

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І.
МЕЧНИКОВА

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Моделювання розподілу потоків у ігровій формі»

«Modelling the distribution of flows in a game form»

Виконав: здобувач 4-го курсу денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика

Освітня програма «Прикладна математика»

Поліщук Даніїл Олександрович

Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кічмаренко О.Д.

Рецензент: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Вербіцький В. В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

м. Одеса – 2025р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
1 Теоритична частина	4
1.1 Моделі	4
1.1.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація	4
1.1.2 Атомарна егоїстична маршрутизація	9
1.2 Існування, унікальність та потенційні функції	12
1.2.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація: Існування та унікальність	13
1.2.2 Атомарна егоїстична маршрутизація: Існування	16
1.3 Ціна анархії егоїстичного маршруту	19
1.3.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація: Ціна анархії	19
1.3.2 Атомарна егоїстична маршрутизація: Ціна анархії	25
1.4 Зменшення ціни анархії	28
1.4.1 Ціноутворення за граничними витратами	28
1.4.2 Збільшення ємності	29
2 Практична частина	32
2.1 Задача: Парадокс Браеса в маршрутизації трафіку	32
2.2 Задача: Парадокс Браесса з 80 подорожуючими	36
2.3 Задача: Зміна структури мережі та ціна анархії	40
2.4 Задача: Аналіз неатомарної маршрутизаційної гри з податками і субсидіями	46
ВИСНОВКИ	52
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	53
ДОДАТОК А	54

ВСТУП

Проблема ефективного розподілу потоків у мережах, де кожен учасник самостійно приймає рішення щодо свого маршруту, є однією з центральних у сучасній теорії мереж і теорії ігор. Подібна ситуація характерна для багатьох прикладних сфер — зокрема, для транспортних та комунікаційних мереж, де користувачі самостійно обирають маршрути, не координуючи свої дії з іншими. Така поведінка призводить до явища, що в теорії ігор називається неефективністю рівноваги, а її кількісною характеристикою є так звана ціна анархії.

Метою даного дослідження є формалізація ігор з маршрутизацією в атомарних та не атомарних моделях, дослідження рівноважних потоків та вивчення механізмів, що впливають на їх ефективність. У межах цієї мети будуть розглянуті ключові задачі: побудова математичних моделей маршрутизованих ігор, опис їх рівноважних стратегій, оцінка глобальних витрат у системі та аналіз можливих способів покращення ефективності за допомогою модифікації структури мережі.

Об'єктом дослідження є багатокористувацькі мережі з децентралізованим прийняттям рішень, у яких потоки маршрутизуються на основі індивідуальних переваг учасників. Предметом виступають рівноважні потоки у таких мережах, а також їх властивості з точки зору ефективності, стабільності та чутливості до змін структури.

Методологічною основою дослідження є теорія некооперативних ігор, зокрема моделі атомарної та не атомарної маршрутизації, концепція рівноваги Неша, аналіз потенціальних функцій, а також підхід до оцінки неефективності через ціну анархії. Крім того, застосовується графова модель мережі та аналітичні методи дослідження оптимальних і рівноважних стратегій.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРИТИЧНА ЧАСТИНА

1.1 Моделі

1.1.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація

Для опису неатомарних егоїстичних маршрутних ігор спершу розглянемо ключові елементи прикладу Пігу (див. рисунок 1). На початку вказується мережа, яка визначає маршрути, що доступні гравцям.

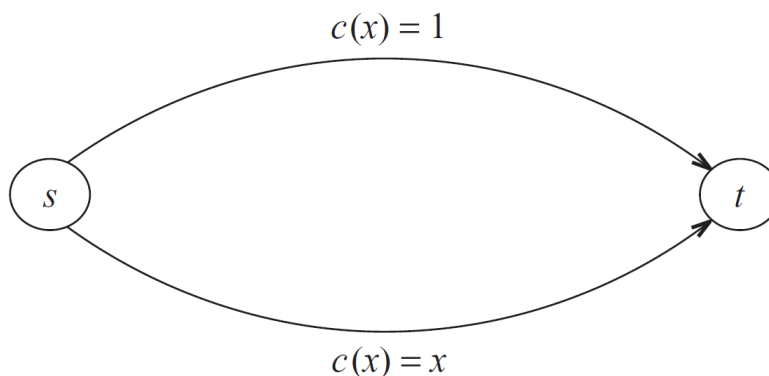


Рис. 1.1. Приклад Пігу

У прикладі Пігу є два паралельні маршрути, кожен з яких є одним ребром, що з'єднують вершину-джерело s з вершиною-приймачем t . Кожне ребро має вартість, яка є функцією кількості трафіку, що використовує ребро. Ми припускаємо, що егоїстичні гравці вибирають маршрути, щоб мінімізувати понесені витрати; у рівноважному результаті всі гравці обирають шлях з мінімальною вартістю. У рівноважному випадку в прикладі Пігу всі гравці обирають друге ребро, а вартість цього ребра в цьому результаті дорівнює 1.

У більш загальному випадку, егоїстична гра маршрутизації відбувається в *мережі з багатьма потоками*, або просто в *мережі*. Мережа задається орієнтованим графом $G = (V, E)$ з множиною вершин V та орієнтованою множиною ребер E , разом з множиною $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ пар вершин джерело-сток. Також такі пари називаються *потокми* (англ. *commodities*). Кожен гравець ідентифікується з одним потоком; зауважте,

що різні гравці можуть походити з різних вершин джерела та подорожувати до різних вершин стоку. Для позначення шляхів s_i-t_i мережі використовується $\mathcal{P}_i$. Розглядаємо лише мережі, в яких $\mathcal{P}_i \neq \emptyset$ для всіх i , та визначаємо $\mathcal{P} = \cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$. Графу дозволено G містити паралельні ребра, а вершина може брати участь у кількох парах джерело-сток.

Маршрути, обрані гравцями, описуються за допомогою *потіку*, який є невід'ємним вектором, індексованим множиною $\mathcal{P}$ шляхів джерело-приймач. Для рівноважного потоку f та шляху $P \in \mathcal{P}_i$ ми інтерпретуємо f_P як обсяг трафіку потоку (commodity) i , який обирає шлях P для подорожі від s_i до t_i . Трафік є «нееластичним», оскільки існує заданий обсяг r_i трафіку, ідентифікований для кожного потоку i . Рівноважний потік f можливий відносно вектора r , якщо увесь трафік спрямовується таким чином: для кожного $i \in 1, 2, k$, $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i$. Зокрема, не визначено конкретних обмежень пропускних здатностей для ребер.

Зрештою, кожне ребро e мережі має функцію витрат $c_e : R^+ \rightarrow R^+$. Завжди припускається, що функції витрат є невід'ємними, неперервними та неспадними. Усі ці припущення є доцільними в застосунках, де вартість являє собою величину, яка зростає лише з перевантаженням мережі; затримка є одним із природних прикладів. Коли розглядається ціна анархії в розділі 3, також досліджується більш суворі припущення щодо функцій витрат мережі. Неатомарна егоїстична гра маршрутизації, або просто неатомарний екземпляр, визначається трійкою виду (G, r, c) .

Визначимо вартість шляху P відносно рівноважного потоку f як суму вартостей складових ребер:

$$c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e), \quad \text{де } f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P$$

позначає обсяг трафіку, що використовує шляхи, що містять ребро e . Оскільки очікується, що егоїстичний трафік намагатиметься мінімізувати свою вартість, ми доходимо наступного визначення.

Означення 1.1 (Неатомарний рівноважний потік). [1]

Нехай f — це допустимий рівноважний потік для неатомарного екземпляра (G, r, c) . Потік f є рівноважним потоком маршрутизації, якщо для

кожного потоку $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ та кожної пари $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ з $s_i - t_i$ шляхи з $f_P > 0$,

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(f).$$

Іншими словами, всі шляхи, що використовуються рівноважним потоком f , мають мінімально можливу вартість (враховуючи їх джерело, стік та перевантаження, спричинене f). Зокрема, всі шляхи даного потоку, що використовуються рівноважним потоком, мають однакову вартість. Розділ 2.1 доводить, що кожен неатомарний екземпляр допускає принаймні один рівноважний потік, і що всі рівноважні потоки неатомарного екземпляра мають однакову вартість.

У прикладі Пігу маршрутизація всього трафіку по другому каналу визначає рівноважний потік; лише один шлях передає потік, і єдина альтернатива має однакову вартість. Розподіл трафіку порівню між двома каналами визначає потік, який не є рівноважним; перший канал передає суворо додатну кількість трафіку, а його вартість дорівнює 1, але існує суворо дешевша альтернатива (другий канал з вартістю $1/2$).

Коли кількісно оцінюється неефективність рівноважних потоків у розділі 3, розглядається лише утилітарна мета мінімізації загальних витрат, понесених трафіком. Саме тому, оскільки витрати, понесені гравцем, який обирає шлях P у рівноважному потоці f , дорівнюють $c_P(f)$, а f_P позначає обсяг трафіку, який обирає шлях P , визначаємо *вартість* потоку маршрутизації f як

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P(f) f_P. \quad (1)$$

Розкладання $c_P(f)$ як $\sum_{e \in P} c_e(f_e)$ та зміна порядку підсумовування у (1) дає корисне альтернативне визначення вартості потоку:

$$C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e. \quad (2)$$

Наприклад, (G, r, c) , називається доцільний потік *оптимальним*, якщо він мінімізує вартість для всіх доцільних потоків.

Ціна анархії неатомної егоїстичної гри маршрутизації, стосовно цієї мети, є співвідношенням між вартістю рівноважного потоку та вартістю оптимального потоку. Можемо використовувати вартість довільного рівно-

важного потоку замість вартості найгіршого рівноважного потоку, оскільки всі рівноважні потоки неатомарного екземпляра мають однакову вартість (Розділ 2.1). У прикладі Пігу рівноважний потік спрямовує весь трафік по другому каналу зв'язку та коштує 1. Як побачимо в (Розділ 2.1), оптимальний потік розподіляє трафік порівну між двома каналами зв'язку та коштує $3/4$. Ціна анархії в прикладі Пігу, таким чином, становить $4/3$.

Цей розділ закінчується важливими прикладами неатомарних егоїстичних мереж маршрутизації.

Приклад 1.1 (Нелінійний приклад Пігу). Неефективність рівноважного потоку в прикладі Пігу можна посилити, здавалося б, незначною модифікацією мережі. Припустимо, що замінюється раніше лінійна функція вартості $c(x) = x$ на нижньому краю на високолінійну $c(x) = x^p$ для великих p (Рис. 1). Як і в прикладі Пігу, вартість унікального рівноважного потоку дорівнює 1. Оптимальний потік маршрутизує невелику ϵ частку трафіку на верхньому краю та має вартість $\epsilon + (1 - \epsilon)^{p+1}$, де ϵ прагне до 0, коли p прагне до нескінченності. Точніше, (Розділ 2.1) показує, що $\epsilon = 1 - (p + 1)^{-1/p}$. Коли p прагне до нескінченності, вартість оптимального потоку наближається до 0, а ціна анархії зростає безмежно. Доведення (1.3.1) показує, що цей темп зростання приблизно $p / \ln p$ при $p \rightarrow \infty$.

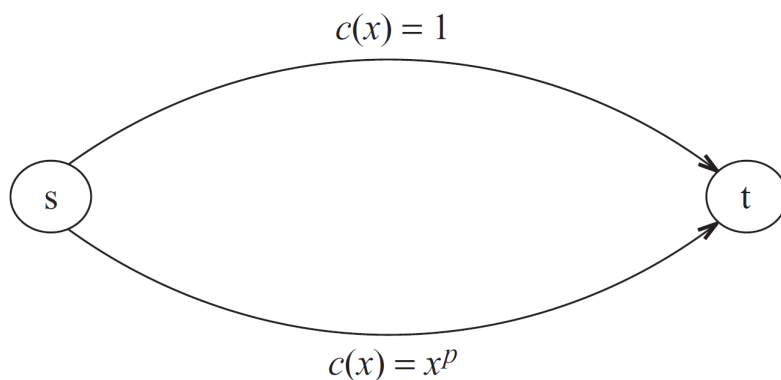


Рис. 1.2. Нелінійний варіант прикладу Пігу

Хоча ціна анархії в останньому прикладі не більша, ніж у прикладі Пігу, вона, можливо, є більш шокуючим проявом неефективності рівноваги в егоїстичних мережах маршрутизації.

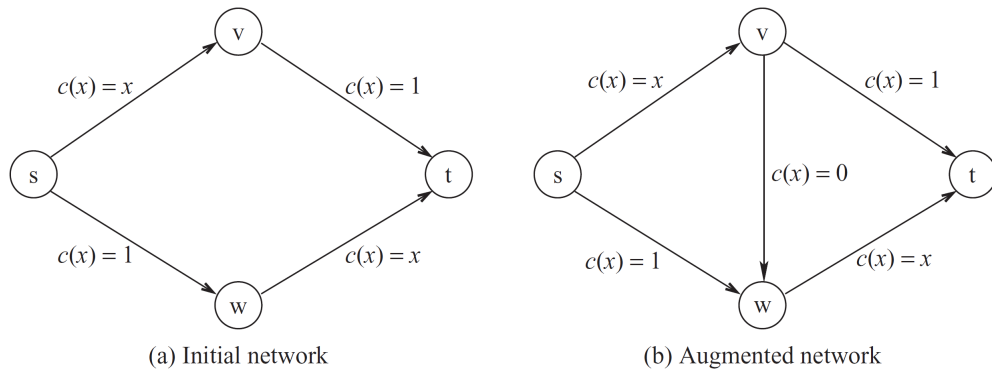


Рис. 1.3. Парадокс Браесса. Додавання інтуїтивно корисного ребра може негативно вплинути на весь трафік.

