Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»:

«Недиференційовні функції»

«Non-differentiable functions»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Шаповал Поліна Михайлівна

Керівник доктор фіз.-мат. наук,
проф. Кореновський А.О. ________________________

Рецензент канд. фіз.-мат. наук,
доц. Шанін Р.В.________________________

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ____________ 2025 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ____________

Протокол № ____ від ____________ 2025 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ ____________________

Одеса — 2025 р.

Зміст

ВСТУП

Неперервність функцій - це одна з основних тем математичного аналізу, яка має велике значення в різних наукових дисциплінах. Вона досліджує властивості функцій, які можуть бути визначені "неперервним" способом на певному інтервалі, тобто такі функції, які не мають "різких змін" або розривів.

Наприклад, при розгляді фізичних явищ, які змінюються з часом чи просторовою координатою, неперервність функцій дозволяє вивести більш точні та реалістичні моделі цих явищ. В економіці та фінансах, неперервність функцій є важливою для аналізу фінансових ринків та прогнозування ризиків.

В даній роботі розглядаються властивість неперервності і розриви функцій дійсної змінної. Основний результат полягає в характеризації множини точок розриву довільної функції (див. Теорему 3.1). Крім того, у четвертому розділі, ми даємо конструктивний опис множини недиференційовності неперервної функції, тим самим уточнюючи класичний результат Загорського щодо $G_{\delta\sigma}$-множин міри нуль.

Відомі приклади функцій, які означені на множині дійсних чисел і є неперервними в кожній ірраціональній точці і розривні в кожній раціональній точці. Одна з таких є функція Рімана, яка для ірраціонального аргумента набуває значення 0, а для кожного раціонального числа, яке можна представити у вигляді нескоротнього дробу $\frac{m}{n}$ (де $n > 0$), вона дорівнює $\frac{1}{n}$, а саме,

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ якщо } x = \frac{m}{n} - \text{нескоротний дріб і } \; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

З результатів даної роботи, зокрема, випливає такий цікавий факт, що не існує функцій, неперервних в кожній раціональній точці і розривних в кожній ірраціональній точці.

Розділ 1

ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Нехай функцію f визначено на деякій підмножині X множини дійсних чисел $\mathbb{R}$ і x_0 – гранична точка множини X, причому $x_0 \in X$.

Означення 1.1. *Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, причому точку x_0 називають точкою неперервності функції f. (Джерело: Ілченко В. В. Посібник з математичного аналізу, 2021, с. 24)*

Оскільки для будь-якого x виконується $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то умову неперервності можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тому у випадку неперервної функції знаки функції і границі можна переставляти місцями, тобто переходити до границі під знаком функції.

При дослідженні неперервності зручно скористатися і дещо іншою формою Означення 1.1. Розглянемо функцію $f(x)$ у точці x_0 і, роблячи крок Δx, переходимо до точки $x_0 + \Delta x$. Зміна значення функції дорівнюватиме $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Означення 1.2. *Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо її приріст у цій точці – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta y = 0$. (Джерело: Ілченко В. В. Посібник з математичного аналізу, 2021, с. 24)*

Односторонні границі дозволяють розглядати поведінку функції з двох боків від вибраної точки.

Ліва одностороння границя функції в точці x_0 визначається як значення функції, коли x наближається до x_0 зліва (тобто $x < x_0$). Це позначається так: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$. Права одностороння границя функції в точці x_0 визначається як значення функції, коли x наближається до x_0 справа (тобто $x > x_0$) і це позначають так: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$.

Границя функції f існує тоді і тільки тоді, коли існують і співпадають між собою ліва і права односторонні границі цієї функції, і вони обидві дорівнюють значенню функції в точці x_0, тобто $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

Нижче наведемо ключові властивості неперервних функцій, які випливають безпосередньо з означення неперервності та властивостей границь.

Теорема 1.1. *Нехай функції f і g неперервні в точці x_0. Тоді функції $f \pm g$, $f \cdot g$ і, за умови $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ неперервні в цій точці.*

Теорема 1.2. *Нехай $y = (f \circ \varphi)$ – складена функція (композиція), тобто $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, причому функкія $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді складена функція $y = (f \circ \varphi)(x)$ неперервна в точці x_0.*

Наведемо кілька ключових властивостей функції, яка є неперервною на відрізку $[a, b]$. Тут під неперервністю на $[a, b]$, розуміємо, що функція неперервна в кожній точці відкритого інтервалу (a, b), а в точках a і b – відповідно справа й зліва.

Теорема 1.3 (*Перша теорема Вейєрштрасса*)**.** *Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція є обмеженою на цьому відрізку.*

Теорема 1.4 (*Друга теорема Вейєрштрасса*)**.** *Неперервна на відрізку $[a, b]$ функкія досягає своїх найбільшого та найменшого значень.*

Теорема 1.5 (*Теорема Больцано-Коші про корінь*)**.** *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.*

Ця теорема є наглядно очевидною. Справді, якщо точки A і B, які лежать у різних півплощинах відносно осі абсцис, сполучити неперервною кривою, то ця крива обов'язково перетне вісь абсцис.

Теорема 1.6 (*Теорема Больцано-Коші про проміжне значення функції*)**.** *Якщо функція f є неперервною на відрізку $[a, b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.*

Ця теорема, зокрема, допомагає знаходити область значень неперервної функції.

Нагадаємо означення та класифікацію точок розриву функції. Якщо в точці x_0 функція $f = f(x)$ не є неперервною, вона називається розривною в цій точці, а сама точка x_0 називається точкою розриву. Як було раніше сформульовано, функція буде неперервною в точці x_0, якщо існують скінченні односторонні границі і вони обидві дорівнюють значенню функції в точці x_0, тобто $f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0)$.

Отже, функція вважається розривною в точці x_0, якщо виконується одна з таких умов:

- обидві односторонні границі існують, але вони різні між собою;

- односторонні границі рівні, проте їхнє спільне значення не співпадає з $f(x_0)$;

- або хоча б одна з односторонніх границь не існує.

Означення 1.3. *Точка x_0 є точкою розриву функції f першого роду, якщо в цій точці існують обидві односторонні границі, але ці односторонні границі або не дорівнюють одна одній, тобто, $f(x_0-) \neq f(x_0+)$, або вони, будучи рівними, не співпадають зі значенням функції $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$.*

В першому випадку з точкою розриву пов'язують стрибок функції в цій точці $f(x_0+) - f(x_0-) \neq 0$. Якщо ж обидві односторонні границі співпадають, але відрізняються від значення $f(x_0)$, такий розрив називають усувним. Його можна позбутися, якщо перевизначити функцію в точці x_0 і задати значення $f(x_0)$, яке дорівнює спільному значенню односторонніх границь. Всі інші розриви належать до другого роду: це точки, у яких хоча б одна з односторонніх границь не існує або є нескінченною.

Розглянемо деякі приклади розривних функцій.

Функція $\mathrm{sign} x$, також називається функцією знаку. Вона визначає знак числа x і набуває значення -1, якщо x від'ємне, 0, якщо x дорівнює 0, і 1, якщо x додатне, тобто

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Ця функція має розрив в точці $x_0 = 0$. З'ясуємо характер цього розриву. Оскільки ліва границя дорівнює -1, права границя дорівнює $+1$, і ці дві границі не рівні між собою, то функція $\mathrm{sign} x$ в точці $x_0 = 0$ має розрив першого роду і стрибок функції в цій точці дорівнює 2.

