

## О ТОЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА И УСЛОВИЯ МАКЕНХАУПТА

А. А. Кореновский

§ 1. Введение. Пусть  $\Phi$  — класс всех положительных на  $(0, +\infty)$  выпуклых вниз функций. Для  $\varphi \in \Phi$  будем считать, что  $\varphi(0) = \varphi(0+)$  (равное, быть может, нулю или бесконечности). Всюду в дальнейшем рассматриваются измеримые и неотрицательные функции  $f, g, \dots$ , за исключением специально оговоренных случаев. Пусть  $\varphi \in \Phi$  и измеримое множество  $E \subset \mathbb{R}^N$ . Через  $\varphi_L(E)$  обозначается класс всех суммируемых на  $E$  функций  $f$  таких, что  $\varphi(f) \in L(E)$ .

Пусть  $f \in \varphi_L(Q_0)$ , где  $\varphi \in \Phi$ , а  $Q_0 \subset \mathbb{R}^N$  — куб, стороны которого параллельны координатным осям (только такие кубы рассматриваются в дальнейшем). Тогда, в силу неравенства Йенсена (см. [1, с. 182]), для любого куба  $Q \subset Q_0$

$$\varphi\left(\int_Q f(x) dx\right) \leq \int_Q \varphi(f(x)) dx, \quad (1.1)$$

где  $\int_Q f(x) dx \equiv f_Q \equiv \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$ . В данной работе изучаются свойства функций  $f \in \varphi_L(Q_0)$ , удовлетворяющих «обратному неравенству Йенсена»

$$S \equiv S(\varphi, f, Q_0) \equiv \sup_{Q \subset Q_0} \frac{\int_Q \varphi(f(x)) dx}{\varphi\left(\int_Q f(x) dx\right)} < \infty, \quad (1.2)$$

где верхняя грань берется по всем кубам  $Q \subset Q_0$ , для которых  $f_Q > 0$ .

В случае  $\varphi(s) = s^q$  ( $q > 1$ ) неравенство (1.2) — это «обратное неравенство Гёльдера»

$$\left\{ \int_Q f^q(x) dx \right\}^{1/q} \leq M \int_Q f(x) dx \quad (Q \subset Q_0), \quad (1.3)$$

где  $M = S^{1/q}$ . Если же  $\varphi(s) = s^{-1/(q-1)}$  ( $q > 1$ ), то (1.2) можно

переписать в виде

$$\int_Q f(x) dx \left\{ \int_Q f^{-1/(q-1)}(x) dx \right\}^{q-1} \leq M \quad (Q \subset Q_0), \quad (1.4)$$

где  $M = S^{q-1}$ . Условие (1.4) называют  $A_q$ -условием Макенхаупта.

В работе Геринга [2] была доказана

**ТЕОРЕМА А.** Пусть  $1 < q < \infty$  и функция  $f \in L^q(Q_0) \equiv L^q$  удовлетворяет условию (1.3). Тогда существует  $\varepsilon = \varepsilon(N, q, M) > 0$  такое, что  $f \in L^p$  для всех  $p < q + \varepsilon$ , причем для каждого такого  $p$  существует постоянная  $c = c(N, q, M, p)$  такая, что

$$\left\{ \int_Q f^p(x) dx \right\}^{1/p} \leq c \int_Q f(x) dx \quad (Q \subset Q_0). \quad (1.5)$$

Эта теорема имеет многочисленные применения в теории весовых пространств, квазиконформных отображений, дифференциальных уравнений с частными производными. Различные ее доказательства и обобщения были даны рядом других авторов. В работе Боярского [3] поставлена задача нахождения точного значения  $\varepsilon = \varepsilon(N, q, M)$  в теореме А, показывающего, какова степень суммируемости функции  $f$ , удовлетворяющей условию (1.3). Асимптотическая зависимость  $\varepsilon(N, q, M)$  при  $M \rightarrow 1+$  получена Боярским [3, 4] и Виком [5]. Для монотонной функции  $f$  точное значение  $\varepsilon(1, q, M)$  найдено в работах Сбордине и Д'Апуццо [6, 7]. Именно, в [7] показано, что невозрастающая на  $[a, b]$  функция  $f$ , удовлетворяющая условию (1.3), принадлежит классу  $L^p$  для любого  $p < p_0$  и справедливо неравенство (1.5), где число  $p_0 > q$  определяется как корень уравнения

$$\frac{p_0 - q}{p_0} \left( \frac{M p_0}{p_0 - 1} \right)^q = 1, \quad (1.6)$$

причем значение  $p_0$ , вообще говоря, нельзя увеличить. Таким образом, для монотонной  $f$  точное значение  $\varepsilon(1, q, M) = p_0 - q$ .