Приклад 1.2 (Парадокс Браесса). Розглянемо мережу з чотирьох вузлів, показану на рисунку 3(a). Існує два непересічні маршрути від s до t , кожен із сукупною вартістю $1 + x$, де x – це обсяг трафіку, який використовує маршрут. Припустимо, що є одна одиниця трафіку. У рівноважному потоці трафік розподіляється порівну між двома маршрутами, і весь трафік зазнає $3/2$ одиниць вартості.

Тепер припустимо, що, намагаючись зменшити вартість, з якою стикається трафік, будуємо ребро з нульовою вартістю, що з'єднує середні точки двох існуючих маршрутів. Нова мережа показана на рис. 3(b).

Попередній рівноважний потік не зберігається в новій мережі: вартість нового маршруту $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$ ніколи не гірша, ніж вартість вздовж двох початкових шляхів, і вона строго менша, коли якийсь трафік не використовує його. Як наслідок, унікальний рівноважний потік спрямовує весь трафік новим маршрутом. Через значні затори на ребрах (s, v) та (w, t) , весь трафік тепер зазнає двох одиниць вартості. Парадокс Браесса, таким чином, показує, що інтуїтивно корисна дія додавання нового ребра з нульовою вартістю може збільшити вартість, яку зазнає весь трафік!

Оптимальний потік у другій мережі з прикладу 2 такий самий, як і рівноважний потік у першій мережі. Ціна анархії у другій мережі, таким чином, становить $4/3$, так само, як і в прикладі Пігу. В розділі 3.1 буде доведено, що жоден неатомарний екземпляр з функціями вартості виду $ax + b$ не має ціни анархії, більшої за $4/3$.

1.1.2 Атомарна егоїстична маршрутизація

Атомарна егоїстична гра маршрутизації або атомарний екземпляр визначається тими ж інгредієнтами, що й неатомарний: орієнтований граф $G = (V, E)$, k пар джерело-приймач $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$, додатна кількість r_i трафіку для кожної пари (s_i, t_i) та невід’ємна, неперервна, неспадна функція вартості $c_e : R^+ \rightarrow R^+$ для кожного ребра e . Також позначаємо атомарний екземпляр трійкою (G, r, c) . Інтуїтивна різниця між неатомарним та атомарним екземпляром полягає в тому, що в першому кожен потік представляє велику популяцію індивідів, кожен з яких контролює незначну кількість трафіку; в останньому випадку кожен потік представляє одного гравця, який повинен направляти значну кількість трафіку одним шляхом.

Більш формально, атомарні екземпляри є скінченними іграми з одночасними ходами. Існує k гравців, по одному для кожної пари джерело-приймач. Різні гравці можуть мати однакові пари джерело-приймач. Набір стратегій гравця i — це множина $\mathcal{P}_i$ з $s_i - t_i$ шляхів, і якщо гравець i вибирає шлях P , то він направляє свої r_i одиниць трафіку на P . Рівноважний потік тепер є невід’ємним вектором, індексованим гравцями та шляхами, де $f_P^{(i)}$ позначає обсяг трафіку, який гравець i направляє по $s_i - t_i$ шляху P . Рівноважний потік f є доцільним для атомарного екземпляра, якщо він відповідає профілю стратегії: для кожного гравця i , $f_P^{(i)}$ дорівнює r_i рівно для одного шляху $s_i - t_i$ та дорівнює 0 для всіх інших шляхів. Вартість $c_P(f)$ шляху P відносно потоку f та вартість $C(f)$ потоку f визначені, як у розділі 1.1.

Рівноважний потік атомарної егоїстичної гри маршрутизації — це доцільний потік, вартість якого жоден гравець не може строго зменшити, вибравши інший шлях для свого трафіку.

Означення 1.2 (Атомарний рівноважний потік). [2]

Нехай f — це допустимий рівноважний потік для атомарного екземпляра (G, r, c) . Потік f є рівноважним, якщо для кожного гравця $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ та кожної пари $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ з $s_i - t_i$ шляхів з $f_P^{(i)} > 0$,

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(f),$$

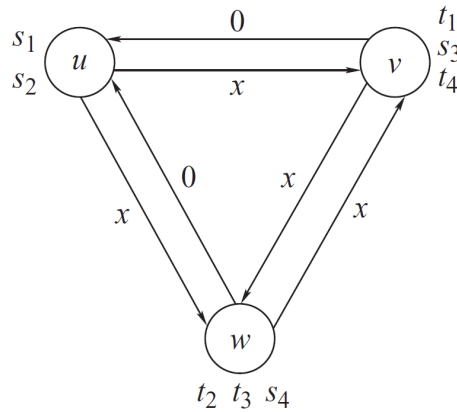


Рис. 1.4. Приклад ААЕ. В атомарних екземплярах з афінними функціями витрат різні рівноважні потоки можуть мати різну вартість, а ціна анархії може досягати $5/2$.

де $\tilde{f}$ — це рівноважний потік, ідентичний f , за винятком того, що $\tilde{f}_P^{(i)} = 0$ та $\tilde{f}_P^{(i)} = r_i$.

Хоча визначення неатомарних та атомних екземплярів дуже схожі, ці дві моделі технічно досить різні. Наступний приклад ілюструє дві з цих відмінностей. По-перше, різні рівноважні потоки атомарного екземпляра можуть мати різні витрати; як стверджується в Розділі 1.1 та доведено в Розділі 2.1, всі рівноважні потоки неатомарного екземпляра мають однакову вартість. По-друге, ціна анархії в атомних екземплярах може бути більшою, ніж у їхніх неатомарних аналогах. Наступний атомний екземпляр має афінні функції вартості – виду $ax + b$ – і його ціна анархії дорівнює $5/2$; у кожному неатомному екземплярі з афінними функціями вартості ціна анархії не перевищує $4/3$.

Приклад 1.3 (Приклад ААЕ). Розглянемо двонаправлену трикутну мережу, показану на рисунку 4. Припустимо, що є чотири гравці, кожному з яких потрібно маршрутизувати одну одиницю трафіку. Перші два мають джерело u та приймачі v та w відповідно; третій має джерело v та приймач w ; а четвертий має джерело w та приймач v . Кожен гравець має дві стратегії: шлях з одним переходом та шлях з двома переходами. В оптимальному потоці всі гравці маршрутизуються своїми шляхами з одним переходом, а вартість цього потоку дорівнює 4. Цей потік також є рівноважним потоком. З іншого боку, якщо всі гравці маршрутизуються своїми шляхами з двома переходами, то ми отримуємо другий рівноважний потік. Оскільки перші

два гравці несуть по три одиниці витрат, а останні два гравці несуть по дві одиниці витрат, цей рівноважний потік має вартість 10. Тому ціна анархії в цьому випадку дорівнює $(10/4 = 2,5)$.

У наступному прикладі досліджуються варіант прикладу ААЕ.

Приклад 1.4 (Модифікація АЕЕ). Розглянемо атомарну гру з двома стратегічними маршрутами P_1, P_2 , граф $G = (V, E)$, і n гравців з вагами w_i . Нехай функції витрат $c_e(x)$ є афінними, тобто:

$$c_e(x) = a_e x + b_e$$

Мета — сконструювати такий зважений приклад, щоб:

$$\text{PoA} = \frac{C(f_{\text{eq}})}{C(f_{\text{opt}})} = \frac{3\sqrt{2.618} + 5}{2}$$

Це можна зробити, модифікуючи приклад ААЕ: двоє гравців з різними вагами w_1, w_2 , і маршрути перетинаються на ребрах з витратами $c(x) = x$ або $c(x) = 1$.

Встановивши: $w_1 = 1, w_2 = \sqrt{2.618} \approx 1.618$ та побудувавши екземпляр так, щоб один гравець створював зовнішні витрати іншому через функцію витрат $c(x) = x$, отримаємо потрібну ціну анархії.

Приклад 1.5 (Неіснування у зважених атомарних екземплярах). Розглянемо мережу, зображену на рисунку 5. Розширимо цю мережу до атомарної егоїстичної гри маршрутизації, додавши двох гравців, обидва з джерелом s та приймачем t , з обсягами трафіку $r_1 = 1$ та $r_2 = 2$.

Стверджуємо, що в цьому атомарному випадку немає рівноважного потоку. Щоб довести це, нехай P_1, P_2, P_3 та P_4 позначають шляхи $s \rightarrow t, s \rightarrow v \rightarrow t, s \rightarrow w \rightarrow t$ та $s \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow t$ відповідно. Наступні чотири твердження тоді впливають з цього твердження.

- 1) Якщо гравець 2 обирає шлях P_1 або P_2 , тоді єдиною відповіддю гравця 1, яка мінімізує його вартість, є шлях P_4 .
- 2) Якщо гравець 2 обирає шлях P_3 або P_4 , то єдина найкраща відповідь гравця 1 – це шлях P_1 .

- 3) Якщо гравець 1 обирає шлях P_4 , то єдина найкраща відповідь гравця 2 – це шлях P_3 .
- 4) Якщо гравець 1 обирає шлях P_1 , то єдина найкраща відповідь гравця 2 – це шлях P_2 .

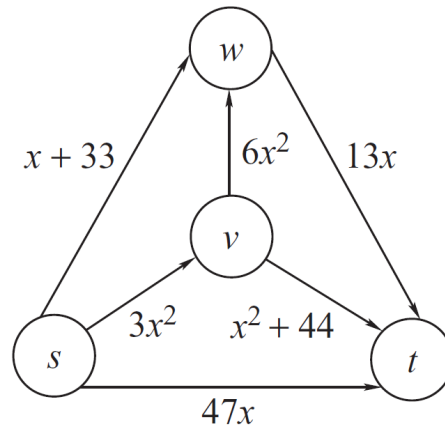


Рис. 1.5. Атомарний екземпляр без рівноважного потоку

З іншого боку, Розділ 2.2 доводить, що кожен атомарний екземпляр, у якому всі гравці маршрутизують однакову кількість трафіку, допускає принаймні один рівноважний потік. Ми називаємо екземпляри цього типу незваженими. Приклад 3 є незваженим екземпляром, тоді як Приклад 5 – ні.

1.2 Існування, унікальність та потенційні функції

У цьому розділі зібрано результати щодо існування та унікальності рівноважних потоків у неатомарних та атомарних егоїстичних маршрутизаційних іграх. Також буде введено метод потенційних функцій, фундаментальний метод доведення.

1.2.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація: Існування та унікальність

Наступна мета – показати, що в неатомарних егоїстичних маршрутизаційних іграх рівноважні потоки завжди існують і є по суті унікальними. Під «по суті унікальними» мається на увазі, що всі рівноважні потоки неатомарного екземпляра мають однакову вартість. Формально мета – довести наступну теорему.

Теорема 1.1 (Існування та унікальність рівноважних потоків). [3]

Нехай (G, r, c) — Неатомарний екземпляр.

(a) Екземпляр (G, r, c) допускає принаймні один рівноважний потік.

(b) Якщо f та $\tilde{f}$ — рівноважні потоки маршрутизації для (G, r, c) , тоді $c_e(f_e) = c_e(\tilde{f}_e)$ для кожного ребра e .

Частина (b) теореми та Визначення 1 означають, що два рівноважні потоки неатомарного екземпляра мають однакову вартість.

Доведемо Теорему 1 методом потенційної функції. Ідея цього методу полягає в тому, щоб показати дійснозначну «потенційну функцію», визначену на результатах гри, таку, що рівноваги гри є саме тими результатами, які оптимізують потенційну функцію. Потенційні функції корисні, оскільки вони дозволяють застосовувати методи оптимізації до вивчення рівноваг. Коли гра допускає потенційну функцію, зазвичай існують наслідки для існування, унікальності та неефективності рівноваг.

Щоб описати потенційні функції, що відповідають неатомарним егоїстичним маршрутним іграм, представляємо характеристику оптимальних потоків у таких іграх. Щоб чітко сформулювати цю характеристику, припустимо, що для кожного ребра e заданого неатомарного екземпляра функція $xc_e(x)$ є неперервно диференційованою та опуклою. Зауважте, що $xc_e(x)$ — це внесок у функцію соціальних витрат (2) від трафіку на краю e . Нехай $c_e^*(x) = (xc_e(x))' = c_e(x) + xc_e'(x)$ позначає функцію граничних витрат для ребра e . Наприклад, якщо $c(x)$ позначає функцію витрат $c(x) = ax^p$ для деяких $a, p \geq 0$, тоді відповідна функція граничних витрат має вигляд $c^*(x) = (p+1)ax^p$. Нехай $c_p^*(f) = \sum_{e \in P} c_e^*(f)$ позначає суму граничних витрат ребер на шляху P відносно потоку f . Характеристика наведена нижче.

Припущення 1.1 (Характеристика оптимальних потоків). *Нехай (G, r, c) — неатомічний екземпляр, такий що для кожного ребра e функція $x \cdot c_e(x)$ є опуклою та неперервно диференційованою. Нехай c_e^* позначає функцію граничних витрат ребра e . Тоді f^* — оптимальний потік маршрутизації для (G, r, c) тоді і тільки тоді, коли для кожного потоку $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ та кожної пари $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}_i$ $s_i - t_i$ шляхів з $f_P^* > 0$,*

$$c_P^*(f^*) \leq c_{\tilde{P}}^*(f^*).$$

Припущення 1 безпосередньо впливає з умов першого порядку опуклої оптимізаційної задачі з обмеженнями невід’ємності. Опускаємо деталі та зосереджуємося на тому, як твердження призводить до потенційної функції для рівноважних потоків у неатомарних випадках, а також на наслідках цієї потенційної функції для існування та єдиності рівноважних потоків.

