

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

**«Антиплоська задача теорії пружності для складеної
смуги з міжфазною тріщиною»**

**«Antiplane problem of the theory of elasticity for a
compound strip with an interfacial crack»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Козіній Микола Олександрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С.
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафе-
дри
№ ____ від _____ 2023
р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від _____ 2023 р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Основна частина	6
2.1 Знаходження рішення дифференціального рівняння	6
2.1.1 Інтегральне перетворення	6
2.1.2 Розривна крайова задача	6
2.1.3 Побудова функції Гріна	7
2.1.4 Розв'язок задачі у трансформантах	8
2.1.5 Обернення розв'язку	9
2.2 Знаходження стрибка зміщень	11
2.2.1 Зведення до інтегрального рівняння	11
2.2.2 Відокремлення сингулярної частини	11
2.2.3 Заміна змінних	14
2.2.4 Метод ортогональних многочленів	15
2.3 Використання квадратурних формул	18
3 Коефіцієнт інтенсивності напружень	19
4 Чисельні результати	22
Висновки	26
Список літератури	27

ВСТУП

Теорія пружності вивчає взаємодію зовнішніх навантажень з деформацією та рухом пружних тіл. Форма тіл адаптується відповідно до конкретних завдань, і у технологічних конструкціях та будівництві часто застосовуються полосні структури. Ці елементи виступають важливою роллю, забезпечуючи оптимальні умови для вирішення різноманітних технічних викликів.

Дипломна робота присвячена розв'язанню антиплоскої задачі теорії пружності для складеної смуги, на верхню грань якої діє механічне навантаження, а між матеріалами розташована тріщина. Дана задача є типовою модельною задачею, оскільки смуга може використовуватися в багатьох конструкціях. Вихідна задача зводиться до одновимірної разривної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення. Для знаходження розв'язку побудовано функцію Гріна. Отримано вирази для функцій переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Сформульовано сингулярне інтегральне рівняння відносно цієї функції та виділена сингулярна частина рівняння.

Розв'язок інтегрального рівняння знаходимо методом ортогональних поліномів. Та знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин тріщини для різних параметрів, за допомогою яких можна проаналізувати подальший розвиток тріщини

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

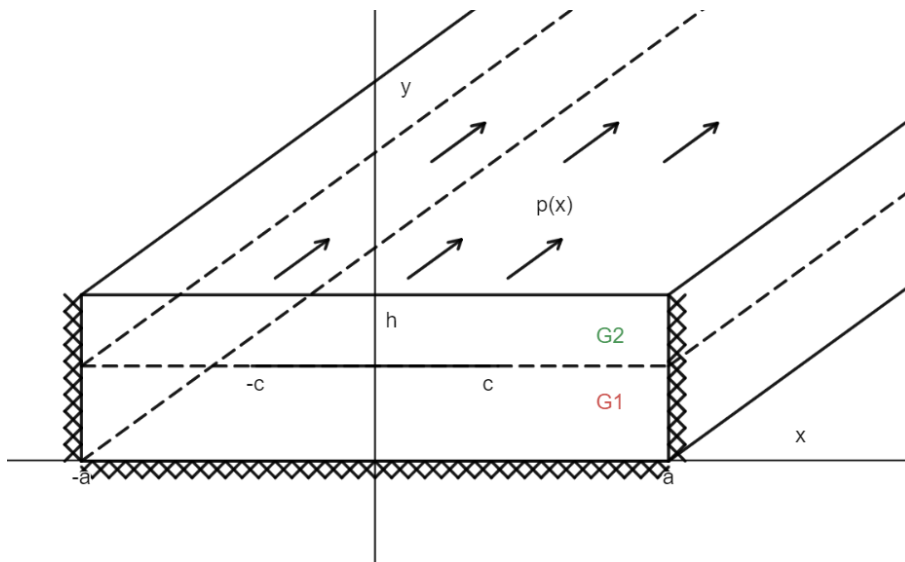


Рис. 1.1

Розглянемо антиплоську задачу для складеного тіла з міжфазною тріщиною. Воно складається з двох матеріалів с модулями пружності G_1 та G_2 .

$$\Delta w(x,y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad -a < x < a, \quad 0 < y < h, \quad y \neq h$$

Нижня частина закріплена, а до верхньої прикладено дотичне напруження.

$$w \Big|_{y=0} = 0; \quad \tau_{yz} \Big|_{y=h} = G_2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h} = p(x)$$

Бокові частини $x = \pm a$ закріплені

$$w(-a) = w(a) = 0$$

Умови сполучення шарів:

$$\langle w \rangle = w(x, b - 0) - w(x, b + 0) = X(x)$$

$$\langle \tau_{yz} \rangle = G_1 \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b-0} - G_2 \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b+0} = 0$$

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1 Знаходження рішення дифференціального рівняння

2.1.1 Інтегральне перетворення

Скористаємось скінченим \sin - перетворенням за змінною x на $(-a, a)$.

$$w_n(y) = \int_{-a}^a w(x, y) \sin \alpha x dx, \quad \alpha = \frac{\pi n}{a}$$