Этот результат приводит к предположению, что для решения задачи Боярского в случае произвольной функции  $f$  целесообразно применить невозрастающую перестановку

$$f^*(t) = \sup_{\substack{e \subset Q_0, \\ |e| \geq t}} \inf_{x \in e} f(x) \quad (0 \leq t \leq |Q_0|),$$

а именно функцию одной переменной, равноизмеримую с  $f$ . Ранее перестановки использовались для доказательства теоремы А в работе Франциози и Москарелло [8]. Именно, в [8] доказано, что из условия (1.3) следует неравенство

$$\left\{ \int_0^t f^{*q}(\tau) d\tau \right\}^{1/q} \leq M_1 \int_0^t f^*(\tau) d\tau \quad (0 < t \leq |Q_0|), \quad (1.7)$$

из которого вытекает утверждение теоремы А. Однако предложен-

ный метод доказательства не позволяет найти точное значение  $M$ . Поэтому в таком виде неравенство (1.7) нельзя было применять для нахождения точного  $\varepsilon$  в теореме А.

Итак, мы приходим к следующей задаче. Требуется из условия (1.3) получить аналогичное неравенство для перестановки  $f^*$  с точной постоянной в правой части. Если эта постоянная равна  $M$  (такая же, как и в условии (1.3)), то теорема А справедлива для  $\varepsilon$ , найденного в [7], и это значение является точным. В данной работе мы показываем, что в одномерном случае действительно (1.3) влечет выполнение неравенства

$$\left\{ \int_J f^{*q}(\tau) d\tau \right\}^{1/q} \leq M \int_J f^*(\tau) d\tau \quad (J \subset [0, |Q_0|])$$

с той же самой постоянной  $M$ . Это утверждение является частным случаем следующего основного неравенства.

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\varphi \in \Phi$  и  $f \in \varphi_L([a, b])$ . Тогда

$$S(\varphi, f^*, [0, b-a]) \leq S(\varphi, f, [a, b]).$$

Доказательство этой теоремы приводится в § 3. Здесь мы отметим, что неравенство подобного типа (и даже в многомерном случае) при других предположениях на функцию  $\varphi$  и с множителем больше единицы в правой части содержится в работе [9]. Как уже отмечалось, наличие такого множителя было основным препятствием для нахождения точного  $\varepsilon$  в теореме А.

Из теоремы 1 при  $\varphi(s) = s^q$  ( $q > 1$ ) и результата работы [7] сразу следует

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $1 < q < \infty$ . Тогда

а) любая функция  $f \in L^q([a, b])$ , удовлетворяющая условию (1.3), где  $Q_0 = [a, b]$ , принадлежит классу  $L^p([a, b])$  и удовлетворяет неравенству (1.5), где  $q \leq p < p_0$ , а число  $p_0 > q$  определяется равенством (1.6);

б) существует невозрастающая функция  $f \in L^q([a, b])$ , удовлетворяющая условию (1.3), не принадлежащая классу  $L^{p_0}([a, b])$ .

Рассмотрим теперь случай, когда функция  $f$  удовлетворяет условию (1.4). Это условие является необходимым и достаточным для ограниченности ряда классических операторов в весовых пространствах  $L^q$  с весом  $f$ . Одним из важнейших свойств функции  $f$ , удовлетворяющей  $A_q$ -условию (1.4), является следующее утверждение, полученное Макенхауптом в работе [10].

**ТЕОРЕМА В.** Пусть  $1 < q < \infty$  и функция  $f \in L^{-1/(q-1)}(Q_0)$  удовлетворяет условию (1.4). Тогда существует  $\varepsilon = \varepsilon(N, q, M) > 0$  такое, что

$$\int_{Q_1} f(x) dx \left\{ \int_Q f^{-1/(p-1)}(x) dx \right\}^{p-1} \leq c \quad (Q \subset Q_0) \quad (1.8)$$

для всех  $p > q - \varepsilon$ , где постоянная  $c = c(N, q, M, p)$ .

Имеются различные доказательства теоремы В, однако нам неизвестны такие работы, где было бы найдено точное значение

$\varepsilon(N, q, M)$  даже в каких-либо частных случаях. Задача о нахождении точного  $\varepsilon(N, q, M)$  поставлена Боярским в [3]. В работах Вика [11, 12] доказательство теоремы В основано на применении неубывающей перестановки

$$f_*(t) = f^*(|Q_0| - t) \quad (0 \leq t \leq |Q_0|).$$

Именно в [11, 12] доказано, что из условия (1.4) следует неравенство

$$\int_I f_*(\tau) d\tau \left\{ \int_I f_*^{-1/(q-1)}(\tau) d\tau \right\}^{q-1} \leq M_1 \quad (I \subset [0, |Q_0|]), \quad (1.9)$$

из которого выводится утверждение теоремы В. Однако, как и в случае «обратного неравенства Гельдера», метод доказательства не позволяет найти точного значения  $M$ , и поэтому в таком виде (1.9) нельзя применять для нахождения точного  $\varepsilon$  в теореме В. Кроме того, найденное в [11, 12] значение  $\varepsilon$  для монотонной функции не является точным.

