Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2001.– Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 79–83

УДК 517.977

А. И. Третьяк
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ НЕНУЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
кафедри оптимального керування та економічної кібернетики ОНУ 23.03.2001 р.

Стаття є продовженням роботи автора [7]. Для дискретних систем керування, які задаються на гладких скінченномірних многовидах, отримано нові необхідні умови оптимальності довільного порядку ненульового керування. Запропонований у роботі підхід істотно грунтується на хронологічному численні А. А. Аграчева – Р. В. Гамкрелидзе.

Статья является продолжением работы автора [7]. Для дискретных систем управления, заданных на гладких конечномерных многообразиях, получены новые необходимые условия оптимальности произвольного порядка ненулевого управления. Предлагаемый в работе подход существенно основан на хронологическом исчислении А. А. Аграчева – Р. В. Гамкрелидзе.

The paper is sequel of author paper [7]. The new necessary high-order optimality conditions of non-zero control are obtained for discrete-time control systems given on smooth finite-dimensional manifolds. The approach, offered in this work, is essentially based on the chronological calculus developed by A. A. Agrachev and R. V. Gamkrelidze.

Введение. В настоящей работе, являющейся продолжением работы автора [7], рассматриваются нелинейные стационарные системы оптимального управления с дискретным временем, заданные на гладком конечномерном многообразии. Оптимальность понимается в смысле минимума терминального функционала (функции конечного состояния системы управления), причем как начальный, так и конечный моменты времени предполагаются фиксированными. Для таких систем известен ряд результатов относительно необходимых условий оптимальности первого и второго порядков. Используя подход, развитый в работах [3 – 6, 9], аппарат хронологического исчисления А. А. Аграчева – Р. В. Гамкрелидзе [1, 2], и результаты работы [7], автор получает, для определенного класса дискретных систем управления и при определенных предположениях, необходимые условия оптимальности произвольного порядка для, вообще говоря, ненулевого скалярного управления.

1. Рассмотрим систему управления

$$x(t+1) = R\big(u(t), x(t)\big) \equiv R\big(u(t)\big)\big(x(t)\big), \qquad (1)$$

где $x(t) \in M$, $u(t) \in U = [-1,\ 1]$. Здесь M – n-мерное гладкое (т.е. класса C^∞) многообразие, гладко вложенное в $\mathbf{R}^d$, $\{R(u) \in \mathrm{Diff}(M) \mid u \in U\}$ – выпуклое множество диффеоморфизмов многообразия M, гладко зависящее от u. Задача заключается в минимизации терминального критерия качества

$$J[u] = \varphi\big(x(N)\big), \qquad (2)$$

где $\varphi \in C^\infty(M)$ – заданная функция.

Зафиксируем процесс

$$\widetilde{u}(t)\in \operatorname{int}U,\ t\in\{0,1,\dots,N-1\};\quad \widetilde{x}(t),\ t\in\{0,1,\dots,N\}. \tag{3}$$

Пусть $u(t)\in U,\ t\in\{0,1,\dots,N-1\}$ – произвольное управление. Сделаем замену переменной (т.е. введём новое управление) $v(t)=u(t)-\widetilde{u}(t)\in V(t),\ t\in\{0,1,\dots,N-1\}$, где $V(t)=U-\widetilde{u}(t)=\{u-\widetilde{u}(t)\mid u\in U\}$. Очевидно, что $u=\widetilde{u}$ тогда и только тогда, когда $v=0$.

Имеем

$$R^*(u)=R^*(\widetilde{u}+v)=R^*(\widetilde{u})\circ\left(R^*(\widetilde{u})\right)^{-1}\circ R^*(\widetilde{u}+v)=R^*(\widetilde{u})\circ Q^*(v), \tag{4}$$

где

$$Q^*(v)=\left(R^*(\widetilde{u})\right)^{-1}\circ R^*(\widetilde{u}+v).$$

Для каждого $i\in\mathbf{N}$ определим дифференциальный оператор $D_i : C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ равенством [7]

$$D_i\psi=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial v^i}Q^*(v)\psi\big|_{v=0}\qquad \forall\psi\in C^\infty(M),$$