Визначення 1 та припущення 1 безпосередньо означають, що рівноважні потоки та оптимальні потоки — це одне й те саме, тільки стосовно різних наборів функцій вартості.

Наслідок 1.1 (Еквівалентність рівноважних та оптимальних потоків). [3]

Нехай (G, r, c) — Неатомарний екземпляр, такий що для кожного ребра e функція $x \cdot c_e(x)$ є опуклою та неперервно диференційованою. Нехай c_e^ позначає функцію граничних витрат ребра e . Тоді f^* — оптимальний потік маршрутизації для (G, r, c) тоді і тільки тоді, коли це рівноважний потік для (G, r, c^*) .*

Наприклад, у прикладі Пігу функції граничних витрат двох ребер такі: $c^*(x) = 1$ та $c^*(x) = 2x$. Рівноважний потік відносно функцій граничних витрат розподіляє трафік порівну між двома посиленнями, зрівнюючи їхні граничні витрати на рівні 1; Згідно з наслідком 1, цей потік є оптимальним у вихідній мережі. У нелінійному варіанті прикладу Пігу (Приклад 1) функції граничних витрат мають вигляд $c^*(x) = 1$ та $c^*(x) = (p+1)x^p$; таким чином, оптимальний потік спрямовує $(p+1)^{-1/p}$ одиниць трафіку на другу ланку, а решту — на першу. У парадоксі Брасса з додаванням краю з нульовими витратами (Приклад 2 та Рисунок 3(b)), маршрутизація половини трафіку на кожному зі шляхів $s \rightarrow v \rightarrow t$ та $s \rightarrow w \rightarrow t$ зрівнює граничні витрати всіх трьох шляхів на рівні 2, і тому забезпечує оптимальний потік.

Щоб відновити Визначення 1 як умову оптимальності, шукаємо функцію $h_e(x)$ для кожного ребра e – яка відіграє попередню роль $xc_e(x)$ – таку, що $h'_e(x) = c_e(x)$. Покладаючи $h_e(x) = \int_0^x c_e(y)dy$ для кожного ребра e , отримуємо бажану потенційну функцію. Більше того, оскільки c_e є неперервною та неспадною для кожного ребра e , кожна функція h_e є як неперервно диференційованою, так і опуклою.

Точніше, назвемо

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x) dx \quad (3)$$

потенційною функцією неатомарного екземпляра (G, r, c) . Використовуючи припущення 1, де кожна функція $x \cdot c_e(x)$ замінена на $h_e(x) = \int_0^x c_e(y) dy$, отримуємо таку ж умову, як у визначенні 1; таким чином, ми охарактеризували рівноважні потоки як глобальні мінімізатори потенційної функції Φ .

Припущення 1.2 (Потенціальна функція для рівноважних потоків). *Нехай (G, r, c) — Неатомарний екземпляр. Потік, можливий для (G, r, c) , є рівноважним потоком тоді і тільки тоді, коли він є глобальним мінімумом відповідної потенційної функції Φ , заданої в (3).*

Доведення теореми 1. Спочатку зазначимо, що за визначенням множину можливих потоків (G, r, c) можна ототожнити з компактною (тобто замкнутою та обмеженою) підмножиною $|\mathcal{P}|$ -вимірного евклідового простору. Оскільки функції вартості ребер є неперервними, потенційна функція є неперервною функцією на цій множині. Згідно з теоремою Вейєрштрасса з математичного аналізу, потенційна функція Φ досягає мінімального значення на цій множині. Згідно з припущення 2, кожна точка, в якій Φ досягає свого мінімуму, відповідає рівноважному потоку (G, r, c) .

Для частини (b) нагадаємо, що кожна функція вартості не спадає, а отже, кожен доданок у правій частині (3) є опуклим. Отже, потенційна функція Φ є опуклою функцією.

Тепер припустимо, що f та $\tilde{f}$ є рівноважними потоками маршрутизації для (G, r, c) . Згідно з припущення 2, як f , так і $\tilde{f}$ мінімізують потенційну функцію Φ . Ми розглядаємо всі опуклі комбінації f та $\tilde{f}$ – тобто всі вектори виду $\lambda f + (1 - \lambda)\tilde{f}$ для $\lambda \in [0, 1]$. Всі ці вектори є допустимими потоками.

Оскільки Φ є опуклою функцією, хорда між двома точками на її графіку не може проходити нижче її графіка. Маємо

$$\Phi(\lambda f + (1 - \lambda)\tilde{f}) \leq \lambda\Phi(f) + (1 - \lambda)\Phi(\tilde{f}) \quad (4)$$

для кожного $\lambda \in [0, 1]$. Оскільки і f , і Φ є глобальними мінімумами Φ , нерівність (4) повинна виконуватися з рівністю для всіх їхніх опуклих комбінацій. Оскільки кожен доданок Φ є опуклим, це може статися лише тоді, коли кожен доданок Φ є лінійним між значеннями Φ та Φ . У свою чергу, це означає, що кожна функція вартості Φ є постійною між Φ та Φ . $\square$

1.2.2 Атомарна егоїстична маршрутизація: Існування

Тепер розглянемо рівноважні потоки в атомарних екземплярах. Приклад ААЕ показує, що в таких випадках неможливі цікаві результати унікальності, тому зосередимося на існуванні рівноважних потоків. Аналогічно, Приклад 5 демонструє, що загальний атомарний екземпляр не обов'язково повинен допускати рівноважний потік. Існує два підходи до обходу цього контрприкладу. Перший, розглянутий у цьому розділі, полягає в тому, щоб накласти додаткові обмеження на атомарні екземпляри, щоб гарантовано існували рівноважні потоки. Другий підхід, обговорений у Зауваженні 4, полягає в тому, щоб послабити концепцію рівноваги, щоб рівновага існувала в кожному атомарному екземплярі.

Ключовим результатом у цьому розділі є наступна теорема, яка встановлює існування рівноважних потоків в атомарних екземплярах, в яких усі гравці контролюють однакову кількість трафіку.

Теорема 1.2 (Рівноважні потоки у незважених атомарних екземплярах).
[4] Нехай (G, r, c) - атомарний екземпляр, у якому кожна кількість трафіку r_i дорівнює загальному додатному значенню R . Тоді (G, r, c) допускає принаймні один рівноважний потік.

Доведення. Теорему отримано шляхом дискретизації потенціальної функції (3) для неатомарних екземплярів і доведення теореми 1(a). Для простоти

припустимо, що $R = 1$. Задано множину

$$\Phi_a(f) = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^{f_e} c_e(i) \quad (5)$$

для кожного можливого рівноважного потоку f . Зауважте, що Φ_a є такою самою, як і попередня функція потенціалу Φ для неатомарних екземплярів, за винятком того, що інтеграл $\int_0^{f_e} c(x) dx$ замінено на суму $\sum_{i=1}^{f_e} c_e(i)$.

Оскільки атомарний екземпляр (G, r, c) має скінченну кількість гравців, і кожен з них має скінченну кількість стратегій, існує лише скінченна кількість можливих потоків. Один з них, назовемо його f , є глобальним мінімумом потенційної функції Φ_a . Ми стверджуємо, що f є рівноважним потоком для (G, r, c) . Щоб довести це, припустимо для суперечності, що у f гравець i може строго зменшити свої витрати, відхилившись від шляху P до шляху $\tilde{P}$, отримавши новий потік $\tilde{f}$. Іншими словами, ми припускаємо, що

$$0 > c_{\tilde{P}}(\tilde{f}) - c_P(f) = \sum_{e \in \tilde{P} \setminus P} c_e(f_e + 1) - \sum_{e \in P \setminus \tilde{P}} c_e(f_e). \quad (6)$$

З іншого боку, розглянемо вплив відхилення гравця i на потенційну функцію Φ_a : для ребер у $\tilde{P} \setminus P$ відповідна сума у (5) набуває додаткового члена $c_e(f_e + 1)$; для ребер у $P \setminus \tilde{P}$ відповідна сума втрачає член $c_e(f_e)$; а для ребер у $P \cap \tilde{P}$ відповідна сума залишається незмінною. Таким чином, $\Phi_a(\tilde{f}) - \Phi_a(f)$ є саме третім виразом (6). Оскільки цей вираз від'ємний, то значення потенційної функції $\tilde{f}$ строго менше, ніж значення f , що суперечить вибору f . $\square$

Зауваження 1.1. Доведення теореми 2 встановлює чудову властивість потенційної функції Φ_a : вона «відслідковує» зміну вартості гравця, який відхиляється. Більш формально, для кожного потоку, кожного гравця і кожного відхилення гравця, зміна витрат гравця ідентична зміні потенційної функції. Ця властивість має наслідки, що виходять за межі результату існування теореми 2. Наприклад, з неї випливає, що «динаміка найкращої реакції» гарантовано збігається до рівноважного потоку.

Зауваження 1.2. Доведення теореми не використовувало жодних припущень щодо функцій граничних витрат. Зокрема, вона є справедливою і тоді,

коли функції витрат не є неспадаючими.

Наступна теорема гарантує існування рівноважних потоків за іншого обмеження - афінних функцій витрат. (Нагадаємо, що функція витрат $c_e(x)$ є *афінною*, якщо вона має вигляд $a_e x + b_e$; завжди вважаємо, що $a_e, b_e \geq 0$).

Теорема 1.3 (Рівноважні потоки з афінними функціями витрат). [5]

Нехай (G, r, c) - атомарний екземпляр з афінними функціями витрат. Тоді (G, r, c) допускає принаймні один рівноважний потік.

Доведення. Нехай (G, r, c) — атомарний екземпляр маршрутизаційної гри, в якому:

$G = (V, E)$ — орієнтований граф;

$r = (r_1, \dots, r_n)$ — вектори попитів гравців;

$c = (c_e)_{e \in E}$ — набір афінних функцій витрат, тобто:

$$c_e(x) = a_e x + b_e, \quad \text{де } a_e \geq 0, \quad b_e \geq 0.$$

Тоді існує хоча б один рівноважний потік.

Нехай кожен гравець i має скінченну множину допустимих маршрутів. Позначимо через P_i маршрут, який вибрав гравець i в потоці f . Визначимо: f_e — сумарний потік через ребро e (сума попитів усіх гравців, маршрути яких проходять через e),

S_e — множина гравців, які використовують ребро e у своїх маршрутах,

r_i — попит гравця i .

Визначимо наступну функцію:

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \left(c_e(f_e) \cdot f_e + \sum_{i \in S_e} c_e(r_i) \cdot r_i \right).$$

Ця функція враховує як загальні витрати на ребрі, так і внесок кожного гравця окремо. Оскільки кожен гравець має скінченну кількість маршрутів, а кількість гравців n є скінченною, то кількість можливих комбінацій вибору маршрутів також є скінченною. Отже, функція $\Phi(f)$ визначена на скінченній множині.

Оскільки $\Phi(f)$ визначена на скінченній множині, вона досягає свого мінімуму при деякому розподілі f^* . Припустимо, що f^* не є рівноважним потоком.

Тоді існує гравець i , який може змінити свій маршрут з P_i на P'_i , такий що:

$$\sum_{e \in P'_i} c_e(f'_e + r_i) < \sum_{e \in P_i} c_e(f_e),$$

де f' — потік, який утворюється після цієї зміни.

Тоді отримаємо:

$$\Phi(f') - \Phi(f^*) = \left(\sum_{e \in P'_i} c_e(f'_e + r_i) \right) - \left(\sum_{e \in P_i} c_e(f_e) \right) < 0,$$

тобто $\Phi(f') < \Phi(f^*)$, що суперечить мінімальності f^* . Отже, ніхто з гравців не має стимулу змінювати маршрут, і f^* є рівноважним потоком.

Отже, атомарний екземпляр (G, r, c) з афінними функціями витрат завжди має хоча б один рівноважний потік. $\square$

1.3 Ціна анархії егоїстичного маршруту

1.3.1 Неатомарна егоїстична маршрутизація: Ціна анархії

Як ми знаємо з нелінійного варіанту прикладу Пігу (приклад 3), ціна анархії залежить від «нелінійності» функцій вартості мережі. Мета - показати, що вона не залежить ні від чого іншого - ні від розміру мережі, ні від структури мережі, ні від кількості потоків. Точніше, покажемо, що для кожного мислимого обмеження на функції витрат мережі ціна анархії максимізується (серед усіх багатопотокових мереж) тією мережею, яка найкраще «імітує» приклад Пігу та його нелінійні варіанти.

Зауважимо, що функція потенціалу, яка характеризує неатомарні рівноважні потоки (Пропозиція 2), вже дає хорошу, але не оптимальну верхню межу для ціни анархії. Інтуїтивне пояснення просте: якщо рівноважні потоки точно оптимізують потенційну функцію (3), яка є добрим наближенням цільової функції (2), то вони також повинні бути приблизно оптимальними.

