Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 33–42

УДК 511.33

П. Д. Варбанец, З. Ю. Дадаян
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ ПИЛЛАИ НА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Варбанець П. Д., Дадаян З. Ю. Про середнє значення функції Піллаї на арифметичній прогресії. Побудовано асимптотичну формулу для середнього значення функції Піллаї в арифметичній прогресії із зростаючою різницею прогресії q. Ця формула нетривіальна для усіх $q = o\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Ключові слова: асимптотична формула, функція Піллаї, наближене функціональне рівняння.

Варбанец П. Д., Дадаян З. Ю. О среднем значении функции Пиллаи на арифметической прогрессии. Строится асимптотическая формула для среднего значения функции Пиллаи в арифметической прогрессии с растущей разностью прогрессии q. Эта формула нетривиальна для всех $q = o\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Ключевые слова: асимптотическая формула, функция Пиллаи, приближенное функциональное уравнение.

Varbanets P. D., Dadayan Z. Yu. On average value Pillai's function in an arithmetic progression. Construct an asymptotic formula for the average value of Pillai's function in an arithmetic progression, when a difference of progression growths. This formula is non-trivial for all $q = o\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Key words: asymptotic formula, Pillai's function, approximate functional equation.

Введение. В 1933 году S. Pillai [5] ввел в рассмотрение арифметическую функцию, определенную на натуральных числах соотношением

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} (k, n), \tag{1}$$

где (k, n) обозначает наибольший общий делитель k и n. Эта функция часто встречается в асимптотических задачах теории чисел. Начиная с работы Broughan [2], многие авторы за последние 10 лет (см. [1], [4], [5]) построили асимптотические формулы для сумматорных функций, ассоциированных с $g(n)$ или с ее обобщениями.

Цель настоящей работы – получить асимптотическую формулу для суммы

$$G(x; a, q) = \sum_{\substack{n \equiv a \,(mod\ q) \\ n \le x}} g(n), \tag{2}$$

где $(a, q) = 1$ и q растет вместе с x.

O. Bordelles [1] показал, что функция Pillai является сверткой Дирихле вида

$$g = \varphi * Id,$$

где φ – функция Эйлера, а Id – тождественная функция. Поэтому для $Res > 2$ имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \frac{\zeta^2(s-1)}{\zeta(s)}.$$
Отсюда для $Res > 2$
$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l\,(mod\,q)}}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_q^*} f(s;\, l_3,\, q) \times \\ \times \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \in \mathbb{Z}_q^* \\ l_1 l_2 \equiv a\bar{l}_3\,(mod\,q)}} q^{-2(s-1)} \zeta\left(s-1,\, \frac{l_1}{q}\right) \zeta\left(s-1,\, \frac{l_2}{q}\right), \tag{3}$$
где $l_3\bar{l}_3 \equiv 1\,(mod\,q),\ \zeta(s,\, q)$ – дзета-функция Гурвица, а функция $f(s;\, l_3,\, q)$ определена рядом
$$f(s;\, l_3,\, q) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l_3\,(mod\,q)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}. \tag{4}$$

Нами доказана теорема.

Теорема. *Пусть* $a,\ q \in \mathbb{N},\ (a,\, q) = 1$. *Тогда справедлива асимптотическая формула*
$$G(x;\, a,\, q) := \sum_{\substack{n \equiv a\,(mod\ q) \\ n \leq x}} g(n) = \frac{x^2 \log x}{q} c_1(q) + \frac{x^2}{q} c_0(q) + O\left(x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{3}{2}}\right),$$
где $c_1(q),\ c_0(q)$ *– вычислимые постоянные (см. соотношения (28)), а постоянная в символе* $''O''$ *не зависит от* $x,\ a,\ q$.

Для доказательства понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел;

$e(x)$ устанавливается для обозначения $e^{2\pi i x},\ x \in \mathbb{R}$;

для $q \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathbb{Z}_q = \{0, 1, 2, ..., q-1\}$;

$\mathbb{Z}_q^* = \{a \in \mathbb{Z}_q |\, (a,\, q) = 1\}$;

$\tau(n)$ – функция числа делителей;

$\varphi(n)$ – функция Эйлера;

$\mu(n)$ – функция Мебиуса;

$sign(t)$ обозначает знак вещественного $t \neq 0$.