где $Q^*(0)=\mathrm{Id}$ (тождественный оператор), $Q^*(v)E=Q(v)$, E – сужение тождественного отображения $\mathbf{R}^d$ на M, ибо $\forall P\in\operatorname{Diff}(M)$, по определению [1, 2], имеем равенство $P^*\psi=\psi\circ P\ \ \forall\psi\in C^\infty(M)$, т.е. $\forall\psi\in C^\infty(M)$

$$x\circ\left(P^*\psi\right)=\left(P^*\psi\right)(x)=\psi(P(x))\ \ \forall x\in M.$$

Таким образом, $\forall\psi\in C^\infty(M)$

$$x\circ(D_i\psi)=(D_i\psi)(x)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\psi(Q(v,x))\big|_{v=0}\ \forall x\in M.$$

Тогда имеем асимптотическое соотношение

$$Q^*(v)\approx\sum_{i=0}^{\infty}v^iD_i,\quad D_0=\mathrm{Id}.$$

Зафиксируем некоторый момент $\sigma\in\{0,1,\dots,N-1\}$ и рассмотрим возмущенное управление

$$v(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon w, & t=\sigma,\\ 0, & t\neq\sigma;\end{cases} \tag{5}$$

здесь $w\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ – малый параметр. При этом, в силу (1), (4), имеем

$$x(t+1,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)\circ R^*(\widetilde{u}(t))\circ Q^*(v(t,\varepsilon)),\ t\in\{0,1,\dots,N-1\},\quad x(0,\varepsilon)=x_0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
x(N,\varepsilon)&=x_0\circ R^*(\widetilde{u}(0))\circ Q^*(v(0,\varepsilon))\circ R^*(\widetilde{u}(1))\circ Q^*(v(1,\varepsilon))\circ R^*(\widetilde{u}(2))\circ Q^*(v(2,\varepsilon))\circ\\
&\quad\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(\sigma))\circ Q^*(v(\sigma,\varepsilon))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))\circ Q^*(v(N-1,\varepsilon))=\\
&=x_0\circ R^*(\widetilde{u}(0))\circ R^*(\widetilde{u}(1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(\sigma))\circ Q^*(\varepsilon w)\circ R^*(\widetilde{u}(\sigma+1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))=\\
&=x_0\circ R^*(\widetilde{u}(0))\circ R^*(\widetilde{u}(1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))\circ\left(R^*(\widetilde{u}(\sigma+1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))\right)^{-1}\circ\\
&\quad\circ Q^*(\varepsilon w)\circ\left(R^*(\widetilde{u}(\sigma+1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))\right)^{-1}=\widetilde{x}(N)\circ S_\sigma^*\circ Q^*(\varepsilon w)\circ\left(S_\sigma^*\right)^{-1}=\\
&=\widetilde{x}(N)\circ\left(\operatorname{Ad}S_\sigma^*\right)Q^*(\varepsilon w),
\end{aligned}$$

где $S_\sigma^*=\left(R^*(\widetilde{u}(\sigma+1))\circ\dots\circ R^*(\widetilde{u}(N-1))\right)^{-1}$, а оператор $\operatorname{Ad}X^*$ действует по формуле

$$\operatorname{Ad}X^* : Y^*\mapsto\left(\operatorname{Ad}X^*\right)Y^*=X^*\circ Y^*\circ\left(X^*\right)^{-1}.$$

Следовательно, используя (2), получаем

$$\Delta J[\tilde{u},\varepsilon]\equiv J[v,\varepsilon]-J[\tilde{u}]=\varphi(x(N,\varepsilon))-\varphi(\tilde{x}(N))=$$
$$=\tilde{x}(N)\circ\left(\left(\mathrm{Ad}\,S_\sigma^*\right)Q^*(\varepsilon w)-\mathrm{Id}\right)= \tag{6}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i v^i\left\{x_0\circ(D_i\varphi)\right\}+o\left(\varepsilon^k\right),\ \varepsilon\to 0\,.$$

Предположим теперь, что $\tilde{u}(t)\in\mathrm{int}U,\ t\in\{0,1,\dots,N-1\}$ – оптимальное (в смысле минимума критерия (2)) управление. Тогда, так же как и в работе [7], приходим к следующему необходимому условию оптимальности произвольного порядка.

