

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

(повне найменування закладу вищої освіти)

Факультет Математики Фізики та Інформаційних Технологій

(повне найменування факультету)

Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

(повна назва кафедри)

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти « магістр »

« Сплайн апроксимація для задачі Коші з імпульсним впливом »

(тема кваліфікаційної роботи українською мовою)

« Spline approximation for the Cauchy problem with impulse influence »

(тема кваліфікаційної роботи англійською мовою)

Виконав: здобувач денної форми навчання

спеціальності 113, прикладна математика

(код, назва спеціальності)

Освітня програма прикладна математика

(назва)

Дроздін Володимир Володимирович

(прізвище, ім'я, по-батькові здобувача)

Керівник канд. фіз.-мат. наук, доц. Таїрова М.С.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали) (підпис)

Рецензент д-р. фіз.-мат. наук, доц. Кічмаренко О.Д.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ від . . 20 р.

Завідувач(ка) кафедри

(підпис)

(прізвище, ім'я)

Захищено на засіданні ЕК №

протокол № від . . 20 р.

Оцінка / /
(за національною шкалою/шкалою ECTS/ бали)

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ім'я)

Одеса 2023

ЗМІСТ

Вступ.....	3
РОЗДІЛ I. Системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.....	4
1.1 Система з імпульсним впливом.....	4
1.2 Теоретичні відомості.....	5
1.3 Локальне існування і єдність розв'язку системи з імпульсним впливом	6
РОЗДІЛ II. Сплайн-апроксимація розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсним впливом.....	9
2.1 Сплайн - функції.....	9
2.2 Приклади використання диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у реальному житті	10
2.3 Імпульсний вплив у фіксовані моменти часу.....	10
2.4 Імпульсний вплив у нефіксовані моменти часу.....	16
РОЗДІЛ III. Дослідження результатів.....	22
3.1 Задача Коші з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу.....	22
3.2 Задача Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу.....	24
ВИСНОВКИ.....	29
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	30
Додаток А.....	31
Додаток Б.....	34

ВСТУП

Сплайни використовуються у розв'язанні різноманітних прикладних задач, охоплюючи апроксимацію лінійних функціоналів, інтерполяцію, згладжування функцій, а також вирішення диференціальних та інтегральних рівнянь, а також задач оптимального керування. Зазначимо, що серед усіх сплайнів особливе місце відводиться кубічним сплайнам, що визначаються своєю стійкістю до локальних збурень та високою збіжністю при інтерполяції, порівняно з аналогічними чисельними методами.

Важливо відзначити, що сплайни вирізняються не лише математичною ефективністю, але й легкістю їхньої реалізації на електронних обчислювальних машинах, що відкриває можливість їх широкого використання для розв'язання різноманітних завдань з аналітичними рішеннями.

У математичному аспекті дослідження еволюції реальних процесів з короткочасними збурюваннями, зручно враховувати ідеалізацію, що ці збурювання мають "миттєвий" характер, що, в свою чергу, породжує необхідність аналізу динамічних систем з розривними траєкторіями, або, як їх ще називають, диференціальними рівняннями з імпульсним впливом.

Проблема дослідження звичайних диференціальних рівнянь із імпульсним впливом в контексті їхньої взаємодії з короткочасними збурюваннями вже давно є предметом наукового вивчення. Однак останніми роками зросла актуальність цього питання, що обумовлено наростанням інтересу до новітніх технологій. Системи автоматичного регулювання та обчислювальні системи з імпульсним впливом стали невід'ємною частиною технічних завдань різної природи.

У даній роботі розглядаються алгоритми використання кубічних сплайнів для розв'язання задачі Коші з імпульсним впливом. Вивчаються рівняння з імпульсами, або "стрибками", як у фіксовані моменти часу, так і у моменти перетину розв'язком деяких площин. Приводяться чисельні приклади для обох випадків, які порівнюються з точними рішеннями.

РОЗДІЛ І. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Системи диференціальних рівнянь розглядаються у двох аспектах: фіксовані моменти часу та нефіксовані моменти часу. У першому випадку послідовність моментів впливів може мати скінчені граничні точки, в той час як у другому випадку моменти імпульсного впливу визначаються моментами перетину розв'язком заданих гіперплощин.

1.1 Система з імпульсним впливом

Означення 1.

Система з імпульсним впливом в фіксовані моменти часу записується у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k \\ \Delta x \Big|_{t=\tau_k} &= h_k(x), \end{aligned} \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ моменти імпульсного впливу $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$,

$\Delta x \Big|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ — стрибок розв'язку $x(t)$ у момент

$\tau_k, k = 1, 2, \dots$. Система має нульове розв'язання: $f(t, 0) = h_k(0) = 0$.

Припускається, що розв'язки системи (1) неперервні зліва, тобто $x(t) = x(t - 0)$, функції $f(t, x)$ і $h_k(x)$ задовольняють умові Ліпшиця в деякому околі нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ рівномірно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}, k = 1, 2, \dots$.

Позначимо через $B_r \subset \mathbb{R}^n$ відкритий шар радіуса r з центром в нулі. $B_r = \{|x| < r\}$. Тут і далі $|\cdot|$ — норма в \mathbb{R}^n . Нульовий розв'язок системи (1) називається:

- стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $t \geq 0$ існує $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке що для будь-якого $x^0 \in B_\delta x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$;
- рівномірно стійким, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке що для будь-яких $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_\delta x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$;

- рівномірно притягуємим, якщо для деякого $\eta > 0$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\sigma(\varepsilon) > 0$ таке що для будь-яких $t_0 \geq 0$ та $x^0 \in B_\delta x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ для всіх $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;
- рівномірно асимптотично стійким, якщо він є рівномірно стійким і рівномірно притягуємим;
- розв'язок, який не є стійким, називається нестійким.

1.2 Теоретичні відомості

В контексті фіксованих моментів часу важливо ретельно вивчити послідовність впливів, враховуючи можливість обмеженої кількості моментів впливу та їхній вплив на точність розв'язку. Теореми існування точності розв'язку для цих систем дозволяють уявити, яким чином динаміка системи змінюється в контексті імпульсних впливів.

У випадку нефіксованих моментів часу велику увагу приділяють взаємодії розв'язку з гіперплощинами, що визначають моменти імпульсного впливу. Доведення теорем коректності задачі Коші допомагають забезпечити необхідні умови існування та унікальності розв'язків у таких системах.

Розглядаються імпульсні системи, описані диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad (2)$$

та імпульсними впливами:

$$\Delta x|_{t_i} = h_i(x), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \Delta x|_{t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i), \quad (3)$$

де послідовність $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ не має жодних обмежень. Ці загальні системи є в повній мірі "фізичними", проте, їх дослідження залишається недостатньо вивченим напрямком.

Ці імпульсні системи визначаються нестационарними диференціальними рівняннями, які враховують вплив імпульсів на систему у визначені моменти часу. Умови перехідних процесів визначають, яким чином система змінюється в моменти імпульсних впливів. Послідовність моментів $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ може бути довільною, що робить цю систему особливо універсальною для моделювання

різноманітних фізичних явищ. Це відкриває широкий простір для подальших наукових досліджень та вивчення їхніх властивостей та поведінки.

Наступні умови вважаються виконаними, якщо не виконується інше:

- x належить області $\Omega \in R^n$, t належить інтервалу $[a, b]$, і (для спрощення) a не збігається з t_i для будь-якого i з множини натуральних чисел.
- Функції $h_i(x)$ є неперервними та обмеженими в Ω , та існує таке $\sigma : a < \sigma \leq b$, щоб ряд

$$\sum_{\substack{t_i \\ a < t_i \leq \sigma}} \sup_{\Omega} \| h_i(x) \|$$

збігався.

- Якщо $t \neq t_i$ для будь-якого i :

Функція $f(t, x)$ неперервна в точці (t, x) , ряд

$$\sum_{\substack{t_i \\ |t_i - t| < \epsilon}} \sup_{\Omega} \| h_i(x) \| = o(\epsilon),$$

для $t_i : |t_i - t| < \epsilon$, де $\epsilon > 0$ вибирається в дуже малому околі нуля.

- $\|f(t, x)\| \leq m(t)$, де функція $m(t)$ є сумовною.

Означення 2

Неперервна зліва функція $x(t) : [a, \sigma) \rightarrow \Omega$ називається розв'язком задачі

Коші

$$x(a) = x_0 \tag{4}$$

для (2), (3), якщо $x(t)$ задовольняє співвідношенням (2)-(4).

1.3 Локальне існування і єдність розв'язку системи з імпульсним впливом

Якщо точка a не є граничною для послідовності $\{t_i\}$, то локальне існування і єдність розв'язку системи (2)-(3) еквівалентно локальному існуванню і єдності розв'язку системи (2), (3). Припустимо тепер, що a – гранична точка множини $\{t_i\}$.

- Якщо функція $f(t, x)$ задовольняє умові Ліпшиця по змінній x :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \Omega, \quad t \in [a, \sigma];$$

- Якщо функції $h_i(x)$ задовольняють умові Ліпшиця $|h_i(x) - h_i(y)| \leq l_i|x - y|$ і ряд $\sum_{a < t_i \leq \sigma} l_i$ збігається,

то задача (2) - (4) має єдиний розв'язок.

