

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. А. Якімова, В. Є. Круглов

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА БІЗНЕСІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
спеціальностей 111 «Математика»,
113 «Прикладна математика»,
292 «Міжнародні економічні відносини»

ОДЕСА
ОНУ
2024

**УДК 811.161.2'271(038)
Я453**

Автори:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь ОНУ ім. І. І. Мечникова;

В. Є. Круглов, кандидат фізико-математичних наук, професор, професор кафедри методів математичної фізики ОНУ ім. І. І. Мечникова.

Рецензенти:

Л. В. Потрашкова, доктор економічних наук, доцент, професор кафедри комп'ютерних систем і технологій Харківського національного економічного університету ім. Семе́на Кузне́ця;

В. М. Пивоварчик, доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри вищої математики і статистики ОНПУ імені К. Д. Ушинського;

Ю. С. Крутий, доктор технічних наук, професор, професор кафедри ІТ та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Рекомендовано до видання вченою радою

ОНУ імені І. І. Мечникова.

Протокол № 8 від 26 березня 2024 р.

Якімова Н. А.

Я453 Математичні методи прогнозування в економіці та бізнесі : навч. посіб. для студ. першого (бакалавр.) рівня освіти спец. 111 «Матем.», 113 «Прикл. матем.», 292 «Міжнарод. економіч. відносини» / Н. А. Якімова, В. Є. Круглов. Електронні текстові дані (1 файл: 6,2 МБ). Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2024. – 211 с.

ISBN 978-617-689-458-2

У пропонованому навчальному посібнику розглядаються основні поняття теорії ймовірностей та математичної статистики, а також засновані на них математичні методи прогнозування, які можуть бути застосовані для дослідження, в першу чергу, економічних процесів та об'єктів. Особливу увагу приділено оптимізаційним та статистичним методам. Весь викладений матеріал ілюструється дуже докладними прикладами, схемами та алгоритмами, що полегшує розуміння студентами як самого теоретичного матеріалу, так і його значення для обраної ними спеціальності.

Навчальний посібник складений для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 111 «Математика», 113 «Прикладна математика», 292 «Міжнародні економічні відносини».

УДК 519.216.3:[33+005.521](075.8)

ISBN 978-617-689-458-2

© Якімова Н. А., Круглов В. Є., 2024

© Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова, 2024

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ЯК ОСНОВА ПРОГНОЗУВАННЯ	7
1.1. Основи теорії ймовірностей	7
1.1.1. Класичне визначення ймовірності	7
1.1.2. Урнова схема	8
1.1.3. Умовна ймовірність	9
1.1.4. Скінченна схема з неоднаково можливими результатами	10
1.1.5. Аксиоматична побудова теорії ймовірностей	13
1.1.6. Випадкова величина та її функція розподілу	14
1.1.7. Розподіл дискретних випадкових величин	16
1.1.8. Розподіл безперервних випадкових величин	19
1.2. Основи математичної статистики	23
1.2.1. Числові характеристики випадкової величини	23
1.2.2. Довірчий інтервал. Репрезентативність вибірки	29
1.2.3. Критерій нормальності розподілу	32
1.2.4. Критерій Стюдента	37
1.2.5. Кореляційна залежність	41
Контрольні запитання	45
2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ	46
2.1. Етапи прогнозування та функції прогнозів	46
2.2. Класифікація економічних прогнозів	50
2.3. Система макроекономічних показників економічної діяльності	53
2.4. Методи розрахунку ВВП	63
2.4.1. Виробничий метод (ВВП як сума валової доданої вартості)	63
2.4.2. Метод кінцевого використання (ВВП як сума складових кінцевого використання)	64
2.4.3. Розподільний метод (ВВП як сума первинних витрат)	65
2.5. Обчислення показників ВВП в постійних цінах	65
2.6. Показники ефективності розвитку економіки країни	74
2.7. Моделі економічного прогнозування	77
2.7.1. Прогнозування макропоказників	81
2.7.2. Прогнозування грошової маси	86
2.8. Аналітичні показники прогнозування динаміки розвитку економічних систем	87
2.9. Основи теорії корисності	91
Контрольні запитання	94
3. АНАЛІЗ ЧИННИКІВ ВПЛИВУ ТА СТАНУ СИСТЕМИ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ	95
3.1. Чинники, що впливають на результат прогнозування	95
3.2. Аналіз ситуації або стану системи	98
Контрольні запитання	100
4. МЕТОДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ПЕРЕВІРКИ ВХІДНОЇ ІНФОРМАЦІЇ	100
4.1. Кількість вхідної інформації	100
4.2. Оцінка вхідної інформації	102
4.3. Джерела інформації	107

Контрольні запитання	109
5. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ПРОГНОЗУВАННЯ	109
Контрольні запитання	114
6. МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС – ЗАСІБ ВИВЧЕННЯ МІЖГАЛУЗЕВИХ ЗВ’ЯЗКІВ	115
6.1. Схема міжгалузевого балансу	115
6.2. Основне рівняння МГБ	116
6.3. Види МГБ	121
6.4. Основні схеми та методи оцінювання показників МГБ «витрати – випуск»	122
6.5. Методи складання МГБ	124
6.6. Таблиця «ресурси та використання товарів»	125
6.7. Динамічні міжгалузеві моделі	127
Контрольні запитання	130
7. ІНТУЇТИВНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ	131
7.1. Сутність та сфери застосування інтуїтивних методів прогнозування	131
7.2. Методи евристичної самоорганізації моделей	132
7.3. Класифікація шкал при експертному оцінюванні	134
7.4. Методи колективної експертної оцінки	137
7.5. Математична формалізація методів колективної експертної оцінки	140
7.6. Колективна генерація ідей («мозковий штурм» або брейнстормінг)	146
7.7. Метод «Дельфі»	148
7.8 Метод огляду думок та цілей	149
7.8.1. Прогнозування обсягів продаж	149
7.8.2. Прогнозування витрат на рекламу	150
7.8.3. Прогнозування часової складової попиту	154
7.9. Математична формалізація індивідуального експертного оцінювання	155
7.9.1. Векторні критерії. Загальна постановка задачі багатокритеріальної Оптимізації	156
7.9.2. Принцип зважених сум (економічний принцип згортки локальних критеріїв)	158
7.9.3. Принцип Лапласа	162
7.9.4. Принцип гарантованого результату (критерій максиміну)	163
7.9.5. Принцип оптимізму (критерій максимаксу)	165
7.9.6. Принцип Гурвіца	167
7.9.7. Принцип Севіджа (принцип мінімаксного ризику)	170
7.9.8. Принцип рівномірності	172
7.9.9. Принцип справедливої поступки	174
7.9.10. Принцип виділення головного критерію	175
7.9.11. Принцип послідовної поступки	175
7.9.12. Логічні критерії	176
Контрольні запитання	177
8. АНАЛІЗ РЯДІВ ДИНАМІКИ	178
8.1. Класифікація динамічних рядів	178
8.2. Розрахунок середніх показників за рядами динаміки	180
8.3. Основні складові динамічного ряду	186
8.4. Виявлення тенденції динамічного ряду	188
8.5. Типи тенденцій динаміки та їх застосування	190

8.6. Прості методи згладжування даних	194
8.6.1. Метод експоненціального згладжування з одним параметром	194
8.6.2. Метод ковзної середньої за m вузлами	198
8.6.3. Метод зваженої ковзної середньої	199
8.7. Метод екстраполяції тренду	200
8.8. Верифікація результатів прогнозування	204
8.8.1. Поняття верифікації та параметри якості прогнозу	204
8.8.2. Комбінована оцінка прогнозу	205
Контрольні запитання	207
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	209

ПЕРЕДМОВА

Суспільне життя неможливе без передбачення майбутнього, без прогнозування перспектив розвитку. Економічні прогнози необхідні для визначення шляхів розвитку суспільства та економічних ресурсів, що забезпечують його досягнення, для виявлення найбільш ймовірних і економічно ефективних варіантів довгострокових, середньострокових і поточних планів, обґрунтування основних напрямків економічної та технічної політики, передбачення наслідків прийнятих рішень і здійснюваних в даний момент заходів. В умовах науково-технічного прогресу і удосконалення економічної системи держави, прогнозування стає одним із вирішальних наукових факторів формування стратегії і тактики суспільного розвитку [1].

Таким чином, сучасні умови потребують максимального розширення фронту прогнозування, подальшого удосконалення методології і методики розробки прогнозів. Чим вищий рівень прогнозування процесів суспільного розвитку, тим ефективнішим є планування та керування цими процесами в суспільстві. Економічний прогноз покликаний дати об'єктивне та достовірне уявлення про те, що може відбутися за тих чи інших умов. Він може стати надійною основою для прийняття державних рішень за умови його включення до макроекономічного плану. Прогнозування та планування як методи дослідження мають ґрунтуватися на певних методологічних принципах.

В даному навчальному посібнику велику увагу приділено тим розділам теорії ймовірностей та математичної статистики, апарат яких використовується при розробці прогнозів. В цьому посібнику розглянуті індивідуальні та групові методи прогнозування, докладно описані алгоритми їх математичної формалізації. Також окремий розділ присвячено основним економічним поняттям та кількісним показникам економічної діяльності, що використовуються та аналізуються при складанні прогнозів як на мікро-, так і на макрорівні. В умовах дистанційного навчання все більшого значення набуває візуалізація викладеного теоретичного матеріалу. Тому пропонований навчальний посібник містить велику кількість кольорових ілюстрацій, таблиць та схем, які сприяють засвоєнню матеріалу навіть тими студентами, які вимушені вивчати предмет самостійно. Всі розглянуті в посібнику методи та алгоритми супроводжуються докладними практичними прикладами.

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА ЯК ОСНОВА ПРОГНОЗУВАННЯ

1.1. Основи теорії ймовірностей

1.1.1. Класичне визначення ймовірності

Достовірною називається подія, що обов'язково відбудеться при здійсненні певного комплексу умов. Відповідно, **неможливою** називається подія, що при заданому комплексі умов не відбудеться ніколи. **Випадковою** називається така подія, що при заданому комплексі умов може як відбутися, так і не відбутися [1]. Мірою можливості здійснення такої події і є її **ймовірність**. Достовірна й неможлива події можуть розглядатися як крайні окремі випадки випадкових подій.

Випадкові події будемо позначати великими латинськими буквами $A, B, C, \dots$. Достовірна подія позначається буквою Ω , неможлива подія – символом $\emptyset$. Уведемо тепер деякі відносини між подіями. Дві події A і B є **несумісними**, якщо настання однієї з них виключає настання іншої. **Сума подій A і B** – це така третя подія $C = A + B$, що відбувається тоді, коли настає або подія A , або подія B , або вони обидві одночасно. **Добуток подій A і B** – це така третя подія $C = AB$, що настає тоді, коли відбуваються і подія A , і подія B . Подія $\bar{A}$ є **протилежною** до події A , якщо вона несумісна з подією A і разом з нею утворює достовірну подію, тобто $\bar{A} + A = \Omega$.

Однією з моделей із скінченною кількістю результатів є класична ймовірнісна схема. У цій схемі визначення ймовірності ґрунтується на рівній можливості кожного зі скінченної кількості результатів. Таке визначення з'явилося на основі перших спроб вирахування шансів в азартних іграх. Так, у випадку із гральною кісткою при одноразовому киданні однакова можливість випадання кожної із шести граней, на які нанесені цифри **1, 2, 3, 4, 5, 6**. Позначимо ці однаково можливі результати, або **елементарні події**, через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$. Природно, що шанс здійснитися не одному результату, а одному із двох, наприклад, або ω_1 , або ω_2 , є вдвічі більшим. Міркуючи таким чином, можна визначити шанси здійснення будь-якої складеної події, що складається з декількох елементарних [17].

У загальному випадку, коли є n однаково можливих елементарних подій $\omega_1, \dots, \omega_n$, **ймовірність** будь-якої складеної події A , що складається з m елементарних подій $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}$, визначається як відношення кількості елементарних подій, що сприяють події A , до загальної кількості елементарних подій, тобто

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Наприклад, у випадку із гральною кісткою ймовірність події A , що полягає у випаданні парної кількості очок (тобто $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$), дорівнює $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, тому що до складу події A входять три елементарних події, а загальна кількість елементарних подій дорівнює шести.

Із класичного визначення ймовірностей, зокрема, випливає, що ймовірність повної події Ω , що містить всі n елементарних подій, дорівнює $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$. Але тоді повна подія Ω , що полягає в появі будь-якої із усього набору елементарних подій $\omega_1, \dots, \omega_n$, і є достовірною подією, тому що вона обов'язково відбувається. Тому ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Якщо події розглядати як підмножини множини елементарних подій, то відносини між подіями, введені вище, можна інтерпретувати як співвідношення між множинами [16]. Несумісні події – це такі події, які не містять спільних елементів. Сума $A + B$ і добуток AB – це відповідно їхнє

об'єднання $A \cup B$ і перетин $A \cap B$. Протилежна подія $\bar{A}$ – це доповнення A . Запис $A \subset B$ означає, що в події B містяться всі елементарні події з A , і додатково можуть міститися елементарні події, що не входять до складу події A . Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

У випадку класичного визначення ймовірності справедлива наступна теорема додавання ймовірностей.

Теорема 1.1 (додавання ймовірностей). *Формулювання.* Якщо дві складені події $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ і $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$ є несумісними, то ймовірність об'єднаної події $C = A \cup B$ дорівнює сумі ймовірностей цих двох подій.

Доведення. Дійсно, ймовірності подій A і B дорівнюють $\frac{m}{n}$ та $\frac{k}{n}$ відповідно. Подія

$$C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$$

містить $m + k$ елементарних подій, тому що за умовою теореми серед елементарних подій $\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ немає жодної, що входила б у набір $\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$. Тому, відповідно до класичного визначення, її ймовірність дорівнює

$$P(C) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Теорему доведено.

Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A , якщо до неї входять всі ті елементарні події, що не входять до складу події A . Іншими словами, A і $\bar{A}$ – це такі несумісні події, що разом утворюють достовірну подію, тобто $A \cup \bar{A} = \Omega$. З теореми додавання випливає, що $P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$, тому $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Звідси, зокрема, випливає, що ймовірність неможливої події $\emptyset$, що є протилежною до достовірної події Ω , дорівнює нулю.

1.1.2. Урнова схема

Класична схема, незважаючи на всю свою обмеженість, придатна для вирішення ряду суто практичних задач. Розглянемо, наприклад, деяку сукупність елементів об'єму N . Це можуть бути вироби, кожне з яких є придатним або бракованим. Подібні ситуації описуються урнвою схемою: в урні є N куль, з них M білих, $(N - M)$ чорних [17]. Нехай, наприклад, є лише руйнівні засоби контролю кожного виробу на придатність (наприклад, перевірка якості сірника). У такому випадку не можна обстежити всю партію виробів, а тільки її частину. Отже, з урни, що містить N куль, у якій перебуває невідома кількість M білих куль, витягається вибірка об'єму n . Така процедура називається *вибіркою без повернення*. Необхідно визначити ймовірність того, що у вибірці буде виявлено m білих куль. Це задача на застосування класичного визначення ймовірності. Справді, в описаній ситуації кожна вибірка не має переваги стосовно будь-якої іншої, тобто всі вони однаково можливі. Підрахуємо кількість всіх можливих вибірок об'єму n із N елементів. Як відомо з комбінаторики, кількість способів, за допомогою яких можна вибрати n елементів із загальної їхньої кількості N , дорівнює кількості сполучень із N по n , тобто

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad N! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N.$$

Таким чином, загальна кількість результатів дорівнює C_N^n . З'ясуємо, скільки результатів із загальної кількості елементарних результатів сприяє події A , тобто наявності у вибірці об'єму n білих куль у

кількості m . Кількість способів, якими можна з M білих куль витягти m штук, дорівнює C_M^m , а кількість способів вибрати з $(N - M)$ чорних куль $(n - m)$ штук дорівнює C_{N-M}^{n-m} . Тому кількість результатів, сприятливих події A , дорівнює $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ і, отже, її ймовірність, що дорівнює відношенню кількості сприятливих результатів до їхньої загальної кількості, буде наступною [17]:

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M} = P_{M,N}(m, n). \quad (1.2)$$

Приклад 1.1. Нехай є партія, що складається з 500 виробів, у якій два бракованих. Яка ймовірність у вибірці з 5 виробів не виявити жодного бракованого?

Розв'язання. Скористаємося формулою (1.2). Маємо

$$P_{498,500}(5, 5) = \frac{C_{498}^5 \cdot C_2^0}{C_{500}^5} = \frac{\frac{498!}{5!(498-5)!} \cdot \frac{2!}{0!(2-0)!}}{\frac{500!}{5!(500-5)!}} = \frac{\frac{498!}{5!493!} \cdot \frac{2!}{0!2!}}{\frac{500!}{5!495!}} = 0,98.$$

Відповідь. Ймовірність у вибірці з 5 виробів не виявити жодного бракованого дорівнює $P_{498,500}(5, 5) = 0,98$.

Розглянемо тепер, наприклад, урну з кулями, вибірка куль із якої відбувається послідовно по одній кулі, і при цьому щоразу фіксується номер кулі, а сама куля повертається знову до урни. Така процедура називається **вибіркою з поверненням** [2]. У цьому випадку ймовірність події A , обчислена в аналогічний спосіб, дорівнює

$$P(A) = C_n^m \cdot \frac{M^m (N - M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-m}.$$

1.1.3. Умовна ймовірність

Говорити про ймовірності як про міри можливості здійснення випадкової події A має сенс лише при здійсненні певного комплексу умов. При зміні умов зміниться й ймовірність. Так, якщо до комплексу умов, при якому вивчалася ймовірність $P(A)$, додати нову умову, що полягає в появі події B , то одержимо інше значення ймовірності $P(A/B)$ – умовну ймовірність події A за умови, що відбулася подія B . Ймовірність $P(A)$, на відміну від умовної, називається **безумовною**.

Виведемо **формулу умовної ймовірності**. Нехай подіям A і B сприяють m і k елементарних результатів із n . Тоді, згідно з (1.1), їхні безумовні ймовірності дорівнюють $\frac{m}{n}$ та $\frac{k}{n}$ відповідно. Нехай події A за умови, що подія B відбулася, сприяє r елементарних результатів. Тоді, згідно (1.1), умовна ймовірність події A дорівнює $P(A/B) = \frac{r}{k}$. Розділивши і чисельник, і знаменник на n , одержимо формулу умовної ймовірності:

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \left(\frac{r}{n}\right) : \left(\frac{k}{n}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (1.3)$$

оскільки події $A \cap B$ відповідає r результатів і, отже, $\frac{r}{n}$ – його безумовна ймовірність.

Подія A називається **незалежною від B** , якщо її умовна ймовірність дорівнює безумовній, тобто $P(A/B) = P(A)$. При цьому з формули (1.3) одержуємо [10]

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad (1.4)$$

тобто властивість незалежності взаємна, і для незалежних подій ймовірність їхнього одночасного

здійснення дорівнює добутку їхніх ймовірностей. Формула (1.3), записана у вигляді

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B), \quad (1.5)$$

називається *формулою добутку для залежних подій*, а формула (1.4) – *теоремою добутку для незалежних подій*.