Теорема 1. *Пусть* (3) *– оптимальный процесс. Если при некотором* $m\in\mathbf{N}$ *для произвольного момента* $\sigma\in\{0,1,\dots,N-1\}$ *выполнены неравенства*

$$\tilde{x}(N)\circ\left(\left(\mathrm{Ad}\,S_\sigma^*\right)D_i\right)\varphi=0\quad\forall i\le 2m-2\,, \tag{7}$$

то справедливы соотношения

$$\tilde{x}(N)\circ\left(\left(\mathrm{Ad}\,S_\sigma^*\right)D_{2m-1}\right)\varphi=0,\qquad \tilde{x}(N)\circ\left(\left(\mathrm{Ad}\,S_\sigma^*\right)D_{2m}\right)\varphi\ge 0. \tag{8}$$

Отметим, что при $m=1$ предположение (7) отсутствует, а соотношения (8) становятся необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядков соответственно.

2. Рассмотрим теперь случай многоточечной вариации управления, т.е. рассмотрим возмущённое управление вида $w(t,\varepsilon)=\varepsilon w_t,\ v_t\in\mathbf{R},\ t\in\{0,1,\dots,N-1\}$. Тогда для правого конца соответствующей траектории $x(t,\varepsilon)$, в силу (1), будем иметь

$$x(N,\varepsilon)=x_0\circ R^*(\tilde{u}(0))\circ Q^*(v(0,\varepsilon))\circ R^*(\tilde{u}(1))\circ Q^*(v(1,\varepsilon))\circ R^*(\tilde{u}(2))\circ Q^*(v(2,\varepsilon))\circ$$
$$\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-2))\circ Q^*(v(N-2,\varepsilon))\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ Q^*(v(N-1,\varepsilon))=$$
$$=x_0\circ R^*(\tilde{u}(0))\circ Q^*(\varepsilon w_0)\circ R^*(\tilde{u}(1))\circ Q^*(\varepsilon w_1)\circ R^*(\tilde{u}(2))\circ Q^*(\varepsilon w_2)\circ$$
$$\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-2))\circ Q^*(\varepsilon w_{N-2})\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ Q^*(\varepsilon w_{N-1})=$$
$$=x_0\circ R^*(\tilde{u}(0))\circ R^*(\tilde{u}(1))\circ R^*(\tilde{u}(2))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-2))\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ$$
$$\circ\left(R^*(\tilde{u}(1))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\right)^{-1}\circ Q^*(\varepsilon w_0)\circ R^*(\tilde{u}(1))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ$$
$$\circ\left(R^*(\tilde{u}(2))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\right)^{-1}\circ Q^*(\varepsilon w_1)\circ R^*(\tilde{u}(2))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ$$
$$\circ\left(R^*(\tilde{u}(3))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\right)^{-1}\circ Q^*(\varepsilon w_2)\circ R^*(\tilde{u}(3))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ$$
$$\circ\ldots\circ\left(R^*(\tilde{u}(N-1))\right)^{-1}\circ Q^*(\varepsilon w_{N-2})\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\circ Q^*(\varepsilon w_{N-1})=$$
$$=\tilde{x}(N)\circ\left(\mathrm{Ad}\,S_0^*\right)Q^*(\varepsilon w_0)\circ\left(\mathrm{Ad}\,S_1^*\right)Q^*(\varepsilon w_1)\circ\ldots\circ\left(\mathrm{Ad}\,S_{N-1}^*\right)Q^*(\varepsilon w_{N-1}),$$

где $S_k^*=\left(R^*(\tilde{u}(k+1))\circ\ldots\circ R^*(\tilde{u}(N-1))\right)^{-1},\ k\in\{0,1,\dots,N-2\}\ S_{N-1}^*=\mathrm{Id}$.