Основные результаты.

1. Вспомогательные утверждения. Для вещественных α и β определяем функцию

$$\varphi(s;\,\alpha,\,\beta) = \sum_{\substack{n\,\in\,\mathbb{Z}\\ n\,\neq\,-\alpha}} \frac{e(n\beta)}{|n+\alpha|^s},\ \ Res > 1.$$

Лемма 1. *Если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, то функция $\varphi(s;\,\alpha,\,\beta)$ аналитически продолжается на всю комплексную $s-$плоскость. Если $\alpha \in \mathbb{Z}$, то $\varphi(s;\,\alpha,\,\beta)$ допускает аналитическое продолжение на $s-$плоскость, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом, равным 2. Кроме того, имеет место функциональное уравнение римановского типа*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s;\,\alpha,\,\beta) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\varphi(1-s;\,\beta,\,-\alpha)e(-\alpha\beta). \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться интегральным представлением Г-функции

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)|n+\alpha|^{-s}\int_0^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 x}x^{\frac{s}{2}-1}dx,\ \ Res > 0,\ \ n \neq -\alpha,$$

а также функциональным уравнением для θ-функции

$$\theta(x;\,\alpha,\,\beta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-x(n+\alpha)^2}e(n\beta),\ x > 0,\ \alpha,\ \beta\, \in \mathbb{R}.$$

И теперь по схеме доказательства функционального уравнения для дзета-функции Римана (см., например, [7]) получим утверждение леммы.

Заметим, что для $\alpha \in (0,\,1)$

$$\varphi(s;\,\alpha,\,0) = \zeta(s,\,\alpha) + \zeta(s,\,1-\alpha). \tag{6}$$

Введем обозначение:

$$\Psi(s,\,\alpha) = \sum_{\substack{n\,=\,-\infty\\ n\,\neq\,0}}^{+\infty} \frac{b_n}{|n|^s},\ \ b_n = -ie(n\alpha)sign(n). \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in (0,\,1)$ и пусть $\Phi(s,\alpha) = \zeta(s,\alpha) - \zeta(s,1-\alpha)$. Тогда во всей комплексной s-плоскости справедливо функциональное уравнение*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Phi(s,\,\alpha) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Psi(1-s,\,\alpha). \tag{8}$$

Это утверждение сразу следует из соотношения Гурвица для $\zeta(s,\,\alpha)$.

Функции $\varphi(s,\,\alpha,\,0)$ и $\Phi(s,\,\alpha)$ удовлетворяют условиям теоремы Лаврика о приближенных уравнениях для функций Дирихле [3], поэтому, принимая во внимание, что $\zeta(s,\,\alpha) = \frac{1}{2}\left(\varphi(s,\,\alpha,\,0) + \Phi(s,\,\alpha)\right)$, мы легко выводим следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $s=\sigma+it$, $-2\le\sigma\le 2$, τ *– любое комплексное число с условием* $\arg\tau=\left(\frac{\pi}{2}-|t|^{-1}\right)sign(t)$. *Тогда для любого фиксированного* $M>1$ *найдется такая постоянная* $t_0>1$, *что равномерно по* $|t|>t_0$ *и* τ *имеет место приближенное функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta(s,\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{|n+\alpha|\le x\log x}\frac{F_1\left(s;|n+\alpha|\tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)+a_nF_1\left(1+s;|n+\alpha|\tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)}{|n+\alpha|^s}+\\+\pi^{-\frac{1-2s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}\sum_{|n|\le y\log y}\frac{F_2\left(1-s;|n|\tau^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)e(n\alpha)}{|n|^{1-s}}+\\+\pi^{-\frac{1-2s}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s)+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\right)}\sum_{|n|\le y\log y}\frac{b_nF_2\left(-s;|n|\tau^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\right)}{|n|^{1-s}}+O_M\left(x^{-M}+y^{-M}\right),\end{gathered}\tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}b_n=isign(n)e(n\alpha),\ \ a_n=\begin{cases}sign(n), & \text{если } n\neq 0;\\ 1, & \text{если } n=0;\end{cases}\\ x=\left|t^{\frac{1}{2}}\right|\left(\sqrt{2}\,|\tau|\right)^{-1},\ \ y=\left|t^{\frac{1}{2}}\right||\tau|\,\frac{1}{\sqrt{2}},\end{gathered}\tag{10}$$