Наприклад, у експерименті з гральною кісткою нехай подія A полягає у випаданні числа очок, що ділиться на три, тобто $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, а подія B – у випаданні парного числа очок, тобто $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Тоді $A \cap B = \{\omega_6\}$ і за формулою умовної ймовірності (1.3) одержуємо, що

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{1}{6}\right) : \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Але $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Тому $P(A/B) = P(A)$, тобто події A і B незалежні.

Взаємність незалежності подій означає, що якщо подія A не залежить від події B , то й подія B не залежить від події A . Тоді при $P(A) > 0$ і з огляду на формулу (1.5) маємо:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Також слід зазначити, що не завжди події є несумісними. Вони також можуть бути залежними. Тому в загальному випадку для будь-яких (як несумісних, так і залежних) подій A і B має місце наступна формула додавання [5]:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1.1.4. Скінченна схема з неоднаково можливими результатами

Обмеженість класичного визначення ймовірності, зокрема, закладена в однаковій можливості результатів. Дійсно, навіть невелике ускладнення практичної ситуації негайно ввійде в суперечність із однаковою можливістю, що може розглядатися, скоріше, як окремий випадок більш загальної ситуації.

Розглянемо, наприклад, стрільянина по круговій мішені. Елементарними результатами тут є влучення в те або інше кільце кругової мішені. Влучення в мале внутрішнє коло оцінюється в 10 очок, у навколишнє його кільце – у 9 очок, у наступне – у 8 очок тощо, у саме зовнішнє кільце – 1 очко, невлучення в кругову мішень – 0 очок. Таким чином, є 11 елементарних подій $\omega_{10}, \omega_9, \dots, \omega_1, \omega_0$. Для кожного стрільця певного класу є свої визначені сталі шанси (ймовірності) вибити за один постріл ту або іншу кількість очок $p_{10}, p_9, \dots, p_1, p_0$. Ці події, загалом кажучи, неоднаково можливі. Наприклад, для майстрів спорту, очевидно, виключена подія ω_0 , тому $p_0 = 0$, тобто відразу виключається однакова можливість [2].

Скінченна схема з неоднаково можливими результатами визначається в такий спосіб. Є скінченний набір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, і для кожної елементарної події ω_i задана його ймовірність p_i , $0 \leq p_i \leq 1$, причому

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Ймовірність будь-якої складеної події $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ визначається як сума ймовірностей елементарних подій, що входять до її складу:

$$P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l}. \quad (1.6)$$

Ця схема є узагальненням класичної схеми. Справді, якщо повернутися до випадку однакової можливості й приписати кожній елементарній події ймовірність $\frac{1}{n}$, то формула (1.6) зводиться до класичного визначення ймовірності.

У випадку скінченної схеми також має місце теорема додавання.

Теорема 1.2. Формулювання. Для двох несумісних подій A і B , що є підмножинами Ω , $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Доведення. Нехай $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$, $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$. Згідно з (1.6),

$$P(A) = \sum_{l=1}^m p_{i_l}, \quad P(B) = \sum_{q=1}^k p_{j_q}.$$

Оскільки A і B несумісні, вони не мають спільних елементарних подій і, отже, $C = A \cup B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}$. На підставі (1.6) маємо

$$P(C) = \sum_{l=1}^m p_{i_l} + \sum_{q=1}^k p_{j_q} = P(A) + P(B).$$

Теорему доведено.

Точно так само, як скінченна схема з неоднаково можливими результатами є узагальненням класичної скінченної схеми з однаково можливими результатами, дискретна схема з нескінченною кількістю неоднаково можливих подій, у свою чергу, є узагальненням скінченної схеми [10].

У дискретній схемі множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, загалом кажучи, містить зліченну кількість елементарних подій. Для кожної елементарної події задана її ймовірність $p_i = P(\omega_i)$, $0 \leq p_i \leq 1$, причому

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Ймовірність будь-якої скінченної або зліченної підмножини $A \subset \Omega$ множини елементарних подій Ω дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій, що її складають, тобто якщо

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} \omega_{i_l},$$

то

$$P(A) = \sum_{l=1}^{\infty} p_{i_l}.$$

Якщо ж

$$A = \bigcup_{l=1}^m \omega_{i_l},$$

то має місце (1.6).

У скінченній схемі, як і в класичній, можна вивести формулу умовної ймовірності. Розглянемо події $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$ і $B = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_l}, \dots, \omega_{j_k}\}$ такі, що $\omega_{i_1} = \omega_{j_1}, \dots, \omega_{i_l} = \omega_{j_l}, l \leq m, l \leq k$. Ін-акше кажучи, $A \cap B = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_l}\}$. Тоді

$$P(A) = \sum_{\mu=1}^m p_{i_\mu} > 0,$$

$$P(B) = \sum_{q=1}^k p_{j_q} > 0,$$

$$P(A \cap B) = \sum_{\mu=1}^l p_{i_\mu}.$$

Нехай подія B відбулася. Тому має місце нова скінченна схема з k результатами, $k \leq n$, отже, сума ймовірностей повного набору цих нових результатів повинна дорівнювати одиниці, а вона, відповідно до первісної схеми, дорівнює

$$P(B) = \sum_{q=1}^k p_{j_q}.$$

Щоб забезпечити рівність суми ймовірностей елементарних подій одиниці, уведемо нові ймовірності результатів:

$$\tilde{p}_{j_q} = \frac{p_{j_q}}{P(B)},$$

$$\sum_{q=1}^k \tilde{p}_{j_q} = \frac{\sum_{q=1}^k p_{j_q}}{P(B)} = 1.$$

У рамках нової схеми (тобто за умови, що відбулася подія B) визначаємо ймовірність події A :

$$P(A/B) = \sum_{q=1}^l \tilde{p}_{j_q} = \frac{\sum_{q=1}^l p_{j_q}}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Таким чином, ми знову одержуємо ту ж формулу умовної ймовірності, що й у класичній схемі. Незалежність подій визначається аналогічно класичній схемі. Розглянемо найпростіші приклади схеми послідовних випробувань як ілюстрацію скінченної схеми з неоднаково можливими результатами [17].

Приклад 1.2. Система контролю виробів складається із двох незалежних перевірок, виконуваних одночасно. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. У результаті кожної перевірки бракований виріб приймається з ймовірностями α_1 і α_2 відповідно. Знайти ймовірність того, що буде прийнятий бракований виріб.

Розв'язання. Якщо на вхід системи контролю надійшов бракований виріб, то можливі наступні чотири елементарних результати: $\omega_1 = \{0, 0\}$, $\omega_2 = \{0, 1\}$, $\omega_3 = \{1, 0\}$, $\omega_4 = \{1, 1\}$, де 0 означає, що виріб визнаний бракованим, а 1 – що виріб визнаний придатним. Випробування є незалежними, тому одержуємо наступні значення ймовірностей елементарних результатів $\omega = \{i_1, i_2\}$:

$$p_1 = p(\omega_1) = P\{i_1 = 0, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 0\} = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2),$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= p(\omega_2) = P\{i_1 = 0, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 1\} = (1 - \alpha_1)\alpha_2, \\
p_3 &= p(\omega_3) = P\{i_1 = 1, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 0\} = \alpha_1(1 - \alpha_2), \\
p_4 &= p(\omega_4) = P\{i_1 = 1, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 1\} = \alpha_1\alpha_2.
\end{aligned}$$

Сума ймовірностей елементарних подій повинна дорівнювати одиниці. Дійсно,

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^4 p(\omega_i) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) + (1 - \alpha_1)\alpha_2 + \alpha_1(1 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = 1.$$

Відповідно до умов задачі й сформованій схемі, ймовірність прийняти бракований виріб – це ймовірність елементарної події ω_4 , яка полягає в тому, що й перша, й друга перевірки визнають бракований виріб придатним. Тому шукана ймовірність дорівнює $p_4 = \alpha_1\alpha_2$.

Відповідь. Ймовірність того, що за результатами двох незалежних перевірок буде прийнятий бракований виріб дорівнює $\alpha_1\alpha_2$.

Приклад 1.3. В умовах прикладу 1.2 задані ймовірності β_1 і β_2 відбракувати придатний виріб у результаті першої й другої перевірок відповідно. Знайти ймовірність того, що буде відбракований придатний виріб.

Розв'язання. Якщо на вхід системи контролю надійшов придатний виріб, то можливі ті ж самі чотири елементарних результати, однак їхні ймовірності будуть іншими. Знову скористаємося незалежністю випробувань. Тоді одержимо наступні ймовірності елементарних результатів:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1 &= p(\omega_1) = P\{i_1 = 0, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 0\} = \beta_1\beta_2, \\
\tilde{p}_2 &= p(\omega_2) = P\{i_1 = 0, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 0\} \cdot P\{i_2 = 1\} = \beta_1(1 - \beta_2), \\
\tilde{p}_3 &= p(\omega_3) = P\{i_1 = 1, i_2 = 0\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 0\} = (1 - \beta_1)\beta_2, \\
\tilde{p}_4 &= p(\omega_4) = P\{i_1 = 1, i_2 = 1\} = P\{i_1 = 1\} \cdot P\{i_2 = 1\} = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2).
\end{aligned}$$

Подія, яка полягає в тому, що відбракованим є придатний виріб, містить у собі елементарні події $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \tilde{p}_3 = \beta_1\beta_2 + \beta_1(1 - \beta_2) + (1 - \beta_1)\beta_2 = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2.$$

Відповідь. Ймовірність того, що за результатами двох перевірок буде відбракований придатний виріб дорівнює $\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2$.

1.1.5. Аксиоматична побудова теорії ймовірностей

При аксіоматичній побудові теорії ймовірностей вихідним «матеріалом» служать простір елементарних подій Ω та виділений у ньому клас підмножин, що утворює поле подій S . Будова простору Ω і класу S визначається конкретною областю застосування.

Ймовірністю називається числова функція, визначена на полі подій S , що має наступні властивості.

Аксиома 1. Для будь-якої події $A \in S$: $P(A) \geq 0$.

Аксиома 2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. Ймовірність об'єднання двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто для будь-яких двох несумісних подій $A \in S, B \in S, A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Клас S всіх підмножин із Ω утворює поле. Тепер переконаємося, що скінченна схема задовольняє вимогам аксіоми 1. Для цього виберемо довільну подію A , що є підмножиною Ω . В силу того,

що $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$, то, відповідно до скінченної схеми, має місце формула (1.6), з якої випливає, що $P(A) \geq 0$, тобто умова аксіоми 1 виконується. Умова аксіоми 2 виконується, тому що $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, і на підставі (1.6)

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Умова аксіоми 3 також виконується, тому що вона є змістом теореми додавання для скінченної схеми. Таким чином, скінченна схема є прикладом об'єкта, для якого виконується система аксіом теорії ймовірностей.

Як приклад імовірнісної схеми з безперервним простором елементарних подій розглянемо схему з геометричними ймовірностями. Нехай простором елементарних подій служить множина точок деякої області G , що має площу на площині. Як події будемо розглядати підмножини $A, B, C, \dots$ цієї області, які мають площу. Клас цих підмножин також утворює поле. При цьому ймовірність будь-якої події A (підмножини, що має площу $mes(A)$), можна задати в такий спосіб:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(G)}.$$

Описана схема також задовольняє аксіомам теорії ймовірностей. Аналогічно можна побудувати геометричні ймовірності в будь-якому скінченновимірному просторі.

У багатьох випадках виконання аксіоми 3 потрібно в розширеному варіанті. Аксіома 3 постулює додавання ймовірностей для скінченної кількості несумісних подій, тоді як у розширеному варіанті мова йде про зліченну кількість несумісних подій.

Аксіома 3'. Якщо $A_i \in S, i = 1, 2, \dots, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Аксіоми теорії ймовірностей лише постулюють існування ймовірностей для всіх подій, що утворюють поле S , і задають певні правила дії з ймовірностями. Експериментальне ж визначення ймовірності будь-якої події $A \in S$ може бути здійснене в результаті випробувань, виконуваних при певному тому ж самому комплексу умов. Із усього вищесказаного випливає, що певна теоретико-імовірнісна схема задається трійкою $\{\Omega, S, P\}$, тобто конкретним простором елементарних подій, конкретним набором підмножин Ω , що утворюють поле, а також конкретним завданням ймовірностей на множинах поля. Набір цих трьох компонентів називається **імовірнісним простором** [1, 4]. Ймовірність P на $\{\Omega, S\}$ називається **розподілом ймовірностей на Ω** .

1.1.6. Випадкова величина та її функція розподілу

Явища, які відбуваються в природі, є результатом дії внутрішніх і (або) зовнішніх факторів. Якщо зміна явища відбувається під впливом одного фактору, то цей вплив можна до деякої міри визначити, і результат зміни розглядається як детермінований цим фактором. Але часто кінцевий результат явища, що змінюється, викликаний дією багатьох причин, визначення яких сполучено з великими труднощами й не завжди є доцільним. Дія комплексу причин щоразу викликає певні зміни в кількісних характеристиках розглянутого явища. Причому сутність явища не змінюється. Такі коливання в значеннях кількісної характеристики є випадковими. Вони викликані дією множини причин, кожна з яких може бути несуттєвою для природи даного явища в цілому або для окремих його

якостей. При багаторазовому повторенні тих самих умов експерименту (при дії того самого комплексу причин) у змінах значень кількісної характеристики ознаки (явища) можна виявити деяку закономірність. Ця закономірність, що є присутньою у випадкових числах, буде відображати ту якісну сторону (якісна ознака) явища, що найбільш яскраво проявляється у всіх експериментах (випробуваннях).

Кількісна характеристика розглянутої ознаки (явища), значення якої залежить від випадку, називається випадковою величиною [5]. Отже, *випадковою величиною* називається функція $X = X(\omega)$, визначена на множині елементарних подій Ω , $\omega \in \Omega$. У випадку скінченної або зліченної множини подій Ω випадковою величиною є будь-яка функція, визначена на Ω . У загальному випадку функція $X(\omega)$ повинна бути такою, щоб для будь-яких x подія $A = \{\omega: X(\omega) < x\}$, яка полягає в тому, що випадкова величина X попадає в інтервал $(-\infty, x)$, належало полю подій S і, таким чином, для будь-якої такої події була визначена ймовірність $P(A) = P\{X < x\}$.

Випадкові величини позначаються прописними латинськими буквами $X, Y, Z, \dots$, а значення випадкової величини на елементарній події – маленькими латинськими буквами $x, y, z, \dots$. Якщо множина елементарних подій скінченна, то випадкову величину можна задати, перелічивши її значення на всіх елементарних подіях. Однак у багатьох задачах немає необхідності розглядати випадкові величини як функції від елементарної події, а достатньо лише знати ймовірності будь-яких подій, пов'язаних з випадковою величиною, тобто закон розподілу випадкової величини. Говорять, що *закон розподілу випадкової величини* X заданий, якщо для будь-якої множини дійсних чисел B , що є об'єднанням або перетинанням скінченної або зліченної кількості проміжків, задана ймовірність $P\{\omega: X(\omega) \in B\}$ події, що полягає в тому, що $X(\omega)$ прийме значення із цієї множини [7].

Випадкові величини поділяються на безперервні й дискретні. Значення, прийняті безперервною випадковою величиною, повністю заповнюють один або кілька числових інтервалів. Значення дискретної випадкової величини розташовані дискретно, тобто суцільно не заповнюють ніякий числовий інтервал. Таким чином, випадкова величина є дискретною, якщо існує скінченна або зліченна множина чисел $x_1, x_2, x_3, \dots$ таких, що $P\{X = x_n\} = p_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$. Закон розподілу дискретної випадкової величини X визначений, якщо відомі всі x_n і ймовірності $p_n = P\{X = x_n\}$ такі, що $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$. Якщо скласти таблицю, у верхньому рядку якої помістити значення дискретної випадкової величини, а в нижньому – відповідні ймовірності, то одержимо *ряд розподілу випадкової величини*. Сума ймовірностей, записаних у другому рядку таблиці, повинна дорівнювати одиниці. Ряд розподілу задає закон розподілу дискретної випадкової величини.

Закон розподілу випадкової величини X заданий, якщо можна визначити ймовірність події $\{\omega: X(\omega) \in A\}$ для будь-якої множини A , що є об'єднанням або перетином довільних проміжків. У свою чергу, будь-які такі множини A можна одержати за допомогою операцій об'єднання, перетину й доповнення із множини всіляких інтервалів виду $(-\infty, x)$. Отже, і події $\{\omega: X(\omega) \in A\}$ можна одержати за допомогою відповідних операцій над подіями із усіляких подій виду $\{\omega: X(\omega) < x\}$. За визначенням випадкової величини, для будь-яких x подія $\{\omega: X(\omega) < x\}$ належить полю подій S . Отже, і події виду $\{\omega: X(\omega) \in A\}$ також належать S і для них визначена ймовірність. Таким чином, щоб задати закон розподілу довільної випадкової величини X , досить знати для будь-яких x ймовірності подій $\{\omega: X(\omega) < x\}$.

Функція розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X визначається формулою

$$F_X(x) = P\{\omega: X(\omega) < x\}.$$

Цю рівність зазвичай записують коротше у вигляді $F_X(x) = P\{X < x\}$. Для простоти в тих випадках, коли це не може призвести до неточності, пишуть $F(x)$ замість $F_X(x)$.

Розглянемо **властивості функції розподілу** [17].

1. Функція розподілу приймає значення із проміжку $[0, 1]$: $0 \leq F(x) \leq 1$. Доведення. Дана властивість випливає з того, що функція розподілу – це ймовірність події $\{X < x\}$, а значення ймовірності будь-якої події є невід’ємним і не перевищує одиниці.
2. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з напівінтервалу $[x_1, x_2)$, дорівнює різниці $F(x_2) - F(x_1)$:

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) .$$

Доведення. Подамо подію, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме значення, менше за x_2 , у вигляді суми несумісних подій:

$$\{\omega: X(\omega) < x_2\} = \{\omega: X(\omega) < x_1\} \cup \{\omega: x_1 \leq X(\omega) < x_2\} .$$

За аксіомою додавання, ймовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$\begin{aligned} F(x_2) &= P\{\omega: X(\omega) < x_2\} = P\{\omega: X(\omega) < x_1\} + P\{\omega: x_1 \leq X(\omega) < x_2\} = \\ &= F(x_1) + P\{\omega: x_1 \leq X(\omega) < x_2\} . \end{aligned}$$

звідки й випливає доказувана властивість.

3. Функція розподілу – неубутна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$. Доведення. Нехай $x_2 > x_1$. Повторюючи наведені вище викладення та з огляду на те, що ймовірність будь-якої події є невід’ємною, одержуємо

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{\omega: x_1 \leq X(\omega) < x_2\} \geq F(x_1) .$$

4. $P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$. Доведення. Подія $\{\omega: X(\omega) \geq x\}$ є протилежною до події $\{\omega: X(\omega) < x\}$. Отже,

$$P\{X \geq x\} = 1 - P\{X < x\} = 1 - F(x) .$$

5. Якщо $x \rightarrow \infty$, то $F(x) \rightarrow 1$.
6. Якщо $x \rightarrow -\infty$, то $F(x) \rightarrow 0$.
7. Функція розподілу безперервна ліворуч, тобто

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} F(x - \Delta) = F(x) .$$

Функцією розподілу може бути будь-яка функція, що задовольняє властивостям 1 – 7, тобто безперервна ліворуч у кожній точці x монотонна неубутна функція, множиною значень якої є проміжок $(0, 1)$, що містить або не містить граничні точки 0 і 1.