Рівняння (2) також можна записати у вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \neq \tau_i(y), \quad i = 1, p,$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i(y)} = I_i(y).$$

У відміну від систем із заздалегідь визначеними моментами імпульсного впливу, розв'язки рівнянь (4), хоча і виявляються фрагментарно неперервними, проте мають розриви, що залежать від конкретного розв'язку. Для кожного варіанту розв'язку постають власні точки розриву. Це фактично ускладнює вивчення таких систем диференціальних рівнянь.

Одне з труднощів виникає внаслідок того, що розв'язки можуть "ударити" по поверхні $t = \tau_i(y)$. Цей ефект часто зробоє розв'язок непродовжуваним на достатньому проміжку. Часто саме це стає головною причиною виходу розв'язку за межі області визначення системи із імпульсним впливом або за межі її дослідження.

Далі ми будемо розглядати системи диференціальних рівнянь із імпульсним впливом, в яких відсутня проблема "удару". Іншими словами, ми обмежимо нашу увагу лише тими рівняннями, де розв'язки перетинають кожен з гіперплощин $t = \tau_i(y)$ лише один раз. Відсутність проблеми "удару" гарантується наступною теоремою.

Теорема 1.

У випадку виконання наступних умов:

- Функція $f(t, y)$ є неперервною на області Q і відповідає умові Ліпшиця по y в області D .
- $|f(t, y)| \leq M$, де M - константа.
- Функції $\tau_i(y)$ задовольняють умові Ліпшиця по y в області D з відповідними константами $L_i < 1/M_i$, де $i = 1, p$.

- Інтегральна крива $(t, y(t))$ рівняння з імпульсами не залишає області Q для $(t \geq 0)$.
- Має місце нерівність $\tau_i(y + I_i(y)) \leq \tau_i(y)$, де $y \in D, i = 1, p$.
- Для $y \in D$ і $i = 1, p, \tau_i(y) < \tau_{i+1}(y + I_i(y))$.

Інтегральна крива перетинає кожен гіперплощину $t = \tau_i(y)$ лише один раз.

РОЗДІЛ II. СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

2.1 Сплайн - функції

Математичні сплайни походять від тонких гнучких стержнів, якими користувалися художники для проведення плавних кривих через задані точки. Стержень був закріплений у точках (x_i, y_i) і набував форму кривої $y(x)$ з мінімальною "енергією натягіння".

Якщо перейти до математичного опису сплайна, то сплайн-функцією ступеня k з точками з'єднання $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ буде функція $y(x)$, яка на відрізку $[x_0, x_n]$ має неперервні похідні до $(k - 1)$ ступеню включно і на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ дорівнює поліному ступеня k . Найчастіше розглядаються кубічні сплайни, ці сплайни забезпечує відповідність вузлів початковій функції та неперервність першої і другої похідних в точках з'єднання.

Імпульсний вплив, як вже було зазначено раніше, може бути у фіксовані моменти часу, та у нефіксовані моменти часу. Розглянемо розв'язок задачі Коші в обох з цих двох випадків окремо.

В задачах апроксимації в деяких випадках виникає ситуація, коли невідомий тип апроксимуючої функції. Вся інформація про неї зводиться до того, що відповідна залежність є достатньо гладкою. У таких випадках для апроксимації використовують сплайни - кусково-визначені функції, які співпадають з різними простими функціями (найчастіше поліномами) на кожному відрізку області визначення. Найпростішим прикладом сплайну є звичайна ламана, побудована за точками.

Але якщо ми хочемо, щоб отримана залежність була ще й гладкою, слід придумати щось краще, ніж ламана лінія. Найчастіше для вирішення такої задачі використовують так звані "кубічні" сплайни, які на кожному відрізку області визначення збігаються з поліномами третього ступеня. Коефіцієнти цих

поліномів підбираються так, щоб на краях відрізків сплайн залишався не лише неперервним, а й мав неперервні перші та другі похідні.

2.2 Приклади використання диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у реальному житті

В екології вічні розглядають динаміку популяції, математичною моделлю якої є рівняння Верхюльста. З популяції шляхом дискретних зовнішніх ефектів (у вигляді імпульсів) забирається (доповнюється) певна кількість біомаси. Цей процес описується за допомогою диференціальних рівнянь з імпульсами. У фіксовані моменти моменти імпульсної дії та величини імпульсів визначаються таким чином, щоб час регенерації кількості біомаси, забраної з популяції, був мінімальним.

Ще одним з прикладів можна продемонструвати моделювання криз. Економічні кризи, такі як фінансові кризи чи рецесії, можна моделювати з допомогою імпульсних диференціальних рівнянь. В даному випадку імпульси прийнято представляти як зовнішні фактори, що викликають кризу. Вони можуть бути доволі різноманітними, але в рамках одної системи найчастіше обирається якась певна група. Наприклад:

- банківські кризи: відкликання вкладів, банкрутства банків;
- фінансові пузири: різке зниження вартості активів, таких як нерухомість;
- рецесії: зниження рівня економічної активності та виробництва;
- збільшення безробіття: зростання рівня безробіття країни;

Таким чином, диференціальні рівняння з імпульсними впливами широко використовуються для аналізу та моделювання різних процесів у реальному житті.

2.3 Імпульсний вплив у фіксовані моменти часу

Маємо таку задачу Коші з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу:

$$\begin{aligned}
y' &= f(t, y), t \neq \tau_i, i = \overline{1, p} \\
\Delta y \Big|_{t=\tau_i} &= I_i(y), \\
y(t_0) &= y_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

де функція $f(t, y)$ є визначеною у області $Q = \{(t, y) \mid t \geq 0, y \in D \subset R^1\}$.

Ми маємо визначену послідовність моментів імпульсивного впливу $\{\tau_i\}$, $i = \overline{1, p}$, $p > 0$. Розв'язок для задачі (5) буде кусково-неперервна функція $y = \psi(t)$, що при $t = \tau_i$ матиме розриви першого роду, та що відповідатиме такій умові стрибка:

$$\Delta \psi \Big|_{t=\tau_i} = \psi(\tau_i + 0) - \psi(\tau_i - 0) = I_i(\psi(\tau_i - 0)).$$

Беремо кожен з сегментів $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, такий що $i = \overline{0, p-1}$ і $\tau_0 = t_0$. Розглядаємо розбиття його на точки, рівномірно розташовані вздовж послідовності. Точки t_{ij} обиратимиме з кроком $h_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{N_i}$. t_{ij} - це вузол, той, що збігається з моментом імпульсивного впливу, позначається як t_{ij}^* .

Отже, $t_{ij}^* = \tau_i$ для $j = 0$, або $t_{ij}^* = t_{iN_i-1} = \tau_i$. Звідси, зазначимо вірогідні типи сегментів:

$$\left[t_{ij}^*, t_{ij+1} \right], \left[t_{ij}, t_{ij+1} \right], \left[t_{ij}, t_{ij+1}^* \right], \left[t_{ij}^*, t_{ij+1}^* \right].$$

Таким чином, маємо другий і третій типи, які збігаються, а також перший і четвертий типи, які також збігаються. Це виконується завдяки екперервності зліва розв'язку, у відповідності із визначенням:

$$\lim_{t \rightarrow \tau_i - 0} \psi(t) = \psi(\tau_i - 0) = \psi(\tau_i).$$

Побудова сплайна $S_i(t)$, на проміжку $[t_{ij}, t_{ij+1}]$.

Відповідно до визначення (2), маємо що $S_i(t)$ для будь-якого такого сегмента виглядатиме таким чином:

$$S_i(t) = a_{j0} + a_{j1}(t - t_{ij}) + a_{j2}(t - t_{ij})^2 + a_{j3}(t - t_{ij})^3,$$

У додаток до цього, якщо використовувати властивості розглянутого сплайна, ми отримуємо:

$$S_i(t_{ij}) = y_i(t_{ij}) = y_{ij}$$

$$S'_i(t_{ij}) = y'_i(t_{ij}) = f(t_{ij}, y_{ij})$$

Це призводить до встановлення системи з чотирьох рівнянь, звідки можна визначити коефіцієнти:

$$\begin{cases} S_i(t_{ij}) &= y_{ij}, \\ S'_i(t_{ij}) &= f(t_{ij}, y_{ij}), \\ S_i(t_{ij+1}) &= y_{ij+1}, \\ S'_i(t_{ij+1}) &= f(t_{ij+1}, y_{ij+1}). \end{cases}$$

Таким чином, $S_i(t)$ можемо переписати таким чином:

$$S_i(t) = \varphi_1(x)y_{ij} + \varphi_2(x)y_{ij+1} + \varphi_3(x)h_i y'_{ij} + \varphi_4(x)h_i y'_{ij+1}, \quad (6)$$

чи

$$S_i(t) = \varphi_1(x)S_{ij} + \varphi_2(x)S_{ij+1} + \varphi_3(x)h_i f(t_{ij}, S_{ij}) + \varphi_4(x)h_i f(t_{ij+1}, S_{ij+1}), \quad (7)$$