Используя асимптотическое соотношение

$$Q^*(\varepsilon v)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v^i D_i,\qquad D_0=\mathrm{Id},$$

и полагая $L_{i_k}=\left(\mathrm{Ad}\,S_k^*\right)D_{i_k},\ k\in\{0,1,\dots,N-1\}$,

из предыдущего представления находим

$$x(N,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{k}\varepsilon^j W_j(w_0,w_1,\dots,w_{N-1})+o\left(\varepsilon^k\right),\ \varepsilon\to 0\,,$$

где $W_j(w_0,w_1,\dots,w_{N-1})=\sum\limits_{i_0+i_1+\ldots+i_{N-1}=j} w_0^{i_0}w_1^{i_1}\ldots w_{N-1}^{i_{N-1}}\left(L_{i_0}\circ L_{i_1}\circ\ldots\circ L_{i_{N-1}}\right)$ – полилииейная форма степени j отиосительно $w_0,w_1,\dots,w_{N-2},w_{N-1}$.

Рассуждая, как и выше, получаем следующее необходимое условие оптимальности произвольного порядка.

Теорема 2. *Пусть* (3) *– оптимальный процесс. Если при некотором* $m \in \mathbf{N}$ *выполнены неравенства*

$$\widetilde{x}(N) \circ \left(\left(L_{i_0} \circ L_{i_1} \circ \ldots \circ L_{i_{N-1}}\right)\varphi\right) = 0 \quad \forall i_0 + i_1 + \ldots + i_{N-1} \le 2m-2,$$

то справедливы соотношения

$$\widetilde{x}(N) \circ \left(\left(L_{i_0} \circ L_{i_1} \circ \ldots \circ L_{i_{N-1}}\right)\varphi\right) = 0 \quad \forall i_0 + i_1 + \ldots + i_{N-1} = 2m-1$$

и

$$\widetilde{x}(N) \circ W_{2m}(w_0, w_1, \ldots, w_{N-2}, w_{N-1}) \ge 0 \quad \forall \{w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}\} \subset \mathbf{R}.$$

3. Рассмотрим общий способ представления возмущения оператора $Q^*(\widetilde{u})$. Определим операторы $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ формулой [7, 9, 10]

$$\Lambda(u) = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \Lambda_i = \ln\left(\mathrm{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} u^i D_i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u^i D_i\right)^k \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

Например, имеем:

$$\Lambda_1 = D_1, \; \Lambda_2 = D_2 - \frac{1}{2}D_1^2,$$

$$\Lambda_3 = D_3 - D_1 \circ D_2 + \frac{1}{3}D_1^3,$$

$$\Lambda_4 = D_4 - \frac{1}{2}D_2^2 + D_1^2 \circ D_2 - \frac{1}{4}D_1^4;$$

здесь $D_i^{k+1} = D_i \circ D_i^k = D_i^k \circ D_i \quad \forall k \in \mathbf{N}$.

Далее, из (9) следует, что

$$Q^*(u) = e^{\Lambda(u)} = \overrightarrow{\exp}\int_0^1 \Lambda(u)d\tau,$$

где использовано обозначение

$$\overrightarrow{\exp}\int_a^b H_t(u)dt = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} dt_n \left(H_{t_n}(u) \circ \ldots \circ H_{t_2}(u) \circ H_{t_1}(u)\right).$$

В работе [7] указано представление

$$Q^*(\varepsilon w) = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{k} \varepsilon^n w^n W_n + o(\varepsilon^k), \; \varepsilon \to 0,$$

где

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m_1+\ldots+m_k=n} J_k(m_1, \ldots, m_k) \cdot \left\{V_{m_1} \circ \ldots \circ V_{m_k}\right\},$$

$$V_m = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m} \sum_{i_k+\ldots+i_1=m} i_1 \cdot \left[\Lambda_{i_k}, \ldots, \left[\Lambda_{i_2}, \Lambda_{i_1}\right]\ldots\right],$$

$$J_k(m_1, \ldots, m_k) = \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \ldots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1-1} \ldots \tau_k^{m_k-1} d\tau_k \ldots d\tau_2\, d\tau_1 = \left(\prod_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} m_{k-i+1}\right)^{-1}.$$

Поэтому

$$\Delta J[\widetilde{u}, \varepsilon] = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i w^i \left\{\widetilde{x}(N) \circ \left(\left(\left(\mathrm{Ad}\, S_\sigma^*\right) W_i\right)\varphi\right)\right\} + o(\varepsilon^k), \; \varepsilon \to 0.$$

Это приводит к следующему необходимому условию оптимальности произвольного порядка.