Точное значение  $\varepsilon(1, q, M)$  в теореме В для монотонной функции  $f$  устанавливает следующая

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $1 < q < \infty$ . Тогда

а) для любой неубывающей функции  $f \in L^{-1/(q-1)}([a, b])$ , удовлетворяющей условию (1.4), где  $Q_0 = [a, b]$ , справедливо неравенство (1.8), где  $1 < p_0 < p \leq q$ , а число  $p_0$  определяется равенством

$$\frac{q - P_0}{q - 1} (M p_0)^{1/(q-1)} = 1; \quad (1.10)$$

б) существует неубывающая функция  $f \in L^{-1/(q-1)}([a, b])$ , удовлетворяющая условию (1.4), не принадлежащая классу  $L^{-1/(p_0-1)}([a, b])$ .

Доказательство этой теоремы содержится в § 3. Его схема близка к схеме доказательства теоремы А для монотонной функции в работе [7].

Из теорем 1 и 3 и очевидного равенства

$$S(\varphi, f_*, [0, b-a]) = S(\varphi, f^*, [0, b-a]) \quad (1.11)$$

легко выводится

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $1 < q < \infty$ . Тогда для любой функции  $f \in L^{-1/(q-1)}([a, b])$ , удовлетворяющей условию (1.4), где  $Q_0 = [a, b]$ , справедливо неравенство (1.8),  $1 < p_0 < p \leq q$ , а число  $p_0$  определено равенством (1.10). Если же  $p \leq p_0$ , то (1.8), вообще говоря, теряет силу.

В самом деле, последнее утверждение теоремы 4 следует из утверждения б) теоремы 3. Неравенство (1.8) получим, если для произвольного интервала  $I \subset [a, b]$  к сужению  $f|I$  применим теорему 1 при  $\varphi(s) = s^{-1/(q-1)}$ , равенство (1.11), а затем к функции  $(f|I)_*$  — теорему 3.

Таким образом, теорема 4 показывает, что точное значение  $\varepsilon(1, q, M)$  в теореме В равно  $q - p_0$ , где  $p_0$  — корень уравнения (1.10) такой, что  $1 < p_0 < q$ .

**З а м е ч а н и е 1.1.** В доказательстве теоремы 1 используется лемма Рисса (см. § 2, лемма 2), не имеющая точного аналога в многомерном случае. В связи с этим теоремы 2 и 4, доказательства которых основаны на применении теоремы 1, также получены для  $N=1$ . При  $N \geq 2$  вопросы о нахождении точных значений  $\varepsilon$  в теоремах А и В остаются открытыми.

Автор глубоко признателен В. И. Коляде за постановку задач, постоянное внимание к работе, плодотворные обсуждения и ценные советы.

### § 2. Леммы.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $E = \bigcup_i E_i$ , где  $E_i$  — измеримые множества, причем  $|E_i \cap E_j| = 0$  ( $i \neq j$ ),  $|E_i| > 0$  ( $i=1, 2, \dots$ ) и  $|E| < \infty$ , а функция  $f \in L(E)$ . Тогда

$$\int_E f(x) dx \leq \sup_i \int_{E_i} f(x) dx.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \int_E f(x) dx &= \frac{\sum_i |E_i| \int_{E_i} f(x) dx}{|E|} \leq \frac{\sup_i \int_{E_i} f(x) dx \sum_i |E_i|}{|E|} = \\ &= \sup_i \int_{E_i} f(x) dx. \end{aligned}$$

**ЛЕММА 2** (см. [13]). Пусть  $f \in L([a, b])$  и число  $A \geq \int_a^b f(x) dx$ . Тогда существует семейство попарно непересекающихся интервалов  $I_i \subset [a, b]$  таких, что  $f_{I_i} = A$  ( $i=1, 2, \dots$ ) и  $f(x) \leq A$  почти всюду на  $[a, b] \setminus (\bigcup_i I_i)$ .

**З а м е ч а н и е 2.1.** Эта лемма представляет собой один из вариантов леммы Рисса «о восходящем солнце». Она справедлива не только для положительной, но и для функции  $f$ , принимающей значения разных знаков. Если в ее формулировке знаки  $\geq$  и  $\leq$  поменять на  $\leq$  и  $\geq$  соответственно, то полученное утверждение также будет иметь место. Действительно, в этом случае достаточно применить лемму 2 к функции  $-f$  и числу  $-A$ .