Теорема 1.4 (Верхня межа потенційної функції). [6] *Нехай (G, r, c) - неатомарний екземпляр, і припустимо, що $x \cdot c_e(x) \leq \gamma \cdot \int_0^x c_e(y) dy$ для всіх $e \in E$ і $x \geq 0$. Тоді ціна анархії (G, r, c) не перевищує γ .*

Доведення. Нехай f та f^* - рівноважний та оптимальний потоки маршрутизації для (G, r, c) відповідно. Оскільки функції вартості не є спадними, вартість потоку (2) завжди не менша за значення його потенційної функції (3). Гіпотеза гарантує, що вартість потоку не перевищує γ разів значення його потенційної функції. Теорема випливає з запису

$$C(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f^*) \leq \gamma \cdot C(f^*),$$

причому друга нерівність випливає з Припущення 2 □

Теорема 6 передбачає, що ціна анархії егоїстичної маршрутизації є великою лише в мережах з «дуже нелінійними» функціями витрат. Наприклад, якщо c_e - поліноміальна функція зі степенем не більше p і невід'ємними коефіцієнтами, то $x \cdot c_e(x) \leq (p + 1) \int_0^x c_e(y) dy$ для всіх $x \geq 0$. Теорема 4 показує, що ціна анархії в неатомарних екземплярах з такими функціями витрат є щонайбільше лінійною в p .

Наслідок 1.2 (Границя потенційної функції для поліномів). [6] *Якщо (G, r, c) є неатомарним екземпляром з функціями витрат, які є поліномами з невід'ємними коефіцієнтами і степенем не більше p , то ціна анархії для (G, r, c) не більше $p + 1$.*

Означення 1.3 (Межа Пігу). [7] Нехай $\mathcal{C}$ - непорожня множина функцій витрат. Межа Пігу (англ. Pigou bound) $\alpha(\mathcal{C})$ для $\mathcal{C}$ має вигляд

$$\alpha(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{x, r \geq 0} \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r - x)c(r)}, \quad (7)$$

з розумінням того, що $0/0 = 1$.

Сенс границі Пігу полягає у тому, що вона знижує ціну анархії у випадках з функціями витрат у $\mathcal{C}$.

Припущення 1.3. *Нехай $\mathcal{C}$ - множина функцій витрат, яка містить усі функції постійних витрат. Тоді ціна анархії у неатомарних екземплярах з функціями витрат в $\mathcal{C}$ може бути як завгодно близькою до $\alpha(\mathcal{C})$.*

Доведення. Зафіксуємо вибір $c \in \mathcal{C}$ та $x, r \geq 0$. Ми можемо завершити доведення, показавши егоїстичну маршрутну мережу з функціями витрат у $\mathcal{C}$ і ціною анархії принаймні $c(r)r/[c(x)x + (r-x)c(r)]$. Оскільки c не спадає, цей вираз не перевищує 1, якщо $x \geq r$; отже, ми можемо припустити, що $x > r$.

Нехай G - мережа з двома вершинами і двома ребрами, як показано на рисунку 2. Задамо нижньому ребру функцію витрат $c_1(y) = c(y)$, а верхньому - функцію постійних витрат $c_2(y) = c(r)$. За припущенням, обидві ці функції витрат лежать у проміжку $\mathcal{C}$. Встановіть швидкість трафіку рівною r . Маршрутизація всього трафіку по нижньому краю дає рівноважний потік з вартістю $c(r)r$. Маршрутизація x одиниць трафіку по нижньому краю і $r - x$ одиниць трафіку по верхньому краю дає можливий потік з вартістю $[c(x)x + (r-x)c(r)]$. Таким чином, ціна анархії у цьому випадку принаймні $c(r)r/[c(x)x + (r-x)c(r)]$, як і бажано. $\square$

Хоча у Припущенні 3 припускається, що множина $\mathcal{C}$ містить усі функції постійних витрат, її висновок виконується завжди, коли $\mathcal{C}$ є *неоднорідною* у тому сенсі, що $c(0) > 0$ для деяких $c \in \mathcal{C}$

Далі покажемо, що хоча межа Пігу базується лише на прикладах, подібних до Пігу, вона також є верхньою межею ціни анархії в загальних багатопоточних мережах. Доведення вимагає наступної варіаційної нерівності, що характеризує рівноважні потоки.

Припущення 1.4 (Характеристика варіаційної нерівності). *Нехай f є допустимим розподілом потоку для неатомарного екземпляра (G, r, c) . Потік f є рівноважним потоком тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e \leq \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e^*$$

для кожного потоку f^* , допустимого для (G, r, c) .

Доведення. Зафіксуємо f і визначимо функцію H_f на множині допустимих потоків через

$$H_f(f^*) = \sum_{i=1}^k \sum_{P \in \mathcal{P}_i} c_P(f) f_P^* = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e^*;$$

той самий зворотний порядок доданків, який було використано для доведення еквівалентності (1) і (2), показує, що ці два означення $H_f(f^*)$ узгоджуються між собою. Величина $H_f(f^*)$ позначає вартість потоку f^* після того, як функція вартості кожного ребра e була замінена на сталу функцію, яка всюди дорівнює $c_e(f_e)$. За другим визначенням H_f , пропозиція еквівалентна твердженню, що потік f є рівноважним потоком тоді і тільки тоді, коли він мінімізує $H_f(\cdot)$ серед усіх можливих потоків.

Вивчення першого означення H_f показує, що розподіл потоку f^* мінімізує H_f тоді і тільки тоді, коли для кожного потоку i $f_P^* > 0$ тільки для шляхів P , які мінімізують $c_P(f)$ для всіх шляхів s_i-t_i . Оскільки потік f задовольняє цій умові тоді і тільки тоді, коли він є рівноважним, то доведення завершено. $\square$

Теорема 1.5 (Жорсткість границі Пігу). [7]

Нехай $\mathcal{C}$ - множина функцій витрат, а $\alpha(\mathcal{C})$ - границя Пігу для $\mathcal{C}$. Якщо (G, r, c) є неатомарним екземпляром з функціями витрат у $\mathcal{C}$, то ціна анархії (G, r, c) не перевищує $\alpha(\mathcal{C})$.

Доведення. Нехай f^* та f - оптимальний та рівноважний потоки, відповідно, для неатомарного екземпляра (G, r, c) з функціями вартості з множини $\mathcal{C}$. Теорема випливає з запису

$$\begin{aligned} C(f^*) &= \sum_{e \in E} c_e(f_e^*) f_e^* \\ &\geq \frac{1}{\alpha(\mathcal{C})} \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e + \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e) c_e(f_e) \\ &\geq \frac{C(f)}{\alpha(\mathcal{C})}, \end{aligned}$$

де перша нерівність випливає з означення 3, застосованого до кожного ребра e з $x = f_e^*$ і $r = f_e$, а друга нерівність випливає з припущення 4. $\square$

Пропозиція 3 і теорема 5 показують, що для практично кожного фіксованого обмеження на допустимі функції витрат ціна анархії максимізується в прикладах, подібних до прикладу Пігу. Визначення найбільшої можливої ціни анархії в прикладах, подібних до Пігу (тобто межі Пігу), у багатьох випадках є розв'язуваною проблемою. Наприклад, вона точно дорівнює $4/3$,

коли $\mathcal{C}$ є множиною афінних функцій вартості, і у більш загальному випадку $[1 - p \cdot (p+1)^{-(p+1)/p}]^{-1} \approx p / \ln p$, коли $\mathcal{C}$ є множиною многочленів зі степенем не більше p і невід'ємними коефіцієнтами. У цих випадках максимальна ціна анархії (серед усіх багатопоточних випадків) досягається у випадках, наведених у прикладі 1. Межа Пігу також відома для деяких інших класів функцій витрат.

Доведення. Ціна анархії в узагальненому прикладі Пігу

Розглянемо узагальнений приклад Пігу (див. приклад 1), який має два паралельних маршрути з ємністю одиничного потоку $r = 1$:

Перший маршрут має фіксовану вартість: $c_1(x) = 1$

Другий маршрут має нелінійну вартість: $c_2(x) = x^p$, де $p \geq 1$

У рівновазі кожен агент вибирає маршрут з мінімальною індивідуальною вартістю. Оскільки $c_2(x)$ є зростаючою і $c_1 = 1$, то всі агенти обирають другий маршрут тоді, коли:

$$c_2(1) = 1^p = 1 = c_1$$

Рівноважний потік:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1$$

Загальна вартість:

$$C(f) = c_2(1) \cdot 1 = 1$$

Оптимальний потік мінімізує загальні витрати:

$$C(f) = c_1(f_1) \cdot f_1 + c_2(f_2) \cdot f_2 = f_1 + f_2^{p+1} \quad \text{за умови } f_1 + f_2 = 1$$

Підставимо $f_2 = x$, тоді $f_1 = 1 - x$:

$$C(x) = (1 - x) + x^{p+1}$$

Знайдемо мінімум функції:

$$\frac{dC}{dx} = -1 + (p+1)x^p = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{p+1} \right)^{1/p}$$

Підставимо x у $C(f_{opt})$:

$$C(f_{opt}) = 1 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{p+1}\right)^{(p+1)/p}$$

Ціна анархії за визначенням :

$$\text{PoA}(p) = \frac{C(f)}{C(f_{opt})}$$

Позначимо: $x_p = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}$, $x_p^{p+1} = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{(p+1)/p}$

Тоді:

$$\text{PoA}(p) = \frac{1}{1 - x_p + x_p^{p+1}}$$

Оцінимо знаменник для великих p . За відомою оцінкою:

$$x_p \sim 1 - \frac{\ln(p+1)}{p} \quad \text{за } p \rightarrow \infty$$

Тоді:

$$1 - x_p \sim \frac{\ln(p)}{p}, \quad x_p^{p+1} \rightarrow 0 \text{ (експоненційно)}$$

Отже:

$$\text{PoA}(p) \sim \frac{1}{\frac{\ln p}{p}} = \frac{p}{\ln p} \rightarrow \infty$$

Висновок

Ціна анархії у прикладі Пігу з нелінійною вартістю другого маршруту зростає як $\frac{p}{\ln p}$ при $p \rightarrow \infty$. Таким чином, з наближенням ступеня p до нескінченності, неефективність рівноважного розподілу зростає безмежно:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{PoA}(p) = \infty$$

□

Зауваження 1.3 (Границі парадоксу Бресса). Парадокс Бресса (приклад 4) показує, що додавання ребер до мережі може збільшити вартість її рівноважного потоку. Оскільки рівноважний потік у вихідній мережі є кандидатом на оптимальний потік у другій мережі, співвідношення між вартістю нового та вихідного рівноважних потоків є нижньою межею ціни

анархії в останній мережі.

З іншого боку, теорема 5 показує, що ціна анархії не перевищує $4/3$ в кожній мережі з афінними функціями витрат. Таким чином, додавання ребер до мережі з афінними функціями витрат не може збільшити вартість її рівноважного потоку більше, ніж у $4/3$ разів. Таким чином, приклад 2 є найгіршим проявом парадоксу Бресса в мережах з афінними функціями витрат.

1.3.2 Атомарна егоїстична маршрутизація: Ціна анархії

Тепер розглянемо атомарні егоїстичні ігри з маршрутизацією. Знову отримуємо жорсткі оцінки ціни анархії, принаймні для поліноміальних функцій витрат, але дискретна природа атомарних екземплярів ускладнює аналіз.

Спочатку зазначимо, що метод потенційної функції, який дав нетривіальні оцінки ціни анархії для неатомарних екземплярів (Теорема 4), не може бути використаний для атомарних екземплярів. Труднощі пов'язані з неунікальністю рівноважних потоків в атомарних екземплярах (приклад 3). Нагадаємо, що обмеження на ціну анархії є гарантією того, що всі рівноважні потоки екземпляра є "майже оптимальними". Переглядаючи доведення теореми 4, бачимо, що метод потенційної функції стверджує лише про один рівноважний потік - той, що має мінімальне значення потенційної функції. Як наслідок, метод потенційної функції безпосередньо корисний лише для визначення ціни стабільності, а не ціни анархії. Хоча ці дві величини збігаються в неатомарних егоїстичних іграх з маршрутизацією, в атомарних іграх вони, як правило, відрізняються.

Натомість покладаємось на методи доведення, які частково надихаються варіаційною нерівністю припущення 4. Ця нерівність виражає той факт, що рівноважні потоки маршрутизують весь трафік найкоротшими шляхами з урахуванням індукованих граничних витрат. Введемо подібну, хоча і більш складну, умову для атомарних екземплярів. Щоб зробити доведення максимально прозорим, зосередимося на атомарних екземплярах з афінними функціями вартості. Згадаємо з теореми 3, що кожен такий ек-

земпляр допускає принаймні один рівноважний потік. Аналіз також можна поширити на інші функції витрат та інші концепції рівноваги.

Теорема 1.6 (Ціна анархії в афінних атомарних екземплярах). [8] *Якщо (G, r, c) є атомарним екземпляром з афінними функціями вартості, то ціна анархії (G, r, c) не перевищує $(3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.618$.*

Варіант прикладу ААЕ показує, що верхня межа теореми 6 є найкращою, якщо різні гравці можуть контролювати різні кількості потоку (приклад 4). Якщо всі гравці контролюють однакову кількість потоку, то варіант наступного доведення дає покращену верхню межу $5/2$, яка збігається з нижньою межею, отриманою у прикладі ААЕ.