Ще одним прикладом розривної функції є функція $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Довизначимо функцію $f(x)$ в точці $x_0 = 3$ довільним чином. В цій точці функція матиме розрив. Для визначення характеру цього розриву, обчислимо $\lim\limits_{x\to 3-} \frac{x+1}{x-3} = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 3+} \frac{x+1}{x-3} = +\infty$. Отже, функція при $x \to 3$ не має обох скінченних односторонніх границь. Тому $x_0 = 3$ є точкою розриву другого роду. Зауважимо, що на характер розриву не впливає яким саме чином ми довизначили функцію в точці $x_0 = 3$.

Легко навести приклад функції, яка є розривною в кожній цілій точці і неперервна у всіх інших точках. Одна з таких функцій є функцією цілої частини і позначається вона як $f(x) = [x]$. Легко бачити, що множина точок неперервності цієї функції складається з усіх дійсних чисел, які не є цілими, тобто множина $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Функція Діріхле є прикладом розривної в кожній точці функції. Вона набуває значення 1, якщо аргумент є раціональним числом, і 0, якщо аргумент є числом ірраціональним. Це визначення можна записати так:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Доведення основних властивостей цієї функції наведено у додатку.

Функція з останнього прикладу не є монотонною. Розривні монотонні функції мають свої особливості. Наведена нижче теорема стверджує, що у монотонних функцій не може бути точок розриву другого роду, а у внутрішніх точках не може бути усувних розривів.

Теорема 1.7 (*Теорема про точки розриву монотонної функції*)**.** *Нехай* *функція* f *монотонна на інтервалі* (a, b) *і* $x_0 \in (a, b)$. *Функція* f *є або неперервною в точці* x_0, *або в точці* x_0 *функція* f *має неусувний розрив першого роду.*

Доведення цієї теореми також наводиться в додатку.

Розділ 2

ДЕЯКІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Надалі нам знадобляться поняття відкритих множин та їх властивості. Зрозуміло, що будь-який інтервал є відкритою множиною і також відомо, що об'єднання будь-якого набору відкритих множин, зокрема інтервалів є множиною відкритою. Проте, можна гарантувати, що перетин лише скінченної кількості відкритих множин є множиною відкритою . Може виявитись, що перетин нескінченного набору відкритих множин не є відкритою множиною. Наприклад, перетин інтервалів $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ є множиною, яка складається з однієї точки $\{0\}$. За означенням, одноточкова множина не є відкритою.

Нагадаємо означення та деякі властивості замкнених множин. Множина називається замкненою, якщо вона містить всі свої граничні точки. Перетин будь-якого числа і об'єдання лише скінченного числа замкнених множин є замкненими множинами. Наприклад, одноточкова множина і відрізок є замкненими множинами.

Раніше відзначалося, що об'єднання нескінченного набору замкнених множин може виявитися незамкненим: $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}[-1+\frac{1}{n}; 1-\frac{1}{n}] = (-1; 1)$.

Зв'язок між замкненими і відкритими множинами встановлює наступне твердження.

Твердження 2.1. *Доповнення до відкритої множини замкнене і доповнення до замкненої множини відкрите.*

Існують множини, які є одночасно відкритими і замкненими. Це порожня множина і множина $\mathbb{R}$. Наступна теорема стверджує, що інших множин, які мають ці властивості, не існує.

Теорема 2.1. *Множина є одночасно і замкненою, і відкритою тоді і тільки тоді, коли вона є або порожньою, або є множиною всіх дійсних чисел.*

Доведення. Припустимо, що існує множина A, яка є одночасно відкритою і замкненою, але не є ані $\emptyset$, ані $\mathbb{R}$. Оскільки множина A – відкрита, тоді $\mathbb{R}\backslash A$ замкнена. Якщо ж A – замкнена, то $\mathbb{R}\backslash A$ – відкрита. Нехай $a_1 \in A$ і $b_1 \in \mathbb{R}\backslash A$ і для визначенності покладемо, що $a_1 < b_1$. Оберемо точку $c_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$ як середину відрізка $[a_1; b_1]$. Якщо $c_1 \in A$, то покладемо $a_2 = c_1$ і $b_2 = b_1$. Якщо ж $c_1 \in \mathbb{R}\backslash A$, то $a_2 = a_1$ і $b_2 = c_1$. В будь-якому випадку отримаємо, що $a_2 \in A$ і $b_2 \in \mathbb{R}\backslash A$, причому $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$. Цю конструкцію можна продовжити індуктивно. В результаті отримаємо послідовності точок $a_k \in A$ та $b_k \in \mathbb{R}\backslash A$. Зрозуміло, що A та $\mathbb{R}\backslash A$ розбивають $\mathbb{R}$. Оскільки $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \ldots$ і довжини цих відрізків прямують до 0 при $k \to \infty$. Тоді скористаємось лемою про вкладені відрізки, за якою існує єдиний $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

Оскільки множина A замкнена , то A містить усі свої граничні точки, тому $x \in A$. Проте множина також $\mathbb{R}\backslash A$ замкнена, як доповнення до відкритої множини, тому вона також має містити усі свої граничні точки, включаючи x. Тому ми отримали, що x належить до множин A та $\mathbb{R}\backslash A$ одночасно. Але ці множини не перетинаються. Отримана суперечність означає, що наше початкове припущення є хибним. □

Надалі нам знадобляться наступні характеристики множин.

Як відзначалося раніше, нескінченний перетин відкритих множин може виявитися не відкритим.

Означення 2.1. *Множина $H \subset \mathbb{R}$ називаеться множиною типу G_δ, якщо вона може бути представлена як зчисленний перетин відкритих множин.*

Наступна лема показує, що множину H типу G_δ можна представити у вигляді множин, які стягуються до H.

Лема 2.1. *Нехай H - множина типу G_δ і існують такі відкриті множини $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = H$.*

Доведення. Нехай H - множина типу G_δ, тоді її можна представити у вигляді перетину зчисленного набору відкритих множин G_n, тобто $H =$

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Означимо послідовність множин U_n наступним чином: $U_1 = G_1$, $U_2 = G_1 \cap G_2$, $U_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3$, і так далі. Маємо, що $U_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$.

Зауважимо, що кожна множина U_n є відкритою, оскільки вона є скінченним перетином відкритих множин. Крім того, $U_n \supseteq U_{n+1}$ для всіх n, оскільки $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} G_k = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k\right) \cap G_{n+1} = U_n \cap G_{n+1} \subset U_n$.

Доведемо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Для цього нам потрібно довести два твердження:

1) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

2) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \supset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Перше твердження є досить простим. Дійсно, оскільки $U_n \subset G_n$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.

Для доведення другого твердження оберемо точку $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Звідси випливає, що при будь-якому k, $x \in G_k$. Тоді зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{N}$ і отримаємо, що $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k = U_n$. Оскільки $n-$ довільне число, то будемо мати, що $x \in U_n$ при будь-якому n, тобто належить до $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$.