**ЛЕММА 3.** Пусть  $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$ ,  $0 \leq a_2 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_2$  таковы, что  $\gamma_1 a_1 + (1-\gamma_1) b_1 = \gamma_2 a_2 + (1-\gamma_2) b_2$ . Тогда для любой функции  $\varphi \in \Phi$

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + (1-\gamma_1) \varphi(b_1) \leq \gamma_2 \varphi(a_2) + (1-\gamma_2) \varphi(b_2).$$

Доказательство этой леммы становится очевидным, если сделать соответствующий чертеж.

**ЛЕММА 4.** Пусть множества  $H_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) положительной меры таковы, что  $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \mathbb{R}^N$  и  $|H_3| < \infty$ , а для некоторой  $\varphi \in \Phi$  функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям  $f \in \varphi_L(H_3)$ ,  $g \in \varphi_L(H_2)$ ,

$$\int_{H_3} f(x) dx = \int_{H_2} g(x) dx \equiv A, \quad (2.1)$$

$$f|_{H_1} \equiv B, \quad f|(H_3 \setminus H_2) \equiv C,$$

$$\int_{H_1} g(x) dx = D, \quad f|(H_2 \setminus H_1) = g|(H_2 \setminus H_1),$$

где  $A \geq B \geq C \geq D$ . Тогда

$$\int_{H_1} \varphi(f(x)) dx \leq \int_{H_2} \varphi(g(x)) dx. \quad (2.2)$$

Доказательство. Обозначим  $m_1 = |H_1|$ ,  $m_2 = |H_3 \setminus H_2|$ ,  $m_3 = |H_2 \setminus H_1|$ ,  $A_1 = f_{H_2 \setminus H_1} \geq A$ . Тогда условие (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} B + \frac{m_2}{m_1 + m_2} C = \frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} A_1 + \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} D.$$

Применяя лемму 3 и неравенство Йенсена (1.1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{m_1}{m_1 + m_2} \varphi(B) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \varphi(C) \leq \\ & \leq \frac{m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} (\varphi(f))_{H_2 \setminus H_1} + \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} (\varphi(g))_{H_1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{m_1 \varphi(B) + m_2 \varphi(C) + m_3 (\varphi(f))_{H_2 \setminus H_1}}{m_1 + m_2 + m_3} \leq \frac{m_1 (\varphi(g))_{H_1} + m_3 (\varphi(g))_{H_2 \setminus H_1}}{m_1 + m_3},$$

а это и есть неравенство (2.2). Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е 2.2.** Легко видеть, что утверждение леммы 4 останется в силе, если в ее формулировке условие  $A \geq B \geq C \geq D$  заменить условием  $A \leq B \leq C \leq D$ . В самом деле, в этом случае доказательство повторяется дословно с той лишь разницей, что  $A_1 = f_{H_2 \setminus H_1} \leq A$ .

**ЛЕММА 5** (см. [1, с. 205; 14]). Пусть функции  $f$  и  $g$  не возрастают на  $[a, b]$ . Для того, чтобы при любой  $\varphi \in \Phi$  имело место неравенство

$$\int_a^b \varphi(g(x)) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (2.3)$$

$$\int_a^x g(y) dy \leq \int_a^x f(y) dy \quad (a \leq x \leq b). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 6. Пусть монотонная функция  $f \in \Phi_L([a, b])$ , где  $\Phi \in \Phi$ , а интервал  $J \equiv (\alpha, \beta) \subset [a, b]$  такой, что

$$\int_J f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.5)$$

Тогда

$$\int_J \varphi(f(x)) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx. \quad (2.6)$$

Доказательство. Нетривиальным является случай  $\beta - \alpha < b - a$ . Достаточно рассмотреть невозрастающую  $f$ . Обозначим  $g(x) = f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a)\right)$ . Тогда требуемое неравенство (2.6) принимает вид

$$\int_a^b \varphi(g(x)) dx \leq \int_a^b \varphi(f(x)) dx.$$

Для его доказательства, в силу леммы 5, достаточно проверить выполнение условий (2.3) и (2.4). Равенство (2.3) эквивалентно условию (2.5). Далее, обозначим

$$\psi(x) = \int_a^x g(y) dy - \int_a^x f(y) dy \quad (a \leq x \leq b).$$

Имеем  $\psi(a) = \psi(b) = 0$  и  $\psi'(x) = f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a)\right) - f(x)$ . Из монотонности  $f$  следует, что  $\psi'(x) \leq 0$  почти всюду на  $[a, x_0]$  и  $\psi'(x) \geq 0$  почти всюду на  $[x_0, b]$ , где  $x_0 = (\alpha b - a\beta) / (b - a - \beta + \alpha)$ . Поэтому  $\psi(x) \leq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ), а это и означает, что выполнено неравенство (2.4). Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой аналог неравенства Харди для отрицательного показателя. Ее доказательство также аналогично доказательству неравенства Харди в [1, с. 291], и поэтому мы его не приводим.