причем равномерно по $\frac{1}{2}\le\sigma\le 2$, $|t|\ge t_0$, $\tau\neq 0$, *справедливы асимптотические оценки:*

$$\begin{gathered}F_1\left(\sigma+it;\ |n+\alpha|\sqrt{\pi}\tau^{\frac{1}{2}}\right)=l_1+\\+O\left(\exp\left(-\frac{\left|(n+\alpha)\sqrt{\pi}\tau^{\frac{1}{2}}\right|^2}{|t|}\right)\cdot\left(-\frac{\left|(n+\alpha)\sqrt{\pi}\tau^{\frac{1}{2}}\right|}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right)^{\sigma}\times\right.\\ \left.\times\left(1+\left|\frac{1}{2}|t|^{\frac{1}{2}}-\frac{\left|(n+\alpha)\sqrt{\pi}\tau^{\frac{1}{2}}\right|^2}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right|\right)^{-1}\right),\end{gathered}\tag{11}$$

где $l_1=1$, *если* $|n+\alpha|\le x$, *и* $l_1=0$ *в остальных случаях;*

$$\begin{gathered}F_2\left(\sigma+it;\ |n|\sqrt{\pi}\tau^{-\frac{1}{2}}\right)=l_2+\\+O\left(\exp\left(-\frac{\left|n\sqrt{\pi}\tau^{-\frac{1}{2}}\right|^2}{|t|}\right)\cdot\left(-\frac{\left|n\sqrt{\pi}\tau^{-\frac{1}{2}}\right|}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right)^{\sigma}\times\right.\\ \left.\times\left(1+\left|\frac{1}{2}|t|^{\frac{1}{2}}-\frac{\left|n\sqrt{\pi}\tau^{-\frac{1}{2}}\right|^2}{|t|^{\frac{1}{2}}}\right|\right)^{-1}\right),\end{gathered}\tag{12}$$

где $l_2=1$, *если* $|n|\le y$, *и* $l_2=0$ *в остальных случаях.*

Следующая лемма представляет собой аналог оценки второго момента дзета-функции Римана.

Лемма 4. *Пусть* l, q *– натуральные,* $T>T_0\ge 2$. *Тогда при* $T\to\infty$ *справедлива асимптотическая оценка*

$$\int_{T_0}^{T_0+T}\left|q^{-\frac{1}{2}-it}\zeta\left(\frac{1}{2}+it;\ \frac{l}{q}\right)-\frac{1}{l^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2dt\ll\frac{T\log^2(qT)}{q}\tag{13}$$

с постоянной в символе "$\ll$*", зависящей только от* T_0.

Доказательство. На половинной прямой $s = \frac{1}{2} + it$ из приближенного уравнения для $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ (выбираем $|\tau| = 1$) находим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{q^{\frac{1}{2}+it}}\zeta\left(\frac{1}{2}+it;\ \frac{l}{q}\right) = \sum_{\substack{n \le xq \\ n \equiv l\,(mod\ q)}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} + \frac{\pi^{it}}{q^{\frac{1}{2}+it}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)} \times \\
&\times \sum\nolimits_{|n|\le y} \frac{e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}}{|n|^{\frac{1}{2}-it}} - \frac{\pi^{it}}{q^{\frac{1}{2}+it}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}+i\frac{t}{2}\right)} \sum\nolimits_{|n|\le y} \frac{isign(n)e^{2\pi i\frac{nl}{q}}}{|n|^{\frac{1}{2}-it}} + \\
&+O\left(t^{-\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}\log(|t|\,q)\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

с абсолютной постоянной в символе $''O''$.