тут:

$$x = (t - t_{ij})/h_i,$$

$$\varphi_1(x) = (1 - x)^2(1 + 2x), \quad \varphi_2(x) = x^2(3 - 2x),$$

$$\varphi_3(x) = x(1 - x)^2, \quad \varphi_4(x) = -x^2(1 - x),$$

$$S_{ij} = S_i(t_{iq}), q = j, j + 1.$$

У (7) з невідомих матиме тільки $S_{i,j+1}$, адже S_{ij} вже визначені у минулій ітерації. Слід зазначити, що $S_{00} = y(0) = y_0$ для $[t_{00}, t_{01}]$. Щоб визначити S_{ij+l} потрібно вимагати виконання наступної умови:

$$S'_i(t_{ij+1}) = y''(t_{ij+1}), \quad (8)$$

тут

$$S_i''(t_{ij+1}) = \frac{6}{h_i^2} (S_{i,j+1} - S_{i,j}) - \frac{4}{h_i} S'_{i,j} - \frac{2}{h_i} S'_{i,j+1} =$$

$$= \frac{6}{h_i^2} (S_{i,j+1} - S_{i,j}) - \frac{4}{h_i} f(t_{i,j}, S_{i,j}) - \frac{2}{h_i} f(t_{i,j+1}, S_{i,j+1}). \quad (9)$$

А також

$$y''(t_{ij+1}) = \frac{df}{dt}(t_{ij+1}, S_{ij+1}) = f'_t(t_{ij+1}, S_{ij+1}) + f'_y(t_{ij+1}, S_{ij+1})f(t_{ij+1}, S_{ij+1}). \quad (10)$$

Після розв'язку (8), враховуючи (9) і (10), ми знайдемо S_{ij+1} , яке дозволить знайти шуканий сплайн вже на проміжку $[t_{ij}, t_{ij+1}]$.

Побудова $S_i(t)$ на $[t_{ij}^*, t_{ij+1}]$.

Тут $t_{ij}^* = t_i = \tau_i$ буде моментами імпульсного впливу. А тому визначення (6)

виглядатиме наступним чином:

$$S_i(t) = \varphi_1(x)\bar{y}_{i0} + \varphi_2(x)y_{i1} + \varphi_3(x)h_i f(t_{i0}, \bar{y}_{i0}) + \varphi_4(x)h_i f(t_{i1}, y_{i1}),$$

$$\text{тут } \bar{y}_{i0} = y(\tau_i - 0) + I_i(y(\tau_i - 0)) = y(\tau_i) + I(y(\tau_i))$$

чи

$$S_i(t) = \varphi_1(x)\bar{S}_{i0} + \varphi_2(x)S_{i1} + \varphi_3(x)h_i f(t_{i0}, \bar{S}_{i0}) + \varphi_4(x)h_i f(t_{i1}, S_{i1}),$$

$$\text{тут } \bar{S}_{i0} = S_{i0} + I_i(S_{i0}) = S_{i-1, N_{i-1}} + I_i(S_{i-1, N_{i-1}}).$$

Також само будемо робити, тобто замість S_{i0} варто поставити \bar{S}_{i0} . А вже далі знаходиться розв'язок рівняння (8) і з нього буде визначено S_i .

В такому способі послідовно потрібно розбудувати сплайни $S_i(t)$ на кожному з $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $i = 0, \dots, p-1$, що обумовлений моментами імпульсного впливу, причом двома послідовними.

$S(t) = S_i(t), t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], i = 0, \dots, p-1$ - ця функція буде наближеним розв'язком задачі (5) на проміжку $[0, T]$.

Теорема 2 (про єдиний розв'язок задачі Коші)

Нехай виконуються такі умови:

- Функція $f(t, y)$ визначена, неперервно-диференційована в Q , задовольняє умові Ліпшица по змінній y з постійною L_1 в D .
- $f'(t, y)$ задовольняє умові Ліпшица по y з постійною L_2 в D .

- Функції $I_i(y)$, $i = 1, \dots, p$ задовольняють умові Липшица в області D з постійними λ_i .

Виконується наступна нерівність

$$h^2 L_1 + 2h_2 < 6, \text{ де } h \leq \max_{1 \leq i \leq p} \{h_i\}. \quad (11)$$

Якщо наведені умови виконуються, то задача Коші буде мати єдиний розв'язок $y(t)$ і можна використовувати таку оцінку:

$$|S(t) - y(t)| \leq O(h).$$

Доведення.

Завдяки зроблених вище припущенням та четвертій умові, задача Коші (5) має єдиний розв'язок $y(t)$ і $y(t) \in C^2 [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, \dots, p - 1$, що неперервно залежить від початкових даних.

Продемонструємо що сплайн існує. (8) відносно $S_{i,j+1}$ переформулюємо таким чином:

$$S_{i,j+1} = \frac{h_i^2}{6} \left\{ f'(t_{i,j+1}, S_{i,j+1}) + \frac{2}{h_i} f(t_{i,j+1}, S_{i,j+1}) + \frac{4}{h_i} f(t_{i,j}, S_{i,j}) + \frac{6}{h_i^2} S_{i,j} \right\} \equiv g(S_{i,j+1}).$$

У разі задоволення умови (11) теореми і $h_i \leq h$, $i = 1, \dots, p$, відображення $g(S_{i,j+1})$ стає стискаючим, що, згідно з теоремою Банаха призводить до існування єдиної нерухомої точки $\xi_{i,j+1}^*$ - що є кореням рівняння (8). Тобто, можемо зазначити, що сплайн - визначений. Нехай $S_{i,j+1}$ - приблизний розв'язок рівняння (8), отриманий з точністю $O(h^2)$.

Отримаємо значення похибки:

$$R(t) = S(t) - y(t) = S(t) - \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, y) d\sigma + \sum_{t_0 < \tau_i < t} I_i(y) \right).$$

На сегментах для $t \in [t_{ij}, t_{ij+1}]$, $j > 0$, $i = 1, \dots, p$, відповідно до умов теореми $y(t) \in C^1 [t_{ij}, t_{ij+1}]$ і можна отримати початкову оцінку

$$R(t) = \varphi_1(x)y_{ij} + \varphi_2(x)y'_{ij} + \varphi_3(x)h_i y'_{ij} + \varphi_4(x)h_i y'_{ij+1} - y(t).$$

У (6) замість y_{ij} , y_{ij+l} , y'_{ij} , y'_{ij+l} запишемо їхні розкладання у точці $t = t_{ij} + xh_i$ в ряд Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$y_{iq} = y(t) + y'(t)(t_{iq} - t) + \frac{y''(\xi_q)(t_{ij} - t)^2}{2}$$

$$y'_{iq} = y'(t) + y''(\eta_q)(t_{iq} - t), \text{ де } q = j, j+1, \xi_q, \eta_q \in [t_{ij}, t_{ij+1}].$$

Таким чином, після проведення перетворень ми отримуємо:

$$R(t) = h_i \left((1-x)\varphi_2(x)y'(\xi) - x\varphi_1(x)y'(\eta) + \varphi_3(x)y'_{ij} + \varphi_4(x)y'_{ij+1} \right),$$

де $x \in [0; 1]$, $\xi, \eta \in [t_{ij}, t_{ij+1}]$.

Перепишемо теорему про середнє до додатків одного знаку

$$R(t) = h_i x(1-x)(1+2x-2x^2)(y'(\bar{\xi}) - y'(\bar{\eta})), \bar{\xi}, \bar{\eta} \in [t_{ij}, t_{ij+1}].$$

Звідки $|R(t)| \leq \frac{3}{8}h_i w_i(y') \leq \frac{3}{8}hw(y')$, де

$$w_i(y') = \max_{t', t'' \in [t_{i,j}, t_{i,j+1}]} |y'(t') - y'(t'')|,$$

$$w(y') = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 0 \leq N_{i-1}}} w_i(y'), \quad h = \max_{1 \leq i \leq p} h_i.$$

Подивимось на $R(t)$ у проміжку $[t_{i_0}, t_{i_1}]$. В точці імпульсного впливу буде

враховуватися стрибок $t_{i_0} = \tau_i, i > 0, \bar{y}_{l_0} = y_{i_0} + I_i(y_{i_0}), \bar{S}_{l_0} = S_{i_0} + I_i(S_{i_0})$.

Враховуючи визначення сплайну та умови неперервності залежності розв'язку від початкових умов, матиме наступне:

$$|R(t)| \leq \frac{3}{8}h_i w_i(y')(1+L)^i e^{Lh},$$

де $L = \max_{1 \leq i \leq p} \{\lambda_i, L_1\}$.

Кінцева оцінка на $[t_0, T]$: $|R(t)| \leq \frac{3}{8}hw(y')(1+L)^p e^{L(T-t_0)} = O(h)$. І,

таким чином, теорема доказана.

2.4 Імпульсний вплив у нефіксовані моменти часу

Нехай маємо задачу Коші, моменти впливу імпульсу визначаються моментами перетинання інтегральної кривої $y(t)$ таких поверхонь $t = \varphi_k(y), k = \overline{1, p}$.

