Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 28–35

УДК 517.548

О. В. Онищук
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА В СТЕПЕННОЙ РЯД

Рекомендовано до друку науковим семінаром
з математичних проблем механіки і математичної фізики ОНУ 09.11.2001 р.

Для голоморфного вектора (Н-регулярної функції) одержано розвинення в ряд Тейлора. Всі члени ряду є добутками поліноміальних голоморфних векторів і констант (кватерніонів).

Для голоморфного вектора (Н-регулярной функции) получены разложение в ряд Тейлора. Все члены ряда – произведения полиномиальных голоморфных векторов и констант (кватернионов).

The Taylor series expansion for a holomorphic vector (H-regular function) is obtained. All terms of the series are the products of a polynomial holomorphic vectors and constants (quaternions).

Введение. Теория голоморфных (дифференцируемых, регулярных, аналитических) комплекснозначных функций $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексной переменной $z=x+iy$ (то есть отображений $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ либо $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$) является одним из наиболее развитых разделов математического анализа.

В основе этой теории лежит подчинение функций u,v условиям Коши – Римана

$$D_2 f=0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{где } D_2=2\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y} \qquad (0.1)$$

в некоторой области $G\subset\mathbb{C}$ (см., например, [1, с. 34–35]), а к числу наиболее важных результатов относятся (см. рис. 1):

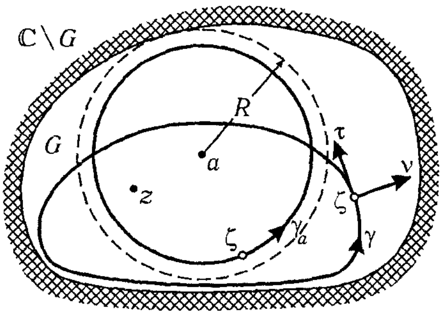

Рис. 1

а) теорема Коши [1, с. 99]:

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=0; \qquad (0.2)$$

б) интегральная формула Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}f(\zeta)d\zeta \qquad (0.3)$$

при z внутри γ [1, с. 104];

в) разложение в степенной ряд для $z\in U=\{|z-a|<R\}\subset G$ [1, с. 110]:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad c_n=c_n(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_a}(\zeta-a)^{-n-1}f(\zeta)d\zeta. \qquad (0.4)$$

Получение аналогичных результатов для случая отображений $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ наталкивается на принципиальные трудности, связанные с невозможностью построения трехмерного аналога комплексных чисел [2, 3], а в случае отображений $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ дифференцируемыми (моногенными) оказываются только линейные функции [4].

Совершенно иная ситуация имеет место в случае отображений $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, для которых к настоящему времени удалось доказать аналоги многих теорем комплексного анализа, а также найдены многочисленные приложения в математической физике.

Основы этой теории изложены в [5, глава VIII, § 4], где использовалась матричная форма записи. В монографии [6] основы теории и более новые результаты изложены с использованием кватернионной формы записи.

Для того чтобы аналогия формул из [6] с формулами (0.1)–(0.3) стала более очевидной, выполним некоторые преобразования. Пусть $\tau=\tau(\zeta)$ и $\nu=\nu(\zeta)$ – комплексно-значные функции, задающие направление касательной $\vec{\tau}$ и внешней нормали $\vec{\nu}$ к контуру γ в точке $\zeta\in\gamma$ (см. рис. 1). Тогда $d\zeta=\tau(\zeta)dl=i\nu(\zeta)dl$ и интеграл в (0.2) можно записать в виде криволинейного интеграла первого типа:

$$\int_\gamma \nu(\zeta)\, f(\zeta)\, dl=0\,, \tag{0.5}$$

а формула (0.3) принимает вид

$$f(z)=\int_\gamma \mathscr{K}(\zeta-z)\,\nu(\zeta)\, f(\zeta)\, dl \quad \text{при } z \text{ внутри } \gamma\,, \tag{0.6}$$

$$\mathscr{K}(z)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{z}=\overline{D}_2\,\mathscr{E}_2(z),\ \mathscr{E}_2(z)=\frac{1}{2\pi}\ln|z|=\frac{1}{4\pi}\ln(z\overline{z}),\ \overline{D}_2=2\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y},$$

$\mathscr{K}(z)$ – фундаментальное решение оператора D_2 в условиях (0.1),

$\mathscr{E}_2(z)=\mathscr{E}_2(\vec{x})$ – фундаментальное решение оператора Лапласа $\Delta_2=D_2\,\overline{D}_2$ в $\mathbb{R}^2$ (см. [7, глава III, § 11, пункты 8 и 10]).

Для записи аналогов соотношений (0.1), (0.5), (0.6) введем следующие обозначения: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\ldots\in\mathbb{H}=\mathbb{R}^4$ – кватернионы, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ldots\in\mathbb{R}^3$ – векторы, $a,b,c,\ldots\in\mathbb{R}$ – скаляры, $\mathbf{e}_0=(1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_1=(0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,0,1)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Тогда (см. [3,6])

$$\mathbf{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)=\sum\nolimits_{i=0}^{3}a_i\mathbf{e}_i=a+\vec{a},\ \ \overline{\mathbf{a}}=\operatorname{conj}(\mathbf{a})=a-\vec{a}\,, \tag{0.7}$$

где $a=a_0\,\mathbf{e}_0=\operatorname{Sc}\mathbf{a}=\operatorname{Re}\mathbf{a}$ – скалярная (вещественная) часть кватерниона,

$\vec{a}=\sum\nolimits_{i=1}^{3}a_i\,\mathbf{e}_i=\operatorname{Ve}\mathbf{a}=\operatorname{Im}\mathbf{a}$ – векторная (мнимая) часть кватерниона.