Таким чином, ми отримали послідовність відкритих множин U_n, які зтягуються до H: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = H$. □

Раніше ми зауважували на тому, що об'єднання нескінченного набору замкнених множин може виявитись не замкненим. Подібно до того, як зчисленні перетини відкритих множин утворюють клас множин типу G_δ , так само і зчисленні об'єднання замкнених множин утворюють клас множин типу F_σ.

Означення 2.2. *Множина $E \subset \mathbb{R}$ називається множиною типу F_σ, якщо її можна представити у вигляді зчисленного об'єднання замкнених множин.*

Лема 2.2. *Нехай E - множина типу F_σ і існують замкнені множини $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots$ такі, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$.*

Доведення. Нехай E - множина типу F_σ, тоді E можна представити у вигляді об'єднання зчисленного числа замкнених множин F_n : $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Означимо послідовність множин P_n наступним чином: $P_1 = F_1$, $P_2 = F_1 \cup F_2$, $P_3 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, і так далі. Таким чином, $P_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$.

Зауважимо, що кожна множина P_n є замкненою, так як вона є кінцевим об'єднанням замкнених множин. Крім того, $P_n \subseteq P_{n+1}$ для всіх n, оскільки $\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} F_k = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k\right) \cup F_{n+1} = P_n \cup F_{n+1} \supseteq P_n$.

Таким чином, ми отримали послідовність замкнених множин P_n, які розтягуються до E: $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = E$. $\square$

Зрозуміло, що кожна відкрита множина є множиною типу G_δ і кожна замкнена множина є множиною типу F_σ.

Нетривіальна множина не може бути одночасно і відкритою, і замкненою. Проте, може виявитись, що множина може мати типи F_σ і G_δ одночасно.

Напіввідрізок $[0; 1)$ не є ні відкритим, ні замкненим, але його можна представити як об'єднання замкнених множин: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [0; 1 - \frac{1}{n}]$ і як перетин відкритих множин: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}; 1\right)$. Тобто напіввідрізок є одночасно і множиною типу G_δ, і множиною типу F_σ.

Подібно до зв'язку між замкненими і відкритими множинами, між класами множин F_σ і G_δ також існує взаємозв'язок.

Лема 2.3. *Доповнення до множини типу F_σ є множиною типу G_δ, а доповнення до множини типу G_δ є множиною типу F_σ.*

Доведення. Нехай E - множина типу F_σ, тобто E можна представити у вигляді об'єднання зчисленного набору замкнених множин: $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Тоді доповнення до E - це множина $\mathbb{R} \setminus E$, яку можна записати як перетин зчисленного набору відкритих множин: $\mathbb{R} \setminus E = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus F_n)$. Зауважимо, що кожна множина $\mathbb{R} \setminus F_n$ є відкритою, оскільки F_n є замкненою, а доповнення до замкненої множини є відкритою множиною. Таким чином, ми отримали, що $\mathbb{R} \setminus E$ можна представити у вигляді перетину зчисленної кількості відкритих множин, тобто $\mathbb{R} \setminus E$ - множина типу G_δ.

Навпаки, нехай H - множина типу G_δ, тобто H можна представити у вигляді перетину зчисленного набору відкритих множин: $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Тоді доповнення до H - це множина $\mathbb{R} \setminus H$, яку можна записати як об'єднання зчисленного набору замкнених множин: $\mathbb{R} \setminus H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_n)$. Зауважимо, що кожна множина $\mathbb{R} \setminus G_n$ є замкненою, оскільки G_n є відкритою, а доповнення до відкритої множини є замкненою множиною. Таким чином, ми отримали, що $\mathbb{R} \setminus H$ можна представити як об'єднання зчисленного набору замкнених множин, тобто $\mathbb{R} \setminus H$ - множина типу F_σ. □

В доведеннях наступних теорем важливу роль відіграють властивості всюди щільних множин. Тож нагадаємо означення і основні властивості цих множин.

Означення 2.3. *Множина A називається всюди щільною, якщо будь-яка непорожня відкрита множина G має точки з A.*

Наступна теорема містить деякі властивості всюди щільних множин.

Теорема 2.2.

1) Множина раціональних точок $\mathbb{Q}$ є всюди щільною.

2) Нехай A - всюди щільна множина. Тоді множина B така, що $B \supset A$ також є всюди щільною множиною.

3) Якщо із всюди щільної множини прибрати одну точку, то отримана множина залишиться всюди щільною.

Доведення. 1) Доведення першого твердження можна знайти у [9].

2) Оскільки множина A є всюди щільною, тоді, за Означенням 2.3, будь-яка відкрита множина G містить точки з A. Тоді множина B така, що $B \supset A$ також містить ці точки. А тому B є всюди щільною множиною.

3) Припустимо, що A – всюди щільна множина і нехай $A' = A\backslash\{x_0\}$. Оберемо інтервал $I = (a,b)$, в якому є точки з множини A. Нам потрібно довести, що в цьому інтервалі також містяться точки із A'. Якщо в цьому інтервалі міститься точка, яка не співпадає з x_0, то ця точка також належить множині A'. Якщо ж точка множини A в інтервалі I співпала з x_0, то візьмемо інтервал (a, x_0), в якому також є точка множини A, яка не співпадає з x_0. Ця точка буде належити множині A'. Тоді A' також є всюди щільною множиною. □

Лема 2.4. *Нехай V - довільна, всюди щільна відкрита множина. Тоді для будь-якого інтервала (a, b) знайдеться такий невироджений відрізок $[\alpha; \beta]$, що $[\alpha; \beta] \subset (a, b) \cap V$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Оскільки множина V є всюди щільною, то існує деяка точка $c \in (a, b) \cap V = E$.

Оскільки V - відкрита множина, то точка c є внутрішньою в V, а тому міститься в цій множині разом з деяким околом $(c - 2\varepsilon; c + 2\varepsilon) \subset E$. Тоді знайдеться такий невироджений відрізок $[c - \varepsilon; c + \varepsilon] \subset (c - 2\varepsilon; c + 2\varepsilon) \subset E$. Можемо покласти $\alpha = c - \varepsilon$, $\beta =$ c $+ \varepsilon$ і тим самим завершується доведення леми. □

Лема 2.5. *Перетин зчисленного набору відкритих всюди щільних множин є всюди щільною множиною.*

Доведення. Нехай $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність відкритих всюди щільних підмножин $\mathbb{R}$. Потрібно показати, що

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$$

всюди щільна, тобто в будь-якому відкритому інтервалі I_0 знайдеться хоча б одна точка з B.

Нехай $I_0 = (a_0,b_0)$ — довільний непустий відкритий інтервал. Оскільки V_1 відкрита і всюди щільна множина, у I_0 існує непустий відкритий підінтервал $I_1 \subset I_0 \cap V_1$. Довжину I_1 оберемо такою, щоб вона була, наприклад, менша за 1.

Далі, оскільки V_2 теж відкрите і всюди щільне, у кожному непустому відкритому інтервалі міститься його підінтервал, що лежить у V_2. Отже, у I_1 можна знайти непустий відкритий підінтервал $I_2 \subset I_1 \cap V_2$, причому довжину I_2 вибираємо меншу за $\frac{1}{2}$.