Будемо розглядати задачу Коші у вигляді

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad t \neq \varphi_k(y), \quad k = \overline{1, p} \\ \Delta y \Big|_{t=\varphi_k} (y) &= I_k(y). \end{aligned} \quad (12)$$

Початкова умова є наступною $y(0) = y_0$. Вирішенням системи (12) буде функція $y(t)$ з розривами, причому ця функція буде кусково-неперервною, де точки розриву залежать від самого розв'язку. У подальшому ми аналізуватимемо диференціальні рівняння, де не спостерігається явища "биття" розв'язку вздовж поверхні $t = \varphi_k(y)$. Іншими словами, розглядатимемо рівняння, в яких розв'язки перетинають кожну поверхню лише один раз, створюючи функцію, яка залишається кусково-неперервною з мінімальною взаємодією по поверхні.

Побудуємо розв'язок.

Позначимо моменти перетинання поверхні $\varphi_k(y)$ розв'язком як t_k^* , звідси буде що t_k^* - корінь рівняння

$$t_k = \varphi_k \left(y(t_k) \right). \quad (13)$$

Будемо використовувати метод простої ітерації для розв'язку рівняння (13)

$$t_k^{n+1} = \varphi_k \left(y(t_k^n) \right), n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Позначимо $t_k^0 = \overline{t_{k-1}}$ як початкове наближення, а $\overline{t_{k-1}}$ - це вказане приблизне значення попередньої ітерації імпульсного впливу, що винайдено завдяки пошуку розв'язку (14) при $k - 1$. Зазначимо, у випадку $k = 1$ отримаємо $t_1^0 = t_0 = 0$.

Щодо розв'язку задачі Коші (12), то тут ми використовуватимемо ермітовий сплайн $S(t)$, такий, що буде аналогічно тому сплайну, який був при розв'язку задачі Коші з імпульсними впливами у фіксовані моменти часу.

Отже, альтернативним до (14) буде такий ітераційний процес

$$t_k^{n+1} = \varphi_k \left(S(t_k^n) \right), n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Початкове наближення зберігається таке ж саме, де

$$S(t_k^0) = S(t_k^0) + \sigma I_k \left(S(t_k^0) \right),$$

$$\sigma = \begin{cases} 1, k > 1 \\ 0, k = 1 \end{cases}, S(t_l^0) = y(t_0) = y_0.$$

Щоб виконувалась умова та ітераційний процес (15) збігався, потрібно вимагати виконання такої нерівності, а саме:

$$\left| \frac{d\varphi_k}{dt} \right| \leq \alpha < 1.$$

Маємо лише два вигодних випадків:

- $0 < \frac{d\varphi_k}{dt} \leq \alpha < 1$, звідси послідовність наближень до t_k^* виглядатиме

$$t_k^0 < t_k^1 < \dots < t_k^n < \dots < t_k^*;$$

- $-1 < -\alpha \leq \frac{d\varphi_k}{dt} < 0$ - звідси матиме розташування наближених значень по

обидві сторони від t_k^* , а саме

$$t_k^0 < t_k^2 < \dots < t_k^n < \dots < t_k^* < \dots < t_k^{n+1} < \dots < t_k^3 < t_k^1,$$

де $n = 2m, m = 0, 1, \dots$

Спочатку розглянемо випадок, коли $0 < \frac{d\varphi_k}{dt} \leq \alpha < 1$.

Маємо проміжок $[t_k^n, t_k^{n+1}]$ на будь-якій ітерації (15), на цьому сегменті розбудуємо сплайн $S_k(t)$. Припускаємо що кількість розбиттів зазначеного

проміжка більша за нуль, тобто $M_n > 0$, та тоді $h_{kn} = \frac{(t_k^{n+1} - t_k^n)}{M_n}$,

$$t_{ki} = t_k^n + ih_{kn}, \quad i = \overline{0, M_n}.$$

Введемо позначення $S_{ki} = S_k(t_{ki})$, $S_{kM_n} = S_k(t_k^{n+1})$.

Для кожної ітерації знайдемо розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{6}{h_{kn}^2}(S_{k,i+1} - S_{k,i}) - \frac{4}{h_{kn}}f(t_{ki}, S_{ki}) - \frac{2}{h_{kn}}f(t_{k,i+1}, S_{k,i+1}) = \\ & = f'(t_{k,i+1}, S_{k,i+1}) + f'_{yy}(t_{k,i+1}, S_{k,i+1})f(t_{k,i+1}, S_{k,i+1}). \end{aligned}$$

Відносно $S_{k,i+1}$ матиме $S_k M_n$, яке в (15) слугуватиме задля знаходження наступного наближення до шуканого моменту імпульсного впливу, матиме сплайн, який буде апроксимувати розв'язок на $[t_k^n, t_k^{n+1}]$. Обираємо $n = n + 1$ і повертаємось до (15).

Якщо умова збіжності ітераційного процесу виконуються, то можемо одержати розв'язок (13) при якому завгодно необхідному ϵ . А також отримаємо таку оцінку:

$$\left| t_k^* - t_k^{n+1} \right| \leq \alpha / (1 - \alpha) \left| t_k^n - t_k^{n-1} \right|.$$

Оберемо $\bar{t}_k = t_k^{n+1}$ і $t_k^* = \bar{t}_k + \epsilon$, де $\epsilon = \alpha / (1 - \alpha) \left| t_k^n - t_k^{n-1} \right|$.

Отже, таким способом може бути визначеним саме момент імпульсного впливу, а також сплайн, який буде апроксимувати розв'язок задачі Коші на проміжку, який, в свою чергу, визначен послідовними моментами двох імпульсних впливів.

Тепер розглянемо випадок $-1 < -\alpha \leq \frac{d\varphi_k}{dt} < 0$.

Враховуючи, що наближення до t_k^* , знаходяться по обидві сторони від кореня, будемо аналізувати поведження інтегральної кривої $(t, y(t))$ на проміжках $[t_k^{2m}, t_k^{2m+1}]$, не враховуючи імпульсний вплив. Нам потрібно розбудувати сплайн на цьому сегменті задля отримання наступного наближення t_k^{2m+2} , яке буде мати парний індексом відносно розшукаваного моменту імпульсного впливу.

Припустимо, що на етапі, коли будуємо сплайни на $[t_k^{2m}, t_k^{2m+1}]$, а зазначені сегменти будуть містити усередині точку t_k^* - що є моментом імпульсного впливу, ми також визначимо функцію $f(t, y)$ у t_k^* . А отже $y' = f(t, y)$ на всьому проміжку, і отже не будемо враховувати у t_k^* імпульсний вплив.

Оскільки ермітов сплайн забезпечує локальну інтерполяцію, це додаткове визначення не вплине на процес побудови розв'язку.

Таким чином, нас цікавлять таких два види сегментів: $[t_k^{2m}, t_k^{2m+1}]$ і $[t_k^{2m}, t_k^{2m+2}]$, $m = 0, 1, \dots$. Для $[t_k^{2m}, t_k^{2m+2}]$ буде виконуватися алгоритм, який ми розглядали у першому випадку, а саме за формулою (15) визначено спочатку t_k^{2m+2} і потім зробимо крок ітераційного процесу на $[t_k^{2m}, t_k^{2m+2}]$.

Слід зазначити, що $t_k^{2m+2} \in [t_k^{2m}, t_k^{2m+1}]$, а також що $t_k^{2m+2} < t_k^*$, тоді використаємо результати обчислень попереднього етапу ітерації до якоїсь точки t_{ks} , та такий, що $t_{ks} < t_k^{2m+2} < t_{ks+1}$, $0 < s < M_{n-1}$, і добудуємо на $[t_{ks}, t_k^{2m+2}]$ сплайн.

Таким чином будуть визначатися усі моменти імпульсного впливу, а також будуватися сплайн $S(t)$, який буде вважатися наближеним розв'язком.

У подальшому нам буде потрібна неперервна залежність розв'язку диференціального рівняння з імпульсним впливом від початкових умов.

Означення 3.

Розв'язок $y(t)$ диференціального рівняння (1) з початковою умовою $y(0) = y_0$, $0 \leq t \leq T$ неперервно залежить від початкових даних, якщо для будь-якого $\varepsilon_0 > 0$ і будь-якого $\eta > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon_0, \eta) > 0$ таке, що розв'язок $z(t)$ такого ж рівняння з початковою умовою $z(0) = z_0$, причому $|y_0 - z_0| < \delta$ та задовольняє нерівності $|y(t) - z(t)| < \varepsilon_0$ для $0 \leq t \leq T$ і $|t - \tau_i| > \eta$, а τ_1, \dots, τ_p - моменти перетинання поверхонь інтегральною кривою $(t, y(t))$.

Справедлива теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових даних.

Теорема 3 (про неперервну залежність від початкових даних)

Припустимо, що усі умови, що вимагає теорема 1 виконуються, а також функції I_k , $k = \overline{1, p}$ є неперервними в області D . Тоді $y(t)$ неперервно залежить від початкових даних. Приведемо теорему, що обґрунтовує застосування сплайн-функцій для розв'язання задачі Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу.