Поскольку при $|\tau| = 1$, $T_0 < |t| \ll T$ имеем $x \ll T^{\frac{1}{2}}$, $y \ll T^{\frac{1}{2}}$, то, следовательно, из (14) находим

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_0}^{T_0+T} \left| q^{-\frac{1}{2}-it}\zeta\left(\frac{1}{2}+it;\ \frac{l}{q}\right) - \frac{1}{l^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 dt \ll \\
&\ll \int_{T_0}^{T_0+T} \left| \sum_{\substack{l < n \le xq \\ n \equiv l\,(mod\,q)}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+it}} \right|^2 dt + \\
&+ \int_{T_0}^{T+T_0} \left| \frac{\pi^{it}}{q^{\frac{1}{2}+it}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)} \sum\nolimits_{|n|\le y} \frac{e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}}{|n|^{\frac{1}{2}-it}} \right|^2 dt + \\
&+ \int_{T_0}^{T+T_0} \left| \frac{\pi^{it}}{q^{\frac{1}{2}+it}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-i\frac{t}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+i\frac{t}{2}\right)} \sum\nolimits_{|n|\le y} \frac{sign(n)e^{2\pi i\frac{nl}{q}}}{|n|^{\frac{1}{2}-it}} \right|^2 dt + \\
&+O\left(\frac{T^{\frac{1}{2}}\log(Tq)}{q}\right) = I_1 + I_2 + I_3 + O\left(\frac{T^{\frac{1}{2}}\log(Tq)}{q}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Учтем, что для любых натуральных l, q и любых комплексных a_n справедливо равенство

$$
\int\limits_{\substack{T_0 \\ Res = \frac{1}{2}}}^{T+T_0} \left| \sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv l\,(mod\,q)}} \frac{a_n}{n^s} \right|^2 dt = \left(T + \frac{4\pi\theta}{\sqrt{3}} \cdot \frac{N}{q}\right) \sum_{\substack{n \le N \\ n \equiv l\,(mod\,q)}} |a_n|^2 . \tag{16}
$$

(Для $q = 1$ равенство (16) доказано в [4] (гл. 6, соотн. (6.3)), а в общем случае доказывается аналогично.)

Теперь, поскольку $\Gamma(s) = \overline{\Gamma(\bar{s})}$ для любого комплексного s, отличного от целого отрицательного числа, получаем

$$
I_1,\ I_2,\ I_3 \ll \frac{T}{q}\log(Tq). \tag{17}
$$

Из (15)–(17) следует утверждение леммы.

2. Основной результат.
Из соотношения (3), в силу формулы Перрона, имеем

$$\sum_{\substack{n\equiv a\,(mod\,q)\\ n\le x}} g(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{l_3\in\mathbb{Z}_q^*} f(s;\,l_3,\,q)\times$$
$$\times\sum_{\substack{l_1,\,l_2\,\in\mathbb{Z}_q^*\\ l_1\,l_2\equiv a\bar{l}_3\,(mod\,q)}} q^{-2(s-1)}\zeta\left(s-1,\,\frac{l_1}{q}\right)\zeta\left(s-1,\,\frac{l_2}{q}\right)\frac{x^s}{s}ds+ \tag{18}$$
$$+O\left(\frac{x^c}{T(c-2)^2}\right),$$

$$(c>2,\ T>T_0\ge 2).$$

Пусть $b>0$ (точнее определим его позже). Используя представление $\zeta\left(z,\,\frac{l}{q}\right)$ рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{l}{q}\right)^{-z}$ для $Rez>1$ и ее соотношение Гурвица для $Rez<0$, находим

$$q^{b-it}\left(\zeta\left(-b+it;\ \frac{l}{q}\right)-\left(\frac{q}{l}\right)^{-b+it}\right)\ll\frac{q^b}{b}\,|t|^{\frac{1}{2}+b}+l^b,$$

$$q^{-1-b-it}\left(\zeta\left(1+b+it;\ \frac{l}{q}\right)-\frac{1}{l^{1+b+it}}\right)\ll\frac{q^{-1}}{b},\ \ (|t|>T_0);$$

а потому, в силу принципа Фрагмена–Линделефа, в полосе $Rez\in[-b,1+b]$, $|t|\ge t_0$, получаем оценку

$$q^{-z}\left(\zeta\left(z;\ \frac{l}{q}\right)-\left(\frac{q}{l}\right)^{z}\right)\ll\frac{q^{\frac{b^2-\sigma(1+b)}{1+2b}}}{b}\,|t|^{\frac{1+b-\sigma}{2(1+2b)}}. \tag{19}$$