Умножение кватернионов выполняется по правилу

$$\mathbf{a}\Diamond\mathbf{b}=\left(a_0b_0-\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\mathbf{e}_0+a_0\vec{b}+\vec{a}b_0+\vec{a}\times\vec{b}\,, \tag{0.8}$$

где $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ – соответственно скалярное и векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. В частности, $\mathbf{a}\Diamond\overline{\mathbf{a}}=a_0^2+|\vec{a}|^2=|\mathbf{a}|^2$. Следует подчеркнуть, что векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ и произведение кватернионов $\mathbf{a}\Diamond\mathbf{b}$ в общем случае *некоммутативны*.

Ниже будет использоваться также следующая форма записи формул типа (0.7),(0.8):

$$\mathbf{a}=\left\|\begin{matrix}\vec{a}\\ \hline a\end{matrix}\right\|,\ \ \mathbf{a}\Diamond\mathbf{b}=\left\|\begin{matrix}a_0\vec{b}+\vec{a}b_0+\vec{a}\times\vec{b}\\ \hline a_0b_0-\vec{a}\cdot\vec{b}\end{matrix}\right\|. \tag{0.9}$$

Замечание. Использование полужирного прямого шрифта для обозначения кватернионов, названий функций $\operatorname{Sc}\mathbf{a}$, $\operatorname{Ve}\mathbf{a}$, значка $\Diamond$ для обозначения произведения кватернионов и формы (0.9) не являются общепринятыми, однако в некоторых случаях позволяют повысить наглядность записи формул.

Рассмотрим функции $\mathbf{u}(\vec{x})$, определенные в $V\subset\mathbb{R}^3$ и принимающие значения в $\mathbb{H}$. Такие *кватернионозначные* (H-значные) функции будем записывать в виде

$$\mathbf{u}(\vec{x})=\sum\nolimits_{i=0}^{3}u_i(\vec{x})\mathbf{e}_i=u(\vec{x})+\vec{u}(\vec{x})=\left\|\begin{matrix}\vec{u}(\vec{x})\\ \hline u(\vec{x})\end{matrix}\right\|,\ \ \vec{x}=\sum\nolimits_{i=1}^{3}x_i\,\mathbf{e}_i\in V\,, \tag{0.10}$$

где функции $u_i(\vec{x})$ – вещественнозначные.

Следуя [5], для упрощения рассуждений предположим, что область V ограничена *кусочно-гладкой* поверхностью S, а функция $\mathbf{u}(\vec{x}) \in C^1(\overline{V})$, то есть функции $u_i(\vec{x})$ *непрерывно дифференцируемы* в $\overline{V}$. При сделанных предположениях имеет место *кватернионный аналог* формулы Остроградского – Гаусса:

$$\iiint_V \vec{D} \Diamond \mathbf{u}(\vec{\xi})\, dV_\xi = \iint_S \vec{\nu}(\vec{\xi}) \Diamond \mathbf{u}(\vec{\xi})\, dS_\xi, \tag{0.11}$$

где $\vec{D}$ – аналог оператора D_2 в условиях (0.1):

$$\vec{D} = \left\| \frac{\nabla}{0} \right\|, \ \nabla = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \partial_k, \ \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{0.12}$$

$$\vec{D} \Diamond \mathbf{u}(\vec{x}) = \left\| \frac{\nabla}{0} \right\| \Diamond \left\| \frac{\vec{u}}{u} \right\| = \left\| \frac{\nabla u + \nabla \times \vec{u}}{-\nabla \cdot \vec{u}} \right\| = \left\| \frac{\operatorname{grad} u + \operatorname{rot} \vec{u}}{-\operatorname{div} \vec{u}} \right\|,$$

$\vec{\nu}(\vec{\xi})$ – внешняя нормаль к S в точке $\vec{\xi}$ (см. [5, с. 220; 6, с. 27]).

В основе т е о р и и г о л о м о р ф н ы х в е к т о р о в лежит следующее

Определение 1 [5, 6]. Кватернионозначная функция $\mathbf{u}(\vec{x})$ называется *вектором, голоморфным в области* V, если $\mathbf{u}(\vec{x}) \in C^1(\overline{V})$ и удовлетворяет *условиям Моисила – Теодореску*

$$\vec{D} \Diamond \mathbf{u}(\vec{x}) = 0 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{grad} u + \operatorname{rot} \vec{u} = 0, \ \operatorname{div} \vec{u} = 0, \ \ \vec{x} \in V. \tag{0.13}$$

Следуя [1, с. 38], *множество* векторов, голоморфных в V, будем обозначать $\mathscr{O}(V)$.