1.1.7. Розподіл дискретних випадкових величин

Дискретні випадкові величини приймають скінченну або зліченну кількість значень. Нехай X – дискретна випадкова величина, що приймає значення $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ з ймовірностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$. Якщо по осі абсцис відкласти $x_1, x_2, x_3, \dots$, а по осі ординат – відповідні ймовірності $p_1, p_2, p_3, \dots$ і з’єднати сусідні точки відрізками, то одержимо **багатокутник розподілу випадкової величини X** . Багатокутник розподілу – це графічне зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини. Розглянемо функцію розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X . Якщо $x \leq x_1$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0$, тому що в цьому випадку подія $\{X < x\}$ є неможливою. Якщо $x_1 < x \leq x_2$, то подія $\{X < x\}$ наступить тоді й лише, коли наступить подія $\{X = x_1\}$, тому

$F(x) = P\{X < x\} = P\{X = x_1\} = p_1$. Якщо $x_2 < X \leq x_3$, то подія $\{X < x\}$ дорівнює сумі подій $\{X = x_1\}$ і $\{X = x_2\}$, а також

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\} = p_1 + p_2.$$

Аналогічно, якщо $x_i < X < x_{i+1}$, то $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$. Таким чином, функція розподілу дискретної випадкової величини дорівнює

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

де $p_i = P\{X = x_i\}$ і підсумовування відбувається за тими i , для яких $x_i < x$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини є незмінною на проміжках $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, ..., $(x_i, x_{i+1}]$, У точках $x_1, x_2, x_3, \dots$ функція розподілу має стрибки, що дорівнюють ймовірності того, що випадкова величина прийме відповідне значення.

Приклад 1.4. Знайти функцію розподілу випадкової величини, що дорівнює кількості випадків «герба» при киданні двох монет.

Розв'язання. В залежності від результату експерименту, ця кількість може виявитися рівною 0, 1 або 2. Виберемо в якості елементарних наступні події:

$\omega_1 = \Gamma\Gamma = \{\text{на першій монеті випав «герб», на другій монеті – теж «герб»}\},$

$\omega_2 = \Gamma\Gamma = \{\text{на першій монеті випала «решка», на другій монеті – «герб»}\},$

$\omega_3 = \Gamma\Gamma = \{\text{на першій монеті випав «герб», на другій монеті – «решка»}\},$

$\omega_4 = \Gamma\Gamma = \{\text{на першій монеті випала «решка», на другій монеті – теж «решка»}\}.$

Кількість X «гербів, що випали», є функцією від елементарної події:

$$X(\omega_1) = X(\Gamma\Gamma) = 2,$$

$$X(\omega_2) = X(\Gamma\Gamma) = 1,$$

$$X(\omega_3) = X(\Gamma\Gamma) = 1,$$

$$X(\omega_4) = X(\Gamma\Gamma) = 0.$$

Результат експерименту є випадковим, тому значення X також є випадковим. Функція $X = X(\omega_i)$ – випадкова величина, визначена на множині $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Якщо монети симетричні, то елементарні події $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ однаково можливі, й тому природно в математичній моделі експерименту вважати ймовірності $P(\omega_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ такими, що дорівнюють $\frac{1}{4}$. Знаючи ймовірності $P(\omega_i)$, можна знайти ймовірність того, що випадкова величина X прийме те або інше значення. У наведеній таблиці подано елементарні події ω_i , ймовірності $P(\omega_i)$ та значення випадкової величини X , що дорівнює кількості «гербів, що випали».

i	1	2	3	4
ω_i	ГГ	РГ	ГР	РР
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X(\omega_i)$	2	1	1	0

Слід зазначити, що випадкова величина X може приймати на різних елементарних подіях однакові значення. Так, у розглянутому прикладі $X(\omega_2) = X(\omega_3) = 1$. Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме нульове значення, є подією $\{\text{РР}\}$. Ймовірність цієї події дорівнює $\frac{1}{4}$.

Подія $\{\omega_i: X(\omega_i) = 1\}$ дорівнює події $\{РГ, ГР\}$. Її ймовірність дорівнює

$$P\{X = 1\} = P\{РГ, ГР\} = P\{РГ\} + P\{ГР\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

В той же час,

$$P\{X = 2\} = P\{ГГ\} = \frac{1}{4}.$$

При побудові математичної моделі в цьому випадку можна було б об'єднати події $\{РГ\}$ і $\{ГР\}$ в одну, та у якості елементарних розглядати події $\{0\}$, $\{1\}$ і $\{2\}$, що полягають в тому, що кількість «гербів, що випали», дорівнює нулю, одиниці або двійці відповідно: $\{0\} = \{РР\}$, $\{1\} = \{ГР, РГ\}$, $\{2\} = \{ГГ\}$. Щоб задати ймовірнісний простір та випадкову величину на «звуженому» просторі елементарних подій, у цьому випадку досить задати лише можливі значення випадкової величини й відповідні ймовірності, з якими ці значення приймаються. Вони наведені в наступній таблиці, де x_i – значення випадкової величини, $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3$.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

На рис. 1.1а наведений багатокутник розподілу розглянутої випадкової величини.

Знайдемо тепер функцію розподілу цієї випадкової величини. Функція розподілу при $x \leq 0$ дорівнює нулю. У точці $x = 0$ вона має стрибок, що дорівнює $\frac{1}{4}$, у точці $x = 1$ – стрибок, що дорівнює $\frac{1}{2}$, у точці $x = 2$ – стрибок, що дорівнює $\frac{1}{4}$. Між цими точками функція розподілу є постійною. При $x > 2$ функція $F(x) = 1$. Таким чином,

$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } 0 < x \leq 1; \\ \frac{3}{4}, & \text{якщо } 1 < x \leq 2; \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображений на рис. 1.1б.

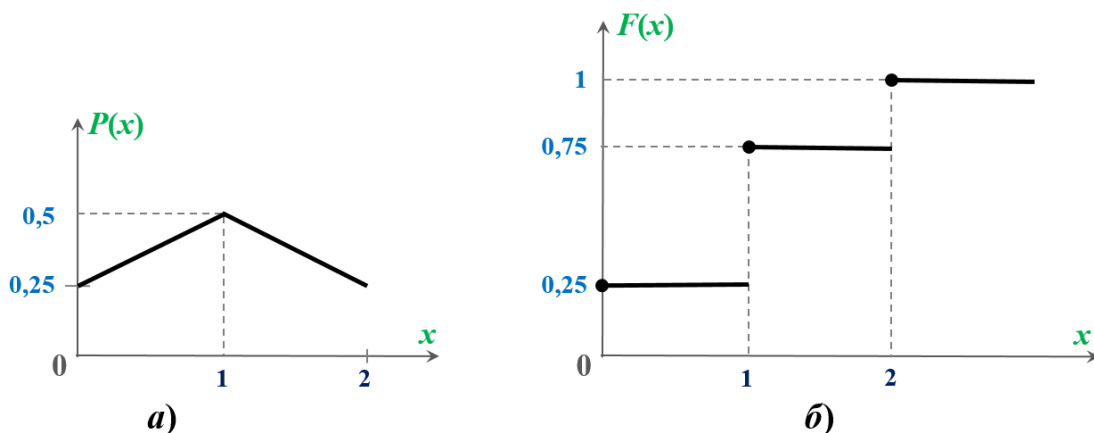


Рис. 1.1 – Багатокутник та функція розподілу дискретної випадкової величини

Випадкова величина X , що в якості значень має цілі числа від 1 до n , має рівномірний розподіл на множині $\{1, 2, \dots, n\}$, якщо

$$P\{x = m\} = \frac{1}{n}, \quad m = \overline{1, n}.$$

Багатокутник розподілу випадкової величини x являє собою відрізок прямої, паралельний осі абсцис. Кінці відрізка мають координати $(1, \frac{1}{n})$ і $(n, \frac{1}{n})$.

1.1.8. Розподіл безперервних випадкових величин

Множина значень безперервної випадкової величини є незліченною та зазвичай є деяким проміжком, скінченним або нескінченним. Безперервна випадкова величина визначена на незліченній множині елементарних подій Ω .

Нехай випадкова величина задає взаємно однозначну відповідність між множиною елементарних подій та відрізком числової осі $[0, T]$. Елементами поля подій S – випадковими подіями – є об'єднання всіляких проміжків, що належать відрізку $[0, T]$. Ймовірність будь-якої події дорівнює відношенню довжин проміжків, що складають події, до довжини проміжку $[0, T]$ (геометрична інтерпретація ймовірності). Позначимо через $\varphi(t)$ функцію $\varphi(t) = \frac{1}{T}$, $0 \leq t \leq T$. Тоді, якщо $A = [a, b] \in [0, T]$, то

$$P(A) = \int_a^b \varphi(t) dt = \frac{1}{T} \int_a^b dt = \frac{b-a}{T}.$$

Якщо ж подія A дорівнює об'єднанню якихось проміжків, що не перетинаються, то ймовірність події A дорівнює сумі інтегралів від $\varphi(t)$ по цих проміжках:

$$P(A) = \int_A \varphi(t) dt. \quad (1.7)$$

В аналогічний спосіб можна задати ймовірність і в більш загальному випадку. Нехай множина елементарних подій Ω збігається із множиною дійсних чисел $\Omega = \{x: x \in (-\infty, \infty)\}$ і нехай випадковими подіями з поля подій S є всілякі скінченні або злічені об'єднання. Ймовірність на полі подій S задається за допомогою невід'ємної функції $\varphi(x)$, інтегрованої на будь-якому скінченному або нескінченному проміжку й такої, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Якщо подія A дорівнює об'єднанню проміжків, що не перетинаються, то ймовірність $P(A)$ дорівнює сумі інтегралів від $\varphi(x)$ по цих проміжках, тобто визначається за формулою (1.7). Визначена в такий спосіб на S ймовірність задовольняє всім аксіомам теорії ймовірностей [17]. Описаний ймовірнісний простір називається *безперервним ймовірнісним простором*.

Не всяка випадкова величина, визначена на незліченній множині Ω , є безперервною. Випадкова величина X називається *безперервною*, якщо існує така невід'ємна функція $p_X(x)$, що при будь-яких x функцію розподілу $F_X(x)$ можна подати у вигляді:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy.$$

Будемо розглядати лише такі випадкові величини, для яких $p_X(x)$ є безперервною скрізь, крім, можливо, скінченної кількості точок.

Функція $p_X(x)$ називається *щільністю розподілу ймовірностей* або *щільністю розподілу*.

Якщо з контексту ясно, про яку випадкову величину йдеться, то пишуть $p(x)$ замість $p_X(x)$. З означення випливає, що в точках безперервності щільність розподілу дорівнює похідній функції розподілу: $p(x) = F'(x)$. З означення також випливає, що щільність розподілу $p_X(x)$ визначає закон розподілу випадкової величини X .

Щільність розподілу випадкової величини має наступні властивості:

1. Для будь-яких $x_1 < x_2$:

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Ймовірність $P\{x_1 \leq X < x_2\}$ дорівнює площі фігури, обмеженої прямими $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ і щільністю розподілу $y = p(x)$. На рис. 1.2 зображена щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ і заштрихована площа фігури, що дорівнює ймовірності $P\{x_1 \leq X < x_2\}$.

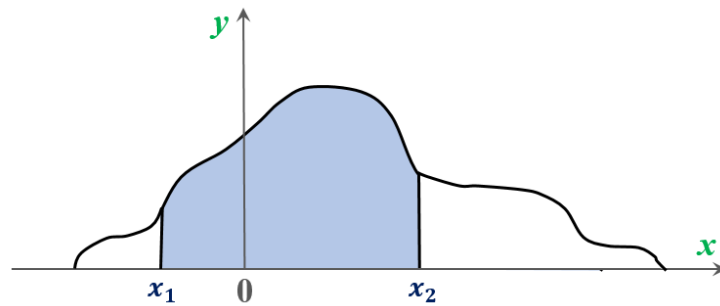


Рис. 1.2 – Щільність розподілу

2. Інтеграл по всій числовій прямій від щільності розподілу ймовірностей дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

3. Ймовірність того, що безперервна випадкова величина прийме конкретне значення, дорівнює нулю, тобто $P\{X = a\} = 0$.

Із властивості 3 випливає, що для безперервних випадкових величин

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 < X \leq x_2\}.$$

Щільністю розподілу може бути будь-яка невід'ємна функція, інтеграл від якої по всій числовій осі дорівнює одиниці. Функція розподілу випадкової величини будь-якій точці x_p ставить у відповідність ймовірність

$$p = F(x_p) = P\{X < x_p\}.$$

Інколи виникає зворотна задача: за заданим значенням p знайти таке x_p , щоб $F(x_p) = p$. Точка x_p , для якої виконується ця умова, називається **квантиллю**, що відповідає заданому рівню ймовірності p , або **100 %-ю квантиллю**. Із означення безперервної випадкової величини випливає, що її функція розподілу також є неперервною. Тому для безперервної випадкової величини для будь-яких p , $0 < p < 1$, існують квантілі x_p . Якщо прийняти, наприклад, $p = 0,95$, то отримаємо 95 %-ву квантиль. В математичній статистиці зазвичай використовують квантілі, що відповідають рівням ймовірності 0,01, 0,05, 0,1, 0,9, 0,95, та 0,99 [21]. Квантиль, що відповідає значенню $p = 0,5$, називається **медіаною розподілу**. Медіана є однією із характеристик центру розподілу ймовірностей. Випадкова величина з однаковою ймовірністю може приймати значення, менші або більші за медіану.

Безперервна випадкова величина X , що приймає значення на відрізку $[a, b]$, має **рівномірний розподіл**, якщо щільність розподілу $p(x)$ має вигляд

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Для випадкової величини, що має рівномірний розподіл, імовірність того, що випадкова величина прийме значення із заданого інтервалу $(x, x + \Delta) \in [a, b]$, не залежить від розміщення цього інтервалу на числовій осі й пропорційна довжині цього інтервалу Δ :

$$P\{x < X < x + \Delta\} = \int_x^{x+\Delta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\Delta}{b-a}.$$

Функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Знайдемо медіану розподілу $x_{0,5}$. Маємо $F(x_{0,5}) = 0,5$, звідки випливає, що

$$x_{0,5} = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, медіана рівномірного розподілу збігається з серединою відрізка $[a, b]$. Графіки щільності розподілу та функції розподілу безперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл на відрізку $[0, 2]$, наведені на рис. 1.3а.

Безперервна випадкова величина X має **нормальний розподіл** ймовірностей з параметрами a та $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вигляд [1, 4, 7]

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

Якщо X має нормальний розподіл з параметрами a та σ , то коротко це записується у вигляді $X \sim N(a, \sigma)$. Графіки щільності розподілу при різних значеннях параметра σ та при одному й тому самому значенні a наведені на рис. 1.3б.

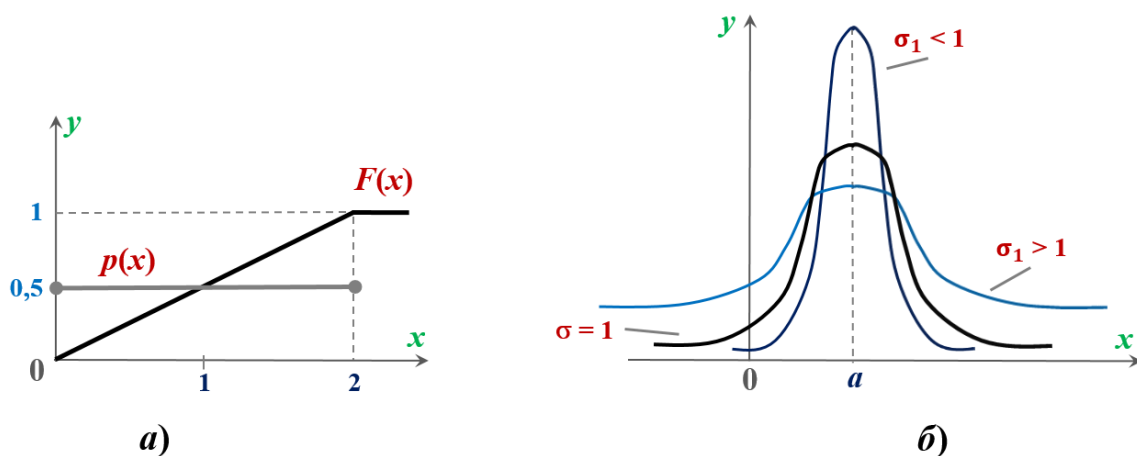


Рис. 1.3 – Рівномірний та нормальний розподіл безперервної випадкової величини

Щільність розподілу $p(x)$ є симетричною відносно прямої $x = a$ (тобто $p(a + y) = p(a - y)$). Якщо $x \rightarrow \pm\infty$, то $p(x) \rightarrow 0$. При зменшенні σ графік «стягується» до своєї осі симетрії $x = a$. Нормальний розподіл відіграє особливу роль у теорії ймовірностей та її застосунках. Це пов'язане з тим, що при виконанні певних умов сума великої кількості випадкових величин має «приблизно» нормальний розподіл.

Інтегральна функція цього розподілу виражається співвідношенням [4]

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t-a}{2\sigma^2}} dt.$$

Зміст кривої нормального розподілу полягає в наступному: значення випадкової величини з нормальним законом розподілу розташовуються по обидві сторони від генерального середнього a , і чим далі ці значення віддалені від a , тим вони менш ймовірні. Крім того, чим меншим є σ^2 , тим швидше гілки кривої наближаються до осі абсцис, тобто тим менш ймовірними є значення випадкової величини, що сильно відхиляються від a [5].

Нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$ називається *нормованим*, якщо його щільність дорівнює [2]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.8)$$

Для нормованого нормального розподілу функція розподілу має наступний вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.9)$$

Оскільки щільність нормованого нормального розподілу (1.8) є парною, то невизначений інтеграл від неї є функцією непарною. Тому замість нього використовується *функція Лапласа*, яку часто позначають як $\Phi(x) = N(0, 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.10)$$

Значення цієї функції вже розраховані за допомогою обчислювальних методів ЕОМ та опубліковані в спеціальних таблицях. В таблиці 1.1 наведені деякі значення функції Лапласа $\Phi(x)$ [17].

Таблиця 1.1

Значення розподілу нормальної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
- 0.0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
- 0.1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
- 0.2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
- 0.3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
- 0.4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
- 0.5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
- 0.6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
- 0.7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
- 0.8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
- 0.9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
- 1.0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
- 1.1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
- 1.2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
- 1.3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
- 1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
- 1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
- 1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
- 1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
- 1.8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
- 1.9	0,0288	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
- 2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
- 2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
- 2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
- 2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
- 2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
- 2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
- 2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
- 2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
- 2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
- 2.9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0014
- 3.0	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000

В таблиці наведені значення функції Φ для від'ємних значень x . Для визначення значень $\Phi(x)$ при $x \geq 0$ використовують співвідношення

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

Так, наприклад,

$$\Phi(1,65) = 1 - \Phi(-1,65) = 1 - 0,0495 = 0,9505.$$

Незважаючи на те, що нормальний розподіл характеризує ряди з безперервними одиницями, при досить великій кількості спостережень він добре описує також і варіювання дискретних одиниць. До цього закону наближаються й інші типи розподілів.