Лема 1.1 (Умова рівноваги). [9]

Нехай (G, r, c) - атомарний екземпляр, у якому кожне ребро e має афінну функцію вартості $c_e(x) = a_e x + b_e$ з $a_e, b_e \geq 0$. Нехай f та f^ - рівноважний та оптимальний потоки, відповідно, для (G, r, c) . Нехай гравець i використовує шлях P_i у f та шлях P_i^* у f^* . Тоді*

$$\sum_{e \in P_i} [a_e f_e + b_e] \leq \sum_{e \in P_i^*} [a_e (f_e + r_i) + b_e].$$

Другий крок полягає в тому, щоб об'єднати нерівності з леми 1 - по одній для кожного гравця - для того, щоб зв'язати вартість довільного рівноважного потоку з вартістю оптимального потоку.

Лема 1.2 (Рівноважна нерівність). [9]

З тими ж припущеннями і позначеннями, що і в лемі 1,

$$C(f) \leq C(f^*) + \sum_{e \in E} a_e f_e f_e^*. \quad (8)$$

Доведення. Для кожного гравця i помножимо нерівність (8) на r_i . Підсу-

мовуючи отримані k нерівностей, отримаємо

$$\begin{aligned}
 C(f) &\leq \sum_{i=1}^k r_i \left(\sum_{e \in P_i^*} a_e(f_e + r_i) + b_e \right) \\
 &\leq \sum_{i=1}^k r_i \left(\sum_{e \in P_i^*} a_e(f_e + f_e^*) + b_e \right) \\
 &= \sum_{e \in E} [a_e(f_e + f_e^*) + b_e] f_e^*
 \end{aligned} \tag{9}$$

де рівність випливає зі зміни порядку додавання. Оскільки останній вираз дорівнює правій частині (9), то доведення завершено. $\square$

Щоб завершити доведення теореми 6, ми встановимо верхню межу величини «члена похибки» в (9) відносно вартості рівноважного та оптимального потоків.

Доведення теореми 6. Нехай f та f^* позначають рівноважний та оптимальний потоки, відповідно, для атомарного екземпляра (G, r, c) . Припустимо, що ребро e має функцію вартості $c_e(x) = a_e x + b_e$ для $a_e, b_e \geq 0$. Застосуємо нерівність Коші-Шварца до векторів $\{\sqrt{a_e} f_e\}_{e \in E}$ та $\{\sqrt{a_e} f_e^*\}_{e \in E}$, щоб отримати

$$\sum_{e \in E} a_e f_e f_e^* \leq \sqrt{\sum_{e \in E} a_e f_e^2} \cdot \sqrt{\sum_{e \in E} a_e (f_e^*)^2} \leq \sqrt{C(f)} \cdot \sqrt{C(f^*)}.$$

Поєднання цього з рівноважною нерівністю (9), ділення на $C(f^*)$ і перестановка дають

$$\frac{C(f)}{C(f^*)} - 1 \leq \sqrt{\frac{C(f)}{C(f^*)}}.$$

Піднісши обидві частини до квадрата і розв'язавши відповідну квадратну нерівність $x^2 - 3x + 1 \leq 0$, знайдемо, що

$$\frac{C(f)}{C(f^*)} \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618,$$

як і було заявлено. $\square$

Теорему 6 можна поширити на атомарні екземпляри з функціями вартості, які є поліномами з невід’ємними коефіцієнтами і степенем не більше параметра p . Однак верхня межа ціни анархії зростає зі збільшенням p приблизно пропорційно до експоненціальної функції p^p - набагато швидше, ніж в неатомарних екземплярах. Ця експоненціальна залежність не є артефактом описаного вище підходу до доведення, оскільки відомі майже однакові нижні межі ціни анархії.

Зауваження 1.4. Строго кажучи, ціна анархії не завжди визначена в загальних атомарних випадках, де рівноважні потоки не обов’язково існують (приклад 5). Тим не менш, теорему 6 було поширено на атомарні екземпляри з поліноміальними функціями витрат трьома різними способами. По-перше, коли такий екземпляр *допускає* принаймні один рівноважний потік, то всі такі потоки мають вартість не більше, ніж у $p^{O(p)}$ разів більшу, ніж оптимальний потік. По-друге, за теоремою Неша, кожен такий екземпляр допускає рівновагу Неша за змішаною стратегією, і очікувана вартість кожної такої рівноваги не більше ніж у $p^{O(p)}$ разів перевищує вартість оптимального потоку. Нарешті, подібні верхні межі було доведено для «рівноваг у раковині» - концепції рівноваги, яка завжди існує у скінченних іграх і мотивується проблемами збіжності.

1.4 Зменшення ціни анархії

1.4.1 Ціноутворення за граничними витратами

Перший підхід до зменшення ціни анархії в неатомарних егоїстичних іграх з маршрутизацією полягає у використанні *податків на граничні витрати* на краях мережі. Ідея ціноутворення на основі граничних витрат полягає в тому, щоб стягувати з кожного користувача мережі на кожному ребрі за додаткові витрати, які його присутність спричиняє для інших користувачів цього ребра. Щоб обговорити цю ідею формально, припустимо, що кожне ребро e неатомарної егоїстичної мережі маршрутизації має невід’ємний *tax* τ_e . Позначимо неатомарний екземпляр (G, r, c) з реберними податками τ через $(G, r, c + \tau)$. Рівноважний потік для такого екземпляра $(G, r, c + \tau)$ визначається як у визначенні 1, при цьому весь трафік рухається

маршрутами, які мінімізують суму граничних витрат і граничних податків. Еквівалентно, це рівноважний потік для неатомарного екземпляра (G, r, c^τ) , де функція витрат c_e^τ є зсунутою версією початкової функції витрат c_e : $c_e^\tau(x) = c_e(x) + \tau_e$ для всіх $x \geq 0$.

Принцип ціноутворення за граничними витратами стверджує, що для потоку f , можливого для неатомарного екземпляра (G, r, c) , податок τ_e , призначений на ребро e , повинен бути $\tau_e = f_e \cdot c'_e(f_e)$, де c'_e позначає похідну від c_e . (Припустимо для простоти, що функції витрат диференційовані.) Член $c'_e(f_e)$ відповідає граничному збільшенню витрат, спричиненому одним користувачем границі, а член f_e - кількості трафіку, який страждає від цього збільшення. Також можливо інтерпретувати податок на граничні витрати τ_e , використовуючи наслідок 1: τ_e є саме тим «додатковим членом» у функції граничних витрат, який відсутній у початковій функції витрат. Ці податки виправляють нездатність егоїстичних споживачів врахувати другий, «альтруїстичний» член функції граничних витрат. Формально з наслідку 1 легко впливає наступна гарантія.

Теорема 1.7. [10] *Нехай (G, r, c) - неатомарний екземпляр, такий, що для кожного ребра e функція $x \cdot c_e(x)$ опукла і неперервно диференційована. Нехай f^* - оптимальний потік для (G, r, c) і нехай $\tau_e = f_e^* \cdot c'_e(f_e^*)$ позначає податок на граничні витрати для ребра e щодо f^* . Тоді f^* є рівноважним потоком для $(G, r, c + \tau)$.*

1.4.2 Збільшення ємності

Кінцевий результат — це новий тип обмеження неефективності рівноважних потоків у неатомарних егоїстичних іграх маршрутизації з довільними функціями витрат. Це обмеження не включає ціну анархії, яка є необмеженою в таких мережах (приклад 1), а натомість показує, що вартість рівноважного потоку щонайбільше дорівнює вартості оптимального потоку, який змушений маршрутизувати вдвічі більше трафіку між кожною парою джерело-приймач. Як побачимо, цей результат означає, що замість централізованого керування неефективність егоїстичної маршрутизації може бути компенсована помірним збільшенням швидкості з'єднання.

Приклад 1.6. Розглянемо нелінійний варіант прикладу Пігу (Приклад 1).

Коли є одна одиниця трафіку, рівноважний потік спрямовує весь потік на нижній край, тоді як оптимальний потік спрямовує ϵ одиниць потоку на верхній край, а решту — на нижній край (де $\epsilon \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$). Коли обсяг r трафіку, що має бути спрямований, перевищує одиницю, оптимальний потік призначає додаткові $r - 1$ одиниць трафіку верхній ланці, що призводить до витрат, які прагнуть до $r - 1$ при $p \rightarrow \infty$. Зокрема, для кожного p оптимальний потік, можливий для вдвічі більшого початкового обсягу трафіку ($r = 2$), коштував щонайменше 1, вартість рівноважного потоку у вихідному випадку.

Тепер покажемо, що верхня межа, зазначена в Прикладі 6 для нелінійного варіанту прикладу Пігу, виконується в кожному неатомному випадку.

Теорема 1.8. [11] *Якщо f є рівноважним потоком для (G, r, c) та f^* є доцільним для $(G, 2r, c)$, тоді $C(f) \leq C(f^*)$.*

Доведення. Нехай f та f^* позначають рівноважний потік для (G, r, c) та доцільний потік для $(G, 2r, c)$ відповідно. Для кожного потоку i нехай d_i позначає мінімальну вартість шляху $s_i - t_i$ відносно потоку f . Визначення 1 та визначення вартості (1) означають, що $C(f) = \sum_i r_i d_i$.

Ключова ідея полягає у визначенні набору функцій вартості $\bar{c}$, який задовольняє дві властивості: нижнє обмеження вартості f^* відносно вартості f є простим відносно $\bar{c}$; та нові функції вартості $\bar{c}$ наближають початкові c . Зокрема, покладаємо $\bar{c}_e(x) = \max\{c_e(f_e), c_e(x)\}$ для кожного ребра e . Нехай $\bar{C}(\cdot)$ позначає вартість потоку у випадку $(G, r, \bar{c})$. Зауважте, що $\bar{C}(f^*) \geq C(f^*)$, тоді як $\bar{C}(f) = C(f)$.

Спочатку ми обмежуємо верхню межу величини, на яку нова вартість $\bar{C}(f^*)$ від f^* може перевищувати її початкову вартість $C(f^*)$. Для кожного ребра e , $\bar{c}_e(x) - c_e(x)$ дорівнює нулю для $x \geq f_e$ та обмежена зверху величиною $c_e(f_e)$ для $x < f_e$, тому $x(\bar{c}_e(x) - c_e(x)) \leq c_e(f_e)f_e$ для всіх $x \geq 0$. Таким чином

$$\bar{C}(f^*) - C(f^*) = \sum_{e \in E} f_e^*(\bar{c}_e(f_e^*) - c_e(f_e^*)) \leq \sum_{e \in E} c_e(f_e)f_e = C(f). \quad (10)$$

Іншими словами, обчислення f^* за допомогою функцій вартості $\bar{c}$, а не c , збільшує її вартість щонайбільше на адитивний коефіцієнт $C(f)$.

Тепер знизимо межу $\bar{C}(f^*)$. За побудовою, модифікована вартість $\bar{c}_e(\cdot)$ ребра e завжди щонайменше $c_e(f_e)$, тому модифікована вартість $\bar{c}_P(\cdot)$ шляху $P \in \mathcal{P}_i$ завжди дорівнює найменше $c_P(f)$, що, у свою чергу, є щонайменше d_i . Таким чином, модифікована вартість $\tilde{C}(f^*)$ дорівнює

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \tilde{c}_P(f^*) f_P^* \geq \sum_{i=1}^k \sum_{P \in \mathcal{P}_i} d_i f_P^* = \sum_{i=1}^k 2r_i d_i = 2C(f). \quad (11)$$

Теорема тепер безпосередньо впливає з нерівностей (10) та (11). $\square$

Інша інтерпретація Теорема 8 полягає в тому, що перевага централізованого керування дорівнює або перевищує перевагу достатнього вдосконалення технології зв'язку.

Наслідок 1.3. [11] *Нехай (G, r, c) буде неатомарним екземпляром, і визначимо модифіковану функцію вартості $\tilde{c}_e$ як $\tilde{c}_e(x) = c_e(x/2)/2$ для кожного ребра e . Нехай $\hat{f}$ буде рівноважним потоком для $(G, r, \tilde{c})$ з вартістю $\tilde{C}(\hat{f})$, а f^* — доцільним потоком для (G, r, c) з вартістю $C(f^*)$. Тоді $\tilde{C}(\hat{f}) \leq C(f^*)$.*

Наслідок 3 набуває особливо гарної форми у випадках, коли всі функції вартості є функціями затримки $M/M/1$. Така функція вартості має вигляд $c_e(x) = (u_e - x)^{-1}$, де u_e можна інтерпретувати як пропускну здатність ребра або швидкість обслуговування черги; функція визначається як $+\infty$ при $x \geq u_e$. (Суворе допущення нескінченних витрат у цій егоїстичній моделі маршрутизації вимагає певної обережності; ігноруємо ці питання в цьому розділі.) У цьому випадку модифікована функція $\tilde{c}_e$ наслідку 3 має вигляд $\tilde{c}_e(x) = 1/2(u_e - x/2) = 1/(2u_e - x)$. Таким чином, наслідок 3 пропонує наступний принцип проектування для егоїстичних мереж маршрутизації з функціями затримки $M/M/1$: щоб перевершити оптимальну маршрутизацію, просто подвоїти пропускну здатність кожного ребра.

РОЗДІЛ 2

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

2.1 Задача: Парадокс Браеса в маршрутизації трафіку

Є 1000 автомобілів, які повинні дістатися з міста А до міста В. Є два можливі маршрути, які може вибрати кожен автомобіль: верхній маршрут через місто С або нижній маршрут через місто D. Нехай x — кількість автомобілів, які рухаються по ребру AC, і нехай y — кількість автомобілів, які рухаються по ребру DB. Орієнтований граф на рис. 6 показує, що час подорожі на автомобіль на ребрі AC становить $x/100$, якщо x автомобілів використовують ребро AC, і аналогічно час подорожі на автомобіль на ребрі DB становить $y/100$, якщо y автомобілів використовують ребро DB. Час подорожі на автомобіль на кожному з ребер CB та AD становить 12 незалежно від кількості автомобілів на цих ребрах. Кожен водій хоче вибрати маршрут, щоб мінімізувати свій час подорожі. Водії роблять одночасні вибори.