Теорема (щодо обґрунтування використання сплайн-функцій при пошуку розв'язку задачі Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу).

Припустимо, що такі вимоги виконуються:

- функція $f(t, y)$ неперервно диференційована в Q ;
- $\left| f^{(k)}(t, y(t)) \right| \leq M$, $k = 0, 1$;
- $\varphi_i(y)$, $i = \overline{1, p}$ задовольняють Липшицеві умові з постійною L_2 в D ;
- $\varphi_i(y)$, $i = \overline{1, p}$ диференційовані та $\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right| \leq C$, причому $\varphi_i(y(t)) \in [t_0, T]$ т

$$CM < 1;$$

- функції $I_i(y)$, $i = \overline{1, p}$ неперервно диференційована в D .

А отже буде доречно така оцінка $|S(t) - y(t)| = O(h)$,

де $S(t)$ - функція що буде апроксимувати розв'язок задачі (12).

Доказ.

Перші три умови теореми забезпечуватиме єдине перетинання інтегральної кривої $(t, y(t))$ будь-якої поверхні $t = \varphi_k(y)$, а це свідчить про те, що існує єдиний корінь рівняння (15). Розглянемо

$$\left| \frac{d\varphi_k(y)}{dt} \right| = \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right| |f(t, y)| \leq C \cdot M < 1.$$

Завдяки першим двом умовам теореми та нерівності зазначеної вище метод простої ітерації буде збігатися до єдиного кореня. Ним буде виступати момент перетинання інтегральної кривої поверхні з якоюсь точністю ϵ .

Також ми не зіткнемось з ефектом, коли похибка накопичується, адже у методі простої ітерації значення моментів перетинання повинні визначаються лише з заданою попередньою точністю ϵ .

Так як *Теорема про єдиний розв'язок задачі Коші* та *Теорема про неперервну залежність від початкових даних* виконуються, а отже поза η — околу τ_k , $k = \overline{1, p}$ буде використовуватись оцінка з *Теорема (про єдиний розв'язок задачі Коші)*, але з постійною наступного виду: $O(h)$, $h = \max_{1 \leq k \leq p} \{h_{k,n}\}$.

РОЗДІЛ III. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для проведення дослідження описаного раніше методу для задач Коші з імпульсним впливом як у нефіксовані моменти часу, так і у фіксовані будемо користуватися Octave.

3.1 Задача Коші з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу

Маємо наступну задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, & t \neq \tau_k, k = \overline{1,4} \\ \Delta y \Big|_{t=\tau_k} = Cy, \\ y(0) = 1, \\ \tau = \{1; 1.5; 2; 3\}. \end{cases}$$

Потрібно розглянути випадки, коли C може дорівнювати наступним значенням:

- $C = 0.9$;
- $C = -0.6$.

Побудувати розв'язок потрібно на сегменті $[0; 5]$, $N = 10$ (тобто кількість часткових сегментів для побудови сплайнів), h у якості кроку обирається постійним для кожного з проміжків.

Спочатку розглянемо випадок, коли $C = 0.9$, за допомогою програми, написаної в середовищі Octave [Додаток А] отримаємо розв'язок, зображений на Рис. 1.

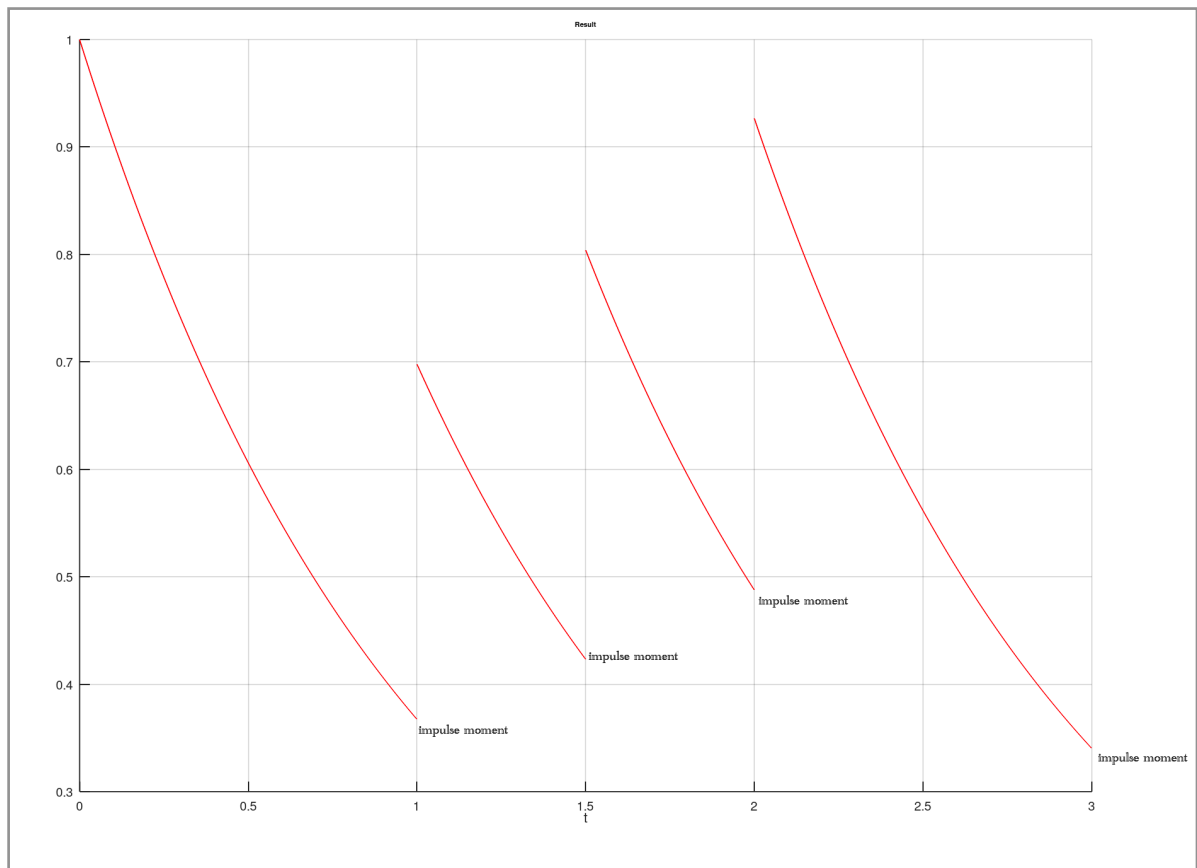


Рис. 1

А також

k -ий номер моменту імпульсного впливу	τ момент імпульсного впливу	Величина імпульсного впливу	h
1	1	0.3648	0.005
2	1.5	0.4287	0.005
3	2	0.4906	0.01
4	3	0.3411	0.02

Табл. 1

Зазначимо, що розв'язок винайдений з точністю $O(h^2)$, де $h = 0.02$

Тепер розглянемо випадок, коли $C = -0.6$, за допомогою програми, написаної в середовищі Octave [Додаток А] отримаємо розв'язок, зображений на Рис. 2