1.2. Основи математичної статистики

1.2.1. Числові характеристики випадкової величини

Для вивчення випадкової величини, що характеризує деяке явище (наприклад, обсяги реалізації продукції, ціни на сировину тощо), проводиться експеримент. Кожне випробування (результат) експерименту надає дослідникові певне значення випадкової величини. Сукупність значень випадкової величини, отриманих у ході експерименту, називається *випадковою вибіркою*. Нехай випадкова величина X у ході експерименту, що складається з n випробувань, прийняла ряд значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ (не обов'язково всі значення x є різними, припускається наявність однакових значень). Тоді говорять, що $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є випадковою вибіркою для X об'єму n . Кожна випадкова вибірка

несе в собі деяку якісну й кількісну інформацію про досліджуване явище. Щоб зробити цю інформацію більш компактною й доступною для огляду, використовуються деякі числові характеристики випадкової вибірки, які, природно, розглядаються як наближення до відповідних характеристик самої випадкової величини X . До таких числових характеристик належать вибіркове середнє арифметичне значення й вибіркова дисперсія. Іноді слово «вибіркове» опускають.

Вибіркове середнє арифметичне значення – це число, навколо якого розташовуються (по обидві сторони) всі значення вибірки. У загальному виді для вибірки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ маємо [17]:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.11)$$

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини називається сума добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності [2]:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Із цього означення випливає, що математичне очікування є деякою постійною (невипадковою) величиною. Ймовірнісний зміст математичного очікування полягає в тому, що воно наближено дорівнює (особливо для великої кількості випробувань, тобто при великому обсязі вибірки) середньому арифметичному значенню випадкової величини. Це дуже наочно демонструє випадок, коли ймовірності всіх можливих значень дискретної випадкової величини дорівнюють одна одній:

$$p_i = p = \frac{1}{n},$$

тобто випадкова величина має рівномірний розподіл ймовірностей. За такого розподілу формула для обчислення математичного очікування перетворюється у формулу (1.11). Математичне очікування має наступні властивості.

1. Математичне очікування постійної величини C дорівнює C :

$$M(C) = C;$$

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного очікування:

$$M(\alpha X) = \alpha M(X);$$

3. Математичне очікування суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних очікувань:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_m).$$

4. Математичне очікування добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних очікувань:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_m) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_m).$$

Різниця між випадковою величиною та її математичним очікуванням $X - M(X)$ називається **відхиленням**. Щоб визначити характер розташування вибіркових значень щодо свого середнього арифметичного значення $\bar{x}$, обчислюється вибіркова дисперсія. Її зазвичай позначають через s^2 . **Дисперсією** або **розсіюванням** називається математичне очікування квадрату відхилення [2]:

$$s^2(X) = M(X - M(X))^2.$$

В розгорнутому вигляді формула дисперсії набуває форми:

$$s^2(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - M(X))^2 p_n = \\ = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i.$$

З цієї формули безпосередньо виводиться інколи більш зручна в застосуванні формула дисперсії:

$$s^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Якщо за математичне очікування прийняти його вираз через середнє арифметичне значення за формулою (1.11), то формула для обчислення дисперсії перетворюється в наступну [17]:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.12)$$

Отже, для отримання дисперсії необхідно від кожного вибіркового значення відняти середнє арифметичне значення, результати піднести до квадрату, потім скласти ці результати, а отриману суму поділити на $(n-1)$, де n – об'єм вибірки. Зміст вибіркової дисперсії як міри розсіювання (розкидання) полягає в наступному: якщо є дві випадкові вибірки однакового об'єму n (або приблизно однакових об'ємів) і з однаковим середнім арифметичним значенням $\bar{x}$, то та вибірка, у якої s^2 є меншим, має значення досліджуваної величини, більш компактно розташовані відносно $\bar{x}$. Як правило, така вибірка виникає при вивченні більш однорідного матеріалу [2]. Дисперсія має наступні властивості.

1. Дисперсія постійної величини (константи) C дорівнює нулю:

$$s^2(C) = 0.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$$s^2(\alpha X) = \alpha^2 s^2(X).$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$s^2(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = s^2(X_1) + s^2(X_2) + \dots + s^2(X_m).$$

Із цих властивостей дисперсії випливає важливий висновок:

$$s^2(X + C) = s^2(X),$$

де C – постійна величина.

Корінь квадратний із вибіркової дисперсії, тобто величина $s = \sqrt{s^2}$, називається **вибірковим середнім квадратичним відхиленням**. Із 3-ї властивості дисперсії та означення математичного очікування випливає, що у випадку суми взаємно незалежних випадкових величин має місце формула [2]:

$$s(X_1 + X_2 + \dots + X_m) = \sqrt{s^2(X_1) + s^2(X_2) + \dots + s^2(X_m)}.$$

Приклад 1.5. У результаті десяти випробувань була отримана випадкова вибірка: $x_1 = 206$, $x_2 = 110$, $x_3 = 136$, $x_4 = 150$, $x_5 = 200$, $x_6 = 164$, $x_7 = 170$, $x_8 = 178$, $x_9 = 140$, $x_{10} = 166$. Знайти для цієї вибірки середнє арифметичне значення, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

Розв'язання. Очевидно, що об'єм вибірки дорівнює $n = 10$. Щоб отримати середнє арифметичне значення для цієї вибірки, необхідно всі знайдені числа скласти й суму поділити на **10**. Таким чином, маємо

$$\bar{x} = \frac{206 + 110 + 136 + 150 + 200 + 164 + 170 + 178 + 140 + 166}{10} = \frac{1620}{10} = 162.$$

Для обчислення дисперсії та середньоквадратичного відхилення всі дані зручно звести в наступну розрахункову таблицю.

№ з/п (N_i)	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	206	$206 - 162 = 44$	$44^2 = 1936$
2	110	$110 - 162 = -52$	$(-52)^2 = 2704$
3	136	$136 - 162 = -26$	$(-26)^2 = 676$
4	150	$150 - 162 = -12$	$(-12)^2 = 144$
5	200	$200 - 162 = 38$	$38^2 = 1444$
6	164	$164 - 162 = 2$	$2^2 = 4$
7	170	$170 - 162 = 8$	$8^2 = 64$
8	178	$178 - 162 = 16$	$16^2 = 256$
9	140	$140 - 162 = -22$	$(-22)^2 = 484$
10	166	$166 - 162 = 4$	$4^2 = 16$
Разом	$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1620$		$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 7728$

Таким чином, виходячи з цих результатів, маємо:

$$s^2 = \frac{7728}{10 - 1} = \frac{7728}{9} = 858,67;$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{858,67} = 29,3.$$

Відповідь. Для отриманої вибірки маємо середнє арифметичне значення $\bar{x} = 162$, дисперсію $s^2 = 858,67$, та середньоквадратичне відхилення $s = 29,3$.

Розглянутий приклад показує, що обчислення $\bar{x}$ та s^2 пов'язане з великою кількістю розрахунків, що збільшуються разом із зростанням об'єму вибірки. Однак процес обчислення може бути істотно спрощений без особливої втрати точності. Для цього проводять **групування** вибірових значень. Нехай є вибірка об'єму n ($x_1, x_2, \dots, x_n$). Можна вважати, що числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ розташовані в порядку зростання (цього завжди можна досягти). Обираємо деяке ціле число k , таке, що $10 \leq k \leq 20$, складаємо різницю між максимальним та мінімальним значеннями x_i і обчислюємо число h за формулою

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Число h дорівнює **довжині інтервалів групування**. Тепер можна вказати самі інтервали групування: $(x_1, x_1 + h)$, $(x_1 + h, x_1 + 2h)$, ..., $(x_1 + (n-1)h, x)$. Кожне зі значень нашої випадкової вибірки $x_1, x_2, \dots, x_n$ потрапляє до одного із зазначених вище інтервалів. Так, якщо деяке вибірове значення x_m задовольняє нерівності $x_1 + mh \leq x_m < x_1 + (m+1)h$, то воно належить до інтервалу $(x_1 + mh, x_1 + (m+1)h)$. Позначимо через n_i кількість значень вибірки, що потрапили до інтервалу $(x_1 + (i-1)h, x_1 + ih)$. Якщо деяке вибірове значення потрапило на границю двох інтервалів, то воно належить до правого інтервалу. Числа n_i називаються **частотами відповідних інтервалів**. Тепер для визначення $\bar{x}$ та s^2 діють за наступним алгоритмом:

1. Фіксується якийсь із побудованих інтервалів (зазвичай беруть інтервал з максимальним значенням частоти n_i).
2. Обчислюється середина зафіксованого інтервалу. Вона позначається через x_0 .
3. Всі інтервали нумеруються в зростаючому порядку від **1** до **k** (у нас рівно **k** інтервалів).
4. З номера кожного поточного інтервалу N_i віднімається номер N_0 зафіксованого інтервалу. Ці різниці з відповідними знаками позначаються через

$$c_i = N_i - N_0 .$$

5. Далі користуються формулами:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right) \cdot h , \quad (1.13)$$

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \right) \cdot h^2 \cdot \frac{1}{n-1} . \quad (1.14)$$

Тут $n_i c_i$ – добуток частоти n_i i -го інтервалу на відповідне йому число c_i , n – об'єм вибірки.

Природно очікувати, що інтервальна розбивка призводить до деяких помилок в обчисленні вибіркового середнього й вибіркової дисперсії. Щоб знівелювати цю похибку, можна ввести поправку на групування в значення $\bar{x}$ і s^2 . Але виявляється, що коригування потребує лише величина s^2 . З урахуванням цієї поправки (її значення зазначене Шеппардом і дорівнює $\left(-\frac{h^2}{12}\right)$), маємо наступний вираз для s^2 [17]:

$$s^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \right) \cdot h^2 \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{h^2}{12} .$$

Зазвичай поправка Шеппарда становить менше **5 %** від скоригованого значення s^2 , а тому її варто вносити лише для вибірок достатньо великого об'єму, коли є впевненість, що вибіркова дисперсія добре наближає справжню дисперсію.

Приклад 1.6. При проведенні експерименту була отримана вибірка, що містить **699** значень. Після проведення групування отриманих даних були наступні інтервали групування з відповідними частотами.

№ з/п	Інтервали	n_i
1	80 – 100	2
2	100 – 120	5
3	120 – 140	32
4	140 – 160	59
5	160 – 180	71
6	180 – 200	92
7	200 – 220	127
8	220 – 240	77
9	240 – 260	66
10	260 – 280	67
11	280 – 300	36
12	300 – 320	31
13	320 – 340	15
14	340 – 360	12
15	360 – 380	7
Разом		699

Обчислити для цієї вибірки середнє арифметичне значення, дисперсію та середньоквадратичне відхилення з урахуванням проведеного групування даних. Скоригувати значення дисперсії за допомогою поправки Шеппарда.

Розв'язання. З умови задачі видно, що $k = 15$, $h = 20$. Для обчислення числових характеристик отриманої вибірки побудуємо розрахункову таблицю.

№ з/п	Інтервали	n_i	c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
	1	2	3	4	5
1	80 – 100	2	$1 - 7 = -6$	$2 \cdot (-6) = -12$	$2 \cdot (-6)^2 = (-12) \cdot (-6) = 72$
2	100 – 120	5	$2 - 7 = -5$	$5 \cdot (-5) = -25$	$5 \cdot (-5)^2 = (-25) \cdot (-5) = 125$
3	120 – 140	32	$3 - 7 = -4$	$32 \cdot (-4) = -128$	$32 \cdot (-4)^2 = (-128) \cdot (-4) = 512$
4	140 – 160	59	$4 - 7 = -3$	$59 \cdot (-3) = -177$	$59 \cdot (-3)^2 = (-177) \cdot (-3) = 531$
5	160 – 180	71	$5 - 7 = -2$	$71 \cdot (-2) = -142$	$71 \cdot (-2)^2 = (-142) \cdot (-2) = 284$
6	180 – 200	92	$6 - 7 = -1$	$92 \cdot (-1) = -92$	$92 \cdot (-1)^2 = (-92) \cdot (-1) = 92$
7	200 – 220	127	$7 - 7 = 0$	$127 \cdot 0 = 0$	$127 \cdot 0^2 = 127 \cdot 0 = 0$
8	220 – 240	77	$8 - 7 = 1$	$77 \cdot 1 = 77$	$77 \cdot 1^2 = 77 \cdot 1 = 77$
9	240 – 260	66	$9 - 7 = 2$	$66 \cdot 2 = 132$	$66 \cdot 2^2 = 132 \cdot 2 = 264$
10	260 – 280	67	$10 - 7 = 3$	$67 \cdot 3 = 201$	$67 \cdot 3^2 = 201 \cdot 3 = 603$
11	280 – 300	36	$11 - 7 = 4$	$36 \cdot 4 = 144$	$36 \cdot 4^2 = 144 \cdot 4 = 576$
12	300 – 320	31	$12 - 7 = 5$	$31 \cdot 5 = 155$	$31 \cdot 5^2 = 155 \cdot 5 = 775$
13	320 – 340	15	$13 - 7 = 6$	$15 \cdot 6 = 90$	$15 \cdot 6^2 = 90 \cdot 6 = 540$
14	340 – 360	12	$14 - 7 = 7$	$12 \cdot 7 = 84$	$12 \cdot 7^2 = 84 \cdot 7 = 588$
15	360 – 380	7	$15 - 7 = 8$	$7 \cdot 8 = 56$	$7 \cdot 8^2 = 56 \cdot 8 = 448$
Разом		699		$\sum_{i=1}^{15} n_i c_i = 363$	$\sum_{i=1}^{15} n_i c_i^2 = 5487$

Найчастотнішим є сьомий інтервал, бо його частота $n_7 = 127$ є найбільшою серед отриманих в ході експерименту. Отже, зафіксуємо інтервал з $N_0 = 7$ і обчислимо числа c_i – стовпець № 3. Для одержання чисел стовпця № 4 перемножуються відповідні елементи другого й третього стовпців. Останній (п'ятий) стовпець отримується множенням елементів стовпця № 2 на квадрати чисел стовпця № 3 (піднесення у квадрат виробляється зазвичай усно). Але той самий результат можна отримати, якщо помножити елементи стовпця № 4 на елементи стовпця № 3. Знаходячи суми елементів другого, четвертого та п'ятого стовпців, відповідно одержуємо значення

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 699, \quad \sum_{i=1}^k n_i c_i = 363, \quad \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 = 5487.$$

Серединою зафіксованого інтервалу є число $x_0 = 210$. Звідси отримуємо

$$\bar{x} = 210 + \frac{363}{699} \cdot 20 = 210 + 10,39 = 220,39,$$

$$s^2 = \left(5487 - \frac{363^2}{699} \right) \cdot \frac{20^2}{699 - 1} = 3036,38,$$

$$s = \sqrt{3036,38} = 55,1.$$

З урахуванням того, що $h = 20$, скориговане значення s^2 дорівнює

$$s^2 = 3036,38 - \frac{20^2}{12} = 3003,05,$$

$$s = \sqrt{3003,05} = 54,8.$$

Відповідь. З урахуванням результатів групування даних, числові характеристики отриманої вибірки складають: середнє арифметичне значення $\bar{x} = 220,39$, дисперсія $s^2 = 3036,38$ (з поправкою Шеппарда $3003,05$), середньоквадратичне відхилення $s = 55,1$ (з поправкою Шеппарда $54,8$).

Означення числових характеристик дискретних випадкових величин розповсюджуються й на безперервні випадкові величини. Розбіжність полягає в тому, що замість сум в формулах застосовуються їх інтегральні аналоги. Отже, для безперервних випадкових величин математичне очікування та дисперсія обчислюються за формулами:

$$M(X) = \int_a^b x p(x) dx,$$

$$s^2(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 p(x) dx.$$

У тому випадку, коли можливі значення випадкової величини X заповнюють всю вісь O_x , то приділи інтегрування a і b є нескінченними, тобто $a = -\infty$, $b = \infty$. Можливі й такі випадки, коли один із приділів інтегрування є нескінченним (можливі значення X розташовані на півпрямій). Середнє квадратичне відхилення, як і раніше, є квадратним коренем із дисперсії. Як і для дискретних випадкових величин, для безперервних випадкових величин також існує альтернативна формула обчислення дисперсії:

$$s^2(X) = \int_a^b x^2 p(x) dx - (M(X))^2.$$

1.2.2. Довірчий інтервал. Репрезентативність вибірки

Вибіркове середнє $\bar{x}$ обчислюється на підставі деякої вибірки, отриманої в результаті експерименту. Тому як сама вибірка, так і вибіркове середнє $\bar{x}$, є випадковими величинами. Якщо зробити декілька вибірок, тобто декілька незалежних один від одного експериментів, то їх вибіркові середні $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ можна розглядати як вибірку з деякої генеральної сукупності. Закон розподілу значень деякого показника може відрізнятися від нормального, але вибіркові середні мають розподіл, близький до нормального. Це твердження стає практично достовірним, якщо об'єми вибірок, для яких визначалися $\bar{x}$, більші за 30.

Нормальний закон розподілу є одним з найпоширеніших на практиці законів розподілу випадкової величини. Як вже зазначалося при проведенні аналізу рис. 1.3б, графік функції нормального розподілу є симетричним відносно a . На практиці параметр a знаходить своє вираження в середньому арифметичному значенні $\bar{x}$, а σ^2 – у вибірковій дисперсії s^2 . У силу того, що середнє арифметичне значення вибірки $\bar{x}$ так само, як і вибіркова дисперсія s^2 , є наближеннями до a і σ^2 , то можна очікувати, що характер розташування у вибірці значень випадкової величини (інколи значення називають варіантами), розподіленої за нормальним законом, буде мати зазначені властивості. Нормальна випадкова величина з генеральним середнім a й дисперсією σ^2 має наступну важливу властивість: з імовірністю β варіанти віддалені від a на відстань, не більшу за $d_\beta \sigma$, де параметр нормального закону розподілу d_β можна визначити з таблиці 1.2. При цьому величина β називається **довірчою ймовірністю** [8].

Таблиця 1.2

Довірча ймовірність β та параметр d_β нормального закону розподілу

β	d_β	β	d_β
0,80	1,282	0,92	1,750
0,82	1,340	0,94	1,880
0,84	1,404	0,95	1,960
0,86	1,475	0,96	2,053
0,88	1,554	0,98	2,325
0,90	1,645	0,99	2,576
0,91	1,694	0,999	3,290

З таблиці видно, що практично (з імовірністю, більшою за **0,99**) всі значення нормальної випадкової величини відділені від a на відстань, що не перевершує 3σ . Це твердження зветься **правилом трьох сигм** [17]. Це правило значно полегшує розрахунки, тому що використовує ціле число 3. З урахуванням цього правила, визначивши вибіркове середнє $\bar{x}$, можна з імовірністю **0,99** вказати інтервал (його серединою буде $\bar{x}$), у якому міститься генеральне середнє $\hat{x}$. Але для цього треба знати середнє квадратичне σ нормального розподілу, якому підкоряється $\bar{x}$.