Для $\mathbf{u}(\vec{x}) \in \mathscr{O}(V)$ в [5, 6] доказаны теорема Коши

$$\iint_S \vec{\nu}(\vec{\xi}) \Diamond \mathbf{u}(\vec{\xi})\, dS_\xi = 0 \tag{0.14}$$

и интегральная формула Коши

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \iint_S \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) \Diamond \vec{\nu}(\vec{\xi}) \Diamond \mathbf{u}(\vec{\xi})\, dS_\xi \quad \text{при } \vec{x} \in V, \tag{0.15}$$

$$\vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\xi}}{\left|\vec{\xi}\right|^3} = \left(-\vec{D}_\xi\right) \Diamond \mathscr{E}_3(\vec{\xi}), \ \ \mathscr{E}_3(\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\left|\vec{\xi}\right|},$$

$\vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi})$ – фундаментальное решение оператора $\vec{D}$,

$\mathscr{E}_3(\vec{\xi})$ – фундаментальное решение оператора Лапласа $\Delta_3 = \vec{D} \Diamond \left(-\vec{D}\right)$ в $\mathbb{R}^3$ (см. [7, глава III, § 11, пункт 8]). При этом $\vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) = \left(-\vec{D}_\xi\right) \Diamond \mathscr{E}_3(\vec{\xi} - \vec{x}) = \vec{D}_x \Diamond \mathscr{E}_3(\vec{\xi} - \vec{x})$.

Перепишем ряд (0.4) в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a,\theta) |z-a|^n, \ \ \theta = \theta(z) = (z-a)/|z-a|, \ \ f_n(a,\theta) = c_n(a)\theta^n. \tag{0.16}$$

При такой форме записи становится очевидной аналогия между (0.4) и рядом Тейлора, полученным в [6, с. 33]:

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(\vec{a}, \vec{\theta}) |\vec{x} - \vec{a}|^n, \ \ \vec{\theta} = \vec{\theta}(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{a})/|\vec{x} - \vec{a}|. \tag{0.17}$$

Преобразование ряда (0.4) в ряд (0.16) не влияет на доказательство некоторых теорем комплексного анализа. Точно также на основе ряда (0.17) доказываются аналогичные теоремы теории голоморфных векторов. Отличительной чертой ряда (0.4) является разложение по стандартным (полиномиальным) голоморфным функциям $(z-a)^n$, умножаемым на постоянные (не зависящие от z) коэффициенты.

Целью проводимых ниже построений является получение аналога ряда (0.4), членами которого будут стандартные (полиномиальные) голоморфные векторы, умножаемые на постоянные (не зависящие от $\vec{x}$) коэффициенты.

1. Новый вариант обобщенного правила Лейбница. В монографии [6] для функций $\mathbf{m}(\vec{x}), \mathbf{u}(\vec{x}) \in C^1(V)$ доказано правило дифференцирования произведения:

$$\mathfrak{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) = \left[\left(\vec{D} \Diamond \mathbf{m}\right) + 2\,\mathrm{Sc}\left(\mathbf{m} \Diamond \vec{D}\right)\right] \Diamond \mathbf{u} + \overline{\mathbf{m}} \Diamond \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{u}\right),\ \overline{\mathbf{m}} = m - \vec{m}, \tag{1.1}$$

где $\mathfrak{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) \equiv \vec{D} \Diamond (\mathbf{m} \Diamond \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{3} \partial_k (\mathbf{e}_k \Diamond \mathbf{m} \Diamond \mathbf{u})$, $\mathrm{Sc}\left(\mathbf{m} \Diamond \vec{D}\right) = -\sum_{i=1}^{3} m_i(\vec{x})\, \partial_i$.

Некоммутативность умножения кватернионов приводит к необходимости рассмотреть также следующий дифференциальный оператор:

$$\mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) \equiv \sum_{k=1}^{3} \partial_k \left(\mathbf{m} \Diamond \mathbf{e}_k \Diamond \mathbf{u}\right). \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Если* $\mathbf{m}(\vec{x}), \mathbf{u}(\vec{x}) \in C^1(V)$, *то*

$$\mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) = \left[\left(\vec{D} \Diamond \overline{\mathbf{m}}\right) + 2\,\mathrm{Sc}\left(\vec{D} \Diamond \mathbf{m}\right)\right] \Diamond \mathbf{u} + \mathbf{m} \Diamond \left(\vec{D} \Diamond (\mathbf{u})\right), \tag{1.3}$$

где $\mathrm{Sc}\left(\vec{D} \Diamond \mathbf{m}\right) = -\vec{D} \cdot \vec{m} = -\operatorname{div} \vec{m} = -\sum_{i=1}^{3} \partial_i\, m_i(\vec{x})$.