З формулою обернення:

$$w(x, y) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin \alpha x$$

2.1.2 Розривна крайова задача

Отримаємо розривну крайову задачу

$$w_n''(y) - \alpha^2 w_n(y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad y \neq b$$

З крайовими умовами:

$$w_n(0) = 0, \quad w_n'(h) = \frac{p_n}{G_2}$$

Та умовами сполучення:

$$\langle w_n \rangle = X_n = \int_{-c}^c X(x) \sin \alpha x$$

$$\langle \tau_{yz,\alpha} \rangle = G_1 w'_n(b-0) - G_2 w'_n(b+0) = 0$$

2.1.3 Побудова функції Гріна

Функцію Гріна будемо шукати в вигляді

$$G(y,\xi) = \Phi_n(y) - \sum_{k=0}^1 \psi_k(y) U_k[\Phi]$$

Фундаментальна функція має вигляд:

$$\Phi_n(y,\xi) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|y-\xi|}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{2} \text{sign}(y-\xi) e^{-\alpha|y-\xi|}$$

$$U_0[\Phi] = \Phi \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\xi}$$

$$U_1[\Phi] = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\alpha}{2} \text{sign}(h-\xi) e^{-\alpha|h-\xi|}$$

Знайдемо базисну систему рішень

$$\psi_0(y) = \frac{\text{ch}(\alpha(h-y))}{\text{ch} \alpha h}$$

$$\psi_1(y) = \frac{\text{sh}(\alpha y)}{\alpha \text{ch}(\alpha h)}$$

Тож функція Гріна задачі має вигляд

$$G_n(y,\xi) = \frac{1}{2\alpha} \left(-e^{-\alpha|y-\xi|} + e^{-\alpha\xi} \frac{\text{ch} \alpha(h-y)}{\text{ch} \alpha h} - e^{-\alpha(h-\xi)} \frac{\text{sh} \alpha y}{\alpha \text{ch} \alpha h} \right)$$

А її похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(y,\xi)}{\partial y} &= \frac{\text{sign}(y-\xi)e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} - \frac{e^{\alpha\xi} \text{sh } \alpha(h-y)}{2 \text{ch } \alpha h} - \frac{e^{-\alpha(h-\xi)} \text{ch } \alpha y}{2 \text{ch } \alpha h} \\ \frac{\partial G(y,\xi)}{\partial \xi} &= \frac{\text{sign}(\xi-y)e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} - \frac{e^{-\alpha\xi} \text{ch } \alpha(h-y)}{2 \text{ch } \alpha h} - \frac{e^{-\alpha(h-\xi)} \text{sh } \alpha y}{2 \text{ch } \alpha h} \\ \frac{\partial^2 G(y,\xi)}{\partial y \partial \xi} &= \frac{\alpha e^{-\alpha|y-\xi|}}{2} + \frac{\alpha e^{-\alpha\xi} \text{sh } \alpha(h-y)}{2 \text{ch } \alpha h} - \frac{\alpha e^{-\alpha(h-\xi)} \text{ch } \alpha y}{2 \text{ch } \alpha h}\end{aligned}$$

2.1.4 Розв'язок задачі у трансформантах

Розв'язок розривної крайової задачі запишемо як:

$$\begin{aligned}w_n(y) &= \frac{p_n}{G_2} \psi_1(y) - A_1 G_n(y,b) + X_n \left. \frac{\partial G}{\partial \xi}(y,\xi) \right|_{\xi=b} = \\ &= \frac{p_n \text{sh } \alpha_n y}{G_2 \alpha \text{ch } \alpha h} - \frac{1}{2} X_n \left(\text{sign}(y-b) e^{-\alpha|y-b|} + \frac{\text{ch } \alpha(h-y)}{\text{ch}(\alpha h)} e^{-\alpha b} \right. \\ &\left. + \frac{\text{sh } \alpha y}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) + \frac{1}{2} A_1 \left(e^{-\alpha|y-b|} - \frac{\text{ch } \alpha(h-y)}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{\text{sh } \alpha y}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)\end{aligned}$$

Тоді $w'_n(y)$:

$$\begin{aligned}w'_n(y) &= \frac{p_n \text{ch } \alpha y}{G_2 \text{ch } \alpha h} + \frac{\alpha X_n}{2} \left(e^{-\alpha|y-b|} + \frac{\text{sh } \alpha(h-y)}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{\text{ch } \alpha y}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) - \\ &- \frac{1}{2} A_1 \left(\text{sign}(y-b) e^{-\alpha|y-b|} + \frac{\text{sh } \alpha(h-y)}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{\text{ch } \alpha y}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)\end{aligned}$$

A_1 знайдемо з умови

$$\begin{aligned}\langle \tau_{yz,n} \rangle &= \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) p_n \frac{\text{ch } \alpha b}{\text{ch } \alpha h} + \frac{\alpha X_n}{2} (G_2 - G_1) \left(1 + \frac{\text{sh } \alpha(h-b)}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{\text{ch } \alpha b}{\text{ch } \alpha h} e^{\alpha(h-b)} \right) + \\ &+ \frac{A_1}{2} \left((G_1 + G_2) + (G_2 - G_1) \left(\frac{\text{sh } \alpha(h-b)}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{\text{ch } \alpha b}{\text{ch } \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) \right) = 0\end{aligned}$$