ЛЕММА 7. Пусть неубывающая на  $[a, b]$  функция  $f \in L$ , а числа  $p \geq q > 0$ . Тогда

$$\int_a^b (x - a)^{q/p-1} \left( \int_a^x f(y) dy \right)^{-q} dx \leq \left( \frac{p+1}{p} \right)^q \int_a^b (x - a)^{q/p-1} f^{-q}(x) dx.$$

ЛЕММА 8. Пусть функция  $f$  не убывает на  $[a, b]$  и числа  $p \geq q > 0$ . Тогда

$$\left\{ \int_a^b f^{-p}(x) dx \right\}^{q/p} \leq \frac{q}{p} \int_a^b (x - a)^{q/p-1} f^{-q}(x) dx.$$

Эта лемма представляет собой один из вариантов известного не-

равенства (см. [14, 7])

$$\left\{ \int_a^b g^r(x) dx \right\}^{1/r} \leq \frac{1}{r} \int_a^b (x-a)^{1/r-1} g(x) dx,$$

где  $r \geq 1$ , а функция  $g$  не возрастает на  $[a, b]$ .

### § 3. Доказательства теорем 1 и 3.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что

$$S(\varphi, f^*, [0, b-a]) = \max(S_1, S_2), \quad (3.1)$$

где

$$S_1 = \sup_{0 < t \leq b-a} \frac{\int_0^t \varphi(f^*(\tau)) d\tau}{\varphi\left(\int_0^t f^*(\tau) d\tau\right)},$$

$$S_2 = \sup_{0 \leq t < b-a} \frac{\int_t^{b-a} \varphi(f^*(\tau)) d\tau}{\varphi\left(\int_t^{b-a} f^*(\tau) d\tau\right)}.$$

Зафиксируем интервал  $J \subset [0, b-a]$ . Если  $(f^*)_J \geq (f^*)_{(0, b-a)}$ , то выберем интервал  $I \equiv (0, t) \supset J$  такой, что

$$\int_I f^*(\tau) d\tau = \int_J f^*(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

В противном случае найдется интервал  $I \equiv (t, b-a) \supset J$ , для которого справедливо (3.2). Применяя лемму 6, получаем

$$\int_J \varphi(f^*(\tau)) d\tau \leq \int_I \varphi(f^*(\tau)) d\tau.$$

Так как  $J$  — произвольный интервал из  $[0, b-a]$ , то из этого неравенства следует (3.1).

Таким образом, в силу (3.1), для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$S_k \leq S(\varphi, f, [a, b]) \quad (k=1, 2). \quad (3.3)$$

Докажем это неравенство для  $k=1$ . Зафиксируем  $t \in (0, b-a)$  и обозначим  $A \equiv (f^*)_{(0, t]} \geq f_{[a, b]}$ . Пользуясь леммой 2, построим систему попарно непересекающихся интервалов  $I_i \subset [a, b]$  ( $i=1, 2, \dots$ ) таких, что

$$\int_{I_i} f(x) dx = A \quad (i=1, 2, \dots), \quad (3.4)$$

и множество  $E_2 \equiv \bigcup I_i \supset \{x \in [a, b] : f(x) > A\} \setminus \Omega$ , где  $|\Omega| = 0$ . Если мы покажем, что

$$\int_0^t \varphi(f^*(\tau)) d\tau \leq \int_{E_2} \varphi(f(x)) dx, \quad (3.5)$$

то, применяя лемму 1 и учитывая (3.4), в силу произвольности  $t$ , получим (3.3) для  $k=1$ .

Итак, осталось доказать (3.5). Для простоты записей в дальнейшем мы будем пренебрегать значениями функции  $f$  на множестве  $\Omega$  меры нуль. Выберем множество  $E_3 \subset [a, b]$  такое, что  $|E_3|=t$  и  $f(x) \geq f^*(t)$  для всех  $x \in E_3$ . Тогда

$$f(x) \leq f(y) \leq A \quad (x \in E_2 \setminus E_3 = E_1, y \in E_3 \setminus E_2). \quad (3.6)$$

Далее, из неравенства

$$\int_0^t f^*(\tau) d\tau = A = \int_{E_2} f(x) dx \leq \int_0^{|E_2|} f^*(\tau) d\tau$$

и монотонности  $f^*$  следует, что  $t_2 = |E_2| \leq t$ . Обозначим

$$F(\tau) = \begin{cases} (f|_{(E_2 \cap E_3)})^*(\tau), & 0 \leq \tau < |E_2 \cap E_3| \equiv t_1, \\ (f|_{(E_3 \setminus E_2)})^*(\tau - t_1), & t_1 \leq \tau \leq t, \end{cases}$$

$$G(\tau) = \begin{cases} (f|_{E_2})^*(\tau), & 0 \leq \tau < t_2, \\ A, & t_2 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Из (3.6) следует, что  $F(\tau) = G(\tau)$  ( $0 \leq \tau < t_1$ ) и

$$G(\xi) \leq F(\tau) \leq A \quad (t_1 \leq \tau \leq t, t_1 \leq \xi \leq t_2). \quad (3.7)$$