Рассмотрим равенство

$$q^{-2z}\sum_{l_1\,l_2\equiv a\bar{l}_3\,(mod\,q)}\zeta\left(z,\,\frac{l_1}{q}\right)\zeta\left(z,\,\frac{l_2}{q}\right)=$$
$$=\frac{1}{q^{2z}}\sum_{l_1\,l_2\equiv a\bar{l}_3\,(mod\,q)}\left[\left(\zeta\left(z,\,\frac{l_1}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_1}\right)^z\right)\left(\zeta\left(z,\,\frac{l_2}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_2}\right)^z\right)+\right. \tag{20}$$
$$\left.+\left(\zeta\left(z,\,\frac{l_1}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_1}\right)^z\right)\left(\frac{q}{l_2}\right)^z+\left(\zeta\left(z,\,\frac{l_2}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_2}\right)^z\right)\left(\frac{q}{l_1}\right)^z-\left(\frac{q^2}{l_1l_2}\right)^z\right].$$

В (18) положим $s=z+1$ и перенесем контур интегрирования на прямую $Rez=\frac{1}{2}$. Тогда, в силу (18)–(20), имеем

$$\sum_{\substack{n\equiv a\,(mod\,q)\\ n\le x}} g(n)=\sum_{l_3\in\mathbb{Z}_q^*}\underset{z=1}{res}\left\{f(z+1;\,l_3,\,q)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\substack{l_1,\,l_2\,\in\mathbb{Z}_q^*\\ l_1\,l_2\equiv a\bar{l}_3\,(mod\,q)}} q^{-2z}\zeta\left(z,\,\frac{l_1}{q}\right)\zeta\left(z,\,\frac{l_2}{q}\right)\frac{x^{z+1}}{z+1}\right\}+I_1+I_2+I_3+I_4+$$

$$+O\left(\sum_{\substack{l_1,l_2,l_3\\ l_1l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}}\max_{\frac{1}{2}\le Rez\le c-1}\left\{\left|f(z+1;\,l_3,\,q)\frac{\zeta\left(z,\,\frac{l_1}{q}\right)\zeta\left(z,\,\frac{l_2}{q}\right)}{q^{2Rez}}\cdot\frac{x^{Rez+1}}{T}\right|\right\}\right)+$$

$$+O\left(\frac{x^c}{T(c-2)^2}\right), \tag{21}$$

где

$$I_1=\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}f(z+1;\,l_3,\,q)\times$$

$$\times\left(\zeta\left(z,\frac{l_1}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_1}\right)^z\right)\cdot\left(\zeta\left(z,\frac{l_2}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_2}\right)^z\right)\left(\frac{x}{q^2}\right)^z\frac{dz}{z+1},$$

$$I_2=\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}f(z+1;\,l_3,\,q)\times$$

$$\times\left(\zeta\left(z,\frac{l_1}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_1}\right)^z\right)\cdot\left(\frac{q}{l_2}\right)^z\left(\frac{x}{q^2}\right)^z\frac{dz}{z+1},$$

$$I_3=\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}f(z+1;\,l_3,\,q)\times$$

$$\times\left(\zeta\left(z,\frac{l_2}{q}\right)-\left(\frac{q}{l_2}\right)^z\right)\cdot\left(\frac{q}{l_1}\right)^z\left(\frac{x}{q^2}\right)^z\frac{dz}{z+1},$$

$$I_4=-\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}x\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}f(z+1;\,l_3,\,q)\left(\frac{x}{l_1l_2}\right)^z\frac{dz}{z+1}.$$

Из определения функции $f(s;\,l_3,\,q)$ (см. равенство (4)) следует, что на прямой $Rez=\frac{1}{2}$

$$f(z+1;\,l_3,\,q)=\frac{\mu(l_3)}{l_3^{z+1}}+O\left(\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Поэтому, в силу неравенства Коши–Шварца и леммы 4, получаем

$$\begin{aligned}I_1&\ll x^{\frac{3}{2}}\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}\frac{1}{l_3^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\log^{\frac{3}{2}}(Tq)}{q}\ll x^{\frac{3}{2}}\log^{\frac{3}{2}}(Tq),\\ I_2,I_3&\ll x^{\frac{3}{2}}\sum_{l_1\,l_2l_3\equiv a\,(mod\,q)}\frac{1}{l_3^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\log^3(Tq)}{q^{\frac{3}{2}}}\ll x^{\frac{3}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\log^3(Tq),\end{aligned}\tag{22}$$

$$I_4 \ll x^{\frac{3}{2}} \sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\, (mod\, q)} \frac{1}{l_3^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\log T}{(l_1\, l_2)^{\frac{1}{2}}} \ll x^{\frac{3}{2}} \log T \sum_{l_3 \in \mathbb{Z}_q^*} \frac{\tau(l_3)}{l_3^2} \ll x^{\frac{3}{2}} \log T.$$