Позначимо $\Delta = G_2 + G_1 + (G_2 - G_1) \left(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)$,
тоді

$$A_1 = 2 \left(1 - \frac{G_1}{G_2} \right) p_n \frac{ch\alpha b}{\Delta_n ch\alpha_n h} -$$

$$-(G_2 - G_1) \frac{\alpha X_n}{\Delta_n} \left(1 + \frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)$$

Підставимо в $w'_n(y)$ і отримаємо

$$w'_n(y) = M_n(y)p_n + K_n(y)X_n$$

$$M_n(y) = \frac{ch\alpha y}{G_2 ch\alpha h} - \left(1 - \frac{G_1}{G_2} \right) \frac{ch\alpha b}{\Delta_n ch\alpha h} \left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} + \right.$$

$$\left. + \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)$$

$$K_n(y) = \frac{\alpha}{2} \left(e^{-\alpha|y-b|} + \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) +$$

$$+(G_2 - G_1) \frac{\alpha}{2\Delta_n} \left(1 + \frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) \cdot \left(sign(y-b)e^{-\alpha|y-b|} - \right.$$

$$\left. - \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right)$$

2.1.5 Обернення розв'язку

За формулою обернення отримаємо рішення крайової задачі у просторі оригіналів.

$$w(x,y) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin \alpha x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} w'_n(y) \sin \alpha x$$

За умовою на тріщині

$$\tau_{yz}(x, b+0) = G_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{G_2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} w'_n(y) \sin \alpha x = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(M_n(y) p_n + K_n(b+0) X_n \right) \sin \alpha x = 0$$

$$X_n = \int_{-c}^c X(\eta) \sin \alpha \eta d\eta$$

2.2 Знаходження стрибка зміщень

2.2.1 Зведення до інтегрального рівняння

Змінюючи порядок сумування та інтегрування отримаємо

$$\int_{-c}^c X(\eta) \left(K_n(b+0) \sin \alpha \eta \sin \alpha x \right) d\eta = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b+0) \sin \alpha x$$

Отримали інтегральне рівняння

$$\int_{-c}^c X(\eta) R(x, \eta) d\eta = T(x)$$

$$R(x, \eta) = K_n(b+0) \sin \alpha \eta \sin \alpha x$$

$$T(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b+0) \sin \alpha x$$

2.2.2 Відокремлення сингулярної частини

Для відокремлення з ядра рівняння сингулярної частини запишемо $K_n(y)$ у вигляді:

$$K_n(y) = \frac{\alpha_n}{2} \left(1 + \frac{(G_2 - G_1)}{\Delta_n} \right) \text{sign}(y - b) e^{-\alpha|y-b|} + N_n(y)$$

$$N_n(y) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha(G_2 - G_1)}{2\Delta_n} \left(\frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{\alpha(h-b)} \right).$$

$$\cdot \left(\text{sign}(y - b) e^{-\alpha|y-b|} - \frac{sh\alpha(h-y)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{ch\alpha y}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) -$$

$$-\frac{\alpha(G_2 - G_1)}{2\Delta_n} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(h-y)}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{\operatorname{ch} \alpha y}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha|h-b|} \right)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} N_n(y) \sin \alpha x \sin \alpha \eta$ сходиться рівномірно і можна перейти до $y \rightarrow b + 0$.

$$N_n(b) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(h-b)}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{\operatorname{ch} \alpha b}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{\alpha(h-b)} \right) \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{\Delta_n} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha(h-b)}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha b} - \frac{\operatorname{ch} \alpha b}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha(h-b)} \right) \right) - \frac{\alpha(G_2 - G_1)}{2\Delta_n} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(h-b)}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{\operatorname{ch} \alpha b}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha|h-b|} \right)$$

Представимо

$$1 + \frac{G_2 - G_1}{\Delta_n} \operatorname{sign}(y-b) = 1 + \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} \operatorname{sign}(y-b) - \frac{(G_2 - G_1)^2 \frac{\operatorname{sh} \alpha(h-b)}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{\operatorname{ch} \alpha b}{\operatorname{ch} \alpha h} e^{-\alpha(h-b)}}{\Delta_n} \operatorname{sign}(y-b)$$

Розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} \operatorname{sign}(y-b) \right) e^{-\alpha|y-b|} \sin \alpha x \sin \alpha \eta$. Ряд розбігається при $y \rightarrow b + 0$. При $y \neq b$ він збігається рівномірно, перепишемо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} \operatorname{sign}(y-b) \right) e^{-\alpha|y-b|} \sin \alpha x \sin \alpha \eta = \\ & = -\frac{d}{dx^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} \operatorname{sign}(y-b) \right) e^{-\alpha|y-b|} \sin \alpha x \sin \alpha \eta \end{aligned}$$