Доказательство. Подставляя (0.10) в (1.2), получаем:

$$\mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) \equiv \sum_{k=1}^{3} \partial_k \left(\sum_{i=0}^{3} m_i(\vec{x}) \mathbf{e}_i \Diamond \mathbf{e}_k \Diamond \sum_{j=0}^{3} u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right) = S_1 + S_2, \tag{1.4}$$

где

$$S_1 = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=0}^{3} \partial_k m_i(\vec{x}) \mathbf{e}_i \Diamond \mathbf{e}_k \Diamond \sum_{j=0}^{3} u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right),$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{i=0}^{3} m_i(\vec{x}) \mathbf{e}_i \Diamond \mathbf{e}_k \Diamond \sum_{j=0}^{3} \partial_k u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{3} m_i(\vec{x}) \mathbf{e}_i\right) \Diamond \left(\sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k\, \partial_k \Diamond \sum_{j=0}^{3} u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right) = \mathbf{m} \Diamond \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{u}\right).$$

Для преобразования S_1 воспользуемся равенствами

$$\mathbf{e}_i \Diamond \mathbf{e}_k = \omega_{ik} \mathbf{e}_k \Diamond \mathbf{e}_i,\ \omega_{ik} = \omega'_{ik} + \omega''_{ik}, \tag{1.5}$$

$$\omega'_{0k} = 1,\ \omega'_{ik} = -1 \text{ при } i = 1,2,3;\ \omega''_{ik} = 2 \text{ при } i = k,\ \omega''_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Тогда $S_1 = S'_1 + S''_1$, где

$$S'_1 = \left(\sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k\, \partial_k \Diamond \left(m_0(\vec{x})\, \mathbf{e}_0 - \sum_{i=1}^{3} m_i(\vec{x})\, \mathbf{e}_i\right)\right) \Diamond \left(\sum_{j=0}^{3} u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right) = \left(\vec{D} \Diamond \overline{\mathbf{m}}\right) \Diamond \mathbf{u},$$

$$S''_1 = \left(-2\sum_{i=1}^{3} \partial_i m_i(\vec{x})\right) \Diamond \left(\sum_{j=0}^{3} u_j(\vec{x}) \mathbf{e}_j\right) = 2\,\mathrm{Sc}\left(\vec{D} \Diamond \mathbf{m}\right) \Diamond \mathbf{u}.$$

Теорема доказана.

Укажем три важных частных случая формулы (1.3).

а) Если $\mathbf{m}(\vec{x}) = \nabla\mu$, где $\mu(\vec{x})$ – вещественнозначная функция, то $\vec{D} \Diamond \mathbf{m} = -\Delta_3\, \mu$ и

$$\mathscr{D}(\nabla\mu, \mathbf{u}) = (-\Delta_3\, \mu) \Diamond \mathbf{u} + (\nabla\mu) \Diamond \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{u}\right), \tag{1.6}$$

то есть $\mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{u}) = \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{m}\right) \Diamond \mathbf{u} + \mathbf{m} \Diamond \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{u}\right)$.

б) Если $\mathbf{m}(\vec{x}) = \nabla\varphi$, где $\varphi(\vec{x})$ – вещественнозначная *гармоническая* функция (в этом случае $\mathbf{m}(\vec{x}) \in \mathscr{O}(V)$), то

$$\mathscr{D}(\nabla\varphi, \mathbf{u}) = (\nabla\varphi) \Diamond \left(\vec{D} \Diamond \mathbf{u}\right). \tag{1.7}$$

в) Если дополнительно к случаю б) $\mathbf{u}(\vec{x}) = \mathbf{v}(\vec{x}) \in \mathscr{O}(V)$, то

$$\mathscr{D}(\nabla\varphi, \mathbf{v}) = 0. \tag{1.8}$$

Предполагая $\mathbf{m}(\vec{\xi}), \nabla\mu(\vec{\xi}), \nabla\varphi(\vec{\xi}), \mathbf{u}(\vec{\xi}), \mathbf{v}(\vec{\xi}) \in C^1(\overline{V})$, из формул (1.2), (1.6), (1.7), (1.8) и скалярного варианта формулы Остроградского – Гаусса получаем следующие интегральные тождества:

$$\iiint\limits_V \mathscr{D}(\mathbf{m},\mathbf{u})dV_\xi = \iint\limits_S \sum_{k=1}^3 \mathrm{v}_k(\vec{\xi})\left(\mathbf{m}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{e}_k\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})\right)dS_\xi = \iint\limits_S \mathbf{m}(\vec{\xi})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi, \quad (1.9)$$

$$\iiint\limits_V \left[(-\Delta_3\mu)\Diamond\mathbf{u} + (\nabla\mu)\Diamond\left(\vec{D}\Diamond\mathbf{u}\right)\right]dV_\xi = \iint\limits_S \nabla\mu(\vec{\xi})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi, \quad (1.10)$$

$$\iiint\limits_V (\nabla\varphi)\Diamond\left(\vec{D}\Diamond\mathbf{u}\right)dV_\xi = \iint\limits_S \nabla\varphi(\vec{\xi})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi \ \text{ при } \Delta_3\varphi = 0 \text{ в области } V, \quad (1.11)$$

$$0 = \iint\limits_S \nabla\varphi(\vec{\xi})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{v}(\vec{\xi})dS_\xi \ \text{ при } \Delta_3\varphi = 0 \text{ в области } V,\ \mathbf{v}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V), \quad (1.12)$$

$\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})$ – внешняя нормаль к S в точке $\vec{\xi}$.

Формулу (1.12) можно рассматривать как обобщение теоремы Коши (0.14) для двух функций $\nabla\varphi, \mathbf{v}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$.