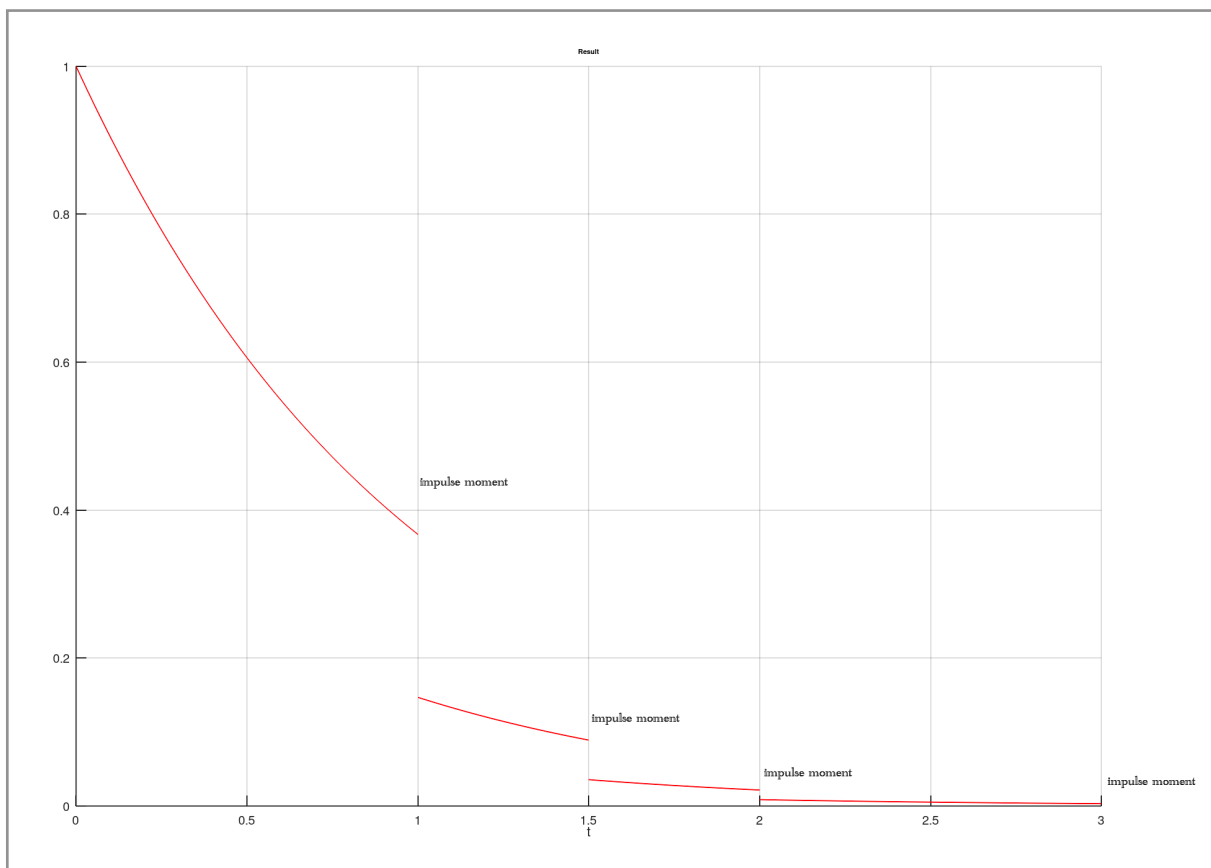


Рис. 2

А також

k -ий номер моменту імпульсного впливу	τ момент імпульсного впливу	Величина імпульсного впливу	h
1	1	0.3879	0.005
2	1.5	0.1498	0.005
3	2	0.0139	0.01
4	3	0.0016	0.02

Табл. 2

Аналогічно попередньому випадку, маємо $h = 0.02$.

3.2 Задача Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу

Маємо наступну задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{y} = -y, & t \neq \tau_k(y) \\ \Delta y \Big|_{t=\tau_k(y)} = \alpha y, & \tau_k(y) = \arctg y(t) + \pi k, k = \overline{1, p} \\ y(0) = C \end{cases}$$

Також, точний розв'язок дорівнюватиме

$$\begin{cases} Ce^{-t}, 0 \leq t \leq t_1 \\ Ce^{-t} + \alpha(Ce^{-t_1}), t_1 < t \leq t_2, \\ (C + \alpha Ce^{t_2-t_1})e^{-t} + \alpha(Ce^{-t_2} + \alpha Ce^{-t_1}), t_2 < t \leq t_3, \\ \left[C + \alpha Ce^{t_2-t_1} + \alpha(C + \alpha Ce^{t_2-t_1} + Ce^{-t_2+t_3} + \alpha Ce^{-t_1+t_3}) \right] e^{-t} + \\ + \alpha \left[(C + \alpha Ce^{t_2-t_1})e^{-t_3} + \alpha(Ce^{-t_2} + \alpha Ce^{-t_1}) \right], t_3 < t \end{cases}$$

Моменти імпульсного впливу позначені як t_k , де $k = 1, \dots, 3$

Потрібно розглянути випадки, коли C , α та p приймають наступні значення:

- $\alpha = 10, C = -1, p = 3$;
- $\alpha = -0.7, C = 2, p = 2$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\alpha = 10, C = -1, p = 3$. Нас цікавить момент першого імпульсного впливу, саме він трапиться, коли задана поверхонь $\tau(y) = \arctg y(t) + \pi$ перетнеться із розв'язком диф. рівняння з задачі Коші. Тут $t_1 = \arctg y(t_1) + \pi$, а у якості початкового наближення оберемо момент $t_1^0 = 0$.

У $\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{y'(t)}{1+y^2(t)}$ підставимо значення для t_1^0 , тоді

$$0 < \frac{d\tau_1}{dt} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким чином у цьому випадку згідно з теорією наведеною раніше ми потрапили до випадку, коли наближень до t_k^* виглядатиме таким чином

$t_k^0 < t_k^1 < \dots < t_k^n < \dots < t_k^*$, тобто буде розташовуватись з однієї сторони від кореня.

За допомогою програми, написаної в середовищі Octave [Додаток Б] отримаємо розв'язок, зображений на Рис. 3.

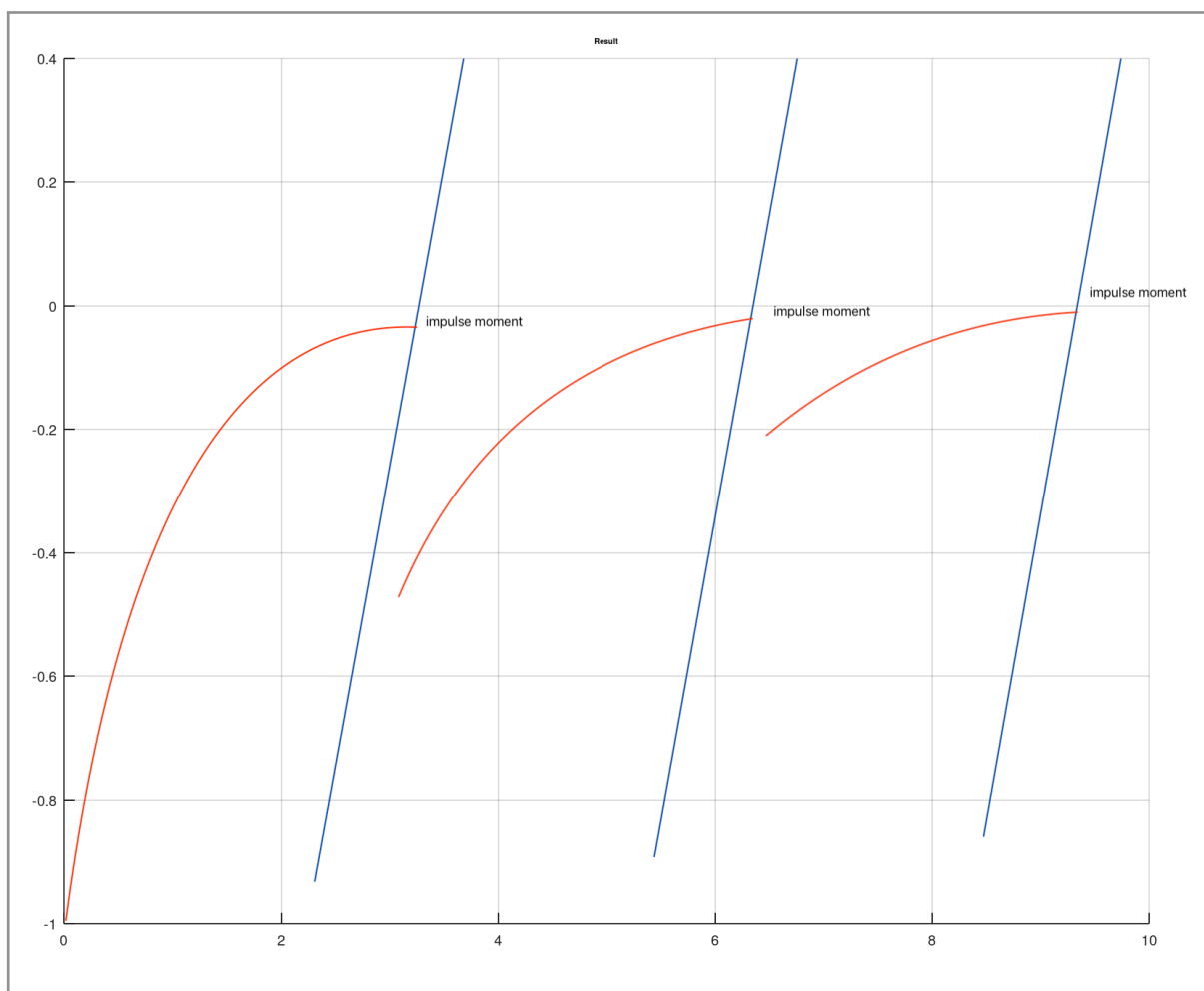


Рис. 3

Синім кольором поперхні, що визначають моменти імпульсного впливу, а червоним - графік отриманого розв'язку.

Також наведемо таблицю

k -ий номер моменту імпульсного впливу	τ момент імпульсного впливу	Кол-во ітерацій методу простої ітерації	Величина імпульсного впливу	h
1	3.1081	5	-0.4409	0.0235
2	6.2689	4	-0.1899	0.031
3	9.4301	2	-0.0808	0.031

Табл. 3

Аналогічно попередньому прикладу, маємо $h = 0.031$., та похибку порядку $O(h)$.

Тепер розглянемо випадок, коли $\alpha = -0.7$, $C = 2$, $p = 2$

На відміну від першого випадка, маємо

$$-1 < \frac{d\tau_1}{dt} = -\frac{2}{5} < 0.$$

А, отже, це буде іншим випадком згідно з теорією наведеною раніше. Ми потрапляємо у випадок, коли $-1 < \frac{d\tau_1}{dt} < 0$, що означатиме розташування наближених значень по обидві сторони від t_k^* .

За допомогою програми, написаної в середовищі Octave [Додаток Б] отримаємо розв'язок, зображений на Рис. 4.