Переходячи до $y \rightarrow b + 0$, отримаємо $-\frac{G_2}{G_2 + G_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \sin \alpha \eta$. Перетворимо, скористуючись формулою 5.4.2.9 из А.П. Прудніков "Інтегралы та

ряди"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{|x|}{2}\right)\right), \quad x \neq 0$$

Перепишемо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \sin \alpha \eta &= \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \cdot \frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(n \cdot \frac{\pi \eta}{a}\right)}{n} = \\ &= \frac{a}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n \frac{\pi}{a}(x - \eta)}{n} - \frac{\cos n \frac{\pi}{a}(x + \eta)}{n} \right) = \\ &= \frac{a}{2\pi} \left(-\ln\left(2 \sin \left| \frac{\pi}{a}(x - \eta) \right| \right) + \ln\left(2 \sin \left| \frac{\pi}{a}(x + \eta) \right| \right) \right) \end{aligned}$$

Отже рівняння прийме вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{G_2}{2\pi(G_1 + G_2)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-c}^c X(\eta) \left(\ln\left(2 \sin \frac{\pi}{a}|x - \eta|\right) - \ln\left(2 \sin \frac{\pi}{a}|x + \eta|\right) \right) d\eta + \\ &+ \int_{-c}^c X(\eta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(N_n(b) - \frac{(G_2 - G_1)^2 \frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)}}{\Delta_n} \right) \cdot \right. \\ &\left. \sin \alpha x \sin \alpha \eta \right) d\eta = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b + 0) \sin \alpha x, \quad -c < x < c \end{aligned}$$

2.2.3 Заміна змінних

Зробимо заміну $x = ct$, $\eta = c\xi$, де Y

$$\begin{aligned} & \frac{G_2}{2\pi(G_1 + G_2)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 X^*(\xi) \left(\ln(2 \sin \frac{c\pi}{a} |t - \xi|) - \ln(2 \sin \frac{c\pi}{a} |t + \xi|) \right) d\xi + \\ & + \int_{-1}^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(N_n(b) - \frac{(G_2 - G_1)^2 \frac{sh\alpha(h-b)}{ch\alpha h} e^{-\alpha b} + \frac{ch\alpha b}{ch\alpha h} e^{-\alpha(h-b)}}{G_2 + G_1} \right) \frac{1}{\Delta_n} \sin \alpha c t \sin \alpha c \xi \right) d\xi = \\ & = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b + 0) \sin \alpha c t, \quad -1 < t < 1 \end{aligned}$$

Розглянемо частину рівняння з особливістю

$$\begin{aligned} \ln(2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t - \xi|) &= -\ln \frac{1}{|t - \xi|} + \ln(2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t - \xi|) + \ln \frac{1}{|t - \xi|} = \\ &= -\ln \frac{1}{|t - \xi|} + \ln \frac{2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t - \xi|}{|t - \xi|} \end{aligned}$$

При цьому $\lim_{|t-\xi| \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t - \xi|}{|t - \xi|} = \ln \frac{2\pi c}{a}$

Рівняння прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & - \frac{G_2}{2\pi c(G_1 + G_2)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 X^*(\xi) \ln \frac{1}{|t - \xi|} d\xi + \\ & + \frac{G_2}{2\pi c(G_1 + G_2)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 X^*(\xi) \left[\ln \frac{2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t - \xi|}{|t - \xi|} - \ln(2 \sin \frac{\pi c}{\alpha} |t + \xi|) \right] d\xi + \\ & + c \int_{-1}^1 X^*(\xi) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(N_n(b) - \frac{(G_1 - G_2)^2}{(G_1 + G_2)} \cdot \frac{sh\alpha(h-b) + ch\alpha h \cdot e^{-\alpha|h-b|}}{\Delta_n ch\alpha h} \right) \right. \\ & \left. \cdot \sin \alpha c t \cdot \sin \alpha c \xi \right] d\xi = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b) \sin \alpha c t, \quad -1 < t < 1 \end{aligned}$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 X^*(\xi) \ln \frac{1}{|t - \xi|} d\xi + \int_{-1}^1 X^*(\xi) R(t, \xi) d\xi = f(t)$$

де регулярне ядро $R(t, \xi)$ має вигляд:

$$R(t, \xi) = -\frac{d^2}{dt^2} \left[\ln \frac{2 \sin \frac{\pi c}{a} |t - \xi|}{|t - \xi|} - \ln(2 \sin \frac{\pi c}{a} |t + \xi|) \right] -$$

$$-\frac{2\pi c^2 (G_1 + G_2)}{G_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(N_n(b) - \frac{(G_1 - G_2)^2}{(G_1 + G_2)} \cdot \frac{sh\alpha(h - b) + ch\alpha h \cdot e^{-\alpha|h-b|}}{\Delta_n ch\alpha h} \right) \cdot \sin \alpha c t \cdot \sin 2c\xi$$

$$f(t) = \frac{2\pi c (G_1 + G_2)}{G_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n M_n(b) \sin \alpha c t$$

2.2.4 Метод ортогональних многочленів

Існування спектрального співвідношення

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t - \xi|} \cdot \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi = -\pi(n + 1) U_n(t)$$