За оцінку для σ беруть величину $\frac{s}{\sqrt{n}}$, де s – середнє квадратичне відхилення для вибірки, за якою знайдено $\bar{x}$, а n – об'єм цієї вибірки. Таким чином, з імовірністю **0,99** справжнє середнє $\hat{x}$ розташоване в інтервалі

$$\hat{x} \in \left(\bar{x} - 3 \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + 3 \frac{s}{\sqrt{n}} \right).$$

Якщо можна задовольнятися меншою ймовірністю, то границі інтервалу, що містить $\hat{x}$, можна звужити. У загальному випадку ці границі мають вигляд

$$\hat{x} \in \left(\bar{x} - d_\beta \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + d_\beta \frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

де d_β вибирається з таблиці 1.2 на підставі заданого значення довірчої ймовірності β . Цей інтервал має назву **довірчого інтервалу**.

До того, як починати аналіз отриманої в ході експерименту вибірки, треба оцінити достовірність відображення нею реальної поведінки досліджуваної генеральної сукупності, тобто оцінити

репрезентативність наявної вибірки. Для цього використовується **коефіцієнт репрезентативності E** , що обчислює за формулою [17]:

$$E = \frac{3 s}{\bar{x} \sqrt{n}} \cdot 100 \% .$$

Вибірка вважається **репрезентативною** або **представницькою** серед подібних їй вибірок однієї й тієї ж генеральної сукупності, якщо її значення E менше за **15 %**. Висновки, що зроблені на основі аналізу такої вибірки можна буде розповсюдити на всю генеральну сукупність, тому що отримана вибірка адекватно відображає її поведінку. У протилежному випадку до оцінок параметрів розподілу (μ та σ), що надаються цією вибіркою, варто ставитися з обережністю, тому що вона неадекватно відображає реальну поведінку генеральної сукупності. Висновки, зроблені на основі аналізу такої вибірки, неможна буде розповсюдити на всю генеральну сукупність.

Вважається, що, якщо дві вибірки взяті з однієї й тієї ж самої генеральної сукупності (тобто отримані в результаті вивчення того самого явища, що протікає в однорідних умовах), то вибірка, для якої значення E менше, є більш представницькою, тобто більш репрезентативною. Інакше кажучи, у такій вибірці краще проявляється ознака досліджуваного явища [17].

Приклад 1.7. В умовах прикладу 1.5 та прикладу 1.6 розрахувати довірчі інтервали для їх генерального середнього значень та оцінити репрезентативність цих вибірок, отриманих в результаті двох різних експериментів при вивченні одного й того ж самого явища. Порівняти ці вибірки та обрати ту, яка більш адекватно відображає поведінку генеральної сукупності.

Розв'язання. Розглянемо вибірки, вивчені в прикладах 1.5 і 1.6. Позначимо їхні середні значення відповідно через $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$, середні квадратичні відхилення відповідно через s_1 і s_2 , а об'єми цих вибірок відповідно через n_1 і n_2 . Отже, з довірчою ймовірністю, більшою за **0,99**, довірчі інтервали для генерального середнього, обчислені на основі цих вибірок будуть наступними:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &\in \left(\bar{x}_1 - \frac{3 s_1}{\sqrt{n_1}}; \bar{x}_1 + \frac{3 s_1}{\sqrt{n_1}} \right) = \left(162 - \frac{3 \cdot 29,3}{\sqrt{10}}; 162 + \frac{3 \cdot 29,3}{\sqrt{10}} \right) = \\ &= (162 - 27,8; 162 + 27,8) = (134,2; 189,8); \\ \hat{x}_2 &\in \left(\bar{x}_2 - \frac{3 s_2}{\sqrt{n_2}}; \bar{x}_2 + \frac{3 s_2}{\sqrt{n_2}} \right) = \left(220,39 - \frac{3 \cdot 55,1}{\sqrt{699}}; 220,39 + \frac{3 \cdot 55,1}{\sqrt{699}} \right) = \\ &= (220,39 - 6,25; 220,39 + 6,25) = (214,14; 226,64). \end{aligned}$$

Репрезентативність цих вибірок складає відповідно

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{3 s_1}{\bar{x}_1 \sqrt{n_1}} \cdot 100 \% = \frac{3 \cdot 29,3}{162 \cdot \sqrt{10}} \cdot 100 \% = 0,1716 \cdot 100 \% = 17,16 \% ; \\ E_2 &= \frac{3 s_2}{\bar{x}_2 \sqrt{n_2}} \cdot 100 \% = \frac{3 \cdot 55,1}{220,39 \cdot \sqrt{699}} \cdot 100 \% = 0,0284 \cdot 100 \% = 2,84 \% . \end{aligned}$$

В силу того, що $E_1 = 17,16 \% > 15 \%$, то відповідно до прийнятої границі обчислене $\hat{x}$ не можна прийняти, а відповідну вибірку вважати репрезентативною. У той же час, значення $E_2 = 2,84 \% < 15 \%$ цілком відповідає обраному критерію. Таким чином, можна прийняти, що генеральне середнє арифметичне значення досліджуваного показника лежить в межах $\hat{x} \in (214,14; 226,64)$. Границі цього інтервалу визначені з довірчою ймовірністю, більшою за **0,99**.

Відповідь. Репрезентативність першої вибірки складає $E_1 = 17,16 \% > 15 \%$, тому розрахований на основі її числових характеристик інтервал для генерального середнього значення $\hat{x}_1 \in (134,2; 189,8)$ неможна прийняти для подальшої роботи. Репрезентативність другої вибірки дорівнює $E_2 = 2,84 \% < 15 \%$, тому з ймовірністю, більшою за 0,99, справжнє середнє арифметичне значення досліджуваного показника міститься в інтервалі $\hat{x} \in (214,14; 226,64)$.

Як можна побачити із формули для обчислення коефіцієнту репрезентативності вибірки, дослідник може вплинути на його значення, збільшуючи об'єм вибірки. Ця величина стоїть в знаменнику, тому між нею та величиною коефіцієнту існує зворотна пропорційність: чим більшим є об'єм вибірки, тим більш репрезентативною буде ця вибірка.

Узгодженість розподілу $\bar{x}$ з нормальним законом дозволяє при будь-якому розподілі варіант із певною ймовірністю визначити границі для $\hat{x}$. А це означає, що кожна репрезентативна вибірка (тобто при $E > 15 \%$) може мати надійну кількісну характеристику у вигляді $\bar{x} \pm 3s$. Дана характеристика добре відображає якісну сторону досліджуваного явища, а це може бути використане при описі та порівнянні ознак різної природи. Крім того, оцінка $\hat{x}$ застосовується при визначенні помилки виміру, величина якої визначається границями довірчого інтервалу для X .

1.2.3. Критерій нормальності розподілу

Нормально розподілені випадкові величини зазвичай відповідають явищам, що є результатом багатьох одночасно діючих чинників, дія кожного з яких не є переважаючою над іншими. Така ситуація виникає при вивченні явища, що протікає в однорідних умовах. Але умови однорідності не завжди можна дотриматися. Крім того, природа явища іноді буває мало вивченою, і тому важко визначити ступінь впливу окремих чинників на кількісні характеристики даного явища. Очевидно, не можна очікувати, що досліджуване явище обов'язково визначить нормально розподілену випадкову величину. Тому на практиці виникає задача визначення закону розподілу.

Визначення закону розподілу за вибіркою розпадається на три етапи [2]:

- формулювання виду закону розподілу,
- знаходження параметрів цього розподілу,
- перевірка згоди отриманої вибірки із прийнятим (сформульованим) законом розподілу.

Однією з передумов для формулювання виду закону розподілу є емпіричний розподіл. Для побудови емпіричного розподілу в отриманій вибірці проводять інтервальну розбивку та складають таблицю, а вже на її підставі будують гістограму емпіричного розподілу.

Приклад 1.8. Для вибірки, отриманої в ході експерименту в прикладі 1.6, побудувати гістограму та висунути гіпотезу щодо можливого закону розподілу досліджуваної випадкової величини.

Розв'язання. Для побудови гістограми можна обмежитися тими частотами, що задані в таблиці умови прикладу 1.6. В той же час, можна скористатися нормованими частотами обчисленими за формулою

$$\bar{n}_i = \frac{n_i}{n},$$

де n_i – частоти відповідних інтервалів, отримані в ході експерименту;

n – об'єм вибірки.

Гістограми з використанням фактичних частот n_i та нормованих частот $\bar{n}_i$ будуть мати однакову форму і відрізнятися одна від одної лише масштабом. Отже, випадковій величині, виміряній в ході експерименту в прикладі 1.6, відповідає гістограма, зображена на рис. 1.4.

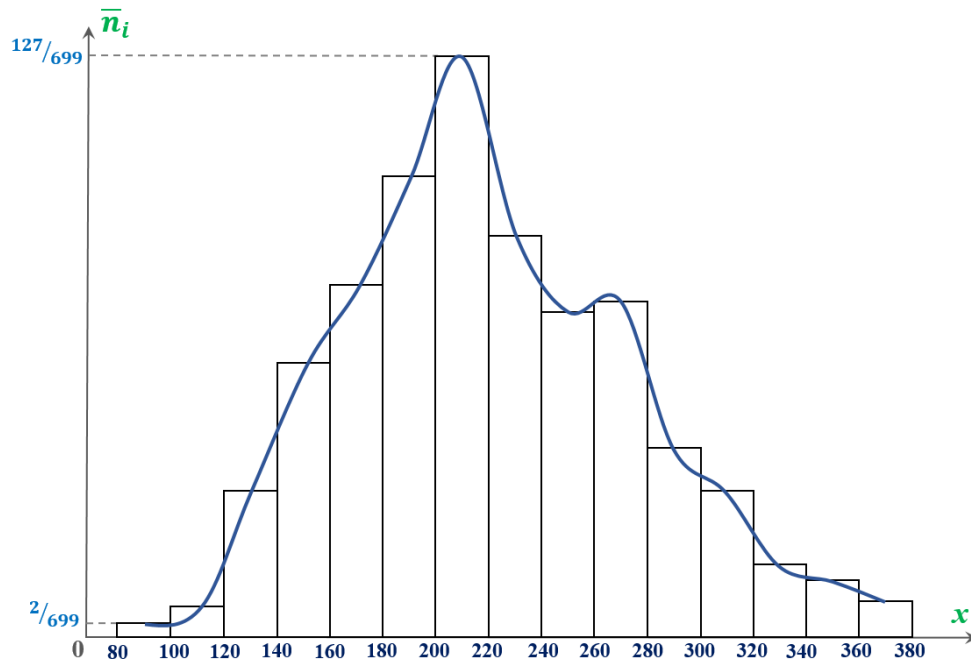


Рис. 1.4 – Гістограма для висування гіпотези щодо закону розподілу

Приблизно через середини верхніх сторін прямокутників гістограми проводиться плавна крива. Отримана крива, хоч і віддалено, нагадує криву нормального розподілу. Тому природно припустити, що досліджувана вибірка взята з нормальної генеральної сукупності, параметри якої μ й σ^2 оцінюються на основі вибірки.

Відповідь. Висувається припущення про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини, параметри розподілу якої μ і σ^2 можна оцінити на основі вибірки величинами $\bar{x}$ та s^2 відповідно.

У загальному випадку, якщо із зовнішнього вигляду гістограми було зроблене припущення про вид теоретичного розподілу й були оцінені його параметри, то залишається порівняти теоретичний закон розподілу з вибіркою. Для такого порівняння необхідно обрати критерій перевірки гіпотези про узгодженість емпіричного та теоретичного розподілу. Такі критерії називаються **критеріями згоди**. Всі критерії згоди будуються за однаковою схемою. Для цього обирається деякий параметр, закон розподілу якого відомий, і який має досить велику «чутливість», тобто відмінність закону, що перевіряється, від дійсного істотно позначається б на значеннях цього параметра. Найбільшою поширеністю користується **критерій Пірсона**, роль параметра в якому грає величина [17]

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{\left(\frac{n_i}{n} - p_i\right)^2}{p_i}, \quad (1.15)$$

де n – об'єм вибірки,

k – кількість інтервалів групування,

$\frac{n_i}{n}$ – відносні частоти інтервалів,

p_i – теоретичні ймовірності цих інтервалів (у припущенні про вірність передбачуваного теоретичного розподілу).

Введений параметр χ^2 використовується для перевірки (на підставі вибірки) гіпотези про те, що справжній закон розподілу збігається із передбачуваним. Цю гіпотезу позначають через H_0 і називають **нульовою гіпотезою**. Нульова гіпотеза H_0 відкидається, якщо ймовірність спостерігати

дану вибірку в умовах гіпотези H_0 є дуже малою. На практиці прийнято вважати, що якщо ця ймовірність менша за **0,05**, то гіпотезу H_0 відкидають. Число **0,05** називається *рівнем значимості*. Інколи замість **0,05** беруть **0,01**. Параметр χ^2 визначає критерій перевірки гіпотези H_0 . Його називають *критерієм «хі-квадрат»*. Застосування критерію засноване на тому, що для обраного рівня значимості визначають табличне χ_{05}^2 (5 %-ве значення критерію) або χ_{01}^2 (1 %-ве значення критерію) та порівнюють їх зі значенням χ^2 , обчисленим за формулою (1.15). Щоб знайти табличне χ_{α}^2 , варто звернутися до таблиці розподілу χ^2 (таблиці 1.3) для значення $f=k-r-1$, де k – кількість інтервалів групування, використаних при обчисленні χ^2 , а r – кількість параметрів теоретичного закону розподілу, оцінених на основі даної вибірки. Число f називається *числом ступенів свободи*. Для випадку, коли передбачуваний теоретичний закон розподілу є нормальним, $f=k-3$.

Таблиця 1.3

Критичні значення критерію χ^2 Пірсона

f	5%	1%	f	5%	1%	f	5%	1%
1	3.8	6.6	18	28.9	34.8	35	49.8	57.3
2	6.0	9.21	19	30.1	36.2	36	51.0	58.6
3	7.8	11.3	20	31.4	37.6	37	52.2	59.9
4	9.5	13.3	21	32.7	38.9	38	53.4	61.2
5	11.1	15.1	22	33.9	40.3	39	54.6	62.4
6	12.6	16.8	23	35.2	41.6	40	55.8	63.7
7	14.1	18.5	24	36.4	43.0	41	56.9	65.0
8	15.5	20.1	25	37.7	44.3	42	58.1	66.2
9	16.9	21.7	26	38.9	45.6	43	59.3	67.5
10	18.3	23.1	27	40.1	47.0	44	60.5	68.7
11	19.7	24.7	28	41.3	48.3	45	61.7	70.0
12	21.0	26.2	29	42.6	49.6	46	62.8	71.2
13	22.4	27.7	30	43.8	50.9	47	64.0	72.4
14	23.7	29.1	31	45.0	52.2	48	65.2	73.7
15	25.0	30.6	32	46.2	53.5	49	66.3	74.9
16	26.3	32.0	33	47.4	54.8	50	67.5	76.2
17	27.6	33.4	34	48.6	56.1			

Для застосування критерію згоди χ^2 при перевірці нульової гіпотези H_0 = «отримана вибірка, взята з генеральної сукупності з нормальним законом розподілу» - проводиться обчислення за наступним алгоритмом [17].

1. Нехай прийнято рішення провести інтервальне групування спостережень вибірки на k інтервалів, і нехай $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ – границі всіх інтервалів.
2. Визначаються вибіркові середнє арифметичне значення $\bar{x}$ та дисперсія s^2 .
3. Обчислюються різниці

$$y_1 - \bar{x}; y_2 - \bar{x}; \dots; y_{k+1} - \bar{x}.$$

4. Ці різниці нормуються, тобто обчислюються величини

$$u_i = \frac{y_i - \bar{x}}{s}, \quad i = \overline{1, k+1}.$$

5. За таблицею 1.1 знаходимо величини $\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_{k+1})$.
6. Обчислюємо різниці

$$p_1 = |\Phi(u_2) - \Phi(u_1)|; \dots; p_k = |\Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k)|.$$

7. Обчислюємо

$$\tilde{n}_i = p_i n .$$

8. Визначаємо значення χ^2 за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i} .$$

Ця формула дає те ж значення χ^2 , що й формула (1.15), але вона є зручнішою для розрахунків. До того ж вона свідчить про правильність проведеного інтервального групування. Вважається, що «очікувані частоти» $\tilde{n}_i$ не повинні бути меншими за п'ять. У протилежному випадку кілька середніх інтервалів об'єднують в один, тобто тут вже не обов'язково піклуватися про рівність довжин інтервалів. Але таке об'єднання треба проводити вже після обчислення $\bar{x}$ й s^2 .

Обчислене значення критерію χ^2 порівнюємо з табличним χ_{05}^2 (або χ_{01}^2). Якщо виявиться, що $\chi^2 > \chi_{01}^2$, то гіпотеза H_0 відкидається з рівнем значимості **0,01**. Рівень значимості α (зазвичай $\alpha = 0,05$ або $\alpha = 0,01$) означає, що ймовірність отримання даної вибірки в умовах гіпотези H_0 менша за α , тобто гіпотеза H_0 слабо узгоджується з даною вибіркою, а тому має бути відкинута. Якщо ж $\chi^2 < \chi_{05}^2$, то гіпотеза H_0 приймається. Точніше кажучи, ця гіпотеза не відкидається, і наступні експерименти можуть підтвердити її або спростувати. Особливо важливо продовжувати експеримент, якщо обчислене значення χ^2 задовольняє нерівності $\chi_{05}^2 < \chi^2 < \chi_{01}^2$, тому що дослідник (із міркувань обережності) може вибрати рівень значимості $\alpha=0,01$, а тому не відкидає гіпотезу H_0 , але наведена нерівність ставить під сумнів його висновок.

Приклад 1.9. Для вибірки, отриманої в ході експерименту в прикладі 1.6, спираючись на припущення, висунуте на основі гістограми, побудованої в прикладі 1.8, перевірити за допомогою критерію χ^2 Пірсона відповідність закону розподілу досліджуваної випадкової величини нормальному закону.

Розв'язання. Розглядаючи наведену вище гістограму, можна побачити, що в центрі її розташовані найбільш частотні варіанти, а ближче до країв – відносно рідкі варіанти. Як вже зазначено, за цими ознаками гістограма нагадує криву щільності нормального розподілу. Використовуючи вибіркове середнє $\bar{x} = 220,39$ і середнє квадратичне відхилення $s = 55,1$, за допомогою критерію χ^2 можна перевірити гіпотезу $H_0 =$ «*досліджувана випадкова величина підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами $\mu = 220,39$ і $\sigma = 55,1$* ». Емпіричне значення χ^2 (за його допомогою перевіряється гіпотеза H_0) обчислюється відповідно до зазначеної схеми. Результати проміжних обчислень наведені в наступній розрахунковій таблиці.