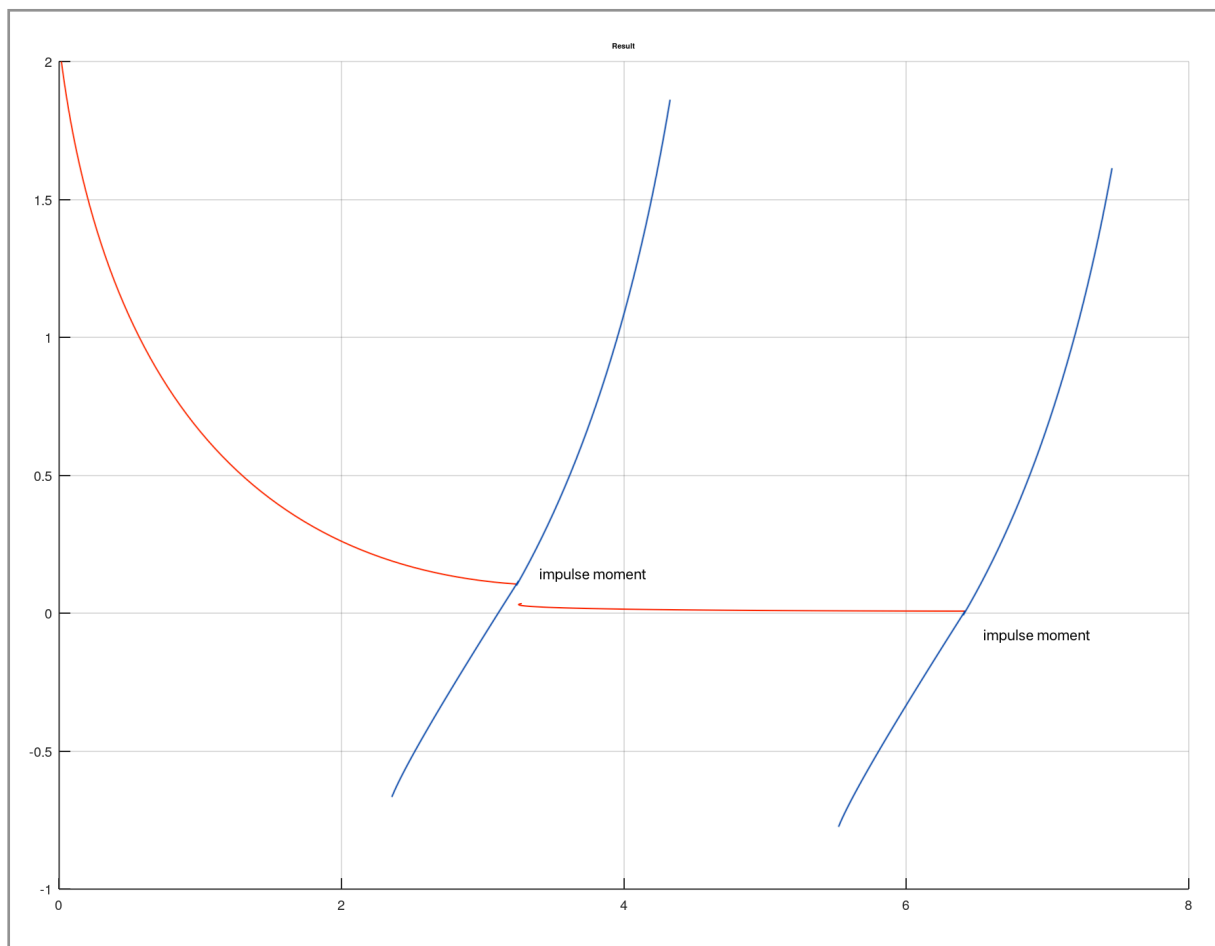


Рис. 4

Також наведемо таблицю

k -ий номер моменту імпульсного впливу	τ момент імпульсного впливу	Кол-во ітерацій методу простої ітерації	Величина імпульсного впливу	h
1	3.3208	4	0.0901	0.0314
2	6.3101	3	$6.0328e - 004$	0.031

Табл. 4

Аналогічно попередньому прикладу, маємо $h = 0.0314$ та похибку порядку $O(h)$.

ВИСНОВКИ

У цій дипломній роботі переді була поставлена задача дослідити задачу Коші з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу та задачу Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу, дослідити відомості з теорії сплайнів, а також сплайн апроксимацію вирішення цих задач Коші з імпульсним впливом. Мною було досліджено два різновиди імпульсів та два різновиди задач Коші з імпульсним впливом, наведено та доведено теорему існування та єдиності розв'язання такої задачі Коші. Також наведено приклади використання систем з імпульсним впливом у реальному житті. Описано використання сплайн апроксимації для вирішення таких задач. Практичними прикладами продемонстровано дві задачі Коші: задача Коші з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу та задача Коші з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу з різними початковими умовами. Було наведено розв'язок за допомогою Octave, результати проілюстровані графічно та чисельно для кожного з прикладів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zverkova T. S. Spline approximation of differential solutions equations with impulse action, Sunny Beach, Bulgaria, 2010, p 101 - 108
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972; Галкин П. В., л Матем. заметки
3. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Диференційні рівняння з імпульсним впливом. – Київ: Вища школа, 1987.
4. Stability Analysis of the Equilibrium Point of the IS-LM Model for a Closed Economy; Institute of Applied Social Sciences, Federal University of Alfenas, Varginha, BRAZIL, Dec 05, 2019
5. Трофімчук Е.П., Трофімчук С.І. Імпульсні системи з фіксованими моментами загального розміщення: існування, єдність розв’язку та коректність задачі Коші. Інститут математики АН УССР, Київ, Укр. мат. журнал, 1990.
6. Octave Forge documentation (<https://octave.sourceforge.io/docs.php>)

```

% This code is solving a Cauchy problem using the method of fixed moments.
% The Cauchy problem is defined by the differential equation  $dy/dt = -y$ , with
% the initial condition  $y(0) = 1$ .
% The code first defines the problem using symbolic variables and expressions.
% It sets up the function  $f = -y$ 
% and the interval  $[0, T]$  with  $T = 5$ . It also defines the impulse moments,
% which are the points
% where the solution needs to be calculated. In this case, the impulse moments
% are  $[1, 1.5, 2, 3]$ .
% The code then sets up the spline functions and starts a loop to calculate the
% solution for each interval between
% the impulse moments. Inside the loop, the code calculates the spline values
% using the given formulas.
% It calculates the spline values at the beginning and end of the interval, and
% then iteratively calculates
% the spline values for the remaining points using the previous spline value.
% After calculating the spline values, the code plots the mean squared values
% of the spline function
% over the interval. The code then moves to the next interval and repeats the
% process until all intervals between the
% impulse moments have been calculated. Finally, the code adds a title and
% labels to the plot and displays the grid.

```

```

function CaushiFixedMoments()

    syms t y;
    f = sym('-y');
    I = sym('0.9 * y');
    y_0 = 1;
    T = 5;
    impulse_moments = [1; 1.5; 2; 3];
    p = length(impulse_moments);
    N = 10;

    syms x h Spline_01 t_ij;
    x = sym('(t - t_ij) / h');
    F_1 = sym('(1 - x)^2 * (1 + 2 * x)');
    F_2 = sym('x^2 * (3 - 2 * x)');
    F_3 = sym('x * (1 - x)^2');
    F_4 = sym('-x^2 * (1 - x)');

    hold on;
    step = 1;

    h = impulse_moments(1) / N;

    for j = 0 : N-1
        t_00 = h * j;
        t_01 = h * (j + 1);

        if (j == 0)
            Spline_00 = y_0;
        else
            Spline_00 = Spline_jj1;
        end

        f_00 = subs(f, {t, y}, {t_00, Spline_00});
        F_01 = subs(f, {t, y}, {t_01, Spline_01});
        x_i = subs(x, t_ij, t_00);
        F_01 = subs(F_1, x, x_i);
        F_02 = subs(F_2, x, x_i);
    end