Де $U_n(\xi)$ - поліном Чебишева другого роду, дозволяє нам використати для вирішення інтегро-діференціального рівняння метод ортогональних многочленів. Відповідно до нього розв'язок будемо шукати у вигляді

$$X^*(t) = \sqrt{1 - t^2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* \cdot U_n(t)$$

Підставимо у рівняння і скористаємося спектральним співвідношенням

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n^* \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t - \xi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* \int_{-1}^1 R(t, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi = f(t)$$

Тобто

$$-\pi \sum_{n=1}^{\infty} X_n^* (n+1) U_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n^* \int_{-1}^1 R(t, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi = f(t)$$

Помножимо отриману рівність на $\sqrt{1 - t^2} U_m(t)$ і проінтегруємо за t на проміжку $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} & -\pi \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* (n+1) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_n(t) U_m(t) dt + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_m(t) \int_{-1}^1 R(t, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi dt = \\ & = \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1 - t^2} U_m(t) dt \end{aligned}$$

Скористаємося ортогональністю многочленів Чебишева

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_n(t) U_m(t) dt = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi^2}{2} (m+1) X_m^* + \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_m(t) dt \int_{-1}^1 R(t, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi = \\ & = \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1 - t^2} U_m(t) dt \end{aligned}$$

Отже, отримали нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(m+1) X_m^* - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_n^* = -\frac{2}{\pi^2} B_m$$

$$A_{mn} = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} U_m(t) \int_{-1}^1 R(t, \xi) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi dt$$

$$B_m = \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{1-t^2} U_m(t) dt$$

Нормуємо цю систему. Поділимо на $\sqrt{m+1}$ та позначимо $\Psi_m = \sqrt{m+1} X_m^*$

$$\Psi_m + \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^* \Psi_n = B_m^*, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$A_{mn}^* = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}} A_{mn}, \quad B_m^* = 2 \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{m+1}} B_m$$

2.3 Використання квадратурних формул

Для знаходження інтегралів скористаємося квадратурними формулами Чебишева

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1-x^2} \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

$$w_i = \frac{\pi}{N+1} \sin^2 \frac{\pi i}{N+1}; \quad x_i = \cos \frac{\pi i}{N+1}$$

Враховуючи, що

$$U_k(x) = \frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$$

$$U_k(x_i) = \frac{\sin(k+1) \cdot \frac{\pi i}{N+1}}{\sin \frac{\pi i}{N+1}}$$

Таким чином, отримаємо

$$\int_{-1}^1 f(x) U_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = \sum_{i=1}^N \frac{\pi}{N+1} \cdot \sin^2 \frac{\pi i}{N+1} \frac{\sin \frac{\pi i}{N+1} (k+1)}{\sin \frac{\pi i}{N+1}} f(x_i) =$$

$$= \frac{\pi}{N+1} \sum_{i=1}^N \sin \frac{\pi i}{N+1} \cdot \sin \frac{\pi i}{N+1} \cdot \frac{\pi i}{N+1} (k+1) \cdot f(x_i)$$

РОЗДІЛ 3

КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

Коефіцієнт інтенсивності напружень (К-коефіцієнт) грає ключову роль у вивченні та передбаченні руйнування матеріалів, особливо при наявності тріщин. Коефіцієнт інтенсивності напружень визначає міру напружень, яка працює в околі вершини тріщини, і є основним параметром, який використовується для аналізу руйнування матеріалів.

Коли напруження в околі тріщини досягає певного рівня, визначеного критичним значенням K , тріщина може почати рости. Це пов'язано з тим, що високі значення К-коефіцієнта вказують на велику концентрацію напружень вздовж тріщини і можуть викликати розширення тріщини.

КІН на одному кінці тріщини визначається як

$$K_m^+ = \lim_{s \rightarrow c+0} \sqrt{2\pi(c-s)} \tau_{yz} \Big|_{y=b+0}$$

Та на іншому:

$$K_m^- = \lim_{s \rightarrow c-0} \sqrt{2\pi(s-c)} \tau_{yz} \Big|_{y=b+0}$$

Оскільки

$$\tau_{yz} \Big|_{y=b+0} = G_2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b+0}$$

Розглянемо випадко на правому кінці тріщини K_m^+

$$G_2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b+0} = \frac{G_2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (M_n(b+0)p_n + K_n(b+0)X_n) \sin \alpha x$$

$$X_n = \int_{-c}^c X(\eta) \sin \alpha \eta d\eta$$

То в отриманому раніше виразі для похідної $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b+0}$ відкинемо скінчені доданки, коли $s \rightarrow c + 0$ або $s \rightarrow c - 0$, та врахуємо приведену вище заміну до t, ξ :

$$K_m^+ = -\frac{G_2^2}{\sqrt{2\pi c}(G_1 + G_2)} \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{(1-t)} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 X^*(\xi) \ln \frac{1}{|t-\xi|} d\xi$$

$$X^*(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* U_n(t), \quad X(t) = X^*(ct)$$