Рекурсивно, нехай уже побудовано відкритий інтервал $I_n \subset I_{n-1} \cap V_n$ довжини менше ніж $\frac{1}{n}$. Тоді таке I_n непусте, бо V_n всюди щільне. Далі у I_n знайдемо непустий відкритий підінтервал $I_{n+1} \subset I_n \cap V_{n+1}$ довжини менше ніж $\frac{1}{n+1}$. Таким чином отримуємо вкладену послідовність відкритих інтервалів

$$I_0 \ \supset \ I_1 \ \supset \ I_2 \ \supset \ \ldots,$$

де кожен I_k непустий, $I_k \subset V_k$ і $|I_k| < \frac{1}{k}$.

Позначимо через $\overline{I_k}$ замикання інтервалу I_k. Оскільки довжини цих інтервалів прямують до нуля, за властивістю вкладених замкнутих відрізків існує єдина точка

$$x^* \ = \ \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{I_k}.$$

Ця точка x^* належить кожному $\overline{I_k}$, а тому й кожному I_k. Оскільки $I_k \subset V_k$, маємо $x^* \in V_k$ для всіх k. Таким чином

$$x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = B,$$

і одночасно $x^* \in I_0$. Оскільки I_0 був довільним відкритим інтервалом, це означає, що в будь-якому відкритому інтервалі міститься принаймні одна точка з B. Отже, B є всюди щільним у $\mathbb{R}$. □

Зауваження 2.1. *Перетин зчисленого набору відкритих всюди щільних множин є множиною всюди щільною, але не обов'язково відкритою. Наприклад, множина ірраціональних чисел. Оскільки в $\mathbb{R}$ доповнення до одноточкової множини є відкритим і всюди щільним, то множина $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ є зчисленим перетином відкритих всюди щільних множин. Але множина ірраціональних чисел не є відкритою, адже для будь-якої точки з $\mathbb{R}$ неможливо знайти інтервал, який складається лише з ірраціональних чисел.*

Пізніше буде встановлено й дещо іншу властивість множини $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Лема 2.6. *Перетин не більше ніж зчисленного набору відкритих всюди щільних множин типу G_δ є всюди щільною множиною типу G_δ.*

Доведення. Нехай $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовність відкритих множин типу G_δ. Тоді для будь-якої точки x з прямої і будь-якого $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти точку y в множині $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, яка лежить в ε-околі точки x.

Оскільки кожна множина U_n є всюди щільною, то для кожного n можна знайти точку y_n в множині U_n, яка лежить в $\frac{\varepsilon}{2^n}$-околі точки x. З цього випливає, що послідовність y_n збігається до x.

З іншого боку, оскільки множина U_n відкрита, для кожного n ми можемо знайти $\delta_n > 0$, таке що $(x - \delta_n, x + \delta_n) \subset U_n$. Оскільки y_n збігається до x, то для будь-якого $\delta > 0$, існує номер N, такий що для всіх $n \geq N$ ми маємо $y_n \in (x - \delta, x + \delta)$, тобто $y_n \in (x - \delta, x + \delta) \subset U_n$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує точка y в $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, така що $|x - y| < \varepsilon$, що доводить, що перетин множин типу G_δ є всюди щільним.

Отже, ми показали, що перетин будь-якого зчисленного набору відкритих всюди щільних множин типу G_δ на прямій є всюди щільною множиною типу G_δ. Це означає, що цей перетин не може бути порожнім і є всюди щільним.

□

Легко показати, що множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є множиною типу F_σ. Множина раціональних чисел є зчисленною і є об'єднанням одноточкових множин, а кожна одноточкова множина є замкненою. А кожна не більше ніж зчислена множина є множиною типу F_σ, оскільки вона є не більше ніж зчисленим об'єднанням одноточкових множин, а кожна одноточкова множина є замкненою.

Лема 2.7. *Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ не є множиною типу G_δ.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{k} V_k$, де кожна множина V_k є відкритою. Оскільки множина раціональних чисел є всюди щільною,згідно з властивістю 1 Теореми 2.2, то V_k також є всюди щільними.

Означимо множини W_k наступним чином: $W_k = V_k \setminus \{q_k\}$, де $\{q_k\}$ - послідовність раціональних чисел.

Згідно з властивістю 3 Теореми 2.2, W_k є всюди щільними відкритими множинами, то знайдемо такий інтервал (a_0, b_0), що $[a_0, b_0] \subseteq W_0$. Далі, за Лемою 2.4, існує $(a_1, b_1) \subseteq [a_1, b_1] \subset (a_0, b_0) \bigcap W_1$. Продовжимо далі і на k-ому кроці будемо мати $(a_{k+1}, b_{k+1}) \subseteq [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset (a_k, b_k) \bigcap W_{k+1}$. Нехай $J_k = [a_k; b_k] \subset W_k$ і $J = \bigcap\limits_k J_k$, причому $J_{k+1} \subset J_k$. Легко побачити, що $J \subset J_k \subset W_k$. Оскільки $\{J_k\}$ - послідовність вкладених відрізків, то їх перетин містить хоча б одну точку

$$c \in J \subset \bigcap_k W_k \subset \bigcap_k V_k = \mathbb{Q}$$

З одного боку ми представили множину раціональних чисел у вигляді перетину V_k. З іншого боку, маємо, що $J \subset \bigcap\limits_k W_k$ може містити лише ірраціональні точки. Отримали протиріччя, яке доводить лему. □

Вище було встановлено, що множина ірраціональних чисел є не відкритим перетином зчисленного набору відкритих всюди щільних множин.

Лема 2.8. *Множина ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є множиною типу G_δ і не є множиною типу F_σ.*

Доведення. За лемою 2.3, доповнення до множини F_σ є G_δ і навпаки. А оскільки множина раціональних чисел є множиною типу F_σ, то множина ірраціональних чисел, яка є доповненням до неї, є множиною типу G_δ. У попередній леммі було встановлено, що множина раціональних чисел не може бути множиною типу G_δ. Тому множина $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ е може бути множиною типу F_σ. □

Для того, щоб описати точку розриву, нам потрібен спосіб вимірювання цього розриву. Для монотонних функцій раніше для такої міри використовувався стрибок. Для немонотонних функцій використовується інший інструмент.

Для подальшого доведення основної теореми нам знадобиться поняття коливання функції.

Означення 2.4. *Нехай функцію f задано на невиродженому проміжку I. Означимо коливання f на I як величину* $\omega f(I) = \sup\limits_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|$.

Розглянемо як коливання пов'язане з неперервністю. Нехай функцію f визначено в околі точки x_0, і f неперервна в точці x_0. Тоді $\inf\limits_{\delta>0} \omega f((x_0-\delta; x_0+\delta)) = 0$. Щоб довести це, оберемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки f неперервна в точці x_0, то існує $\delta_0 > 0$, таке що $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x - x_0| < \delta_0$. Якщо $x_0 - \delta_0 < x_1 \leq x_2 < x_0 + \delta_0$, тоді $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ця рівність виконується для всіх $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0)$, тому $\sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_0 - \delta_0 < x_1 \leq x_2 < x_0 + \delta_0\} \leq \varepsilon$. З цього випливає, що $0 < \delta < \delta_0$, тоді $\omega f([x_0 - \delta; x_0 + \delta]) \leq \varepsilon$. Оскільки ε ми обрали довільним числом, твердження доведено.