Теорема 3. *Пусть* (3) *– оптимальный процесс. Если при некотором* $m \in \mathbf{N}$ *для произвольного момента* $\sigma \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *выполнены неравенства*

$$\tilde{x}(N) \circ \left(\left(\left(\mathrm{Ad}\, S_\sigma^*\right) W_i\right) \varphi\right) = 0 \quad \forall i \le 2m-2,$$

то справедливы соотношения

$$\tilde{x}(N) \circ \left(\left(\left(\mathrm{Ad}\, S_\sigma^*\right) W_{2m-1}\right) \varphi\right) = 0, \quad \tilde{x}(N) \circ \left(\left(\left(\mathrm{Ad}\, S_\sigma^*\right) W_{2m}\right) \varphi\right) \ge 0.$$

Замечание. В случае векторного управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ соответствующий дифференциальный оператор $D_i : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ определяется формулой

$$D_i \psi = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{|i|}}{\partial v_{i_1} \partial v_{i_2} \ldots \partial v_{i_r}} Q^*(v) \psi\big|_{v=0} \quad \forall \psi \in C^\infty(M),$$

где $i = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ – мультииндекс, причём, как обычно, $|i| = i_1 + i_2 + \ldots + i_r$, $i! = i_1! i_2! \ldots i_r!$. В этом случае также имеет место асимптотическое представление

$$Q^*(v) \approx \mathrm{Id} + \sum_{|i|=1}^{\infty} v^i D_i, \quad D_0 = \mathrm{Id},$$

где $v^i = (v_1, v_2, \ldots, v_r)^{(i_1, i_2, \ldots, i_r)} = v_1^{i_1} v_2^{i_2} \ldots v_r^{i_r}$.

Заключение. Таким образом, в работе установлены необходимые условия оптимальности произвольного порядка ненулевого скалярного управления для задачи терминального управления с дискретным временем. Общий случай векторного управления в нелинейных нестационарных дискретных системах управления автор намерен рассмотреть в дальнейших публикациях.

1. **Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.** Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сб.– 1978.– Т. 107 (149), № 4 (12).– С. 467–532.
2. **Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.** Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.– 1980.– Т. 11.– С. 135–176.
3. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем и некоторые их приложения // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Анализ-4 / ВИНИТИ, 1994.– Т. 7.– С. 103–142.
4. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Анализ-7 / ВИНИТИ, 1994.– Т. 16.– С. 43–138.
5. **Третьяк А. И.** Достаточные условия локальной управляемости и необходимые условия оптимальности высокого порядка. Дифференциально-геометрический подход // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Динамические системы-4 / ВИНИТИ, 1995.– Т. 24.– С. 5–198.
6. **Третьяк А. И.** Локальные аппроксимации высокого порядка гладких управляемых систем и поточечные условия оптимальности высокого порядка // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Динамические системы-8 / ВИНИТИ, 1996.– Т. 28.– С. 78–112.
7. **Третьяк А. И.** Необходимые условия оптимальности произвольного порядка в дискретных системах управления // Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2000.– Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки.– С. 69–75.
8. **Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V.** Local controllability for families of diffeomorphisms // Syst. Contr. Lett.– 1993.– V. 20.– P. 67–76.
9. **Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V.** Local controllability and semigroups of diffeomorphisms // Acta Appl. Math.– 1993.– V. 32.– P. 1–57.
10. **Tretyak A. I.** Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods // J. Dynam. and Control Syst.– 1998.– V. 4, No. 1.– P. 77–126.