```

```

F_03 = subs(F_3, x, x_i);
F_04 = subs(F_4, x, x_i);
Spline_i = sym('F_01 * Spline_00 + F_02 * Spline_01 + F_03 * h * f_00 +
F_04 * h * F_01');
Spline_i = subs(Spline_i);
Spline_8 = sym('6 / h^2 * (Spline_01 - Spline_00) - 4 / h * f_00 - 2 / h
* F_01');
Spline_8 = subs(Spline_8);
df_dt = diff(f, t);
df_dt = subs(df_dt, {t, y}, {t_01, Spline_01});
df_dy = diff(f, y);
df_dy = subs(df_dy, {t, y}, {t_01, Spline_01});
y_8 = sym('df_dt + df_dy * F_01');
y_8 = subs(y_8);
equation_8 = sym('Spline_8 - y_8');
equation_8 = subs(equation_8);
Spline_jj1 = subs(solve(equation_8));
Spline_j(step) = subs(Spline_i, Spline_01, Spline_jj1);
Spline_j(step) = subs(Spline_j(step));
Spline_j(step) = subs(subs(Spline_j(step), t_ij, t_00));
t_marked = t_00 : h/10 : t_01;
mean_squared = double(subs(Spline_j(step), t, t_marked));
step = step + 1;
plot(t_marked, mean_squared, 'r')
end

for i = 1:p-1
h = (impulse_moments(i+1) - impulse_moments(i)) / N;
for j = 0:N-1
t_00 = impulse_moments(i) + h * j; t_01 = impulse_moments(i) + h *
(j + 1);
if (j == 0)
Spline_00 = subs(Spline_j(step-1), t, impulse_moments(i));
I0 = subs(I, {y, t}, {Spline_00, impulse_moments(i)});
Spline_00 = Spline_00 + I0;
else
Spline_00 = Spline_jj1;
end
f_00 = subs(f, {t, y}, {t_00, Spline_00});
F_01 = subs(f, {t, y}, {t_01, Spline_01});
x_i = subs(x, t_ij, t_00);
F_01 = subs(F_1, x, x_i);
F_02 = subs(F_2, x, x_i);
F_03 = subs(F_3, x, x_i);
F_04 = subs(F_4, x, x_i);
Spline_i = sym('F_01 * Spline_00 + F_02 * Spline_01 + F_03 * h *
f_00 + F_04 * h * F_01');
Spline_i = subs(Spline_i);
Spline_8 = sym('6 / h^2 * (Spline_01 - Spline_00) - 4 / h * f_00 - 2
/ h * F_01');
Spline_8 = subs(Spline_8);
df_dt = diff(f, t);
df_dt = subs(df_dt, {t, y}, {t_01, Spline_01});
df_dy = diff(f, y);
df_dy = subs(df_dy, {t, y}, {t_01, Spline_01});
y_8 = sym('df_dt + df_dy * F_01');
y_8 = subs(y_8);
equation_8 = sym('Spline_8 - y_8');
equation_8 = subs(equation_8);
Spline_jj1 = subs(solve(equation_8));
Spline_j(step) = subs(Spline_i, Spline_01, Spline_jj1);
Spline_j(step) = subs(Spline_j(step));
Spline_j(step) = subs(subs(Spline_j(step), t_ij, t_00));
h_marked = (t_01 - t_00) / 100;
t_marked = t_00 : h_marked : t_01;
mean_squared = double(subs(Spline_j(step), t, t_marked));

```

```
        step = step + 1;
        plot(t_marked, mean_squared, 'r')
    end
end

title('Result'); xlabel('t');
grid;
end
```

```
% this code provides a flexible numerical
% approach for solving differential equations
% with non-fixed impulse moments, with the ability
% to adapt the time step for accuracy.
% The results are visualized through plots,
% and key information is displayed in the output.
```

```
function CauchiNonFixedMoments()
```

```

syms t y m h_value;
alpha = 10; C = -1;
f = sym('-y(t)');
ft = sym('-y');
I = sym('alpha*y(t)');
I = subs(I);
p = 3;
y0 = C;
F = sym('atan(y(t))+3.1416*m');
N = 10;
epsilon = 0.0001;
syms x h_value Spline_j1 Spline_jj1 t_ij;
x = sym('(t-t_ij)/h_value');
F_1 = sym('(1-x)^2*(1+2*x)');
F_2 = sym('x^2*(3-2*x)');
F_3 = sym('x*(1-x)^2');
F_4 = sym('-x^2*(1-x)');

hold on;
t_0 = 0;
Spline_0 = y0;
step = 1;

for m = 1:p
    differentialF = diff(F, t);
    a_value = subs(differentialF, {'diff(y(t),t)', 'y(t)'}, {f, Spline_0});
    a_value = subs(a_value);
    if (a_value > 0)
        t_1 = subs(F, 'y(t)', Spline_0); t_1 = subs(t_1);
        while (abs(t_1 - t_0) > (1 - a_value) / a_value * epsilon)
            h_value = (t_1 - t_0) / N;
            Spline_j = Spline_0;
            for j = 1:N
                t_j = t_0 + h_value * (j - 1);
                t_j1 = t_0 + h_value * j;
                f_j = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j, t_j});
                f_j1 = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j1, t_j1});
                res = sym('6 / h_value^2 * (Spline_j1 - Spline_j) - 4 /
h_value * f_j - 2 / h_value * f_j1');
                res = subs(res);
                d_ft = diff(ft, t); d_ft = subs(d_ft, {t, y}, {t_j1,
Spline_j1});
                d_fy = diff(ft, y); d_fy = subs(d_fy, {t, y}, {t_j1,
Spline_j1});

                f_t_j1 = subs(ft, y, Spline_j1);
                f_t_j = subs(ft, y, Spline_j);
                les = sym('d_ft+d_fy*f_t_j1'); les = subs(les);
                Spline_jj1 = subs(solve(res - les));
                x_i = subs(x, t_ij, t_j); x_i = subs(x_i);
                F_01 = subs(F_1, 'x', x_i); F_02 = subs(F_2, 'x', x_i);
                F_03 = subs(F_3, 'x', x_i); F_04 = subs(F_4, 'x', x_i);
            end
        end
    end
end

```

```

Spline_i = sym(' F_01 * Spline_j + F_02 * Spline_jj1 + F_03
* h_value * f_t_j + F_04 * h_value * f_t_j1');
Spline_i = subs(Spline_i);
S(step) = subs(Spline_i, Spline_j1, Spline_jj1);
h_mark = (t_j1 - t_j) / 100;
t_mark = t_j : h_mark : t_j1;
mean_square = double(subs(S(step), t, t_mark));
plot(t_mark, mean_square, 'r')
step = step + 1;
Spline_j = Spline_jj1;
end
t_0 = t_1;
Spline_0 = Spline_jj1;
t_1 = subs(F, 'y(t)', Spline_0); t_1 = subs(t_1);
end
end
if (a_value < 0)
t_1 = subs(F, 'y(t)', Spline_0); t_1 = subs(t_1);
while (abs(t_1 - t_0) > 0.01 * epsilon)
h_value = (t_1 - t_0) / N;
Spline_j = Spline_0;
for j = 1:N
t_j = t_0 + h_value * (j - 1);
t_j1 = t_0 + h_value * j;
f_j = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j, t_j});
f_j1 = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j1, t_j1});
res = sym('6 / h_value^2 * (Spline_j1 - Spline_j) - 4 /
h_value * f_j - 2 / h_value * f_j1');
res = subs(res);
d_ft = diff(ft, t);
d_ft = subs(d_ft, {t, y}, {t_j1, Spline_j1});
d_fy = diff(ft, y);
d_fy = subs(d_fy, {t, y}, {t_j1, Spline_j1});
f_t_j1 = subs(ft, y, Spline_j1);
f_t_j = subs(ft, y, Spline_j);
les = sym('d_ft+d_fy*f_t_j1'); les = subs(les);
Spline_jj1 = subs(solve(res - les));
Spline_j = Spline_jj1;
end
t_1 = subs(F, 'y(t)', Spline_jj1); t_1 = subs(t_1);
h_value = (t_1 - t_0) / N;
Spline_j = Spline_0;
for j = 1:N
t_j = t_0 + h_value * (j - 1);
t_j1 = t_0 + h_value * j;
f_j = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j, t_j});
f_j1 = subs(f, {'y(t)', t}, {Spline_j1, t_j1});
res = sym(' 6 / h_value^2 * (Spline_j1 - Spline_j) - 4 /
h_value * f_j - 2/ h_value * f_j1');
res = subs(res);
d_ft = diff(ft, t);
d_ft = subs(d_ft, {t, y}, {t_j1, Spline_j1});
d_fy = diff(ft, y);
d_fy = subs(d_fy, {t, y}, {t_j1, Spline_j1});
f_t_j1 = subs(ft, y, Spline_j1);
f_t_j = subs(ft, y, Spline_j);
les = sym('d_ft + d_fy * f_t_j1');
les = subs(les);
Spline_jj1 = subs(solve(res - les));
x_i = subs(x, t_ij, t_j); x_i = subs(x_i);
F_01 = subs(F_1, 'x', x_i);
F_02 = subs(F_2, 'x', x_i);
F_03 = subs(F_3, 'x', x_i);

```

```

        F_04 = subs(F_4, 'x', x_i);
        Spline_i = sym('F_01 * Spline_j + F_02 * Spline_jj1 + F_03
* h_value * f_t_j + F_04 * h_value * f_t_j1');
        Spline_i = subs(Spline_i);
        S(step) = subs(Spline_i, Spline_j1, Spline_jj1);
        h_mark = (t_j1 - t_j) / 100;
        t_mark = t_j:h_mark:t_j1;
        mean_square = double(subs(S(step), t, t_mark));
        plot(t_mark, mean_square, 'b')
        step = step + 1;
        Spline_j = Spline_jj1;
    end

    t_0 = t_1;
    Spline_0 = Spline_jj1;
    t_1 = subs(F, 'y(t)', Spline_0); t_1 = subs(t_1);
end
end
end

plot(t_1, Spline_0, 'res*')
title('Result'); xlabel('t'); grid on
surge = subs(I, 'y(t)', Spline_0)
Spline_0 = Spline_0 + subs(I, 'y(t)', Spline_0);
disp('impulse moment', m, t_1);
end

```