№ інтервалу	Границі інтервалів	Відхилення границь інтервалів від $\bar{x}$	Нормовані відхилення границь інтервалів u_i	$\Phi(u_i)$	$p_i =$ $= \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i) $	$\tilde{n}_i =$ $= p_i n$	n_i	χ_i^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	80	$80 - 220,39 = -140,39$	$(-140,39) : 55,1 = -2,55$	0,0054	0,0092	6,43	2	$(6,43 - 2)^2 : 6,43 = 3,05$
2	100	$100 - 220,39 = -120,39$	$(-120,39) : 55,1 = -2,18$	0,0146	0,0198	13,84	5	$(13,84 - 5)^2 : 13,84 = 5,64$
3	120	$120 - 220,39 = -100,39$	$(-100,39) : 55,1 = -1,82$	0,0344	0,0377	26,35	32	$(26,35 - 32)^2 : 26,35 = 1,21$
4	140	$140 - 220,39 = -80,39$	$(-80,39) : 55,1 = -1,46$	0,0721	0,0636	44,46	59	$(44,46 - 59)^2 : 44,46 = 4,76$
5	160	$160 - 220,39 = -60,39$	$(-60,39) : 55,1 = -1,10$	0,1357	0,0970	67,80	71	$(67,80 - 71)^2 : 67,80 = 0,15$
6	180	$180 - 220,39 = -40,39$	$(-40,39) : 55,1 = -0,73$	0,2327	0,1230	85,98	92	$(85,98 - 92)^2 : 85,98 = 0,42$
7	200	$200 - 220,39 = -20,39$	$(-20,39) : 55,1 = -0,37$	0,3557	0,1483	103,66	127	$(103,66 - 127)^2 : 103,66 = 5,26$
8	220	$220 - 220,39 = -0,39$	$(-0,39) : 55,1 = 0,01$	0,5040	0,1366	95,48	77	$(95,48 - 77)^2 : 95,48 = 3,58$
9	240	$240 - 220,39 = 19,61$	$19,61 : 55,1 = 0,36$	0,6406	0,1236	86,40	66	$(86,40 - 66)^2 : 86,40 = 4,82$
10	260	$260 - 220,39 = 39,61$	$39,61 : 55,1 = 0,72$	0,7642	0,0957	66,89	67	$(66,89 - 67)^2 : 66,89 = 0,0002$
11	280	$280 - 220,39 = 59,61$	$59,61 : 55,1 = 1,08$	0,8599	0,0652	45,57	36	$(45,57 - 36)^2 : 45,57 = 2,01$
12	300	$300 - 220,39 = 79,61$	$79,61 : 55,1 = 1,44$	0,9251	0,0398	27,82	31	$(27,82 - 31)^2 : 27,82 = 0,36$
13	320	$320 - 220,39 = 99,61$	$99,61 : 55,1 = 1,81$	0,9649	0,0201	14,05	15	$(14,05 - 15)^2 : 14,05 = 0,06$
14	340	$340 - 220,39 = 119,61$	$119,61 : 55,1 = 2,17$	0,9850	0,0093	6,50	12	$(6,50 - 12)^2 : 6,50 = 4,65$
15	360	$360 - 220,39 = 139,61$	$139,61 : 55,1 = 2,53$	0,9943	0,0038	2,66	7	$(2,66 - 7)^2 : 2,66 = 7,08$
	380	$380 - 220,39 = 159,61$	$159,61 : 55,1 = 2,90$	0,9981				
Разом $\sum_{i=1}^k \chi_i^2$								43,05

Опишемо процес заповнення стовпців цієї таблиці. Було ухвалено рішення використати 15 інтервалів групування ($k = 15$), причому початок першого інтервалу дорівнює 80, а довжина інтервалів дорівнює 20. У стовпці № 1 зазначені номери отриманих інтервалів, у стовпці № 2 – кінці відповідних інтервалів, у стовпці № 3 – відхилення границь інтервалів від вибіркового середнього $\bar{x} = 220,39$. У стовпці № 4 записані числа u_i , що є нормованими відхиленнями границь інтервалів. Ці числа отримуються діленням відповідних чисел стовпця № 3 на одне й те саме число, а саме на $s = 55,1$ (з урахуванням знаку). Стовпець № 5 містить значення $\Phi(u_i)$, які знаходять за таблицею значень функції Лапласа Φ (таблиця 1.1). Так, для $u_1 = -2,55$ маємо $\Phi(-2,55) = 0,0054$, а для $u_{10} = 0,72$ маємо $\Phi(0,72) = 1 - \Phi(-0,72) = 1 - 0,2358 = 0,7642$. Числа стовпця № 6 відповідають номерам інтервалів і дорівнюють різницям значень функції Φ для границь інтервалу (з більшого значення Φ віднімається менше значення). Числа стовпця № 6 і є теоретичними («очікуваними») частотами $\tilde{n}_i$. Вони отримуються як добуток чисел стовпця № 6 на одне й те саме число, а саме на об'єм вибірки n (у нашому прикладі $n = 699$). У стовпці № 8 зазначені емпіричні частоти n_i . Вони відображають результат вибірки. Ці числа взяті зі стовпця № 2 розрахункової таблиці прикладу 1.6.

Тепер обчислюємо χ^2 . Для цього із чисел стовпця № 8 віднімаються числа стовпця № 7 (або навпаки, з чисел стовпця № 7 віднімаються числа стовпця № 8), отримані різниці підносяться у квадрат, а потім діляться на числа стовпця № 7. Результати підсумуються. Отже, сума елементів останнього стовпця, тобто стовпця № 9, і є обчислюваним значенням критерію χ^2 . В нашому прикладі $\chi^2 = 43,05$. Тепер за таблицею розподілу χ^2 (таблицю 1.3) знаходимо χ_{05}^2 й χ_{01}^2 , що відповідають числу ступенів свободи $f = 15 - 3 = 12$. Маємо $\chi_{05}^2 = 21,0$, $\chi_{01}^2 = 26,2$. Оскільки $\chi^2 = 43,05 > 26,2 = \chi_{01}^2$, то гіпотеза H_0 відкидається. Таким чином, припущення про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини не підтвердилося.

Відповідь. Гіпотеза H_0 про нормальний закон розподілу досліджуваної випадкової величини **відкидається** з ймовірністю 0,99, тобто з ймовірністю 99 % закон розподілу досліджуваної випадкової величини не є нормальним.

Критерій χ^2 Пірсона добре себе зарекомендував в статистичних дослідженнях. Але задля забезпечення коректності та об'єктивності отриманих даних, важливо передбачити декілька наступних моментів [39]:

- *оптимальний об'єм вибірки*. Використовувати цей критерій доцільно в тому випадку, коли даних для аналізу більше **50**;
- *тип даних*. Параметрами можуть бути вимірювання номінальної шкали, якісні цілочисельні параметри або бінарні показники;
- *очікувана частота* за нульовою гіпотезою має бути не меншою за **5**.

В той же час цей критерій має і недоліки, що можуть викривити отриманий при його застосуванні результат. Основний недолік критерію Пірсона полягає в тому, що через те, що результати спостережень групуються в інтервали, а самі інтервали з невеликою кількістю спостережень об'єднуються, то початкова інформація може бути втраченою, а самі дані виявитися не зовсім об'єктивними. Щоб уникнути такого викривлення отриманих результатів, доцільним є застосування критерію χ^2 Пірсона в комплексі з іншими критеріями. При такому підході висновки будуть максимально відповідати дійсності.

1.2.4. Критерій Стюдента

При вивченні показників економічних характеристик велике значення має наступна постановка питання: деякий показник визначений за двома різними вибірками. Як правило, середнє значення цього показника в одній вибірці відрізняється від його середнього значення в іншій вибірці. Чи істотно це розходження, або воно є випадковим і ці вибірки можна об'єднати в одну і в подальшому аналізувати їх спільні результати (ці вибірки є однорідними)? У тих випадках, коли закон розподілу цього показника близький до нормального, відповідь на поставлене питання дає критерій Стюдента. Вимогою нормальності можна знехтувати, якщо об'єми порівнюваних вибірок досить великі (більші за 30), тому що при зростанні об'єму вибірки розподіл Стюдента стрімко наближається до нормального розподілу. Другою вимогою для застосування критерію Стюдента є рівність дисперсій двох досліджуваних вибірок. Однак в більшості технічних та техніко-економічних задач цю умову неможна вважати виконаною, а перевіряти її не є доцільним. Але при великих та приблизно рівних об'ємах вибірок цю вимогу також можна не застосовувати. Третьою вимогою для застосування критерію Стюдента, якою неможна знехтувати ні за яких обставин, є незалежність порівнювальних вибірок. Сутність критерію Стюдента проілюструємо на наступному прикладі.

Приклад 1.10. У двох різних регіонах (регіон *A* та регіон *B*) досліджувався споживчий попит на продукцію одного й того ж самого виробника. За результатами окремого опитування в кожному регіоні (вимога незалежності вибірок) окремо було проведено інтервальне групування, яке відображене в наступних таблицях.

Region A

№ з/п	Інтервали	Частоти (n_i)
1	180 – 210	2
2	210 – 240	4
3	240 – 270	5
4	270 – 300	6
5	300 – 330	8
6	330 – 360	6
7	360 – 390	4
8	390 – 420	3
9	420 – 450	2
Разом		40

Region B

№ з/п	Інтервали	Частоти (n_j)
1	120 – 140	1
2	140 – 160	1
3	160 – 180	3
4	180 – 200	3
5	200 – 220	4
6	220 – 240	5
7	240 – 260	5
8	260 – 280	3
9	280 – 300	3
10	300 – 320	2
11	320 – 340	2
Разом		32

Висувається гіпотеза H_0 = «Розбіжність вибірових середніх арифметичних значень $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є несуттєвою, випадковою, тобто справжні середні значення попиту для регіонів A та B є однаковими». Підтвердити або спростувати цю гіпотезу за допомогою критерію Стюдента.

Розв'язання. Побудуємо для кожного регіону розрахункові таблиці, подібні до тієї, за допомогою якої було здійснене обчислення вибірового середнього арифметичного значення та вибірової дисперсії в прикладі 1.6.

Region A

№ з/п	Інтервали	n_i	$y_i = c_i^{(A)}$	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$
	1	2	3	4	5
1	180 – 210	2	– 4	– 8	32
2	210 – 240	4	– 3	– 12	36
3	240 – 270	5	– 2	– 10	20
4	270 – 300	6	– 1	– 6	6
5	300 – 330	8	0	0	0
6	330 – 360	6	1	6	6
7	360 – 390	4	2	8	16
8	390 – 420	3	3	9	27
9	420 – 450	2	4	8	32
Разом		$n_A = 40$		– 7	175

Region B

№ з/п	Інтервали	n_j	$z_j = c_j^{(B)}$	$n_j z_j$	$n_j z_j^2$
	1	2	3	4	5
1	120 – 140	1	– 5	– 5	25
2	140 – 160	1	– 4	– 4	16
3	160 – 180	3	– 3	– 9	27
4	180 – 200	3	– 2	– 6	12
5	200 – 220	4	– 1	– 4	4
6	220 – 240	5	0	0	0
7	240 – 260	5	1	5	5
8	260 – 280	3	2	6	12
9	280 – 300	3	3	9	27
10	300 – 320	2	4	8	32
11	320 – 340	2	5	10	50
Разом		$n_B = 32$		+10	210

Стовпці цих таблиць заповнюються за тими ж правилами, що й стовпці розрахункової таблиці в прикладі 1.6. У вибірці для регіону A найчастотнішим є 5-й інтервал. Тому фіксується саме інтервал № 5, серединою якого є $x_0^{(A)} = 315$. Довжина інтервалів в першій вибірці складає $h_A = 30$. У вибірці для регіону B найчастотнішими є 6-й та 7-й інтервали. В таких випадках обирається той інтервал, який розташований ближче до середини таблиці. В нашому прикладі таким інтервалом є 6-й. Тому фіксується інтервал № 6, серединою якого є $x_0^{(B)} = 230$. Довжина інтервалів в другій вибірці складає $h_B = 20$. За даними наведених розрахункових таблиць обчислюємо середні арифметичні значення для кожної вибірки (кожного регіону):

$$\bar{a} = 315 + \frac{-7}{40} \cdot 30 = 309,75 ;$$

$$\bar{b} = 230 + \frac{10}{32} \cdot 20 = 236,25 .$$

де $\bar{a}$ – середнє значення попиту для регіону A ,

$\bar{b}$ – середнє значення попиту для регіону B .

Розбіжність вибірових середніх (309,75 і 236,25) ще не доводить, що регіони A і B істотно різняться з точки зору попиту на продукцію розглянутого виробника. Для перевірки гіпотези H_0 обчислюємо величину $S_{\bar{a}-\bar{b}}$ за формулою:

$$S_{\bar{a}-\bar{b}} = \sqrt{\frac{\sum(a_i - \bar{a})^2 + \sum(b_j - \bar{b})^2}{n_A + n_B - 2} \cdot \frac{n_A + n_B}{n_A n_B}},$$

де n_A і n_B – об'єми вибірок відповідно для регіонів A і B . В наведеній формулі суми $\sum(a_i - \bar{a})^2$ і $\sum(b_j - \bar{b})^2$ мають той же зміст, що й при обчисленні дисперсій вибірок відповідно для регіонів A і B без проведення інтервального групування. В нашому прикладі ми не знаємо конкретні значення елементів вибірок a_i та b_j , але незважаючи на це, зазначені суми обчислити все ж таки можемо. Без проведення групування дисперсія обчислюється за формулою (1.12). В той же час, після проведення групування дисперсія обчислюється за формулою (1.14). Враховуючи, що це одна й та ж сама величина незалежно від того, було проведено групування чи ні, маємо:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \right) \cdot h^2 \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Помножуючи обидві частини цієї рівності на $n-1$, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 \right) \cdot h^2.$$

Тому для наших двох вибірок регіонів A і B відповідно маємо:

$$\sum_{i=1}^{n_A} (a_i - \bar{a})^2 = \left(\sum_{i=1}^{k_A} n_i y_i^2 - \frac{1}{n_A} \left(\sum_{i=1}^{k_A} n_i y_i \right)^2 \right) \cdot h_A^2,$$

$$\sum_{j=1}^{n_B} (b_j - \bar{b})^2 = \left(\sum_{j=1}^{k_B} n_j z_j^2 - \frac{1}{n_B} \left(\sum_{j=1}^{k_B} n_j z_j \right)^2 \right) \cdot h_B^2.$$

Підставляючи в ці формули дані наведених розрахункових таблиць, отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n_A} (a_i - \bar{a})^2 = \left(175 - \frac{(-7)^2}{40} \right) \cdot 30^2 = 156397,5;$$

$$\sum_{j=1}^{n_B} (b_j - \bar{b})^2 = \left(210 - \frac{10^2}{32} \right) \cdot 20^2 = 82750.$$

Використовуючи ці результати, обчислюємо:

$$S_{\bar{a}-\bar{b}} = \sqrt{\frac{156397,5 + 82750}{40 + 32 - 2} \cdot \frac{40 + 32}{40 \cdot 32}} = \sqrt{192,17} = 13,86.$$

Тепер для розрахунку саме критерію Стюдента (псевдонім англійського вченого-статистика В. Госсета) використовують формулу [17]

$$t_s = \frac{|\bar{a} - \bar{b}|}{S_{\bar{a}-\bar{b}}}.$$

З урахуванням отриманих результатів для досліджуваних вибірок, в нашому прикладі емпіричне значення критерію Стюдента дорівнює

$$t_s = \frac{|309,75 - 236,25|}{13,86} = \frac{73,5}{13,86} = 5,30.$$

За таблицею розподілу Стюдента (таблицею 1.4) визначаємо t_{05} та t_{01} для числа ступенів свободи $f = n_A + n_B - 2$ [38].

Таблиця 1.4

Критичні значення критерію t Стюдента

<i>f</i>	Рівень довіри			<i>f</i>	Рівень довіри		
	90%	95%	99%		90%	95%	99%
1	6,313	12,706	63,657	29	1,699	2,045	2,756
2	2,920	4,303	9,925	30	1,697	2,042	2,750
3	2,353	3,182	5,841	32	1,693	2,036	2,738
4	2,132	2,776	4,604	34	1,691	2,032	2,728
5	2,015	2,571	4,032	36	1,688	2,028	2,720
6	1,953	2,447	3,707	38	1,686	2,024	2,712
7	1,895	2,365	3,499	40	1,684	2,021	2,705
8	1,860	2,306	3,355	42	1,682	2,018	2,698
9	1,833	2,262	3,250	44	1,680	2,015	2,692
10	1,812	2,228	3,169	46	1,678	2,013	2,687
11	1,796	2,201	3,106	48	1,677	2,011	2,682
12	1,782	2,179	3,055	50	1,676	2,009	2,678
13	1,771	2,160	3,012	55	1,673	2,004	2,668
14	1,761	2,145	2,977	60	1,671	2,000	2,660
15	1,753	2,131	2,947	65	1,669	1,997	2,654
16	1,746	2,120	2,921	70	1,669	1,994	2,648
17	1,740	2,110	2,898	80	1,664	1,990	2,638
18	1,734	2,101	2,878	90	1,662	1,987	2,632
19	1,729	2,093	2,861	100	1,660	1,984	2,626
20	1,725	2,086	2,845	120	1,658	1,976	2,617
21	1,721	2,080	2,831	150	1,655	1,972	2,609
22	1,717	2,074	2,819	200	1,653	1,972	2,601
23	1,714	2,069	2,807	250	1,651	1,970	2,597
24	1,711	2,064	2,797	300	1,650	1,968	2,592
25	1,708	2,060	2,787	400	1,649	1,966	2,589
26	1,706	2,056	2,779	500	1,647	1,964	2,585
27	1,703	2,052	2,771	∞	1,645	1,960	2,576
28	1,701	2,048	2,763				
<i>f</i>	10%	5%	1%	<i>f</i>	10%	5%	1%
	Рівень значимості				Рівень значимості		

Критерій Стюдента стверджує: якщо розраховане $t_s \leq t_{05}$, то гіпотеза H_0 приймається. Причому ймовірність того, що вона є правильною, не менша за 0,95, тобто в 95 % випадків ця гіпо-

теза відповідає дійсності. Якщо ж розраховане $t_s \geq t_{01}$, то гіпотеза H_0 відкидається, тому що з ймовірністю **0,99** вона є помилковою, тобто в **99 %** випадків вона не відповідає дійсності. Особливу увагу слід приділити випадкам, коли $t_{05} < t_s < t_{01}$. Якщо розраховане значення t_s задовольняє цій нерівності, то висновок щодо прийняття або спростування гіпотези H_0 зробити неможливо, треба продовжувати експеримент та отримати додаткові дані (нові вибірки).

В розглянутому прикладі $f = 40 + 32 - 2 = 70$, $t_{05} = 1,994$, $t_{01} = 2,648$. Отже, розраховане для наявних вибірок значення критерію Стюдента $t_s = 5,3 > 2,648 = t_{01}$. З цього випливає, що гіпотеза H_0 про випадковість розбіжностей в середніх значеннях для двох розглянутих вибірок відкидається з ймовірністю **0,99**.

Відповідь. З ймовірністю **99 %** розбіжності у середніх арифметичних значеннях попиту на продукцію заявленого постачальника для регіонів **A** і **B** не є випадковими, вони викликані впливом якогось додаткового чинника. Тому попит на продукцію досліджуваного виробника в цих регіонах слід аналізувати окремо один від одного.