Теперь займемся вычислением вычета в точке $z = 1$ подынтегральной функции в (18).

Пусть $L(s,\, \chi_q) - L$ – функция Дирихле с характером χ_q по модулю q. Пусть в окрестности точки $s = 1$

$$L(s,\, \chi_q) = \frac{\varepsilon(\chi_q)}{s-1} + b_0(\chi_q) + b_1(\chi_q)(s-1) + ..., \tag{23}$$

$$\varepsilon(\chi_q) = \begin{cases} \frac{\varphi(q)}{q}, \text{ если } \chi_q = \chi_0 - \text{главный характер } mod\, q, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях} \end{cases}$$

В силу равенства

$$L(z,\, \chi_0) = \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \zeta(z) =$$

$$= \frac{\varphi(q)}{q} \left(\frac{1}{z-1} + \gamma + \left(\sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1} \right) (z-1) + ... \right)$$

заключаем, что

$$b_0(\chi_0) = \gamma \frac{\varphi(q)}{q}, \;\; b_1(\chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1},$$

где $\gamma-$ постоянная Эйлера.

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} & q^{-z} \zeta\left(z,\, \tfrac{a}{q}\right) = \tfrac{1}{\varphi(q)} \textstyle\sum_{\chi_q} \chi_q(\bar{a}) L\left(z,\, \chi_q\right) = \\ & = \tfrac{1}{q} \cdot \tfrac{1}{z-1} + \tfrac{1}{\varphi(q)} \textstyle\sum_{\chi_q} b_0(\chi_q) \chi_q(\bar{a}) + \tfrac{1}{\varphi(q)} \left(\textstyle\sum_{\chi_q} b_1(\chi_q) \chi_q(\bar{a}) \right) (z-1) + ..., \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} & f(z+1;\, l,\, q) = \textstyle\sum_{n \equiv l\, (mod\, q)} \tfrac{\mu(n)}{n^{z+1}} = \tfrac{\mu(l)}{l^2} + \tfrac{\mu(l) \log l}{l^2} (z-1) + \\ & + O\left(\tfrac{1}{q^2}\right) + O\left(\tfrac{\log q}{q^2} \left|z-1\right|\right), \end{aligned} \tag{25}$$

то после простых технических вычислений получаем

$$\underset{z=1}{res} \left(\sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\, (mod\, q)} f(z+1;\, l_3,\, q) \cdot q^{-2z} \zeta\left(z,\, \frac{l_1}{q}\right) \zeta\left(z,\, \frac{l_2}{q}\right) \right) =$$

$$= \frac{x \log x}{2q^2} \sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\, (mod\, q)} \left(\frac{\mu(l_3)}{l_3^2} + O\left(\frac{1}{q^2}\right) \right) +$$

$$+\frac{x^2}{2q^2}\sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\,(mod\, q)}\left(\frac{\mu(l_3)\log l_3}{l_3^2}-\frac{\mu(l_3)}{2l_3^2}+O\left(\frac{\log q}{q^2}\right)\right)+ \qquad (26)$$

$$+\frac{x^2}{2q\cdot\varphi(q)}\sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\,(mod\, q)}\sum_{\chi_q} b_0(\chi_q)\left(\chi_q\left(\bar{l}_1\right)+\chi_q\left(\bar{l}_2\right)\right)\left(\frac{\mu(l_3)}{l_3^2}+O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right).$$

Заметим, что l_1 и l_2 пробегают приведенные системы вычетов по модулю q, а значит,

$$\sum_{l_1\in\mathbb{Z}_q^*}\chi_q(l_1)=\sum_{l_2\in\mathbb{Z}_q^*}\chi_q(l_2)=\begin{cases}\varphi(q), & \text{если } \chi_q=\chi_0,\\ 0, & \text{если } \chi_q\neq\chi_0.\end{cases}$$