Зворотне твердження також є вірним. Припустимо, що $\inf\limits_{\delta>0} \omega f((x_0 - \delta; x_0 + \delta)) = 0$ і оберемо довільне $\varepsilon > 0$. Оберемо $\delta > 0$ так, щоб $\omega f(x_0 - \delta; x_0 + \delta) < \varepsilon$. Тоді $\sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\} < \varepsilon$, тому $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. Це означає непрерервність функції f в точці x_0.

Підсумуємо все вищенаведене у вигляді теореми.

Теорема 2.3. *Нехай функцію f визначено на деякому інтервалі I і нехай $x_0 \in I$. Функція f буде неперервною в точці x_0 тоді і лише тоді, коли* $\inf\limits_{\delta>0} \omega f((x_0 - \delta; x_0 + \delta)) = 0$.

Означення 2.5. *Нехай функцію f означено в деякому околі точки x_0. Означимо коливання f в точці x_0 як величину* $\omega_f(x_0) = \inf\limits_{\delta>0} \omega f((x_0 - \delta; x_0 + \delta))$.

Теорема 2.3 стверджує, що функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\omega_f(x_0) = 0$.

Тепер подивимось, як поняття коливання пов'язане з множиною точок неперервності функції.

Лема 2.9. *Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $I \equiv [a,b]$. Тоді для дійсного числа $\gamma>0$ множина $\{x \in (a,b)$: $\omega(x) < \gamma\}$ є відкритою, а множина $\{x$: $\omega(x) \geq \gamma\}$ – замкненою.*

Доведення. Нехай множина $A = \{x : \omega_f(x) < \gamma\}$ і $x_0 \in A$. Знайдемо окіл U точки x_0 так, щоб $U \subset A$ і $\omega_f(x) < \gamma$ виконувалось для всіх $x \in U$.

Покладемо $\omega_f(x_0) = \alpha < \gamma$ і $\beta \in (\alpha, \gamma)$. Тоді знайдеться $\delta > 0$ таке, що при будь-яких $u, v \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) : |f(u) - f(v)| \leq \beta$.

Далі, нехай $U = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ і $\in U$. Так як U- відкрита множина, знайдеться таке $\delta_1 < \delta$, що $(x - \delta_1; x + \delta_1) \subset (x - \delta; x + \delta) \subset U$.

Тоді $\omega(x) \leq \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in (x - \delta_1; x + \delta_1)\} \leq \{|f(u) - f(v)| : u, v \in U\} \leq \beta < \gamma$.

Звідси випливає, що $x \in A$. Тоді множина $A = \{x : \omega_f(x) < \gamma\}$ - відкрита. Тоді її доповнення, множина {x: $\omega(x) \geq \gamma\}$, є замкненою. $\square$

Розділ 3

ТЕОРЕМА ПРО МНОЖИНУ ТОЧОК РОЗРИВУ ДОВІЛЬНОЇ ДІЙСНОЇ ФУНКЦІЇ

Теорема 3.1 (*про множину точок розриву довільної дійсної функції*). *Для того щоб множина B була множиною точок розриву деякої функції, необхідно і достатньо, щоб B була множиною типу F_σ.*

Доведення. Для доведення необхідності, задамо функцію f на деякому відрізку I і нехай D_f - множина точок розриву цієї функції. З минулих тверджень випливає, що $D_f = \{x : \omega_f(x) > 0\}$. Доведемо, що D_f є множиною типу F_σ, тобто є об'єднанням не більше ніж зчисленного набору замкнених множин.

Нехай для будь-якого натурального n множина B_n=$\{x : \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ і $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. За Лемою 2.9, кожна з множин B_n є замкненою, тому B є множиною типу F_σ.

Доведемо, що $D_f = B$. Якщо $x \in B$, то $\omega_f(x) \geq \frac{1}{n}$. Тоді знайдеться таке натуральне n, що $\omega_f(x) \geq \frac{1}{n} > 0$. Звідси випливає, що $B \subseteq D_f$.

Якщо ж $x \in D_f$, тоді $\omega_f(x)$>0 і для заданого n і натурального k маємо, що $\frac{1}{k} < \omega_f(x)$. Але $x \in B_k \subseteq \bigcup\limits_{n \geq 1} B_n$ і x - довільний елемент з D_f, тоді $D_f \subseteq \bigcup_{n\geq 1} B_n = B$.

Остаточно отримаємо, що $D_f = B$.

Для доведення другої частини теореми достатньо побудувати функцію, точки розриву якої утворюють довільну множину типу F_σ.

Нехай $B = B_1 \bigcup B_2 \bigcup B_3 \bigcup \ldots$ - довільна множина типу F_σ, причому $B_1, B_2, B_3, \ldots$ - замкнені, $B_n \subset B_{n+1}$ і $B_0 \equiv \emptyset$.

Означимо послідовність множин C_n, що не перетинаються наступним чином:

$$C_n = (B_n \backslash B_{n-1}) \backslash \operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \bigcup \operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \bigcap \mathbb{Q}$$

І тоді шукана функція має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, \text{якщо x} \in C_n \\ 0, \text{якщо x} \notin C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3 \bigcup \cdots . \end{cases} \tag{3.1}$$

Доведемо, що для будь-якої точки $c \in B$ функція f є розривною в цій точці. Розглянемо три випадки:

1) Якщо $c \in (B_n \backslash B_{n-1}) \backslash \operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1})$, то $f(c) = 2^{-n}$. Але точка c є граничною для деякої множини, на якій функція приймає значення, яке відрізняється від 2^{-n} хоча б на 2^{-n-1}.
2) Якщо $c \in \operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \backslash \mathbb{Q}$, то $f(c) = 2^{-n}$. Але c є граничною точкою для множини $\operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \backslash \mathbb{Q}$, де $f(c) = 0$.
3) Якщо $c \in \operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \backslash \mathbb{Q}$, то $f(c) = 0$. Але c є граничною точкою для множини $\operatorname{int}(B_n \backslash B_{n-1}) \bigcap \mathbb{Q}$, де $f(c) = 2^{-n}$.

   Доведемо, що при $c \notin B$ функція f неперервна в цій точці. Для заданого $\varepsilon > 0$, знайдемо такий номер N, що $2^{-N} < \varepsilon$. Оберемо окіл точки c, який не перетинається з множинами $B_1, B_2, B_3, \cdots B_N$. В цьому околі $f(c) \to 0$, що і означає неперервність функції f в точці c.

Отже, ми побудували функцію, точки розриву якої утворюють довільну множину типу F_σ. □

З данної теореми зокрема випливає наступний факт.

Наслідок 3.1. *Не існує функцій, неперервних в кожній раціональній точці і розривних в кожній ірраціональній точці.*

Розділ 4

ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖИНИ ТОЧОК НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ НЕПЕРЕРВНОЇ ФУНКЦІЇ

4.1 Від F_σ до $G_\delta \cup G_{\delta\sigma}$

У розділі 3 ми побачили: *будь-яка* множина типу F_σ може слугувати множиною точок розриву деякої довільної функції. В цьому розділі ми розглянемо випадок неперервної функції та охарактеризуємо множину точок розриву її похідної.