2. Новое доказательство интегральной формулы Коши. Целесообразность нового доказательства формулы (0.15) обусловлена: а) отличием на множитель (-1) правой части формулы (0.15) от правой части соответствующей формулы из [6, с. 29]; б) возможностью простого доказательства формулы (0.15) с использованием формулы (1.12).

Теорема 2. *Если* $\mathbf{u}(\vec{x})\in C^1(\overline{V})$, *то имеет место формула Бореля – Помпею:*

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \iint\limits_S \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi - \iiint\limits_V \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})\Diamond\left(\vec{D}\Diamond\mathbf{u}\right)dV_\xi. \quad (2.1)$$

Если $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$, *то имеет место интегральная формула Коши* (0.15).

Доказательство. Пусть $\vec{x}\in V$ – произвольная фиксированная точка, $\vec{\xi}$ – переменная в $\overline{V}$. Введем следующие обозначения: $U_\rho = \left\{\vec{\xi} : \left|\vec{\xi}-\vec{x}\right| < \rho\right\} \subset V$ – шар малого радиуса ρ, $S_\rho = \partial U_\rho$, $V_\rho = V\setminus\overline{U}_\rho$, $\vec{\mathrm{v}}_\rho(\vec{\xi}) = -(\vec{\xi}-\vec{x})/\left|\vec{\xi}-\vec{x}\right| = -(\vec{\xi}-\vec{x})/\rho$ – нормаль к S_ρ в точке $\vec{\xi}$, *внешняя по отношению к* V_ρ.

В формуле (1.11) выберем $\varphi(\vec{\xi}) = -\mathscr{E}_3(\vec{\xi}-\vec{x})$, $\nabla_\xi\varphi(\vec{\xi}) = \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})$, $\Delta_3\varphi = 0$ при $\vec{\xi}\in V_\rho$ и возьмем интеграл в левой части по области V_ρ, а в правой части – по $\partial V_\rho = S\cup S_\rho$:

$$\iiint\limits_{V_\rho} \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})\Diamond\left(\vec{D}\Diamond\mathbf{u}\right)dV_\xi = \iint\limits_S \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi + \mathbf{u}_\rho(\vec{x}), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_\rho(\vec{x}) = \iint\limits_{S_\rho} \vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})\Diamond\vec{\mathrm{v}}_\rho(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi = \iint\limits_{S_\rho}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{\xi}-\vec{x}}{\rho^3}\right)\Diamond\left(-\frac{\vec{\xi}-\vec{x}}{\rho}\right)\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho}\mathbf{u}(\vec{\xi})dS_\xi = -\mathbf{u}(\vec{x}) - \mathbf{v}_\rho(\vec{x}),\quad \mathbf{v}_\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho}\left[\mathbf{u}(\vec{\xi}) - \mathbf{u}(\vec{x})\right]dS_\xi.$$

Так как $\mathbf{u}(\vec{x})\in C^1(\overline{V})$, то $\lim\limits_{\rho\to 0}\mathbf{v}_\rho(\vec{x}) = 0$. Устремляя ρ к 0 в обеих частях формулы (2.2), получим формулу (2.1). При $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$ интеграл по области V обращается в нуль и формула (2.1) переходит в формулу (0.15).

Теорема доказана.

3. Степенные ряды. Вывод формулы (0.4) основан на представлении ядра Коши в виде (см. [1, с. 110]):

$$\mathscr{R}(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n(\zeta-a)^{-n-1} \text{ при } |z-a| < |\zeta - a|. \tag{3.1}$$

Получим аналогичное представление для $\vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right)$ в формуле (0.15). Для упрощения записи формул рассматривается случай $\vec{a}=0$. Общий случай легко получается заменой $\vec{x}$ на $\vec{x}-\vec{a}$ и $\vec{\xi}$ на $\vec{\xi}-\vec{a}$.

Введем обозначения: $R_x = \left|\vec{x}\right|, \theta_x, \varphi_x$ – сферические координаты точки $\vec{x}$, $R_\xi = \left|\vec{\xi}\right|, \theta_\xi, \varphi_\xi$ – сферические координаты точки $\vec{\xi}$, $R_{\xi x}$ – расстояние между $\vec{\xi}$ и $\vec{x}$. При $R_x < R_\xi$ имеет место следующее разложение (см. [8, § 23, формулы (34), (10), (14)]):

$$\frac{1}{R_{\xi x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}(R_x)^n Y_{nm}(\theta_x,\varphi_x)\left(R_\xi\right)^{-n-1}Y^*_{nm}\left(\theta_\xi,\varphi_\xi\right) = \tag{3.2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}(R_x)^n P_n^m(\cos\theta_x)e^{im\varphi_x}\left(R_\xi\right)^{-n-1}P_n^m\left(\cos\theta_\xi\right)e^{-im\varphi_\xi}.$$

Это разложение (и все получаемые ниже из него) при фиксированном $\vec{x}$ сходится равномерно по $\vec{\xi} \in S_\rho = \left\{\vec{\xi} : R_\xi = \rho\right\}$.