(а) Знайдіть значення x та y у рівновазі Неша.

(b) Тепер уряд будує нову (односторонню) дорогу з міста С до міста D. Нова дорога додає шлях ACDB до мережі. Ця нова дорога з С до D має час подорожі 0 на автомобіль незалежно від кількості автомобілів, які її використовують. Знайдіть рівновагу Неша для гри, яка грається на новій мережі. Які значення x та y у рівновазі? Що відбувається із загальною вартістю подорожі (сумою загального часу подорожі для 1000 автомобілів) в результаті доступності нової дороги?

(c) Припустимо, що тепер умови на ребрах CB та AD покращуються, так що час подорожі на кожному ребрі зменшується до 5. Дорога з С до D, яка була побудована в частині (b), все ще доступна. Знайдіть рівновагу Неша для гри, яка грається на мережі з меншими часами подорожі для CB та AD. Які значення x та y у рівновазі? Яка загальна вартість подорожі? Що сталося б із загальною вартістю подорожі, якби уряд закрив дорогу з С до D?

(а) Рівноважний потік у базовій мережі

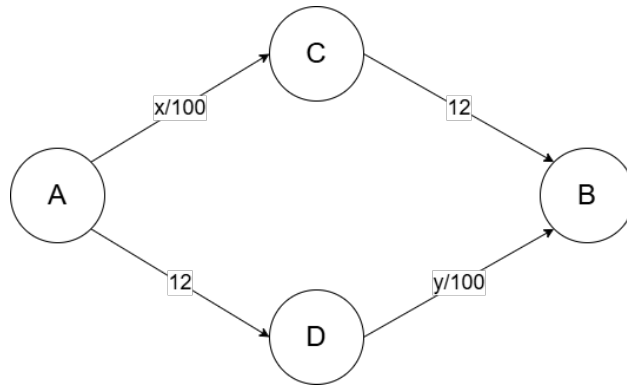


Рис. 2.1. Транспортна мережа

У задачі маємо неатомарну маршрутизаційну гру з одним джерелом A та одним стоком B . Є два шляхи:

- Верхній маршрут: $P_1 = A \rightarrow C \rightarrow B$
- Нижній маршрут: $P_2 = A \rightarrow D \rightarrow B$

Позначимо через x — потік по ребру AC , та y — потік по ребру DB , де $x + y = 1000$. Час на ребрах задано:

$$c_{AC}(x) = \frac{x}{100}, \quad c_{CB} = 12, \quad c_{AD} = 12, \quad c_{DB}(y) = \frac{y}{100}$$

Таким чином, повна вартість маршрутів:

$$c_{P_1}(f) = \frac{x}{100} + 12, \quad c_{P_2}(f) = 12 + \frac{y}{100}$$

Рівноважний потік f задовольняє умові (означення 1):

$$\frac{x}{100} + 12 = 12 + \frac{y}{100} \Rightarrow x = y = 500$$

Загальна вартість потоку: $C(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e = \left(\frac{500}{100} \cdot 500\right) + 12 \cdot 500 + 12 \cdot 500 + \left(\frac{500}{100} \cdot 500\right) = 2500 + 6000 + 6000 + 2500 = 17000$

Результат роботи коду

```

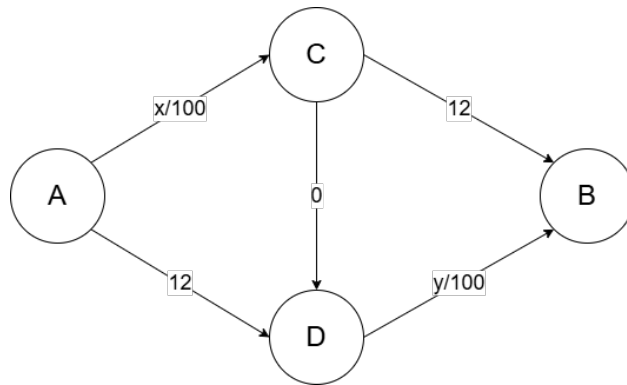
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B – 500 cars, cost ≈ 17.00000
Path 2: A → D → B – 500 cars, cost ≈ 17.00000

Edge flows:
A → C: 500 cars
C → B: 500 cars
A → D: 500 cars
D → B: 500 cars

Total system cost: 17000.00

```

(b) Рівноважний потік після додавання ребра CD з нульовою вартістю



Додається нове ребро CD з $c_{CD} = 0$.

З'являється новий маршрут: $P_3 = A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ де вартість:

$$c_{P_3}(f) = \frac{x}{100} + 0 + \frac{y}{100} = \frac{x+y}{100} = \frac{2000}{100} = 20$$

$$c_{P_1}(f) = \frac{x}{100} + 12 = \frac{x}{100} = \frac{1000}{100} = 22$$

$$c_{P_2}(f) = \frac{y}{100} + 12 = \frac{y}{100} = \frac{1000}{100} = 22$$

Рівноважний потік: усі гравці обирають P_3 , оскільки $c_{P_3}(f) < c_{P_1}(f), c_{P_2}(f)$

Загальна вартість потоку: $C(f) = c_{AC}(1000) \cdot 1000 + c_{DB}(1000) \cdot 1000 = 10 \cdot 1000 + 10 \cdot 1000 = 20000$

Результат роботи коду

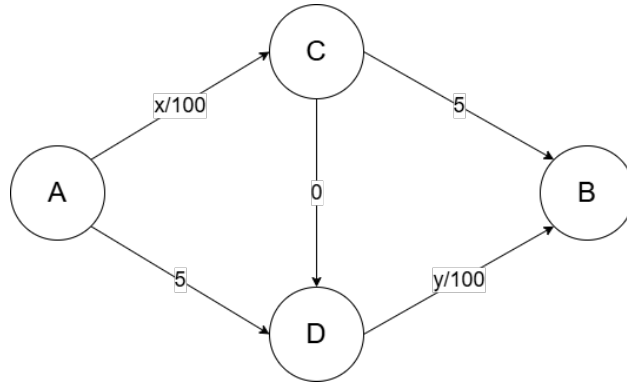
```

Integer Nash equilibrium found:
Path 2: A → C → D → B – 1000 cars, cost ≈ 20.00000

Edge flows:
A → C: 1000 cars
C → B: 0 cars
C → D: 1000 cars
D → B: 1000 cars
A → D: 0 cars

Total system cost: 20000.00

```



(с) Покращення ребер CB та AD до фіксованого часу 5

Тепер:

$$c_{CB} = c_{AD} = 5$$

Вартість маршрутів:

$$c_{P_1}(f) = \frac{x}{100} + 5 = 15, \quad c_{P_2}(f) = 5 + \frac{y}{100} = 15, \quad c_{P_3}(f) = \frac{x+y}{100} = 20$$

Розглянемо розподіл $x = 500$, $y = 500$:

$$c_{P_1} = \frac{500}{100} + 5 = 10, \quad c_{P_2} = 5 + \frac{500}{100} = 10,$$

Усі маршрути мають однакову вартість 10, отже це — рівноважний потік.

$$x = 500, \quad y = 500$$

Загальна вартість:

$$C(f) = \frac{500}{100} \cdot 500 + 5 \cdot 500 + 5 \cdot 500 + \frac{500}{100} \cdot 500 = 2500 + 2500 + 2500 + 2500 = 10000$$

Якби уряд закрив ребро CD , то P_3 був би недоступний, але P_1 та P_2 мали б однакову вартість 10. Розподіл $x = y = 500$ залишився б рівноважним.

Отже, загальна вартість подорожі не змінилася: $C(f) = 10000$

Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B — 500 cars, cost ≈ 10.00000
Path 3: A → D → B — 500 cars, cost ≈ 10.00000

Edge flows:
A → C: 500 cars
C → B: 500 cars
C → D: 0 cars
D → B: 500 cars
A → D: 500 cars

Total system cost: 10000.00
```

2.2 Задача: Парадокс Браесса з 80 подорожуючими

Є два міста А та В, з'єднані двома маршрутами. Є 80 подорожуючих, які починають у місті А і повинні дістатися до міста В. Є два маршрути між А та В. Маршрут І починається з шосе, яке виходить з міста А, це шосе займає одну годину часу подорожі незалежно від кількості подорожуючих, які його використовують, і закінчується місцевою вулицею, яка веде до міста В. Ця місцева вулиця біля міста В вимагає часу подорожі в хвилинали, що дорівнює 10 плюс кількість подорожуючих, які використовують цю вулицю. Маршрут ІІ починається з місцевої вулиці, яка виходить з міста А, яка вимагає часу подорожі в хвилинали, що дорівнює 10 плюс кількість подорожуючих, які використовують цю вулицю, і закінчується шосе, яке веде до міста В, яке вимагає одну годину часу подорожі незалежно від кількості подорожуючих, які його використовують.

(а) Намалуйте мережу, описану вище, і позначте ребра часом подорожі, необхідним для переміщення по ребру. Нехай x — кількість подорожуючих, які використовують Маршрут І. Мережа повинна бути орієнтованим графом, оскільки всі дороги є односторонніми.

(б) Подорожуючі одночасно обирають, який маршрут використовувати. Знайдіть значення x у рівновазі Неша.

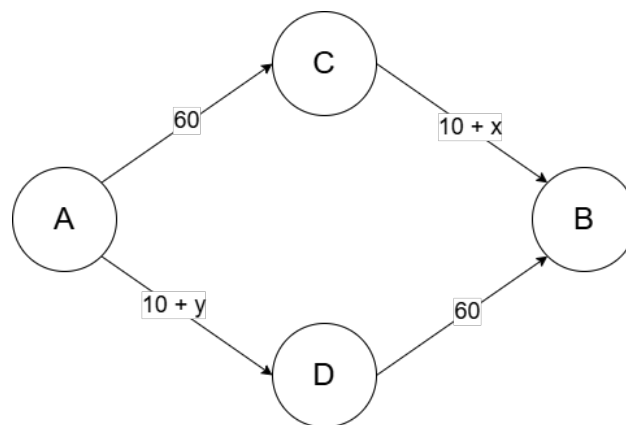
(с) Тепер уряд будує нову (двосторонню) дорогу, яка з'єднує вузли, де місцеві вулиці та шосе зустрічаються. Це додає два нові маршрути. Один

новий маршрут складається з місцевої вулиці, яка виходить з міста А (на Маршруті ІІ), нової дороги та місцевої вулиці, яка веде до міста В (на Маршруті І). Другий новий маршрут складається з шосе, яке виходить з міста А (на Маршруті І), нової дороги та шосе, яке веде до міста В (на Маршруті ІІ). Нова дорога є дуже короткою і не вимагає часу подорожі. Знайдіть нову рівновагу Неша.

(d) Що відбувається із загальним часом подорожі в результаті доступності нової дороги?

(e) Якщо ви можете призначити подорожуючих до маршрутів, то насправді можна зменшити загальний час подорожі порівняно з тим, яким він був до побудови нової дороги. Тобто загальний час подорожі населення може бути зменшений (нижче, ніж у початковій рівновазі Неша з частини (b)) шляхом призначення подорожуючих до маршрутів. Існує багато призначень маршрутів, які досягнуть цього. Знайдіть одне. Поясніть, чому ваше перепризначення зменшує загальний час подорожі.

(a) Побудова мережі



Нехай маємо орієнтований граф $G = (V, E)$, що складається з вершин:

$$P_1 = A \rightarrow C \rightarrow B$$

$$P_2 = A \rightarrow D \rightarrow B$$

Ребра мають такі вартості (час подорожі в хвилинах):

$$A \rightarrow C: c_{AC} = 60$$

$$C \rightarrow B: c_{CB}(x) = 10 + x$$

$$A \rightarrow D: c_{AD}(y) = 10 + y$$

$$D \rightarrow B: c_{DB} = 60$$

(b) Рівновага Неша без нової дороги

Нехай x це кількість подорожуючих, які обирають маршрут ACB , тоді $80 - x$ це ті, хто обирає ADB . Вартість маршрутів:

$$c_{P_1}(x) = 60 + 10 + x = 70 + x$$

$$c_{P_2}(x) = 10 + (80 - x) + 60 = 70 + (80 - x) = 150 - x$$

У рівновазі обидва маршрути, що використовуються, мають однакову вартість: $70 + x = 150 - x \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40$

Рівноважний потік: $x = 40$ на ACB , $y = 40$ на ADB .

Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B - 40 cars, cost ≈ 110.00000
Path 3: A → D → B - 40 cars, cost ≈ 110.00000

Edge flows:
A → C: 40 cars
C → B: 40 cars
C → D: 0 cars
D → B: 40 cars
A → D: 40 cars

Total system cost: 8800.00
```

(c) Додається нова дорога з нульовою вартістю між C та D

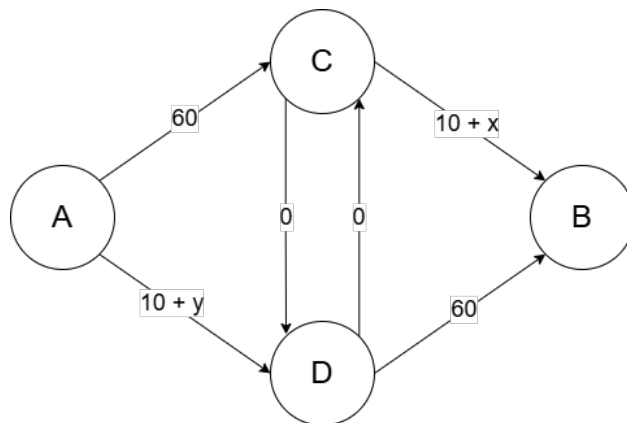


Рис. 2.2. Нова дорога з нульовою вартістю між C та D

Після побудови нової двосторонньої дороги між вузлами, де шосе та місцеві вулиці з'єднуються (тобто між C та D), додаються два нові маршрути:

Маршрут 3: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$

Маршрут 4: $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$

Нова дорога $C \leftrightarrow D$ має вартість 0, як зазначено в умові задачі.