Означення 4.1. *Множина має тип $G_{\delta\sigma}$, якщо вона є об'єднанням зчисленної кількості G_δ-множин.*

Теорема 4.1. *(теорема Загорського). Нехай E є об'єднанням двох підмножин дійсної прямої: перша має тип G_δ, друга — тип $G_{\delta\sigma}$ і нульову міру. Тоді існує неперервна функція, похідна якої не існує в жодній точці множини E, проте існує в кожній точці її доповнення.*

Теорема Загорського є наслідком двох лем, наведених нижче. Ми сформулюємо їх через похідні Діні D^+f, D_+f, D^-f, D_-f.

Зокрема, верхня та нижня праві похідні визначаються формулами

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_+f(x) = \liminf_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Лема 4.1. *Нехай E_0 — множина типу G_δ на дійсній прямій. Тоді існує рівномірно неперервна функція, диференційовна всюди поза E_0, така, що в кожній точці $x \in E_0$ множина її похідних Діні містить значення $+\infty$ і $-\infty$.*

Лема 4.2. *Якщо E_0 є множиною типу G_δ на дійсній прямій, то існує рівномірно неперервна функція, диференційовна у всіх точках $\mathbb{R} \setminus E_0$, причому у кожній точці $x \in E_0$ множина похідних Діні функції містить значення $+\infty$ та $-\infty$.*

Лема 4.3. *Якщо E є множиною типу G_δ і має міру 0 на дійсній прямій, то існує неперервна функція f така, що*

(i) $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|$ *для всіх $x,h \in \mathbb{R}$;*

(ii) $f'(x)$ *існує, коли $x \notin E$;*

(iii) *якщо $x \in E$, то*

$$D^+f(x) - D_+f(x) \geq K \quad \textit{або} \quad D^-f(x) - D_-f(x) \geq K,$$

де $K > 0$ — стала, що не залежить від E.

Щоб побачити, як ці леми виводять теорему, нехай $E = \bigcup_{j\geq 0} E_j$, де кожне E_j має тип G_δ і, для $j \geq 1$, міру 0. Нехай f_0 — функція, що задовольняє властивостям леми 4.2, а для $j = 1,2,\ldots$ функція f_j задовольняє умовам леми 4.3 відносно E_j. Якщо $\alpha > 0$ вибрано досить малим, то

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j f_j(x)$$

— неперервна функція, множиною недиференційовності якої є саме E.

Цей доказ, по суті, не відрізняється від міркувань Загорського. Лема 4.2 еквівалентна його теоремам I та II [12,с. 493], а лема 4.3 — лемі III на с. 504 того ж джерела (хоч Загорський і не формулює там нерівності з сталою K окремо, вона випливає з доведення).

Поштовхом для цього доведення слугує класичний приклад Веєрштрасса [10,с. 29–31], [11,с. 97–100]— неперервної, але всюди недиференційовної функції.

Нехай, згідно з умовою, E_0 є перетином спадної послідовності відкритих множин $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$. Із міркувань простоти спершу припустимо, що E_0 не містить жодного інтервалу нескінченної довжини. Без втрати загальності далі вважатимемо, що кожна зв'язна компонента G_n є скінченним інтервалом (a_{nk}, b_{nk}). На доповненні G_n покладемо $g_n(x) = 0$, а на самому інтервалі (a_{nk}, b_{nk}) визначимо

$$g_n(x) = c_{nk}\,(x - a_{nk})^2(x - b_{nk})^2 \cos\frac{d_{nk}}{(x - a_{nk})(x - b_{nk})},$$

де $c_{nk} = 4^{-n}\min\bigl\{1, (b_{nk} - a_{nk})^{-4}\bigr\}$, а d_{nk} — додатня стала.

Оскільки

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{a+b-2x}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

то, наближаючись до кінців інтервалу (a_{nk},b_{nk}), форма «хвиль» на графіку g_n стабілізується. Відношення висоти хвилі до її довжини наближено дорівнює $\dfrac{(b_{nk} - a_{nk})\,c_{nk}d_{nk}}{2\pi}$.

Нехай тепер

$$f(x) = \sum_n g_n(x).$$

Завдяки вибору коефіцієнтів c_{nk} «хвилі» функцій $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots$ не перекривають хвиль g_n. Якщо ж константи d_{nk} узяти достатньо великими, то кожен окіл точки $x_0 \in \bigcap_n G_n$ містить точки $x_1 < x_0 < x_2$, для яких різницеві відношення

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{та} \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

можна зробити як завгодно великими та і протилежними за знаком. Отже, f недиференційовна у жодній точці множини E. З іншого боку, кожна g_n є всюди диференційовною, і простий аргумент показує, що f диференційовна всюди поза E.

Припустимо, що E містить нескінченний інтервал; скажімо, найбільший такий інтервал праворуч — це (a,∞) чи $[a,\infty)$. Тоді для $a < x < \infty$ замінюємо попереднє означення, поклавши

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \displaystyle\sum_{n\ge 0} 4^{-n} \cos 4^{2n}/(x-a), & \text{якщо } a \notin E, \\ \sqrt{x-a} \displaystyle\sum_{n\ge 0} 4^{-n} \cos 4^{2n}/(x-a), & \text{якщо } a \in E. \end{cases}$$

Така функція, як і раніше, має потрібну властивість недиференційовності на E. Щоб забезпечити рівномірну неперервність f, у кожному з альтернативних виразів додатково замінюємо $x-a$ на $(x-a)\big/\big[1+(x-a)^2\big]$.

Доведення Леми 4.3.

Нехай $E=\bigcap_n G_n$, де $G_n \supset G_{n+1}$ — спадна послідовність відкритих множин. Позначимо через $\{(a_{nk}, b_{nk})\}$ усі зв'язні компоненти G_n і визначимо

$$h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a_{1k})^2(x-b_{1k})^2}{(b_{1k}-a_{1k})^3}, & a_{1k} < x < b_{1k}, \\ 0, & x \notin E_1. \end{cases}$$

Над кожною компонентою множини E_1 графік h_1 утворює опуклий «горб». Усі такі горби мають однаковий профіль (див. рис.4.2; вертикальний масштаб тут збільшено).

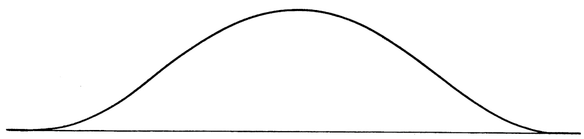

Рис. 4.1

На *другому етапі* ми побудуємо аналогічний горб над кожною компонентною інтервалу множини E_2. Щоб при цьому забезпечити обмеженість різницевих відношень, спершу модифікуємо горби першого етапу так, аби кожний новий горб спирався знову на горизонтальний відрізок.

Для цього покриваємо кожну компоненту $(a_{2k}, b_{2k}) \subset G_2$ симетрично відрізком I_{2k} довжини $2\,(b_{2k}-a_{2k})$. При цьому відрізки I_{2k} можуть перетинатися. Для кожного k вибираємо неперервну функцію φ_{2k}, яка дорівнює 0 на (a_{2k}, b_{2k}), має значення 1 поза I_{2k}, а на двох кінцевих частинах $I_{2k} \setminus (a_{2k},b_{2k})$ змінюється лінійно.