Підставимо $X^*(t)$ до K_m^+ та отримаємо:

$$K_m^+ = -\frac{G_2^2}{\sqrt{2\pi c}(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ln \frac{1}{|t-\xi|} U_n(t)$$

Скористаємося асимптотичним розвиненням інтегралу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ln \frac{1}{|t-\xi|} U_n(t) \sim \frac{\pi|t|}{\sqrt{t^2-1}} U_n(t)$$

Тоді при підстановці $t \rightarrow 1 + 0$:

$$K_m^+ = -\frac{G_2^2}{\sqrt{2\pi c}(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* U_n(1)$$

Оскільки $X_n^* = \frac{\psi_n}{\sqrt{n+1}}$, та $U_n(1) = n + 1$, остаточний вигляд КІН на правому кінці тріщини буде

$$K_m^+ = -\frac{G_2^2}{\sqrt{2\pi c}(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \Psi_n^*$$

Відповідно до $U_n(-1) = (-1)^n U_n(1)$, K_m^- буде

$$K_m^- = \lim_{s \rightarrow c-0} \sqrt{2\pi(s-c)} \tau_{yz} \Big|_{y=b+0}$$

$$K_m^- = -G_2 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b+0}$$

$$K_m^- = -\frac{G_2^2}{\sqrt{2\pi c}(G_1 + G_2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n+1} \Psi_n^*$$

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

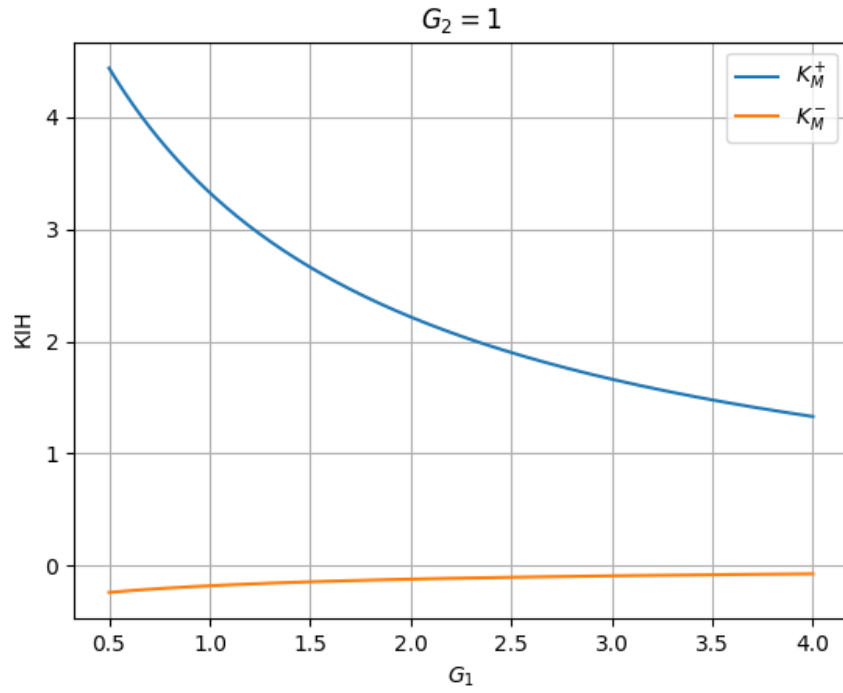


Рис. 4.1. $p(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}(a^3 - x^3)}$, $a = 10, h = 6, c = 3, b = 2$

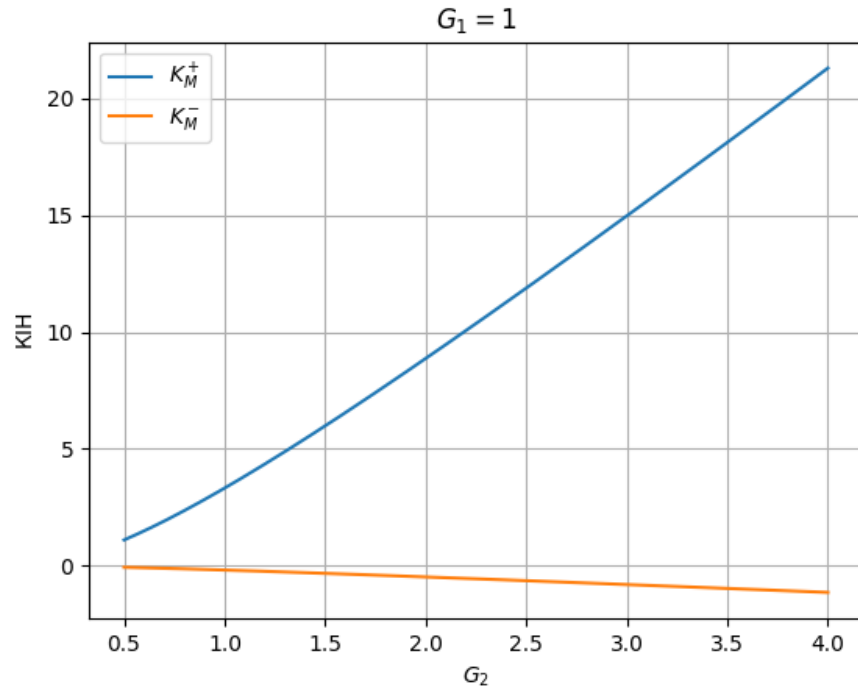


Рис. 4.2. $p(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}(a^3 - x^3)}$, $a = 10, h = 6, c = 3, b = 2$