Оскільки шосе має фіксовану вартість 60 хв, а нова дорога не має вартості, значення x та y у рівновазі:

$$c_{P_3} = 60 + 0 + 60 = 0$$

$$c_{P_4} = 20 + x + y = 20 + 2x$$

Отримаємо:

$$x = y = 50$$

Кожен маршрут має вартість 120, отже:

$$C(f) = 30 \cdot 120 + 50 \cdot 120 = 80 \cdot 120 = 9600$$

Таким чином, побудова нової дороги змінила рівновагу та забезпечила ефективний розподіл трафіку за рівності вартостей маршрутів.

Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B — 40 cars, cost ≈ 110.00000
Path 3: A → D → B — 40 cars, cost ≈ 110.00000

Edge flows:
A → C: 40 cars
C → B: 40 cars
C → D: 0 cars
D → B: 40 cars
A → D: 40 cars

Total system cost: 8800.00
```

(d) Зміна загального часу подорожі

До нової дороги:

$$C(f) = 40 \cdot (70 + 40) + 40 \cdot (70 + 40) = 40 \cdot 110 + 40 \cdot 110 = 8800$$

Після нової дороги:

$$C(f) = 80 \cdot 120 = 9600$$

Загальний час подорожі збільшився. Маємо прояв парадоксу Браесса.

(е) Перепризначення для зменшення загального часу

Спробуємо розподілити:

$$40 \text{ осіб на } ADB \quad (\text{вартість} = 70 + 40 = 110)$$

$$40 \text{ осіб на } ACB \quad (\text{вартість} = 70 + 40 = 110)$$

Загальний час подорожі:

$$C(f) = 40 \cdot 110 + 40 \cdot 110 = 8800$$

Це менше за 9600 у рівновазі з новою дорогою. Таким чином, централізоване призначення маршрутів зменшує загальні витрати. Маршрут з новою дорогою не використовується.

2.3 Задача: Зміна структури мережі та ціна анархії

Є 300 автомобілів, які повинні дістатися з міста А до міста В. Є два можливі маршрути, які може вибрати кожен автомобіль. Верхній маршрут через місто С або нижній маршрут через місто D. Нехай x — кількість автомобілів, які рухаються по ребру AC, і нехай y — кількість автомобілів, які рухаються по ребру DB. Орієнтований граф на рис. 8 показує, що загальний час подорожі на автомобіль по верхньому маршруту становить $(x/100) + 3.1$, якщо x автомобілів використовують верхній маршрут, і аналогічно загальний час подорожі на автомобіль по нижньому маршруту становить $3.1 + (y/100)$, якщо y автомобілів використовують нижній маршрут. Кожен водій хоче вибрати маршрут, щоб мінімізувати свій загальний час подорожі. Водії роблять одночасні вибори.

(а) Знайдіть значення x та y у рівновазі Неша.

(b) Тепер уряд будує нову (односторонню) дорогу з міста А до міста В. Новий маршрут має час подорожі 5 на автомобіль незалежно від кількості автомобілів, які його використовують. Намалюйте нову мережу і позначте ребра вартістю подорожі, необхідною для переміщення по ребру. Мережа повинна бути орієнтованим графом, оскільки всі дороги є односторонніми. Знайдіть рівновагу Неша для гри, яка грається на новій мережі. Що відбувається із загальною вартістю подорожі (сумою загального часу подорожі для 300 автомобілів) в результаті доступності нової дороги?

(c) Тепер уряд закриває прямий маршрут між містом А та містом В і будує нову односторонню дорогу, яка з'єднує місто С з містом D. Ця нова дорога між С та D є дуже короткою і має час подорожі 0 незалежно від кількості автомобілів, які її використовують. Намалюйте нову мережу і позначте ребра вартістю подорожі, необхідною для переміщення по ребру. Мережа повинна бути орієнтованим графом, оскільки всі дороги є односторонніми. Знайдіть рівновагу Неша для гри, яка грається на новій мережі. Що відбувається із загальною вартістю подорожі в результаті доступності нової дороги?

(d) Уряд незадоволений результатом у частині (c) і вирішує знову відкрити дорогу, яка безпосередньо з'єднує місто А з містом В (дорогу, яка була побудована в частині (b) і закрита в частині (c)). Маршрут між С та D, який був побудований у частині (c), залишається відкритим. Ця дорога все ще має час подорожі 5 на автомобіль незалежно від кількості автомобілів, які її використовують. Намалюйте нову мережу і позначте ребра вартістю подорожі, необхідною для переміщення по ребру. Мережа повинна бути орієнтованим графом, оскільки всі дороги є односторонніми. Знайдіть рівновагу Неша для гри, яка грається на новій мережі. Що відбувається із загальною вартістю подорожі в результаті повторного відкриття прямого маршруту між А та В?

(a) Базова мережа з двома маршрутами

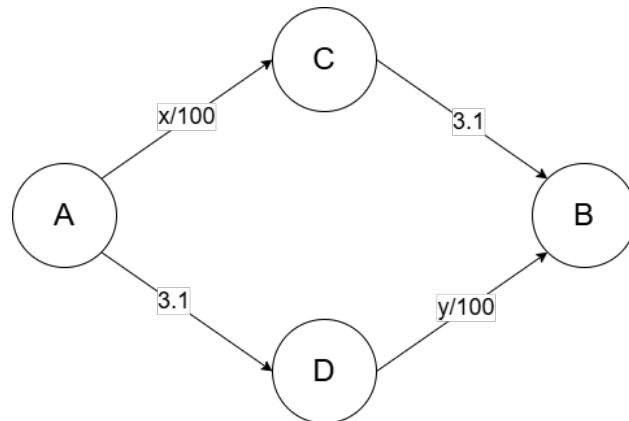


Рис. 2.3. Транспортна мережа

У задачі маємо неатомарну маршрутизаційну гру з одним джерелом А та одним стоком В. Є два шляхи:

- Верхній: $A \rightarrow C \rightarrow B$ з вартістю $c_{ACB}(x) = \frac{x}{100} + 3.1$
- Нижній: $A \rightarrow D \rightarrow B$ з вартістю $c_{ADB}(y) = 3.1 + \frac{y}{100}$

У рівновазі: $c_{ACB}(x) = c_{ADB}(y)$

$$\frac{x}{100} + 3.1 = 3.1 + \frac{y}{100} \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = 150$$

Загальна вартість:

$$C(f) = 150 \cdot \left(\frac{150}{100} + 3.1 \right) + 150 \cdot \left(\frac{150}{100} + 3.1 \right) = 2 \cdot 150 \cdot 4.6 = 1380$$

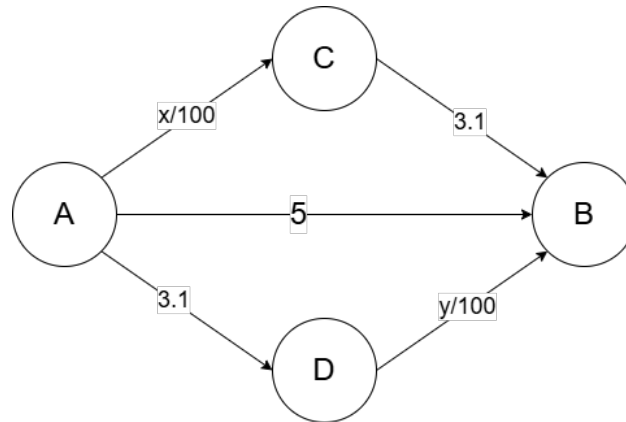
Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B – 150 cars, cost ≈ 4.60000
Path 2: A → D → B – 150 cars, cost ≈ 4.60000

Edge flows:
A → C: 150 cars
C → B: 150 cars
A → D: 150 cars
D → B: 150 cars

Total system cost: 1380.00
```

(b) Додається прямий маршрут $A \rightarrow B$ з фіксованою вартістю 5



Після побудови нового маршруту $A \rightarrow B$ з фіксованою вартістю 5, у гравців з'являється третій варіант. Розглянемо три можливі маршрути:

- $P_1: A \rightarrow C \rightarrow B: c_{P_1} = \frac{x}{100} + 3.1$
- $P_2: A \rightarrow D \rightarrow B: c_{P_2} = 3.1 + \frac{y}{100}$
- $P_3: A \rightarrow B: c_{P_3} = 5$

У рівновазі Неша гравці обирають лише ті маршрути, вартість яких є найменшою, і на яких жоден гравець не має стимулу перейти на інший маршрут.

Знайдено ціле число автомобілів, при якому:

$$c_1(150) = \frac{150}{100} + 3.1 = 1.5 + 3.1 = 4.6$$

$$c_2(150) = 3.1 + \frac{150}{100} = 3.1 + 1.5 = 4.6$$

$$c_3 = 5$$

Отже, маршрути 1 і 2 мають однакову мінімальну вартість, і використовуються у рівновазі.

Загальна вартість подорожі: Оскільки кожен маршрут у рівновазі має вартість 4.6, отримаємо:

$$C(f) = 300 \cdot 4.6 = 1380$$

Таким чином, у рівновазі прямий маршрут $A \rightarrow B$ не використовується.

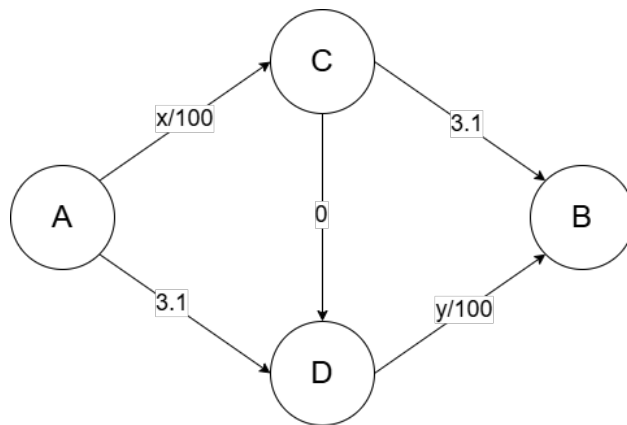
Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B - 150 cars, cost ≈ 4.60000
Path 2: A → D → B - 150 cars, cost ≈ 4.60000

Edge flows:
A → C: 150 cars
C → B: 150 cars
A → D: 150 cars
D → B: 150 cars
A → B: 0 cars

Total system cost: 1380.00
```

(с) Закриття AB , побудова $C \rightarrow D$



Мережа:

- Верхній маршрут: $A \rightarrow C \rightarrow B$, $c(x) = \frac{x}{100} + 3.1$
 - Нижній маршрут: $A \rightarrow D \rightarrow B$, $c(y) = 3.1 + \frac{y}{100}$
 - Новий маршрут: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$, $c(x,y) = \frac{x}{100} + 0 + \frac{y}{100} = \frac{x+y}{100} = 6$
- Рівноважний потік: всі на $ACDB$, $C(f) = 300 \cdot 6 = 1800$

Результат роботи коду

(d) Відкривається назад маршрут $A \rightarrow B$, $c_{AB} = 5$, CD залишається

Маршрути в новій мережі: $P_1 : A \rightarrow C \rightarrow B$ $c_{P_1}(x) = \frac{x}{100} + 3.1$
 $P_2 : A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ $c_{P_2}(x,y) = \frac{x}{100} + 0 + \frac{y}{100}$

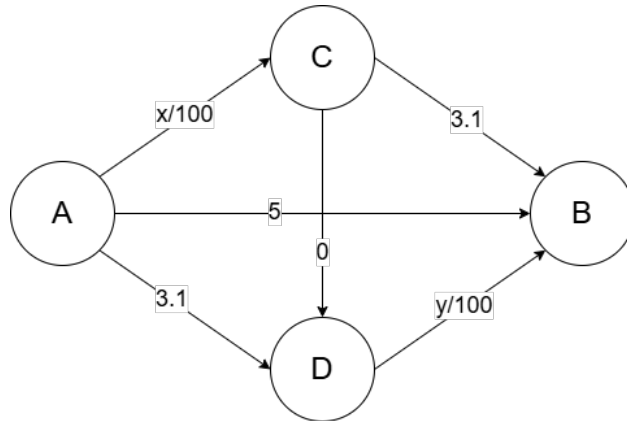
```

Integer Nash equilibrium found:
Path 2: A → C → D → B – 300 cars, cost ≈ 6.00000

Edge flows:
A → C: 300 cars
C → B: 0 cars
C → D: 300 cars
D → B: 300 cars
A → D: 0 cars