Далее используются обозначения для однородных гармонических функций [9,10]:

$$U_n^m\left(\vec{x}\right) = \rho_n^m \exp im\varphi = C_n^m\left(\vec{x}\right) + iS_n^m\left(\vec{x}\right),\quad \rho_n^m = (-1)^m\left[(n+1)_m\right]^{-1}(2R)^n P_n^m(\cos\theta) \tag{3.3}$$

и их свойства, доказанные в [9] для $n = 0,1,2,\ldots; m = -n,\ldots,n$ и в [10] для $n = -(l+1)$; $l = 0,1,2,\ldots$; $m = -l,\ldots,l$. В частности, имеют место формулы дифференцирования:

$$\left(\partial_1 C_{n+1}^m + \partial_2 S_{n+1}^m\right) - i\left(\partial_2 C_{n+1}^m - \partial_1 S_{n+1}^m\right) = \left(\partial_1 - i\,\partial_2\right)\left(C_{n+1}^m + iS_{n+1}^m\right) =$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial z_1}U_{n+1}^m = 2(n+1)U_n^{m-1} = 2(n+1)\left(C_n^{m-1} + iS_n^{m-1}\right),$$
$$\partial_3 C_{n+1}^m + i\,\partial_3 S_{n+1}^m = 2\frac{\partial}{\partial z_2}U_{n+1}^m = 2(n+1)U_n^m = 2(n+1)\left(C_n^m + iS_n^m\right). \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (0.15) получаем:

$$\mathscr{E}_3\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{\xi x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n\left(\vec{x},\vec{\xi}\right),\quad \vec{\mathscr{M}}\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right) = \vec{D}_x \Diamond \mathscr{E}_3\left(\vec{\xi}-\vec{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{M}_n\left(\vec{x},\vec{\xi}\right), \tag{3.5}$$

где $\mathbf{E}_n\left(\vec{x},\vec{\xi}\right) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-n}^{n}U_n^m\left(\vec{x}\right)U_{-n-1}^{-m}\left(\vec{\xi}\right)$, $\mathbf{M}_n\left(\vec{x},\vec{\xi}\right) = \vec{D}_x \Diamond \mathbf{E}_{n+1}\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)$.

Дальнейшие вычисления основываются на том факте, что комплексные величины (3.3) можно рассматривать как *кватернионы специального вида* $U_n^m = C_n^m\mathbf{e}_0 + S_n^m\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_0$ играет роль вещественной единицы $\left(\mathbf{e}_0^2 = 1\right)$, а $\mathbf{e}_3$ – мнимой $\left(\mathbf{e}_3^2 = -1\right)$. При этом умножение по формуле (0.8) совпадает с умножением комплексных чисел.

В формулах вида (0.9) векторную часть будем записывать покоординатно, а переменную, от которой зависит каждая из координат, указывать справа от кватерниона. Учтем также вытекающее из (1.1) равенство $\vec{D}\Diamond(\mathbf{m}\Diamond\mathbf{c}) = \left(\vec{D}\Diamond\mathbf{m}\right)\Diamond\mathbf{c}$ для $\mathbf{c} = \mathrm{const}$ и формулы дифференцирования (3.4). Имеем:

$$\mathbf{M}_n = -\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-n-1}^{n+1}\left(\left\|\begin{matrix}\partial_1\\ \partial_2\\ \partial_3\\ \hline 0\end{matrix}\right\| \Diamond \left\|\begin{matrix}0\\ 0\\ S_{n+1}^m\\ \hline C_{n+1}^m\end{matrix}\right\|\left(\vec{x}\right)\right)\Diamond U_{-n-2}^{-m}\left(\vec{\xi}\right) = -\frac{n+1}{\pi}\sum_{m=-n-1}^{n+1}\left\|\begin{matrix}C_n^{m-1}\\ -S_n^{m-1}\\ C_n^m\\ \hline -S_n^m\end{matrix}\right\|\left(\vec{x}\right)\Diamond U_{-n-2}^{-m}\left(\vec{\xi}\right). \tag{3.6}$$

Сумма в формуле (3.6) преобразуется следующим образом:

1) слагаемое при $m=-n-1$ обращается в нуль, так как $U_n^k \equiv 0$ при $k=-n-2,-n-1$;

2) при $m=-n,\dots,-1,0$ сделаем замену $m=-k,\ k=0,1,\dots,n$;

3) при $m=1,2,\dots,n+1$ сделаем замену $m=k+1,\ k=0,1,\dots,n$.

В итоге получаем:

$$\mathbf{M}_n=-\frac{n+1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\left(\left\|\begin{array}{c} C_n^{-k-1}\\ -S_n^{-k-1}\\ C_n^{-k}\\ \hline -S_n^{-k}\end{array}\right\|(\vec{x})\Diamond\left\|\begin{array}{c} 0\\ 0\\ S_{-n-2}^{k}\\ \hline C_{-n-2}^{k}\end{array}\right\|(\vec{\xi})+\left\|\begin{array}{c} C_n^{k}\\ -S_n^{k}\\ C_n^{k+1}\\ \hline -S_n^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{x})\Diamond\left\|\begin{array}{c} 0\\ 0\\ S_{-n-2}^{-k-1}\\ \hline C_{-n-2}^{-k-1}\end{array}\right\|(\vec{\xi})\right). \tag{3.7}$$