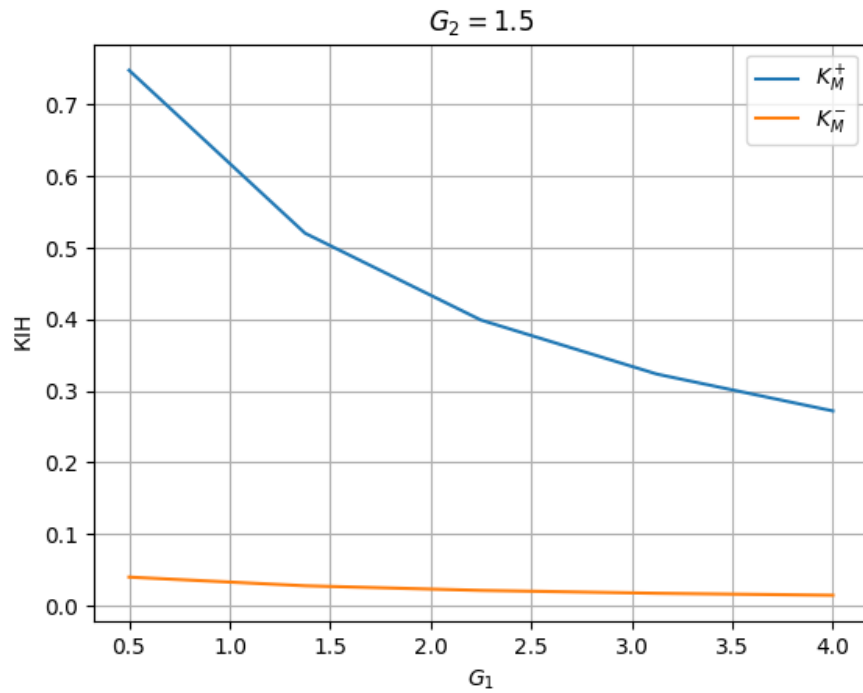


Рис. 4.3. $p(x) = c^2 - x$, $a = 10, h = 6, c = 3, b = 2$

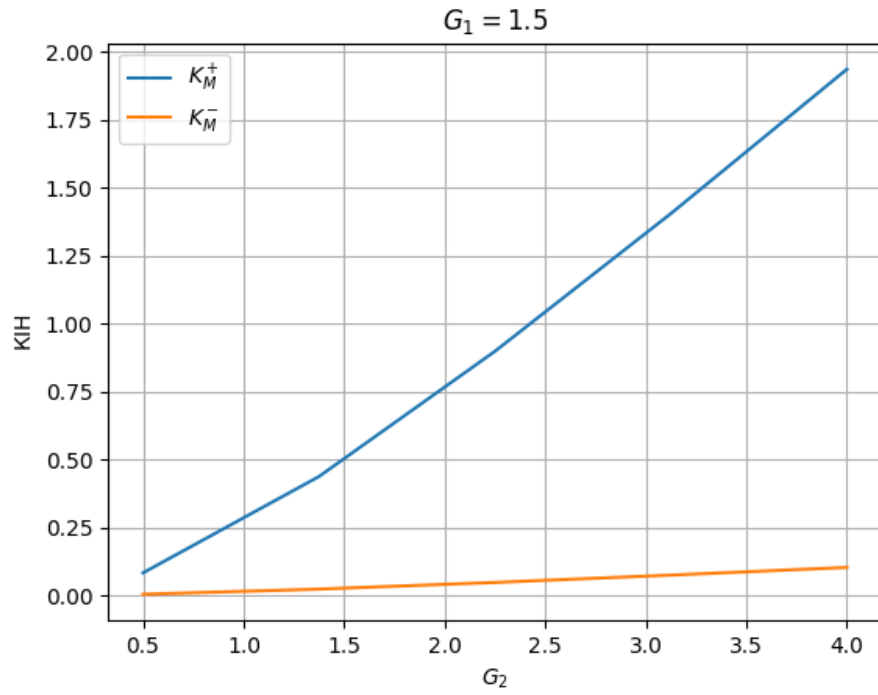


Рис. 4.4. $p(x) = c^2 - x$, $a = 10, h = 6, c = 3, b = 2$

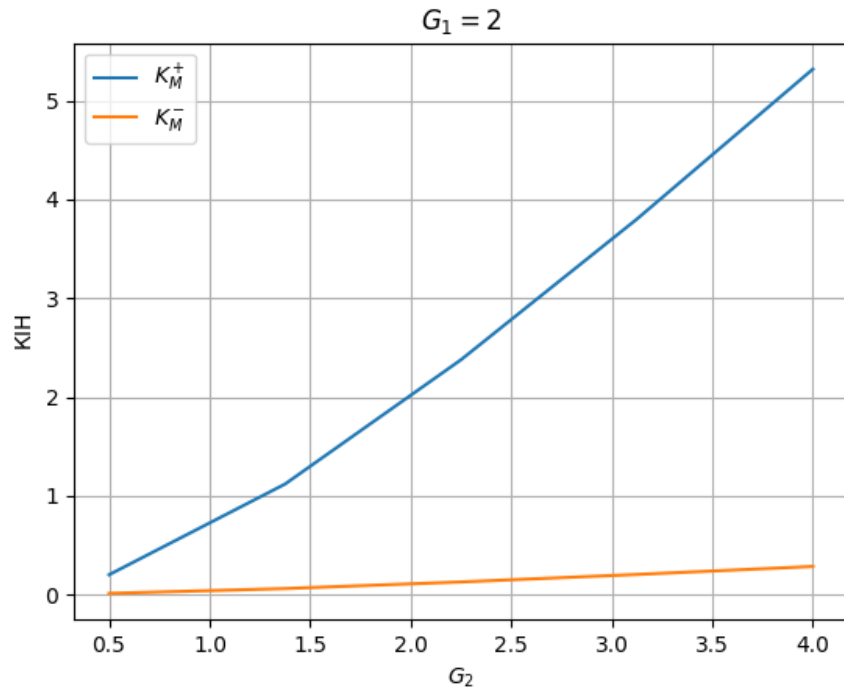


Рис. 4.5. $p(x) = a + \sin(x) \cdot x$, $a = 10, h = 10, c = 5, b = 5$

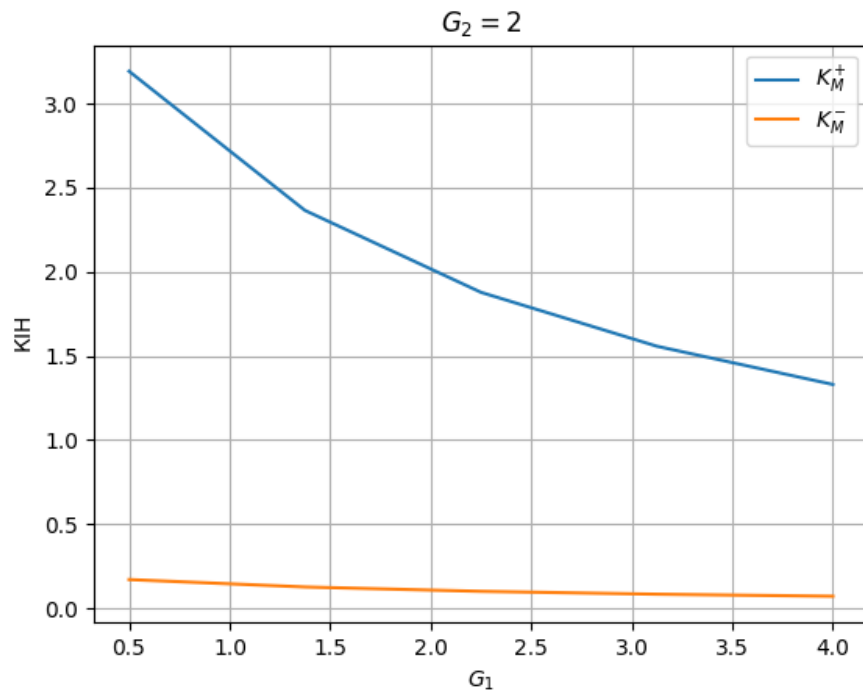


Рис. 4.6. $p(x) = a + \sin(x) \cdot x$, $a = 10, h = 10, c = 5, b = 5$

ВИСНОВКИ

В рамках дипломної роботи було досліджено антиплоску задачу теорії пружності для складеної полоси із міжфазною тріщиною. Цю задачу було спрощено до розв'язання інтегрального рівняння щодо невідомого стрибка переміщення на тріщині. Після розв'язання цього рівняння методом ортогональних поліномів можна визначити потрібні напруження та переміщення. Результати дослідження включають отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень у області вершини тріщини.

Дипломна робота є актуальною в галузі механіки, задачі торії пружності важливі для розуміння поведінки матеріалів під впливом навантажень та розвитку тріщин. Отримані результати і методи розв'язання інтегрального рівняння з використанням ортогональних поліномів можуть мати практичні застосування в проектуванні та аналізі структур, а також в розробці нових матеріалів з високою міцністю та тріщиностійкістю.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. —2-е изд., 2002. —580-584 с. [ур. 5.4.6.7].
2. Методичні вказівки до курсу "Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки" / [упорядкув. канд. фіз.-мат. наук: Процеров Ю.С., Мойсеєнок О.П. – Одеса: 2015]
3. Попов Г. Я. Навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень": для студ. техн. спец. ВНЗ / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. – Одеса: Астропринт, 2005 . – 183 с.
4. Попов Г.Я. , Реут В.В., Моїсеєв М.Г., Вайсфельд Н.Д. "Навчальний посібник "Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів" Одеса : Астропринт, 2010 – 110с