Далі покладемо

$$\varphi_2(x) = \inf_k \varphi_{2k}(x), \qquad h_1^*(x) = \int_0^x \varphi_2(t)\, h_1'(t)\, dt.$$

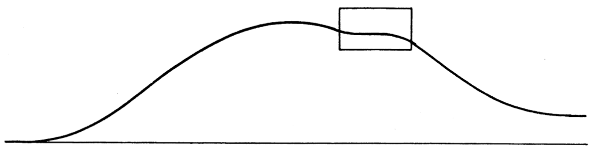

Рис. 4.2

Функція h_1^* є диференційовною; її графік відрізняється від графіка h_1 лише тим, що над G_2 він вирівняний у горизонтальний відрізок (усі кути згладжено), тобто горби трохи сплющені (див. рис.4.2). Це сплющення може зсунути кінцеві точки деяких горбів угору або вниз, тому h_1^* уже не обов'язково є сталим на доповненні множини E_1. Однак, оскільки E має міру 0, ми можемо вибрати міру E_2 наскільки завгодно малою, — і, відповідно, спотворення буде як завгодно малим.

На кожній компоненті (a_{2k}, b_{2k}) множини G_2 покладемо

$$\eta_2(x) = \frac{(x-a_{2k})^2(x-b_{2k})^2}{(b_{2k}-a_{2k})^3}, \qquad a_{2k} < x < b_{2k},$$

а поза E_2 визначимо $\eta_2(x) = 0$. Далі ставимо

$$h_2(x) = h_1^*(x) + \eta_2(x) \quad \text{(див. рис.4.3)},$$

вирівнюємо графік h_2 на множині G_3, позначаємо нову функцію через h_2^*, піднімаємо чергові горби над G_3 і продовжуємо процес.

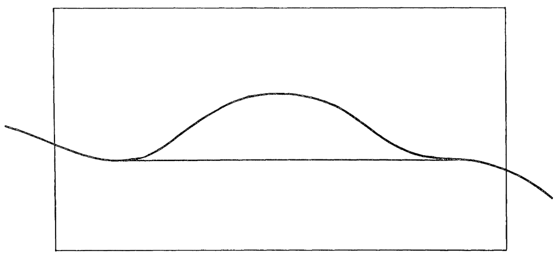

Рис. 4.3

Нехай
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$
Якщо $x_0 \notin E$, то точка $\bigl(x_0,f(x_0)\bigr)$ лежить на горбі n-го етапу для деякого $n = 1,2,\ldots$. Для кожного такого n відповідний горб має дві точки ліворуч або дві точки праворуч від x_0, так що різницеві частки
$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \text{та} \quad \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$
відрізняються щонайменше на певну додатню універсальну сталу K. Отже, f задовільняє умовам (i) та (iii) Леми 4.3.

Припустимо, наприклад, що $x_0 \notin G_1$, але x_0 є граничною точкою послідовності компонент G_1. Тоді серед відрізків, що з'єднують $(x_0,0)$ з верхівками відповідних горбів, може виявитися нескінченно багато таких, нахил яких перевищує деяке число $c > 0$. Тоді одна з похідних Діні функції f у точці x_0 відрізняється від 0, і, оскільки інша похідна Діні дорівнює 0, звичайна похідна $f'(x_0)$ не існує.

Зробимо невелику поправку і усунемо цю трудність. З кожної компоненти (a_{nk}, b_{nk}) множини G_n вилучимо послідовність точок, що має лише a_{nk} і b_{nk} як граничні. Оскільки $\lambda(E) = 0$, можемо вибрати цю послідовність так, щоб жодна з її точок не належала E і щоб решта підінтервалів були як завгодно короткими. Замість одного горба над (a_{nk},b_{nk}) будуємо окремий горб над кожним підінтервалом. Якщо підінтервали досить малі, то для довільної точки $x_0 \notin (a_{nk},b_{nk})$ та будь-якого $x \in (a_{nk},b_{nk})$ маємо оцінку
$$\bigl|\eta_n(x) - \eta_n(x_0)\bigr| < 2^{-n}\,(x-x_0)^2.$$

Зрозуміло, що замість G_2 слід брати переріз G_2 із тією частиною G_1, що лишилася після вилучення вибраних точкових послідовностей; аналогічні зміни треба внести і в $G_3,G_4,\ldots$

Оскільки ця модифікація не впливає на властивості (i) та (iii) функції f і водночас гарантує її диференційовність поза множиною E, Лему 4.3 доведено.

Розділ 5

ВИСНОВКИ

У процесі виконання роботи були досліджені деякі властивості множин та функцій однієї змінної.

Під час визначення множини точок розриву функції однієї змінної виникає цікавий факт, що не існує функцій, які були б неперервними в кожній раціональній точці та розривними в кожній ірраціональній точці. З іншого боку, відповідно до критерію Загорського, показано, що множина недиференційовності неперервної функції може бути саме обєднанням G_δ-множини та $G_{\delta\sigma}$-множини нульової міри, і, що важливо, будь-яка така пара множин дійсно реалізується.

Загалом, вивчення множини точок розриву функції допомагає нам краще розуміти її структуру та властивості. Аналіз цих точок дозволяє з'ясувати, де можуть виникати проблеми з неперервністю та як це впливає на поведінку функції.

ДОДАТОК

Доведення розривності функції Діріхле. Нехай $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (а отже $D(x_0) = 0$). Припустимо протилежне, що D є неперервною в x_0. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ із $|x - x_0| < \delta$ виконується

$$|D(x) - D(x_0)| < \varepsilon.$$

Але множина $\mathbb{Q}$ щільна в $\mathbb{R}$, отже в будь–якому інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ знайдеться раціональне число q. Для цього q маємо $D(q) = 1$, тобто

$$|D(q) - D(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geq 1 \not< \tfrac{1}{2},$$

що суперечить припущенню $|D(x) - D(x_0)| < \frac{1}{2}$ для всіх x з $|x - x_0| < \delta$. Отже, немає жодного $\delta > 0$, яке б забезпечило $|D(x) - D(x_0)| < \varepsilon$. Це доводить, що D розривна в x_0.

Функція Діріхле також не є неперервною в точках, де вона приймає значення 1. Для доведення розривності функції Діріхле розглянемо точку $x_0 \in \mathbb{R}$ і дві послідовності x_n і y_n такі, що $x_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \notin \mathbb{Q}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Такі послідовності існують, оскільки множини $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ обидві щільні в $\mathbb{R}$.

Так як $D(x_n) = 1$ для всіх n, а $D(y_n) = 0$ для всіх n, то $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} D(y_n) = 0$. Отже, якщо функція $D(x)$ неперервна в точці x_0, то має виконуватись наступне: $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = D(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} D(y_n)$.

Однак це суперечить тому, що $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} D(y_n) = 0$. А отже, функція $D(x)$ є розривною в точці x_0.

Таким чином, функція Діріхле розривна в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Доведення розривності функції Рімана. Доведемо, що функція $R(x)$ розривна в кожній раціональній точці.

Нехай x_0 - деяке раціональне число. Тоді $R(x_0) \neq 0$. Оскільки будь-якому околі раціонального числа x_0 знайдеться ірраціональне число, то для кожного $n = 1, 2, 3, \cdots$ знайдеться ірраціональне число x_n таке, що $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Тоді послідовність $\{x_n\}$ збігається до x_0. Але послідовність

$\{R(x_n)\}$ не збігається до $R(x_0)$, тому що $R(x_n) = 0$, а $R(x_0) \neq 0$. Тоді в силу означення границі функції по Гейне, границя функції $R(x)$ при $x \to x_0$ не дорівнює $R(x_0)$. Звідси випливає, що функція $R(x)$ розривна в точці x_0.