Total system cost: 1800.00

```



$$P_3 : A \rightarrow D \rightarrow B \quad c_{P_3}(y) = 3.1 + \frac{y}{100}$$

$$P_4 : A \rightarrow B \quad c_{P_4} = 5$$

Оскільки P_4 має фіксовану вартість 5 хв, а CD не має вартості, значення x та y у рівновазі:

$$c_{P_4} = 5$$

$$c_{P_4} = \frac{x}{100} + 0 + \frac{y}{100} = \frac{x + y}{100}$$

Отримаємо:

$$x = y = 250$$

Кожен маршрут має вартість 5, отже:

$$C(f) = 5 \cdot 300 = 1500$$

Таким чином, повторне відкриття прямого маршруту $A \rightarrow B$ дозволяє частині гравців переміститися на коротший маршрут без збільшення загальної вартості. Рівновага Неша зберігається при змішаному використанні двох маршрутів.

Результат роботи коду

```

Integer Nash equilibrium found:
Path 2: A → C → D → B — 250 cars, cost ≈ 5.00000
Path 4: A → B — 50 cars, cost ≈ 5.00000

Edge flows:
A → C: 250 cars
C → B: 0 cars
C → D: 250 cars
D → B: 250 cars
A → D: 0 cars
A → B: 50 cars

Total system cost: 1500.00

```

2.4 Задача: Аналіз неатомарної маршрутизаційної гри з податками і субсидіями

Є два міста, А та В, з'єднані двома маршрутами, І та ІІ. Всі дороги є односторонніми. Є 100 подорожуючих, які починають у місті А і повинні дістатися до міста В. Маршрут І з'єднує місто А з містом В через місто С. Цей маршрут починається з дороги, яка з'єднує місто А з містом С, яка має вартість подорожі для кожного подорожуючого, що дорівнює $0.5 + x/200$, де x — кількість подорожуючих на цій дорозі. Маршрут І закінчується шосе з міста С до міста В, яке має вартість подорожі для кожного подорожуючого 1 незалежно від кількості подорожуючих, які його використовують. Маршрут ІІ з'єднує місто А з містом В через місто D. Цей маршрут починається з шосе, яке з'єднує місто А з містом D, яке має вартість подорожі для кожного подорожуючого 1 незалежно від кількості подорожуючих, які його використовують. Маршрут ІІ закінчується дорогою, яка з'єднує місто D з містом В, яка має вартість подорожі для кожного подорожуючого, що дорівнює $0.5 + y/200$, де y — кількість подорожуючих на цій дорозі. Ці вартості подорожі є значенням, яке подорожуючі надають часу, втраченому через подорож, плюс вартість бензину для поїздки. Наразі на цих дорогах немає зборів. Отже, уряд не отримує доходу від подорожей на них.

(а) Намалюйте мережу, описану вище, і позначте ребра вартістю подорожі, необхідною для переміщення по ребру. Мережа повинна бути орієнтованим графом, оскільки всі дороги є односторонніми.

(б) Подорожуючі одночасно обирають, який маршрут використовувати. Знайдіть значення x та y у рівновазі Неша.

(с) Тепер уряд будує нову (односторонню) дорогу з міста С до міста D. Нова дорога є дуже короткою і має 0 вартість подорожі. Знайдіть рівновагу

Неша для гри, яка грається на новій мережі.

(d) Що відбувається із загальною вартістю подорожі в результаті доступності нової дороги?

(e) Уряд незадоволений результатом у частині (c) і вирішує ввести збір на користувачів дороги з міста А до міста С і одночасно субсидувати користувачів шосе з міста А до міста D. Вони стягують збір у розмірі 0.125 з кожного користувача, і таким чином збільшують вартість подорожі на цю суму для користувачів дороги з міста А до міста С. Вони також субсидують подорожі, і таким чином зменшують вартість подорожі на цю суму для кожного користувача шосе з міста А до міста D на 0.125. Знайдіть нову рівновагу Неша.

(f) Як ви спостерігатимете при вирішенні частини (e), збір та субсидія у частині (e) були розроблені так, що існує рівновага Неша, в якій сума, яку уряд збирає зі збору, точно дорівнює сумі, яку він втрачає на субсидії. Отже, уряд виходить на беззбитковість за цією політикою. Що відбувається із загальною вартістю подорожі між частинами (c) та (e)? Чи можете ви пояснити, чому це відбувається? Чи можете ви придумати будь-які беззбиткові збори та субсидії, які можна було б встановити на дорогах з міста С до міста В та з міста D до міста В, які б зменшили загальну вартість подорожі ще більше?

(a) Побудова мережі(рис. (2.4))

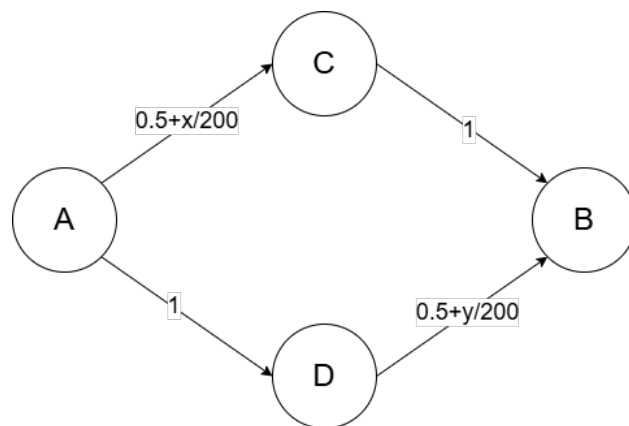


Рис. 2.4. Транспортна мережа

Маємо два маршрути від А до В:

$$P_1 = A \rightarrow C \rightarrow B: c_{AC}(x) = 0.5 + \frac{x}{200} \quad c_{CB} = 1$$

$$P_2 = A \rightarrow D \rightarrow B: c_{AD} = 1 \quad c_{DB}(y) = 0.5 + \frac{y}{200}$$

(b) Рівновага Неша без додаткової дороги

Обчислимо вартість кожного маршруту:

$$c_{P_1}(x) = 0.5 + \frac{x}{200} + 1 = 1.5 + \frac{x}{200}$$

$$c_{P_2}(y) = 1 + 0.5 + \frac{y}{200} = 1.5 + \frac{100 - x}{200} = 2 - \frac{x}{200}$$

У рівновазі: $c_{P_1}(x) = c_{P_2}(x)$:

$$1.5 + \frac{x}{200} = 2 - \frac{x}{200} \Rightarrow \frac{2x}{200} = 0.5 \Rightarrow x = 50$$

Рівноважний потік: $x = y = 50$

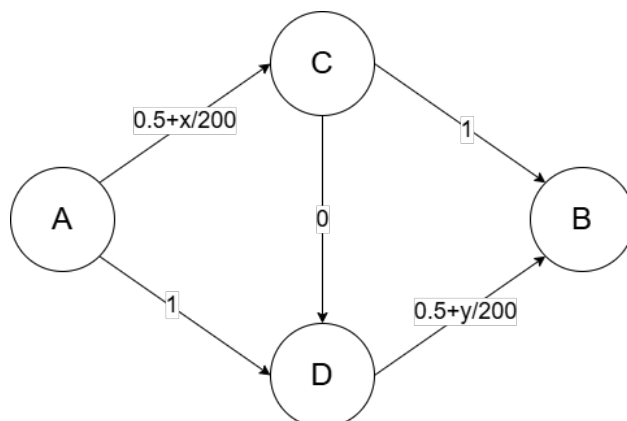
Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 1: A → C → B - 50 cars, cost ≈ 1.75000
Path 2: A → D → B - 50 cars, cost ≈ 1.75000

Edge flows:
A → C: 50 cars
C → B: 50 cars
A → D: 50 cars
D → B: 50 cars

Total system cost: 175.00
```

(c) Додається ребро $C \rightarrow D$ з нульовою вартістю



Після додавання нової дороги $C \rightarrow D$ з нульовою вартістю, з'являється новий маршрут:

$$P_3 : A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \quad c_{P_3} = 1 + \frac{x}{200} + \frac{y}{200} = 1 + \frac{x+y}{200} = 2$$

$$c_{P_1} = 0.5 + \frac{x}{200} = 2$$

$$c_{P_2} = 1 + 0.5 + \frac{y}{200} = 1.5 + \frac{100}{200} = 2$$

Отже, усі маршрути мають однакову вартість.

Рівновага Неша: Усі 100 гравців можуть бути розподілені довільно між усіма трьома маршрутами, якщо загальна вартість залишається 2.

Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 2: A → C → D → B - 100 cars, cost ≈ 2.00000

Edge flows:
A → C: 100 cars
C → B: 0 cars
C → D: 100 cars
D → B: 100 cars
A → D: 0 cars

Total system cost: 200.00
```

(d) Зміна загальної вартості подорожі

До побудови нової дороги загальна вартість:

$$C(f) = 50 \cdot (1.5 + 0.25) + 50 \cdot (1.5 + 0.25) = 50 \cdot 1.75 \cdot 2 = 175$$

Загальна вартість подорожі після побудови нової дороги:

$$C(f) = 100 \cdot 2 = 200$$

Отже, відкриття дороги $C \rightarrow D$ погіршило ситуацію

(e) Введення зборів і субсидій

Уряд змінює політику:

Збільшує вартість $A \rightarrow C$ на 0.125 (збір)

Зменшує вартість $A \rightarrow D$ на 0.125 (субсидія)

Тоді отримаємо нові витрати для кожного маршруту:

$$P_{new1} : c_{P_{new1}} = 1.625 + \frac{x}{200}$$

$$P_{new2} : c_{P_{new2}} = 1.375 + \frac{y}{200}$$

$$P_{new3} : c_{P_{new3}} = 1.125 + \frac{x}{200} + \frac{y}{200}$$

Оскільки P_{new3} та P_{new2} мають найнижчу ціну, знайдемо значення x та y у рівновазі:

$$c_{P_3} = 1.375 + \frac{y}{200}$$

$$c_{P_4} = 1.125 + \frac{x}{200} + \frac{y}{200} = 1.125 + \frac{x+y}{200} = 1.125 + \frac{2y}{200}$$

Отримаємо:

$$x = y = 50$$

Результат роботи коду

```
Integer Nash equilibrium found:
Path 2: A → C → D → B - 50 cars, cost ≈ 1.87500
Path 3: A → D → B - 50 cars, cost ≈ 1.87500

Edge flows:
A → C: 50 cars
C → B: 0 cars
C → D: 50 cars
D → B: 100 cars
A → D: 50 cars

Total system cost: 187.50
```

(f) Аналіз політики зборів і субсидій

Знайдемо загальну ціну для (e). Кожен маршрут має вартість 1.875, отже:

$$C(f) = 100 \cdot 1.875 = 187.5$$

Таким чином, загальна ціна зменшилася.

Додавання нової дороги призвело до *парадоксу Браесса* — гравці перемкнулися на привабливий маршрут, створивши перевантаження. Урядова корекція змінила стимули і повернула рівновагу ближче до оптимуму.

Пропозиція:

Щоб зменшити загальні витрати, можна ввести податки на CB і DB — ці ребра мають змінні витрати. Наприклад:

- Податок на CB : $+0.5$
- Субсидія на DB : -0.5

Це стимулює вибір маршруту через D і потенційно оптимізує трафік, якщо податки налаштовані так, щоб вирівняти граничні соціальні витрати.

ВИСНОВКИ

У межах дослідження було проаналізовано ігри з маршрутизацією в атомарній та неатомарній постановках із застосуванням інструментів теорії ігор та математичного моделювання. Розглянуто класичні приклади неефективності рівноваги, зокрема парадокс Браесса, який демонструє, що додавання нових маршрутів у мережу може призвести до збільшення загальних витрат у рівноважному стані.

У процесі роботи було реалізовано універсальний програмний інструмент для моделювання неатомарних маршрутизованих ігор. Створений код дозволяє задавати довільну топологію орієнтованого графа, визначати афінні функції вартості на ребрах та обчислювати дискретну рівновагу Неша для заданої кількості гравців. Завдяки цьому стало можливим емпірично перевірити аналітичні висновки, моделювати ситуації зі зміною структури мережі та оцінювати вплив регуляторних інтервенцій (зборів, субсидій) на розподіл потоків.

Отримані результати підтвердили теоретичні уявлення про наявність множини рівноваг у неатомарних іграх та важливість побудови політик, що сприяють наближенню рівноважного розподілу до соціально оптимального. Зокрема, симуляційні приклади показали, що навіть незначні зміни у вартостях ребер або в конфігурації мережі можуть суттєво змінити рівновагу та загальні витрати в системі.

Таким чином, дослідження підтверджує практичну цінність інструментів теорії ігор для аналізу децентралізованих мереж та підкреслює необхідність їх застосування у проектуванні ефективних транспортних і комунікаційних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 463 с.
2. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 466 с.
3. Rosenthal, R. W./ The network equilibrium problem in integers, Networks, 1973 — 53–59 с.
4. Monderer, D., Shapley, L. S./ Potential games, Games Econ. Behav., 1996.
5. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 472 с.
6. Roughgarden, T./ The price of anarchy is independent of the network topology, J. Comput. System Sci., 2003. — 341–364 с.
7. Pigou, A. C. The Economics of Welfare, 1920. — 197–211 с.
8. Roughgarden, T., Tardos, É. How bad is selfish routing?, J. ACM, 2002.
9. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 476 с.
10. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 478 с.
11. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani/ Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, Inc., 2007. — 479–480 с.
12. П. Кравець/ Ігрове моделювання мультиагентних систем. Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка", 2009. — С. 138–151 с.
13. David Easley and Jon Kleinberg/ Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. Cambridge University Press,. 2010 — 229–247 с.

ДОДАТОК А

Код для розв'язання задач представлений за посиланням: https://colab.research.google.com/drive/1Ji_nryvgk9-n9Ih--ICEZSJGK4IQqC8H?usp=sharing