Взагалі критерій Стюдента часто використовується в економіці, коли треба перевірити отримані дослідником результати. Наприклад, можна порівнювати показники різних років, виявляти їх динаміку та прогнозувати подальший розвиток цих показників. При цьому висувається гіпотеза про зростання або, навпаки, зменшення значень аналізованих показників.

І критерій Пірсона, і критерій Стюдента є статистичними методами, що дають об'єктивний достовірний практичний результат. Ці критерії можна використовувати як окремо, так і спільно. Таким чином, ці критерії не виключають можливості використання один одного – критерій Пірсона надає можливість зіставляти різні дані та визначати частоту, з якою та чи інша ознака зустрічається в теорії або в емпіричному розподілі, а критерій Стюдента надає можливість отримувати дані для вибірок, що не пов'язані між собою [39]. Також слід зазначити, що критерій Стюдента може бути застосований для порівняння лише двох вибірок. Якщо є потреба порівняти більшу кількість вибірок, то слід використовувати інші статистичні методи.

1.2.5. Кореляційна залежність

Для встановлення загальних законів, за якими протікають різні явища, необхідно не тільки проаналізувати кожний з компонентів якогось явища, але й надати детальну кількісну та якісну характеристику різноманітних зв'язків, які існують між ознаками, що цікавлять дослідника процесу, і описати результати впливу даних зв'язків на досліджувані процеси [5].

Прояв однієї ознаки перебуває в щільному зв'язку з багатьма іншими ознаками досліджуваного явища. Внутрішня структура явища характеризується багатопричинними зв'язками. Зведення складної системи відносин до більш простих її видів, виділення тих зв'язків, які є основними в досліджуваній функції економічного явища – це ті задачі, які повинні бути вирішені експериментатором на початковому етапі дослідження.

Теоретично всі зв'язки, з узагальнення яких виникають закони науки, можна розділити на два види – функціональна залежність та кореляційна залежність. При **функціональній залежності** будь-якому фіксованому значенню однієї ознаки відповідає суворо визначене, завжди те саме, значення іншої ознаки. При **кореляційній залежності** фіксованому значенню однієї ознаки можуть відповідати декілька значень іншої ознаки, причому до проведення експерименту це відповідне значення другої ознаки дослідникові невідоме. Причина цього полягає в тому, що в жодному експерименті, загалом кажучи, не можна повністю врахувати вплив другорядних чинників.

Кореляційний зв'язок може розглядатися з точки зору його «щільності» та «форми». Під **щільністю кореляційного зв'язку** розуміється сила впливу досліджуваних ознак одна на одну. За щільністю кореляція може бути

- *слабкою,*
- *середньою,*
- *сильною.*

Форма кореляційного зв'язку показує, як у середньому змінюються значення однієї ознаки при зміні іншої. За формою кореляція може бути

- *лінійною (прямолінійною),*
- *криволінійною.*

Графічно подати кореляційну залежність у вигляді деякої лінії можна, розташувавши на декартовій площині точки, що відповідають сумісним значенням двох досліджуваних ознак. Лінія, вздовж якої розташуються ці точки, називається **лінією регресії**.

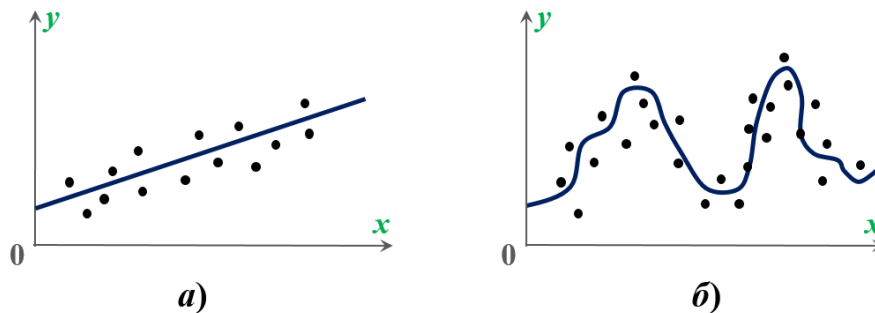


Рис. 1.5 – Лінійна та криволінійна регресія

Прямолінійна форма кореляційного зв'язку виникає тоді, коли рівним змінам першої ознаки відповідають рівні (у середньому) за величиною та за знаком зміни другої ознаки. При лінійній залежності розташування значень ознак X і Y можна подати графічно уздовж однієї прямої (рис. 1.5а). Залежність вважається **лінійною**, якщо рівним збільшенням значень однієї ознаки відповідають більш-менш рівні зміни того самого знаку іншої ознаки. Якщо рівним збільшенням значень однієї ознаки відповідають різні зміни як за знаком, так і за величиною іншої ознаки, то така залежність називається **криволінійною** (рис. 1.5б).

Нехай є дві ознаки, X і Y , що характеризують одне й те ж саме явище. Залежність, при якій зі збільшенням (або зменшенням) кожного значення однієї ознаки збільшується (або зменшується) кожне значення іншої ознаки, називається **повною**. Але бувають ситуації, коли зі збільшенням значень ознаки X збільшується не кожне значення ознаки Y . Залежність називається **частковою**, коли в середньому (тобто не для кожного значення) зі збільшенням (або зменшенням) значень однієї ознаки збільшуються (зменшуються) значення іншої ознаки. Повна або часткова кореляція за своєю формою є **прямою**, якщо збільшення (зменшення) значень однієї ознаки в підсумку спричиняє збільшення (зменшення) значень іншої ознаки. У тому випадку, коли зі збільшенням (зменшенням) значень однієї ознаки в підсумку зменшуються (збільшуються) значення іншої ознаки, повна або часткова кореляція називається **зворотною**. Приклади різновидів кореляційного зв'язку за повнотою та напрямком показано у наступних рядах даних [17].

x	4	6	9	10	12
y	20	28	30	35	37

Повна пряма кореляція

x	4	6	9	10	12
y	30	20	35	28	37

Часткова пряма кореляція

x	4	6	9	10	12
y	37	35	30	28	20

Повна зворотна кореляція

x	4	6	9	10	12
y	37	28	35	20	30

Часткова зворотна кореляція

Кореляційна залежність двох ознак не має двостороннього характеру, тобто не є комутативною. Точніше кажучи, якщо вплив 1-ї ознаки на 2-гу має певну щільність й форму зв'язку, то щільність й форма кореляційного зв'язку між 2-ю і 1-ю ознаками може бути іншою. Але в тих випадках, коли кореляційний зв'язок між двома ознаками є лінійним, ступені впливу однієї ознаки на іншу є однаковими. Цим пояснюється те, що надалі велику увагу буде приділено саме лінійному кореляційному зв'язку.

Припустимо, що є значення двох ознак X і Y якогось явища. У кожному прояві явища обидві ці ознаки приймають певне числове значення. У результаті численних спостережень, як правило, помічається, що ознаки X і Y взаємозалежні. Зв'язок може прийняти різний вигляд, але ми вправі припустити найпростішу залежність між ними – прямолінійну (лінійну). Лінійний зв'язок є найпростішим й досить часто зустрічається. Мірою щільності та показником напрямку лінійного зв'язку служить *коефіцієнт лінійної кореляції* r , обчислюваний за формулою

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

де $\bar{x}$ – середнє арифметичне значення ознаки X за спостереженнями $x_1, x_2, \dots, x_n$;

$\bar{y}$ – середнє арифметичне значення ознаки Y за спостереженнями $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Для того, щоб зробити висновок про кореляційну залежність ознак X і Y варто врахувати, що коефіцієнт кореляції r може приймати значення від -1 до $+1$, причому від'ємне значення для r свідчить про те, що залежність між X і Y зворотна (тобто зі збільшенням однієї ознаки інша зменшується), а при додатних значеннях r зв'язок є прямим (зі збільшенням однієї ознаки збільшується й інша). Крім того, чим ближче r до ± 1 , тим сильніший існуючий лінійний зв'язок між X і Y , а коли r наближується до нуля, то між X і Y лінійний зв'язок майже відсутній. Однак при цьому цілком можливо, що між X і Y має місце кореляційний зв'язок, і навіть сильний, але криволінійний. Таким чином, щодо сили лінійного кореляційного зв'язку існує наступна градація: якщо $|r| \in [0,7; 1]$ – лінійний зв'язок *сильний*, якщо $|r| \in [0,3; 0,7]$ – лінійний зв'язок *середньої сили*, якщо $|r| \in [0,1; 0,3]$ – лінійний зв'язок *слабкий*, $|r| \in [0; 0,1]$ – лінійний зв'язок *відсутній*.

Приклад 1.11. Для визначення кореляційного зв'язку між двома ознаками деякого явища був проведений експеримент із 20 спостережень. Кожне спостереження одночасно вимірювало значення обох ознак. Позначимо першу ознаку через X та другу ознаку через Y . Таким чином, результатом кожного спостереження є пара значень ознак (x_i, y_i) .

№ (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	350	320	360	360	340	240	200	260	200	240	290	220	200	220	300	230	270	300	300	280
y_i	17	17	16	15	17	10,5	9,5	14,5	10,5	11	17	20	16	10	13	16	15	16	20	19

З'ясувати, чи існує між вимірними ознаками лінійна кореляційна залежність. Дослідити її напрямки та щільність.

Розв'язання. Є очевидним, що об'єм вибірки дорівнює кількості спостережень, тобто $n = 20$. а пари (x_i, y_i) означають, що в i -му спостереженні ознака X прийняла значення x_i , а ознака Y – значення y_i . Для обчислення коефіцієнту лінійної кореляції між ознаками X і Y складемо розрахункову таблицю.

№ (i)	I		II		III		IV
	Значення ознаки		Відхилення від середнього арифметичного		Квадрати відхилень від середнього арифметичного		Добутки відхилень
	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	350	17	$350 - 274 = 76$	$17 - 15 = 2$	$76^2 = 5776$	$2^2 = 4$	$76 \cdot 2 = 152$
2	320	17	$320 - 274 = 46$	$17 - 15 = 2$	$46^2 = 2116$	$2^2 = 4$	$46 \cdot 2 = 96$
3	360	16	$360 - 274 = 86$	$16 - 15 = 1$	$86^2 = 7396$	$1^2 = 1$	$86 \cdot 1 = 86$
4	360	15	$360 - 274 = 86$	$15 - 15 = 0$	$86^2 = 7396$	$0^2 = 0$	$86 \cdot 0 = 0$
5	340	17	$340 - 274 = 66$	$17 - 15 = 2$	$66^2 = 4356$	$2^2 = 4$	$66 \cdot 2 = 132$
6	240	10,5	$240 - 274 = -34$	$10,5 - 15 = -4,5$	$(-34)^2 = 1156$	$(-4,5)^2 = 20,25$	$(-34) \cdot (-4,5) = 153$
7	200	9,5	$200 - 274 = -74$	$9,5 - 15 = -5,5$	$(-74)^2 = 5476$	$(-5,5)^2 = 30,25$	$(-74) \cdot (-5,5) = 407$
8	260	14,5	$260 - 274 = -14$	$14,5 - 15 = -0,5$	$(-14)^2 = 196$	$(-0,5)^2 = 0,25$	$(-14) \cdot (-0,5) = 7$
9	200	10,5	$200 - 274 = -74$	$10,5 - 15 = -4,5$	$(-74)^2 = 5476$	$(-4,5)^2 = 20,25$	$(-74) \cdot (-4,5) = 333$
10	240	11	$240 - 274 = -34$	$11 - 15 = -4$	$(-34)^2 = 1156$	$(-4)^2 = 16$	$(-34) \cdot (-4) = 136$
11	290	17	$290 - 274 = 16$	$17 - 15 = 2$	$16^2 = 256$	$2^2 = 4$	$16 \cdot 2 = 32$
12	220	20	$220 - 274 = -54$	$20 - 15 = 5$	$(-54)^2 = 2916$	$5^2 = 25$	$(-54) \cdot 5 = -270$
13	200	16	$200 - 274 = -74$	$16 - 15 = 1$	$(-74)^2 = 5476$	$1^2 = 1$	$(-74) \cdot 1 = -74$
14	220	10	$220 - 274 = -54$	$10 - 15 = -5$	$(-54)^2 = 2916$	$(-5)^2 = 25$	$(-54) \cdot (-5) = 270$
15	300	13	$300 - 274 = 26$	$13 - 15 = -2$	$26^2 = 676$	$(-2)^2 = 4$	$26 \cdot (-2) = -52$
16	230	16	$230 - 274 = -44$	$16 - 15 = 1$	$(-44)^2 = 1936$	$1^2 = 1$	$(-44) \cdot 1 = -44$
17	270	15	$270 - 274 = -4$	$15 - 15 = 0$	$(-4)^2 = 16$	$0^2 = 0$	$(-4) \cdot 0 = 0$
18	300	16	$300 - 274 = 26$	$16 - 15 = 1$	$26^2 = 676$	$1^2 = 1$	$26 \cdot 1 = 26$
19	300	20	$300 - 274 = 26$	$20 - 15 = 5$	$26^2 = 676$	$5^2 = 25$	$26 \cdot 5 = 130$
20	280	19	$280 - 274 = 6$	$19 - 15 = 4$	$6^2 = 36$	$4^2 = 16$	$6 \cdot 4 = 24$
Разом	5480	300			56080	202	1544

З I-ї групи стовпців (стовпці № 2 та № 3, що є даними умови задачі, тобто результатами спостережень) можна знайти середні арифметичні значення для кожної ознаки за весь період спостережень:

$$\bar{x} = \frac{5480}{20} = 274; \quad \bar{y} = \frac{300}{20} = 15.$$

Для обчислення елементів II-ї групи стовпців (відхилень від середнього арифметичного) треба від кожного значення ознаки відняти середнє арифметичне значення для цієї ознаки. Отже, елементи стовпця № 4 дорівнюють різницям елементів стовпця № 2 та вже обчисленого значення $\bar{x} = 274$, а елементи стовпця № 5 – різницям елементів стовпця № 3 та вже обчисленого значення $\bar{y} = 15$. Елементи III-ї групи стовпців (квадрати відхилень від середнього арифметичного) є піднесеними до другого ступеня елементами II-ї групи стовпців: елементи стовпця № 6 – це квадрати елементів стовпця № 4, а елементи стовпця № 7 – це квадрати елементів стовпця № 5. Елементи IV-ї групи, тобто стовпця № 8, є добутком відповідних елементів II-ї групи стовпців, тобто добутком елементів стовпця № 3 на відповідні елементи стовпця № 4. В обчисленні коефіцієнту лінійної кореляції беруть участь суми елементів за 6-м, 7-м та 8-м стовпцями. Отже, використовуючи результати наведеної розрахункової таблиці, маємо:

$$r = \frac{1544}{\sqrt{56080 \cdot 202}} = \frac{1544}{3365,73} = 0,46.$$

Знак отриманого коефіцієнту лінійної кореляції визначається знаком суми елементів останнього стовпця, тобто суми добутоків відхилень значень ознак від своїх середніх арифметичних значень (це число є чисельником у формулі для коефіцієнту). В нашому прикладі це число є додатним, тому коефіцієнт лінійної кореляції також є числом додатним, що свідчить про прямий напрямок лінійного кореляційного зв'язку між досліджуваними ознаками. Абсолютне значення обчисленого коефіцієнту міститься в інтервалі $r = 0,46 \in [0,3; 0,7)$. Це означає, що між ознаками X та Y існує лінійний кореляційний зв'язок середньої сили.

Відповідь. Між ознаками X та Y існує **прямий** лінійний кореляційний зв'язок **середньої сили**.

Контрольні запитання

1. Що таке випадкова подія?
2. Яка подія є достовірною, а яка неможливою?
3. Які події є несумісними?
4. Що таке добуток подій?
5. Як визначається ймовірність складеної події?
6. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей.
7. В чому полягає урнова схема?
8. Які події є незалежними?
9. Наведіть формулу умовної ймовірності.
10. Сформулюйте теорему множення для незалежних подій.
11. У чому полягає скінченна схема з неоднаково можливими результатами?
12. Перелічить основні дії над подіями та їх властивості.
13. Що таке поле подій?
14. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.
15. Що таке імовірнісний простір?
16. Що таке розподіл ймовірностей?
17. Коли заданий закон розподілу випадкової величини?
18. Як одержати ряд розподілу випадкової величини?
19. Якою формулою визначається функція розподілу випадкової величини?
20. Перелічить властивості функції розподілу.
21. Які вам відомі закони розподілу дискретних випадкових величин.
22. Перелічить відомі вам закони розподілу безперервних випадкових величин.
23. Що таке випадкова вибірка?
24. Як обчислюється вибіркове середнє?
25. Як обчислюється вибіркова дисперсія?
26. В який спосіб проводиться інтервальне групування вибіркових значень?
27. Що таке частота інтервалу?
28. Як і коли вноситься поправка Шеппарда?
29. Сформулюйте правило трьох сигм.
30. Що показує критерій згоди Пірсона?
31. Яка величина грає роль параметра в критерії Пірсона?

32. Як висувається нульова гіпотеза?
33. Чим відрізняється вибірка від генеральної сукупності?
34. Який закон розподілу має середнє арифметичне значення?
35. Як обираються границі довірчого інтервалу?
36. За яким критерієм досліджується репрезентативність вибірки?
37. Коли використовується критерій Стюдента?
38. Чим кореляційна залежність відрізняється від функціональної?
39. Якою може бути кореляція за щільністю?
40. Якою може бути кореляція за формою?
41. Яка кореляція є повною, а яка частковою?
42. Яка кореляція є прямою, а яка зворотною?
43. За якою формулою обчислюється коефіцієнт лінійної кореляції?
44. Яким чином інтерпретується числове значення коефіцієнту кореляції?

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕКОНОМІЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

2.1. Етапи прогнозування та функції прогнозів

Прогноз – це науково обґрунтоване, ймовірнісне уявлення про можливі стани об’єкта в майбутньому, про альтернативні шляхи та терміни його здійснення. Процес розробки прогнозів називається прогнозуванням. Таким чином, **прогнозування** – це процес формування прогнозу про розвиток об’єкта на основі вивчення тенденцій його розвитку. **Економічне прогнозування** – це процес розробки економічних прогнозів, заснований на наукових методах пізнання економічних явищ і використанні всієї сукупності методів і засобів економічної прогностики [1]. **Мета прогнозу**, або його призначення, полягає в визначенні ймовірних альтернатив економічного розвитку та їх соціально-економічних наслідків для прийняття найбільш раціональних рішень. Необхідність вирішення методологічних та теоретичних питань прогнозування викликана нагальними потребами практики планування та керування економікою в цілому та окремими підприємствами зокрема. Прогнозування є одним із ефективних засобів загального удосконалення планування та керування. Чітке уявлення про перспективи розвитку світового ринку, його можливостей та потреб в ряді випадків дозволяє визначити перспективну лінію розвитку та ефективність тієї чи іншої галузі виробництва в країні, оцінити необхідність та можливість радикальних перетворень в науково-виробничому аспекті [13]. Завдання економічного прогнозу, в першу чергу, полягає в з’ясуванні перспективи найближчого та майбутнього розвитку економіки з урахуванням процесів, що відбуваються в реальній дійсності. Економічне прогнозування ґрунтується на дослідженні закономірностей економічних процесів розширеного відтворення [1].

