\nu+\varepsilon)(\nu+\varepsilon+1) = -\varepsilon(2\nu+1+\varepsilon)$, переходимо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. У результаті отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega P_\nu^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\sin \omega}{2\nu+1} \left[P_\nu^1(\cos \theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega} - \left[\frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial P_\nu^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega} \end{aligned}$$

При $\nu = \nu_k$, враховуючи, що $P_{\nu_k}^1(\cos \omega) = 0$, отримуємо

$$\|P_{\nu_k}^1(\cos \theta)\|^2 = \frac{\sin \omega}{2\nu_k+1} \left[\frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\omega} \cdot \left[\frac{\partial P_{\nu_k}^1(\cos \omega)}{\partial \nu} \right]_{\nu=\nu_k}$$

Похідну по θ можна обчислити за формулою

$$\left. \frac{dP_{\nu_k}^1(\cos \theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\omega} = \nu_k \cot \omega \cdot P_{\nu_k}^1(\cos \omega) - \frac{\nu_k+1}{\sin \omega} \cdot P_{\nu_k-1}^1(\cos \omega)$$

А для похідної по ν слід скористатися представленням функції Лежандра через гіпергеометричну функцію:

$$P_\nu^1(\cos \theta) = \cot \frac{\theta}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_j (\nu+1)_j}{\Gamma(j) \cdot j!} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2j}$$

де $(a)_j = a(a+1) \dots (a+j-1)$, $(a)_0 = 1$ - символ Похгаммера. А також $(a)_j = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$.

Розглянемо функцію вигляду

$$F(\nu) = (-\nu)_j \cdot (\nu+1)_j = \frac{\Gamma(j-\nu) \cdot \Gamma(j+\nu+2)}{\Gamma(-\nu) \cdot \Gamma(\nu+1)}$$

Прологарифмуємо її і знайдемо похідну по ν , враховуючи, що

$$\phi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z = 0, -1, -2, \dots$$

Тоді отримаємо

$$F'(\nu) = F(\nu) [\phi(j + \nu + 1) - \phi(\nu + 1 - j)]$$

У підсумку отримуємо точну формулу для обчислення похідної по індексу

$$\frac{dP_\nu^1(\cos \theta)}{d\nu} = \cot \frac{\theta}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-\nu_j(\nu + 1)_j}{\Gamma(j) \cdot j!} \cdot [\phi(j + \nu + 1) - \phi(\nu + 1 - j)] \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j}$$