Кроме того, поскольку функция  $F$  на  $[0, t]$  равноизмерима с  $f^*|_{[0, t]}$ , а  $G$  на  $[0, t_2]$  равноизмерима с  $f|_{E_2}$ , то

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \int_0^{t_2} G(\tau) d\tau = \int_0^t G(\tau) d\tau = A, \quad (3.8)$$

а требуемое неравенство (3.5) в этих новых обозначениях принимает следующий вид:

$$\int_0^t \varphi(F(\tau)) d\tau \leq \int_0^{t_2} \varphi(G(\tau)) d\tau. \quad (3.9)$$

Если  $t_2 = t$ , то очевидно, что  $F(\tau) = G(\tau)$  ( $0 \leq \tau < t$ ), и (3.9) имеет место. Осталось рассмотреть случай  $t_2 < t$ . Зададим  $\delta > 0$  и разобьем отрезок  $[t_2, t]$  на отрезки  $K_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), занумерованные справа налево, длина каждого из которых  $|K_i| \leq \delta$ , и такие, что каждому  $K_i$  соответствует отрезок  $J_i \subset [t_1, t_2]$  длины  $|J_i| \leq \delta$ , отрезки  $J_i$  занумерованы слева направо и  $\{J_i\}_{i=1}^n$  — разбиение отрезка  $[t_1, t_2]$ , причем

$$\int_{K_i} (A - F(\tau)) d\tau = \int_{J_i} (F(\tau) - G(\tau)) d\tau \quad (i=1, \dots, n).$$

Такое разбиение возможно в силу равенства

$$\int_{t_2}^t (A - F(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} (F(\tau) - G(\tau)) d\tau,$$

которое следует из (3.8). Обозначим  $B_i = F_{J_i}$ ,  $C_i = F_{K_i}$ ,  $D_i = G_{J_i}$ . Из (3.7) получаем  $A \geq B_i \geq C_i \geq D_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Далее, обозначим

$$F_0(\tau) = F(\tau) \chi_{[0, t_1]}(\tau) + \sum_{i=1}^n (B_i \chi_{J_i}(\tau) + C_i \chi_{K_i}(\tau)),$$

$$G_1(\tau) = G(\tau) \chi_{[0, t_1] \cup J_1}(\tau) + F_0(\tau) \chi_{\bigcup_{i=2}^n (K_i \cup J_i)}(\tau),$$

где  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $\chi$  — характеристическая функция соответствующего множества. Тогда к функциям  $F_0$  и  $G_1$  можно применить лемму 4, где  $H_3 = [0, t]$ ,  $H_2 = H_3 \setminus K_1$ ,  $H_1 = J_1$ , согласно которой

$$\int_0^t \varphi(F_0(\tau)) d\tau \leq \int_0^{\tau_1} \varphi(G_1(\tau)) d\tau,$$

где  $\tau_1 = t - |K_1|$ . Обозначив  $F_1(\tau) = G_1(\tau)$ ,  $G_2(\tau) = G(\tau) \chi_{[0, t_1] \cup J_1 \cup J_2}(\tau) + F_0(\tau) \chi_{\bigcup_{i=3}^n (K_i \cup J_i)}(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_1$ ), снова применим лемму 4 к функциям  $F_1$  и  $G_2$ , в которой  $H_3 = [0, \tau_1]$ ,  $H_2 = H_3 \setminus K_2$ ,  $H_1 = J_2$ . Получим

$$\int_0^{\tau_1} \varphi(G_1(\tau)) d\tau = \int_0^{\tau_1} \varphi(F_1(\tau)) d\tau \leq \int_0^{\tau_2} \varphi(G_2(\tau)) d\tau,$$

где  $\tau_2 = \tau_1 - |K_2|$ . Продолжая этот процесс, на  $n$ -м шаге будем иметь

$$\int_0^{\tau_{n-1}} \varphi(G_{n-1}(\tau)) d\tau = \int_0^{\tau_{n-1}} \varphi(F_{n-1}(\tau)) d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \varphi(G_n(\tau)) d\tau,$$

где  $\tau_n = \tau_{n-1} - |K_n|$ ,  $G_n(\tau) = G(\tau)$  ( $\tau \in [0, t_1] \cup (\bigcup_{i=1}^n J_i) = [0, t_2]$ ).

Таким образом, справедливо неравенство

$$\int_0^t \varphi(F_0(\tau)) d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \varphi(G(\tau)) d\tau. \quad (3.10)$$

Оно отличается от (3.9) лишь тем, что в его левой части вместо интеграла  $\int_{t_i}^t \varphi(F(\tau)) d\tau$  записана интегральная сумма

$\sum_{i=1}^n (\varphi(B_i) |J_i| + \varphi(C_i) |K_i|)$ , соответствующая построенному выше разбиению. Но так как диаметр  $\delta$  разбиения произвольно мал, то из (3.10) следует (3.9), а вместе с ним и (3.3) для  $k=1$ .