Поэтому из (26) имеем

$$\operatorname*{res}_{z=1}\left(\sum_{l_1\, l_2 l_3 \equiv a\,(mod\, q)} f(z+1;\, l_3,\, q)\cdot q^{-2z}\zeta\left(z,\, \frac{l_1}{q}\right)\zeta\left(z,\, \frac{l_2}{q}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^2\log x}{2q^2}\cdot\varphi(q)\sum_{l_3\in\mathbb{Z}_q^*}\frac{\mu(l_3)}{l_3^2}+\frac{x^2}{2q^2}\cdot\varphi(q)\sum_{l_3\in\mathbb{Z}_q^*}\left(\frac{\mu(l_3)\log l_3}{l_3^2}-\frac{\mu(l_3)}{2l_3^2}\right)+$$

$$+\frac{x^2\log x}{q\cdot\varphi(q)}\cdot b_0(\chi_0)\cdot\varphi(q)\sum_{l_3\in\mathbb{Z}_q^*}\frac{\mu(l_3)}{l_3^2}+O\left(\frac{x^2\log q}{q^2}\right)= \qquad (27)$$

$$=\frac{x^2\log x}{q}\cdot c_1(q)+\frac{x^2}{q}\cdot c_0(q)+O\left(\frac{x^2\log x\log q}{q^2}\right),$$

где

$$\begin{aligned} c_1(q)&=\prod_{p|q}\left(1-\tfrac{1}{p}\right)\left(1-\tfrac{1}{p^2}\right),\\ c_0(q)&=-\tfrac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}\prod_{p|q}\left(1-\tfrac{1}{p^2}\right)^{-1}+\tfrac{1}{\zeta(2)}\prod_{p|q}\tfrac{\log p}{p^2-1}. \end{aligned} \qquad (28)$$

Ясно, что $(\log\log q)^{-1}\ll c_1(q)\ll 1$, $c_0(q)\ll 1$. Возьмем теперь $b=\frac{1}{\log x}$, $T=x^2$, $c=2+\frac{1}{\log x}$.

Тогда из (18), (21), (22), (27), (28) следует утверждение теоремы.

Заключение. Полученная в основной теореме асимптотическая формула нетривиальна для всех $q=o\left(x^{\frac{1}{2}}\left(\log x\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$. Кроме того, заметим, что доказанная теорема легко распространяется и на случай $(a,\, q)>1$.

1. **O. Bordelles** A note on the average order of the gcd-sum function [text] / O. Bordelles // J. Integer Sequences. – 2007. – № 10. – Art. 07.3.3. – Режим доступа: http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL10/Bordelles/bordelles90.pdf.

2. **K. A. Broughan** The gcd-sum function [text] / K.A. Broughan // J. Integer Sequences. – 2001. – № 4. – Art. 01.2.2. – Режим доступа: http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL4/BROUGHAN/gcdsum.pdf, http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL4/BROUGHAN/errata1.pdf.

3. **А. Ф. Лаврик** О приближенных уравнениях для функций Дирихле [текст] / А. Ф. Лаврик // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – № 32(1). – С. 134–185.

4. **Г. Монтгомери** Мультипликативная теория чисел [текст] / Г. Монтгомери. – М.: Мир, 1974. – 160 с.

5. **S. S. Pillai** On an arithmetic functions [text] / S. S. Pillai // J. Annamalai Univ. – 1937. – № 2. – P. 243–248.

6. **Y. Tanigawa** On the gcd-sum function [text] / Y. Tanigawa, W. Zhai // J. Integer Sequences. – 2008. – № 11. – Article 08.2.3. – Режим доступа: http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL11/Tanigawa/tanigawa12.pdf.

7. **Е. Титчмарш** Теория дзета-функции Римана [текст] / Е. Титчмарш. – М.: ИЛ, 1953. – 408 с.

8. **L. Toth** On the bi-unitary analogues of Euler's arithmetical function and the gcd-sum function [text] / L. Toth // J. Integer Sequences. – 2009. – № 12. – Article 09.5.2. – Режим доступа: http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL12/Toth2/toth5.pdf.