Доведемо, що функція $R(x)$ неперервна в кожній ірраціональній точці. Нехай x_0 - деяке ірраціональне число. Тоді $R(x_0) = 0$. Потрібно довести, що для будь-якого ε існує δ таке, що для будь-якого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ виконується $|R(x) - R(x_0)| < \varepsilon$.

Розглянемо довільне ε і нехай $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{[\frac{1}{\varepsilon}]}, \}$, де δ_1 - відстань від точки x_0 до найближчого цілого числа, δ_2 - відстань від точки x_0 до найближчого цілого числа, що має вигляд $\frac{m}{2}$, де $m \in \mathbb{Z}$, δ_3 - відстань від точки x_0 до найближчого цілого числа, що має вигляд $\frac{m}{3}$, де $m \in \mathbb{Z}$ і так далі. Отримали, що в околі точки x_0 немає жодного раціонального числа виду $\frac{m}{n}$, де дріб $\frac{m}{n}$ нескоротний, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і $n \leq [\frac{1}{\varepsilon}] \leq \frac{1}{\varepsilon}$. З цього випливає, що в $\delta-$околі точки x_0 існують раціональні числа тільки виду $x = \frac{m}{n}$, де $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В цих точках значення функції $R(x)$ дорівнює $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а значення функції $R(x_0)$ дорівнює 0. А тому нерівність $|R(x) - R(x_0)| < \varepsilon$ виконується для всіх раціональних x з $\delta-$околу точки x_0. Для ірраціональних чисел воно також виконується, оскільки в цьому випадку $R(x) = R(x_0) = 0$. Тому функція $R(x)$ є неперервною в точці x_0. $\square$

Доведення першої теореми Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ не обмежена на відрізку $[a, b]$, то можна вибрати послідовність точок x_n на цьому відрізку таку, що $|f(x_n)| > n$ для всіх n. Така послідовність є обмеженою на відрізку $[a, b]$, і за теоремою Больцано-Вейєрштрасса з неї можна вибрати збіжну підпослідовність x_{n_k}, яка сходиться до точки c на відрізку $[a, b]$.

Але тоді з неперервності функції випливає, що $f(x_{n_k})$ сходиться до $f(c)$ при $k \to \infty$, що суперечить тому, що $|f(x_{n_k})| > n_k$ для всіх k.

Таким чином, ми отримуємо, що функція $f(x)$ має бути обмежена на відрізку $[a, b]$, і теорему Вейєрштрасса доведено. $\square$

Доведення другої теореми Вейєрштрасса. Нехай $f(x)$ - неперервна функція на відрізку $[a, b]$. Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - f(a)$.

Тоді $g(x)$ також є неперервною функцією на відрізку [a, b], і $g(a) = 0$.

Оскільки $g(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то за теоремою вона досягає свого максимального значення M і мінімального значення m на цьому відрізку.

Розглянемо два випадки:

1) Якщо $M \leq 0$, то $f(x) \leq f(a)$ для будь-якого x на відрізку $[a, b]$, і функція $f(x)$ досягає свого максимального і мінімального значень на кінцях відрізка.

2) Якщо $M > 0$, то розглянемо точку x_0 на відрізку $[a, b]$, у якій $g(x_0) = M$. Тоді $f(x_0) = g(x_0) + f(a) = M + f(a)$ є максимальним значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Так само можна показати, що функція $f(x)$ також має на відрізку $[a, b]$ точку, в якій вона досягає свого мінімального значення.

Таким чином, ми довели другу теорему Вейєрштрасса. □

Доведення теореми Больцано-Коші про корінь. Припустимо, що такої точки $c \in (a; b)$ не існує, тобто $f(c) \neq 0$ для всіх $c \in (a; b)$.

Нехай c_0 – середина відрізка $[a; b]$.

Оскільки числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків, то на кінцях одного з відрізків $[a; c_0]$ або $[c_0; b]$ функція f набуває значень різних знаків.

Позначимо цей відрізок $[a_1; b]$.

Нехай c_1 — середина відрізка $[a_1; b_1]$. Тоді на кінцях одного з відрізків $[a_1; c_1]$ і $[c_1; b_1]$ функція f набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_2; b_2]$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків $[a; b] \subset [a_1; b_1] \subset [a_2; b_2] \subset \cdots$.

За принципом вкладених відрізків існує точка c, яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim\limits_{n \to \infty} b_n - a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$.

Отже, кожна з послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ прямує до числа c. Нехай x_n є точкою послідовностей $\{a_n\}$ або $\{b_n\}$, для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність $\{x_n\}$ також прямує до числа c. Оскільки функція f неперервна в точці c, то $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$.

Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$. $\square$

Доведення теореми Больцано-Коші про проміжне значення.

Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$. Нехай C – довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C.

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

Маємо: $g(a) = f(a) - C < 0$; $g(b) = m - C > 0$.

Отже, згідно з першою теоремою Больцано –Коші про корінь, існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$. $\square$

Доведення теореми про точки розриву монотонної функції.
Нехай функція f зростає на відрізку $[a, b]$ і $x_0 \in (a, b)$ - одна з її внутрішніх точок. Тоді при $x_0 > x$, $f(x_0) \geq f(x)$. А оскільки f є монотонною, то має місце нерівність: $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$. При $x > x_0$, $f(x) \geq f(x_0)$ і через монотонність функції f, $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$. Маємо: $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$. Якщо всі знаки є нестрогими, то функція f є неперервною в точці x_0. Якщо ж хоча б один знак є строгим, то у точці x_0 функція f має стрибок. Легко зрозуміти, що в цій точці усувний розрив неможливий. $\square$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis. Second Edition. John Wiley and Sons, New York, 1964.

[2] Goldberg R. R. Methods of real analysis. – Oxford and IBH Publishing, 1970.

[3] Thomson B. S., Bruckner J. B., Bruckner A. M. Elementary real analysis. – ClassicalRealAnalysis. com, 2008. – T. 1.

[4] Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементарні факти теорії множин у шкільному курсі математики //Математика в школі. – 2011. – №. 3. – С. 12-23.

[5] Литвин О. М., Першина Ю. І., Пасічник В. О. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної. – 2015.

[6] Ясницька Н. М. и др. Математичний аналіз. Модуль 2. Границя і неперервність функції однієї змінної. – 2014.

[7] Власенко В. Ф., Розуменко А. М. Розривні функції однієї дійсної змінної. – 2012.

[8] Очан Ю. С. Збірник завдань та вправ з математичного аналізу //М.: Просвітництво. – 1981.

[9] Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Ч. 1 //К.: Либідь.-1993. - С. 23

[10] P. du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen*, J. Reine Angew. Math., 70 (1875), 21–37.

[11] K. Weierstrass, *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, Julius Springer, Berlin, 1886.

[12] Z. Zahorski, *Punktmengen, in welchen eine stetige Funktion nicht differenzierbar ist*, Mat. Sb. N. S., 9 (51) (1941), 487–510.

[13] Ілченко В. В. Посібник з математичного аналізу. – Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, механіко-математичний факультет, 2021. 16 – 20 с.