Доказательство неравенства (3.3) для  $k=2$  производится аналогично с использованием вместо лемм 2 и 4 соответствующих замечаний 2.1 и 2.2. Поэтому мы его не приводим. Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится

**Предложение 1.** Пусть  $\varphi \in \Phi$ , функция  $g \in \varphi_L([a, b])$  и число  $h > 0$ . Тогда

$$S(\varphi, g_h, [a, b]) \leq S(\varphi, g, [a, b]), \quad (3.11)$$

где  $g_h(x) = \max\{h, g(x)\}$ .

Доказательство. Обозначим  $f = g_h$  и зафиксируем интервал  $I \subset [a, b]$ . Ясно, что из трех возможных случаев  $f_I = h$ ,  $f_I = g_I$  и  $f_I > \max\{h, g_I\}$  нетривиальным является лишь последний. В этом случае, пользуясь леммой 2, построим систему попарно непересекающихся интервалов  $J_i \subset I$  таких, что  $g_{J_i} = f_I$  ( $i=1, 2, \dots$ ) и  $g(x) \leq f_I$  почти всюду на  $I \setminus E$ , где  $E = \bigcup J_i$ . Обозначим

$$H = \{x \in I: g(x) < h\}, \quad t = |I|, \quad t_1 = |E \setminus H|, \quad t_2 = |E|, \quad A = f_I,$$

$$F(\tau) = \begin{cases} (f|_{(I \setminus H)})^*(\tau), & 0 \leq \tau < t_1, \\ (f|_H)^*(\tau - t_1), & t_1 \leq \tau \leq t, \end{cases}$$

$$G(\tau) = \begin{cases} (g|_E)^*(\tau), & 0 \leq \tau < t_2, \\ A, & t_2 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, функции  $F$  и  $G$  удовлетворяют условиям (3.7), (3.8). Повторяя доказательство неравенства (3.9) (см. доказательство теоремы 1), получим

$$\int_0^t \varphi(F(\tau)) d\tau \leq \int_0^{t_2} \varphi(G(\tau)) d\tau.$$

Отсюда с учетом того, что  $F$  равноизмерима с  $f|I$ , а  $G|_{(0, t_2)}$  равноизмерима с  $g|E$ , следует

$$\int_I \varphi(f(x)) dx \leq \int_E \varphi(g(x)) dx.$$

Поэтому в силу леммы 1

$$\int_I \varphi(f(x)) dx \leq \sup_i \int_{J_i} \varphi(g(x)) dx,$$

а так как  $f_I = g_{J_i}$  ( $i=1, 2, \dots$ ), то

$$\frac{\int_I \varphi(f(x)) dx}{\varphi\left(\int_I f(x) dx\right)} \leq S(\varphi, g, [a, b]).$$

Поскольку  $I$  — произвольный интервал из  $[a, b]$ , то тем самым доказано (3.11).

**Замечание 3.1.** В таком виде мы привели неравенство (3.11) лишь для полноты изложения. В дальнейшем оно используется в случае, когда функция  $g$  не убывает на  $[a, b]$ . В этом случае доказательство (3.11) существенно упрощается. В работе [8] отмечается, что неравенство, аналогичное (3.11), справедливо для монотонной функции  $g$  и  $\varphi(s) = s^q$  ( $q > 1$ ).

**Доказательство теоремы 3. а).** Пусть неубывающая на  $[a, b]$  функция  $f$  удовлетворяет условию (1.4). Тогда в силу предложения 1

для функции  $g = f_h = \max\{h, f\}$  ( $h > 0$ ) справедливо неравенство

$$\sup_{I \subset [a, b]} \left\{ \int_I g(x) dx \right\} \left\{ \int_I g^{-1/(q-1)}(x) dx \right\}^{q-1} \leq M. \quad (3.12)$$

Зафиксируем  $I = (\alpha, \beta) \subset [a, b]$ . Обозначая  $q' = 1/(q-1)$ , в силу леммы 7 и (3.12), для  $p' > q'$ , применяя теорему Фубини, получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p' + 1}{p'} \right)^{q'} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{q'/p'-1} g^{-q'}(x) dx \geq \\ & \geq \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{q'/p'-1} \left( \int_{\alpha}^x g(y) dy \right)^{-q'} dx \geq \\ & \geq M^{-q'} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{q'/p'-2} \int_{\alpha}^x g^{-q'}(y) dy dx = \\ & = M^{-q'} \frac{p'}{q' - p'} \left[ (\beta - \alpha)^{q'/p'-1} \int_{\alpha}^{\beta} g^{-q'}(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{q'/p'-1} g^{-q'}(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^{q'/p'-1} g^{-q'}(x) dx \leq \frac{1}{Z(p)} (\beta - \alpha)^{q'/p'-1} \int_{\alpha}^{\beta} g^{-q'}(x) dx \quad (3.13)$$