С использованием тождества $1=\mathbf{e}_0=\mathbf{e}_2\Diamond(-\mathbf{e}_2)$ и доказанных в [9, 10] соотношений $C_n^{-k}=(-1)^k C_n^k,\ S_n^{-k}=-(-1)^k S_n^k$ формула (3.7) переписывается в следующем виде:

$$\mathbf{M}_n=\frac{n+1}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\left\|\begin{array}{c} C_n^{k+1}\\ S_n^{k+1}\\ -C_n^{k}\\ \hline -S_n^{k}\end{array}\right\|(\vec{x})\Diamond\,\mathbf{e}_2\Diamond(-\mathbf{e}_2)\Diamond\left\|\begin{array}{c} 0\\ 0\\ S_{-n-2}^{k}\\ \hline C_{-n-2}^{k}\end{array}\right\|(\vec{\xi})+\left\|\begin{array}{c} C_n^{k}\\ -S_n^{k}\\ C_n^{k+1}\\ \hline -S_n^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{x})\Diamond\left\|\begin{array}{c} 0\\ 0\\ -S_{-n-2}^{k+1}\\ \hline C_{-n-2}^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{\xi})\right).$$

После вычисления в первом слагаемом произведений $\|\dots\|\Diamond\mathbf{e}_2$, $(-\mathbf{e}_2)\Diamond\|\dots\|$ и подстановки полученного результата в (3.5) получаем:

$$\vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\mathbf{v}_n^k(\vec{x})\Diamond\overline{\mathfrak{v}}_{-n-2}^{k}(\vec{\xi}) \quad \text{при} \quad R_x<R_\xi, \tag{3.8}$$

где $$\mathbf{v}_n^k(\vec{x})=\left\|\begin{array}{c} C_n^{k}\\ -S_n^{k}\\ C_n^{k+1}\\ \hline -S_n^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{x}),\quad \mathfrak{v}_{-n-2}^{k}(\vec{\xi})=\left\|\begin{array}{c} S_{-n-2}^{k}\\ C_{-n-2}^{k}\\ S_{-n-2}^{k+1}\\ \hline C_{-n-2}^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{\xi}),\quad \overline{\mathfrak{v}}_{-n-2}^{k}(\vec{\xi})=\left\|\begin{array}{c} -S_{-n-2}^{k}\\ -C_{-n-2}^{k}\\ -S_{-n-2}^{k+1}\\ \hline C_{-n-2}^{k+1}\end{array}\right\|(\vec{\xi}).$$

При этом $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})=[2(n+1)]^{-1}\vec{D}\Diamond U_{n+1}^{k+1}\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^3)$, так как $\vec{D}\Diamond(\vec{D}\Diamond U_{n+1}^{k+1})=-\Delta_3 U_{n+1}^{k+1}=0$.

Формулу (3.8) можно рассматривать как аналог формулы (3.1). На ее основе доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $U_\rho=\{\vec{\xi}:R_\xi<\rho\}$ *и* $S_\rho=\partial U_\rho$. *Если* $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(U_\rho)$, *то* $\forall\vec{x}\in U_\rho$ *имеет место разложение:*

$$\mathbf{u}(\vec{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbf{v}_n^k(\vec{x})\Diamond\mathbf{c}_n^k, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{c}_n^k=\frac{1}{\sigma_n^k(\rho)}\iint_{S_\rho}\overline{\mathbf{v}}_n^k(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})\,dS_\xi,\quad \sigma_n^k(\rho)=\iint_{S_\rho}\left|\mathbf{v}_n^k(\vec{\xi})\right|^2 dS_\xi=\frac{\pi(2\rho)^{2n+2}(n!)^2}{(n+k+1)!\,(n-k)!}. \tag{3.10}$$

Доказательство. В формуле (0.15) при $V=U_\rho$ и $S=S_\rho$ заменим $\vec{\mathscr{M}}(\vec{\xi}-\vec{x})$ разложением (3.8). Ряд под интегралом при любом фиксированном $\vec{x}\in U_\rho$ сходится равномерно по $\vec{\xi}\in S_\rho$. Почленное интегрирование ряда приводит к формуле (3.9), где

$$\mathbf{c}_n^k=\frac{1}{\pi}(n+1)(-1)^k\iint_{S_\rho}\overline{\mathfrak{v}}_{-n-2}^{k}(\vec{\xi})\Diamond\vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})\Diamond\mathbf{u}(\vec{\xi})\,dS_\xi. \tag{3.11}$$

Далее учтем, что $\forall\vec{\xi}\in S_\rho\ \ \vec{\mathrm{v}}(\vec{\xi})=\vec{\xi}\rho^{-1}$ и воспользуемся соотношениями

$$\xi_1 C_{-n-2}^{k}-\xi_2 S_{-n-2}^{k}+\xi_3 C_{-n-2}^{k+1}=\tfrac{n-k}{2(n+1)}C_{-n-1}^{k+1},\quad -\xi_1 C_{-n-2}^{k+1}-\xi_2 S_{-n-2}^{k+1}+\xi_3 C_{-n-2}^{k}=\tfrac{n+k+1}{2(n+1)}C_{-n-1}^{k},$$

$$\xi_1 S_{-n-2}^{k}+\xi_2 C_{-n-2}^{k}+\xi_3 S_{-n-2}^{k+1}=\tfrac{n-k}{2(n+1)}S_{-n-1}^{k+1},\quad -\xi_1 S_{-n-2}^{k+1}+\xi_2 C_{-n-2}^{k+1}+\xi_3 S_{-n-2}^{k}=\tfrac{n+k+1}{2(n+1)}S_{-n-1}^{k},$$

вытекающими из [10, формулы (1.14)–(1.16)]. С учетом [10, формула (1.2)] окончательно получаем

$$\frac{1}{\pi}(n+1)(-1)^k \bar{\mathrm{v}}^k_{-n-2}\left(\vec{\xi}\right)\Diamond \vec{\xi}\frac{1}{\rho}=\frac{(n+k+1)!(n-k)!}{\pi(2\rho)^{2n+2}(n!)^2}\bar{\mathrm{v}}^k_n\left(\vec{\xi}\right). \tag{3.12}$$

Совпадение обоих выражений для $\sigma^k_n(\rho)$ доказывается непосредственным вычислением интеграла от

$$\left|\mathrm{v}^k_n\left(\vec{\xi}\right)\right|^2=(2\rho)^{2n}(n!)^2\left\{[(n+k)!]^{-2}\left[P^k_n(\cos\theta)\right]^2+[(n+k+1)!]^{-2}\left[P^{k+1}_n(\cos\theta)\right]^2\right\}.$$

Теорема доказана.

4. Приложение к пространственной теории упругости. В работе [11] при доказательстве теоремы 1 было доказано следующее утверждение: если вектор $\vec{u}(\vec{x})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению пространственной теории упругости

$$(1-2\nu)\nabla^2\vec{u}+\nabla\nabla\cdot\vec{u}=0,\quad \vec{x}\in V\subset\mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

и дополнительному условию $\operatorname{div}\vec{u}=0$, то векторное поле $\operatorname{rot}\vec{u}$ является потенциальным и существует функция h такая, что $\operatorname{rot}\vec{u}=\operatorname{grad}h$. Следовательно, $\mathbf{u}(\vec{x})=-h(\vec{x})+\vec{u}(\vec{x})$ удовлетворяет условиям (0.13). Если при этом $\mathbf{u}(\vec{x})\in C^1\left(\bar{V}\right)$, то $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$.

Легко проверить и обратное утверждение: если $\mathbf{u}(\vec{x})\in\mathscr{O}(V)$, то $\vec{u}(\vec{x})=\operatorname{Ve}\mathbf{u}(\vec{x})$ удовлетворяет уравнению (4.1) и дополнительному условию $\operatorname{div}\vec{u}=0$. В частности, $\forall n,k$ и $\forall \mathbf{c}=\mathrm{const}$ вектор $\vec{u}(\vec{x})=\operatorname{Ve}\left(\mathrm{v}^k_n(\vec{x})\Diamond\mathbf{c}\right)$ удовлетворяет уравнению (4.1). Построенные в [11, формула (2.4)] полиномиальные решения уравнения (4.1) получаются следующим образом:

$$\vec{u}^{k+1}_{n31}=\operatorname{Ve}\left(\mathrm{v}^k_n(\vec{x})\Diamond\mathbf{e}_0\right),\ \vec{u}^{k+1}_{n32}=\operatorname{Ve}\left(\mathrm{v}^k_n(\vec{x})\Diamond(-\mathbf{e}_3)\right),$$

$$\vec{u}^{k}_{n41}=\operatorname{Ve}\left(\mathrm{v}^k_n(\vec{x})\Diamond\mathbf{e}_2\right),\ \vec{u}^{k}_{n42}=\operatorname{Ve}\left(\mathrm{v}^k_n(\vec{x})\Diamond\mathbf{e}_1\right). \tag{4.2}$$

Заключение. Таким образом, для голоморфного вектора получен аналог разложения в степенной ряд.

1. **Шабат Б. В.** Введение в комплексный анализ: В 2 ч. / М.: Наука, 1985.– Ч. 1: Функции одного переменного.– 336 с.
2. **Бахтурин Ю. А.** Основные структуры современной алгебры. – М: Наука, 1990.– 318 с.
3. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа.– М.: Наука, 1973.– 144 с.
4. **Мейлихзон А. С.** По поводу моногенности кватернионов // ДАН СССР.– 1948.– Т. 59, № 3.– С. 431–434.
5. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного.– М: Наука, 1984.– 320 с.
6. **Gürlebeck K., Sprößig W.** Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems.– Berlin: Akademie-Verlag, 1989.– 253 c.
7. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1976.– 528 с.
8. **Никифоров А. Ф., Уваров В. Б** Специальные функции математической физики.– М.: Наука, 1978.– 320 с.
9. **Решение** пространственных задач теории упругости на основе новых соотношений для гармонических многочленов / Онищук О. В., Попов Г. Я., Толкачев А. В., Чумаченко К. И. // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 11–18.
10. **Онищук О. В., Чумаченко К. И.** Метод минимизации энергии погрешности для многосвязных областей // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2000.– Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 109–115.
11. **Онищук О. В., Толкачев А. В.** Полная система полиномиальных решений дифференциальных уравнений теории упругости // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 1999.– Т. 4, вип. 4. Фіз.-мат. науки.– С. 148–153.