при условии, что

$$Z(p) \equiv 1 - \frac{q-p}{q-1} (Mp)^{1/(q-1)} > 0,$$

где  $p = 1 + 1/p'$ . Применяя к (3.13) лемму 8, находим

$$\left\{ \int_{\alpha}^{\beta} g^{-p'}(x) dx \right\}^{q'/p'} \leq \frac{q'}{p'} \frac{1}{Z(p)} \int_{\alpha}^{\beta} g^{-q'}(x) dx.$$

Поэтому, в силу (3.12),

$$\int_I f(x) dx \left\{ \int_I g^{-p'}(x) dx \right\}^{1/p'} \leq \int_I g(x) dx \left\{ \int_I g^{-p'}(x) dx \right\}^{1/p'} \leq c,$$

где

$$c = c(1, q, M, p) = M \left( \frac{p-1}{q-1} \cdot \frac{1}{Z(p)} \right)^{q-1}.$$

Устремляя  $h$  к нулю, получаем (1.8).

Таким образом, мы получили, что из (1.4) следует (1.8), если  $p > p_0$ , где  $p_0 > 1$  определяется равенством (1.10).

б) Пусть  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^\gamma$ , где  $0 < \gamma < q-1$ . Для интервала  $I \subset [0, 1]$  найдем такое  $t > 0$ , что  $I \subset (0, t)$  и

$$\int_0^t x^\gamma dx = \int_I x^\gamma dx.$$

Тогда, в силу леммы 6 при  $\varphi(s) = s^{-1/(q-1)}$ ,

$$\int_I x^{-\gamma/(q-1)} dx \leq \int_0^t x^{-\gamma/(q-1)} dx,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} & \sup_{I \subset [0,1]} \left\{ \int_I x^\gamma dx \right\} \left\{ \int_I x^{-\gamma/(q-1)} dx \right\}^{q-1} \leq \\ & \leq \sup_{0 < t < \infty} \left\{ \int_0^t x^\gamma dx \right\} \left\{ \int_0^t x^{-\gamma/(q-1)} dx \right\}^{q-1} = \frac{1}{\gamma+1} \left( \frac{q-1}{q-1-\gamma} \right)^{q-1} \equiv M_{q,\gamma}. \end{aligned}$$

Значит,  $f(x) = x^\gamma$  удовлетворяет  $A_q$ -условию (1.4) при  $q > \gamma + 1$  с постоянной в правой части  $M = M_{q,\gamma}$ . Но и при всех  $p > \gamma + 1$  функция  $x^\gamma$  также удовлетворяет  $A_p$ -условию и очевидно  $\gamma + 1 \equiv p_0$  — нижняя грань тех значений  $p$ , для которых это верно. Так как  $p_0$  — корень уравнения (1.10) и  $f^{-1/(p_0-1)}$  не суммируема на  $[0, 1]$ , то тем самым доказано утверждение б).

Одесский государственный  
университет им. И. И. Мечникова

Поступило  
20.05.92

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [2] Gehring F. W. The  $L^p$ -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
- [3] Bojarski B. Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. A, Math. 1985. V. 10. P. 291–296.
- [4] Bojarski B. On Gurov-Reshetnyak classes/Univ. of Warsaw. Preprint. 1989.
- [5] Wik I. Reverse Hölder inequalities with constant close to 1 // Ric. Math. 1990. V. 39, N 1. P. 151–157.
- [6] Sbordone C. Rearrangement of function and reverse Hölder inequalities // Research Notes in Math. 1983. V. 125. P. 139–148.
- [7] D'Apuzzo L., Sbordone C. Reverse Hölder inequalities. A sharp result // Rendiconti di Math. 1990. V. 10, Ser. VII. P. 357–366.
- [8] Franciosi M., Moscariello G. Higher integrability results // Manuscripta Math. 1985. V. 52, N 1–3. P. 151–170.
- [9] Sbordone C. Rearrangement of functions and reverse Jensen inequalities // Proc. Symp. in Pure Math. 1986. V. 45, N 2. P. 325–329.
- [10] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.
- [11] Wik I. On Muckenhoupt's classes of weight functions // Dep. Math. Univ. Umea [Publ.]. 1987. N 3. P. 1–13.
- [12] Wik I. On Muckenhoupt's classes of weight functions // Studia Math. 1989. V. 94, N 3. P. 245–255.
- [13] Klemes I. A mean oscillation inequality // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 93, N 3. P. 497–500.
- [14] Hardy G. H., Littlewood G. E., Polya G. Some simple inequalities satisfied by convex functions // Messenger of Math. 1929. V. 58. P. 145–152.