Процес прогнозування складається із низки етапів, кожний з яких розв’язує певну задачу [1]:

- **визначення задачі** – уточнюється об’єкт прогнозу, формується мета і задачі, визначається точність і час упередження прогнозу (**часом упередження** при прогнозуванні називають проміжок часу від моменту, для якого є останні дані про досліджуваний об’єкт, до моменту, до якого відноситься прогноз [2]);

- формування об'єкта прогнозу у відповідності до поставленої задачі – визначається структура об'єкта, виділяються основні чинники, з'ясовується їх підпорядкованість, ієрархічність, взаємозв'язок;
- збір ретроспективної інформації про об'єкт – визначаються джерела інформації, розробляється методика обробки і подання інформації, визначаються її обсяги;
- формалізація задачі – розробляється методика формалізованого подання інформації й здійснюється вибір класу моделей опису об'єкта прогнозу;
- вибір методів та алгоритмів – серед відомих обирається найбільш прийнятний метод прогнозування, розробляється відповідний алгоритм та оцінюється точність прогнозу;
- моделювання на основі ретроспективних даних оцінки якості моделі;
- видача результатів прогнозу.

Прогнозування, в тому числі й економічне, співвідноситься з більш широким поняттям передбачення як випереджувального відображення дійсності, заснованого на пізнанні законів природи, суспільства й мислення [1].

В залежності від ступеню конкретності та характеру впливу на плин досліджуваних процесів, розрізняють три форми передбачення: гіпотезу (загальнонаукове передбачення), прогноз і план. Початкову базу побудови гіпотези складають теорія та відкриті на її ґрунті закономірності та причинно-наслідкові зв'язки функціонування й розвитку досліджуваних об'єктів. На рівні гіпотези цим об'єктам надається якісна характеристика, що виражає загальні закономірності їх поведінки. Прогноз порівняно з гіпотезою має більшу визначеність, тому що ґрунтується не лише на якісних, але й на кількісних параметрах, і тому дозволяє характеризувати майбутній стан об'єкта також і кількісно. Таким чином, прогноз відрізняється від гіпотези більшою достовірністю. В той же час зв'язки прогнозу з досліджуваним об'єктом або явищем не є однозначними, тобто прогноз має більш ймовірнісний характер. План визначає конкретну мету і визначає детальні події розвитку досліджуваного об'єкта. В плані фіксуються шляхи та засоби розвитку у відповідності з поставленими задачами та прийнятими управлінськими рішеннями. Його головна відмінна риса – визначеність і директивність задач. Таким чином, передбачення отримує в плані найбільшу конкретність та визначеність [1].

Прогноз завжди передує плановій стадії роботи й, більш за те, є основою одного з варіантів маркетингової програми та плану, тобто прогноз прагне дати найбільш ймовірні альтернативні шляхи розвитку досліджуваної події або явища із широкого спектра можливих станів при заданому рівні наших знань та передумов, що закладаються в прогноз. В зв'язку з цим прийняття рішення є обґрунтованим вибором одного з найбільш ймовірних варіантів прогнозу. Цілком очевидно, що не може відбуватися протиставлення плану та прогнозу. Прогнозування – невід'ємний науково-аналітичний етап, що передує плануванню, прийняттю обґрунтованого рішення. Відмова від прийняття рішень на основі розроблених прогнозів також є рішенням. При цьому прогнозування має носити не епізодичний, а постійний характер. **Прогноз має відповідати наступним вимогам** [13]:

- *надійність, наукова обґрунтованість та системність* з урахуванням факторів, що в перспективі можуть вплинути на об'єкт чи явище, що прогнозуються;
- *відтворюваність та доказовість*, тобто отримання того ж самого результату при повторній розробці прогнозу, в тому числі з використанням інших методів прогнозування, виключаючи суб'єктивність;
- *альтернативний характер прогнозу* з чітким формулюванням всіх гіпотез та передумов, що лягли в його основу;

- *верифікованість прогнозу*, тобто наявність надійної методики оцінки достовірності та точності прогнозу з метою організації його коригування;
- *прозора та чітка мова формулювань*, зрозуміла для осіб, що безпосередньо приймають рішення, яка не дає приводу для суперечливих тлумачень;
- *плановий характер прогнозу*. Прогноз має бути своєчасним та служити цілям керування.

З урахуванням тих вимог, що висуваються до економіки на макрорівні (тобто до економіки держави в цілому), і, тим самим, до прогнозування та планування її розвитку, виділяють наступні **основні принципи розробки прогнозів та планів** [1]:

- *принцип науковості*, який має забезпечити обґрунтування прогнозів та планів із урахуванням та дотриманням вимог економічних законів розвитку виробництва та соціально-економічного життя держави;
- *принцип директивності*, який передбачає обов'язковість виконання всіма організаціями та підприємствами державного замовлення;
- *принцип оцінки сучасного стану розвитку економіки держави*, згідно з яким розробці планів має передувати глибоке дослідження розвитку економіки до початку планового періоду. При цьому аналіз підсумків попереднього періоду й оцінювання результатів соціально-економічного розвитку держави має використатися на всіх стадіях планування та прогнозування. Система планування та прогнозування має комплексний характер. При цьому ретроспективний період часу, який аналізується за динамікою розвитку, має дорівнювати або бути більшим за перспективний, тобто за той, для якого розробляється прогноз;
- *принцип орієнтування планів та прогнозів на повніше задоволення потреб суспільства*, згідно з яким в умовах підвищення потреб суспільства треба узгоджувати ресурси та потреби у засобах виробництва, які є необхідними для поточного виробничого процесу, його розширення, створення матеріальних резервів та страхових фондів, предметах споживання для населення, засобах виробництва та предметах споживання для бюджетної сфери (армії, правоохоронних органів, науки тощо). Однак слід зазначити, що визначення потреб суспільства є досить складним завданням, яке вирішується за допомогою великого комплексу наукових досліджень та прогнозування, а також з урахуванням науково обґрунтованих норм потреб та вивчення тенденцій зміни їх структури, яка може бути викликаною науково-технічним прогресом, що, у свою чергу, спричиняє виникнення нових потреб;
- *принцип збалансованості*, який полягає в погодженості:
 - показників обсягів виробництва із існуючою суспільною потребою в продукції цього виробництва,
 - грошових доходів населення, підприємств, організацій та відомств із їх витратами,
 - наявності ресурсів із суспільною потребою в цих ресурсах тощо;
- *принцип реальності визначення пріоритетів* у планах розвитку економіки галузі та регіонів, який передбачає забезпечення прогнозу фінансовими, матеріальними, природними та трудовими ресурсами та найефективніше їх застосування. Тому при плануванні треба правильно визначати ієрархію пріоритетів у розвитку галузей та регіонів з метою забезпечення прогресивних зрушень, підвищення ефективності капіталовкладень та всього суспільного виробництва, вирішення соціальних та екологічних проблем і ресурсозбереження тощо;
- *принцип системного комплексного підходу в прогнозуванні та макроекономічному плануванні*;
- *принцип альтернативності можливих шляхів розвитку економіки*;

- *принцип об'єднання поточних та перспективних планів*, який передбачає провідну роль перспективних планів. Перспективні плани є програмними документами, що відображають генеральні напрямки економічного, соціального та науково-технічного розвитку суспільства в цілому. Також у перспективних планах розробляють основні показники розвитку об'єкта прогнозування, а у поточних вже їх конкретизують з урахуванням досягнень науково-технічного прогресу, а також поточних умов та стану виробництва. Єдність перспективного та поточного планування, що встановлює чітко визначені взаємозв'язки та ієрархічність планів, є важливою умовою коректності процесів планування та прогнозування;
- *принцип об'єднання галузевого, територіального та програмно-цільового планування та прогнозування*;
- *принцип єдності відтворення та раціонального використання всіх видів природних ресурсів*, основою дотримання якого є сукупна економіко-екологічна оцінка наявних природних ресурсів з урахуванням їх якості, а також постійний аналіз їх стану та прогноз обсягів їх відтворення. Також цей принцип передбачає дотримання раціонального використання та організацію охорони природних ресурсів з боку держави, можливість заміни первинної природної сировини вторинною в умовах економії ресурсів та впровадження досягнень науково-технічного прогресу;
- *принцип погодженості суспільних, колективних та особистих інтересів при плануванні*, дотримання якого залежить від того, наскільки загальнодержавні інтереси збігаються з інтересами окремих трудових колективів та окремих працівників щодо остаточних результатів їхньої праці. У планах треба використовувати всю систему суспільних інтересів як рушійну силу розвитку виробничих відносин, зростання економіки, підвищення ефективності її функціонування;
- *принцип постійного аналізу та контролю за виконанням планів*, який передбачає своєчасне виявлення та усунення різноманітних недоліків у господарській діяльності підприємств, а також здійснення необхідних заходів з метою досягнення планових показників. Постійний контроль дає можливість вчасно виявити відхилення, упущення, диспропорції та швидко й раціонально використати резерви для прискорення темпів зростання виробництва у галузях та підприємствах, які за своїми показниками дещо відстають.

Сукупність цих принципів використовується для уточнення прогнозів та планів, а також економічної та демографічної ситуації в державі. Жоден з цих принципів окремо не може характеризувати методологію прогнозування та макроекономічного планування, але кожен з них відображає той чи інший суттєвий його бік [1].

Економічне прогнозування виконує наступні основні функції [1]:

- науковий аналіз економічних, соціальних, науково-технічних процесів та тенденцій;
- дослідження об'єктивного розвитку економіки і соціально-економічних явищ у конкретних умовах за певний період часу;
- оцінювання об'єкта прогнозування;
- виявлення альтернатив розвитку економіки та соціального розвитку;
- нагромадження наукового матеріалу для обґрунтованого прийняття певних рішень.

Науковий аналіз економічних, соціальних, а також науково-технічних процесів та тенденцій здійснюється по наступних трьох кроках [1]:

- *ретроспекція* – це етап наукового аналізу, на якому досліджується історія розвитку об'єкта прогнозування для отримання його систематизованого описання. На кроці ретроспекції відбу-

вається збір, збереження та обробка інформації, визначення джерел, необхідних для прогнозування, оптимізація складу цих джерел, а також методів вимірювання та подання ретроспективної інформації, уточнення та остаточне формування структури та складу характеристик об'єкта прогнозування;

- *діагноз* є етапом аналізу, на якому досліджується систематизований опис об'єкта прогнозування з метою виявлення тенденції його розвитку та вибору моделей та методів прогнозування. На цьому кроці відбувається аналіз об'єкта прогнозування, який потім приймається за основу прогнозової моделі. У загальному вигляді ці питання розглядаються попередньо, до даного кроку, тобто в процесі передпрогнозової підготовки при первинному описуванні об'єкта та визначенні задачі прогнозування. У цьому випадку проводиться первинний опис об'єкта, формулювання задачі прогнозу, підготовка кроку ретроспекції. На кроці діагнозу аналіз об'єкта прогнозування, як правило, завершується не лише розробкою моделі прогнозування, але й вибором адекватного методу прогнозування.
- *проспекція* є етапом аналізу, на якому за даними діагнозу розробляються прогнози об'єкта прогнозування, виробляється оцінка ймовірності, точності обґрунтування прогнозу (верифікація), а також реалізація мети прогнозування шляхом об'єднання конкретних прогнозів на основі принципів прогнозування (тобто відбувається синтез прогнозів). На кроці проспекції виявляється, яка саме інформація про об'єкт прогнозування є відсутньою, уточняється раніше отримана інформація, відбувається коригування моделі прогнозованого об'єкта у відповідності з щойно отриманою інформацією.

2.2. Класифікація економічних прогнозів

В залежності від об'єктів прогнозування прогнози поділяються на [2]:

- науково-технічні,
 - економічні,
 - соціальні
- тощо.

В залежності від масштабів прогнозування прогнози бувають [1]:

- макроекономічні та структурні (міжгалузеві та міжрегіональні),
- прогнози розвитку галузевих комплексів (паливно-енергетичного, агропромислового, сфери обслуговування тощо),
- галузеві та регіональні,
- прогнози на рівні окремих підприємств,
- прогнози виробництва окремих продуктів.

Період або глибина прогнозування є найважливішою характеристикою економічного прогнозу. Часова глибина прогнозів в значній мірі визначається поставленими цілями та галузями прогнозування, а також тим періодом, на який впливають рішення, що приймаються в теперішній час [13]. За тривалістю часу упередження розрізняють наступні види прогнозів [2]:

- оперативні – з терміном упередження до одного місяця,
- короткострокові – до одного року,
- середньострокові – від одного до п'яти років,
- довгострокові – з терміном упередження більшим за п'ять років, до 15 – 20 років.

Найбільший практичний інтерес представляють оперативні та короткострокові прогнози.

Ці типи прогнозів відрізняються один від одного також за своїм змістом і характером оцінок досліджуваних процесів. Оперативні прогнози ґрунтуються на припущенні про те, чи відбудуться в прогнозований період суттєві зміни в досліджуваному об'єкті, – як кількісні, так і якісні. В них переважають детальні кількісні оцінки очікуваних подій. Короткострокові прогнози припускають лише кількісні зміни. Відповідно, їх оцінка подій є кількісною. Середньострокові та довгострокові прогнози виходять як із кількісних, так і з якісних змін в досліджуваному об'єкті, причому в середньострокових прогнозах кількісні зміни домінують над якісними. В середньострокових прогнозах оцінка подій є кількісно-якісною, в довгострокових – якісно-кількісною. Довгострокові прогнози виходять в першу чергу із якісних змін, причому мова йде переважно про загальні закономірності розвитку досліджуваного об'єкта [1].

Задачі короткострокового та довгострокового (середньострокового) прогнозів принципово відрізняються одна від одної. Довгостроковий прогноз (наприклад, на 10 років) має із заданим ступенем точності визначити досліджувану величину x в момент t , причому до траєкторії зміни величини x в інтервалі до моменту t_1 не висувається жодних визначених вимог. Засобом прогнозу або елементом аналізу його результатів може виступати деяка траєкторія. Як правило, це усереднена пряма лінія або показова функція. Прогнози великої тривалості відтворюють лише усереднені за період циклу тенденції та не відображають змін об'єкта прогнозування, що відбуваються всередині циклу.

Задача короткострокового прогнозу полягає в тому, щоб відшукати траєкторію, що відрізняється від усередненої, яку можна вважати результатом відхилення. Усереднена траєкторія насправді існує лише в нашій уяві як узагальнення довгострокової тенденції. На відміну від неї траєкторія, що показує розвиток об'єкта прогнозування максимум на два роки вперед, враховує відхилення від середньої, тому є більш реальною траєкторією руху показників ринкової економіки. В силу цих розбіжностей, короткостроковий прогноз – це завжди кон'юнктурний прогноз, що є інструкцією в повсякденній практиці. В той же час довгостроковий прогноз є основою для складання економічних програм і також є важливим для визначення майбутньої кон'юнктури [13].

Розподіл прогнозів в залежності від характеру досліджуваних об'єктів пов'язаний з різними аспектами відтворювального процесу. Цей характер, або предмет прогнозу, визначається на першому етапі розробки прогнозу у відповідності із цілями та задачами прогнозу. За цією ознакою виділяють наступні прогнози [1]:

- *розвитку виробничих відносин;*
 - *соціально-економічних наслідків науково-технічного прогресу;*
 - *розвитку економіки в цілому (її темпів, чинників та структури);*
 - *відтворення трудових ресурсів, зайнятості та підготовки кадрів;*
 - *економічного використання природних ресурсів;*
 - *відтворення основних фондів і капітальних вкладень;*
 - *рівня життя та доходів населення;*
 - *фінансових відношень, доходів та цін;*
 - *зовнішніх економічних зв'язків*
- тощо.

Кожний із вказаних напрямків має самостійне значення і може розроблятися на власній основі. Економічне прогнозування здійснюється в комплексі з іншими видами прогнозування: соціальним, політичним, демографічним, науково-технічним, прогнозуванням природних ресурсів тощо. Результати цих прогнозів враховуються в макроекономічних та інших типах економічного прогнозування. У свою чергу, економічні прогнози – невід'ємна складова прогнозування і планування розвитку всіх інших суспільних процесів. Зв'язок різних видів прогнозів знаходить своє відображення

також в послідовності їх розробки. Так, економічні прогнози розробляються після прогнозів науково-технічного прогресу, природних ресурсів, демографічних процесів тощо.

За функціональною ознакою (напрямок прогнозування) прогнози розподіляються на два типи [1]:

- *пошуковий*;
- *нормативний*.

Пошуковий прогноз ґрунтується на умовному подовженні в майбутнє тенденцій розвитку досліджуваного об'єкта в минулому і в сьогоденні. При цьому не враховуються чинники, що здатні змінити ці тенденції. Його задача – з'ясувати, в який спосіб буде розвиватися досліджуваний об'єкт за умови збереження існуючих тенденцій. Результати такого прогнозу заздалегідь не пов'язуються з конкретними цілями їх використання (наприклад, прогноз народжуваності, технічний прогрес в галузі тощо) [13].

Нормативний прогноз, на відміну від пошукового, розробляється на ґрунті заздалегідь визначених цілей. Його задача – визначити шляхи та терміни досягнення можливих станів об'єкта прогнозування в майбутньому, що прийняті за ціль. В той час як пошуковий прогноз при визначенні майбутнього стану об'єкта відштовхується від його минулого та сьогодення, нормативний прогноз здійснюється в зворотному порядку: від заданого стану в майбутньому до існуючих тенденцій та їх змін у відповідності з поставленою метою.

Обидва ці типи прогнозу існують одночасно і на практиці використовуються разом. В їх поєднанні проявляється роль прогнозування як інструменту планування досягнення поставлених цілей. Спонукальна функція прогнозування породжує таку його особливість, як ефект впливу прогнозу на початкові передумови передбачення. Ефект впливу може виявитися як позитивним, що викликає прискорення здійснення прогнозу, так і негативним, що гальмує його реалізацію, а в деяких випадках може супроводжуватися саморуйнуванням прогнозу. Це обумовлено тим, що досягнення цілей прогнозу знаходиться в прямій залежності від об'єктивних умов його здійснення. Рішення приймаються, як правило, на ґрунті даних прогнозування. У свою чергу, прийняті рішення впливають на результати здійснення прогнозів. Тому, щоб уникнути конфлікту між прогнозуванням та прийняттям рішень, необхідно систематично коригувати прогноз, в тому числі шляхом його порівняння з цілями розвитку об'єкта прогнозування та їх здійсненням [1].

З типологією прогнозів тісно пов'язане питання про джерела інформації про майбутнє і способи прогнозування. Розрізняють три основних джерела прогнозованої інформації:

- *накопичений досвід*, заснований на знанні закономірностей протікання та розвитку досліджуваних явищ, процесів, подій;
- *екстраполяція існуючих тенденцій*, закон розвитку яких в минулому і сьогодні відомий;
- *побудова моделей* прогнозованих об'єктів відносно очікуваних або намічених умов.

Відносно цих джерел інформації розрізняють три способи прогнозування, що взаємно доповнюють один одного:

- *експертний* (ґрунтується на попередньому зборі інформації (анкетування, інтерв'ювання, опитування) та її обробці, а також на судженнях експертів про поставлену задачу);
- *екстраполяція* (вивчення попереднього розвитку об'єкта і перенесення закономірностей його розвитку в минулому і сьогодні на майбутнє);
- *моделювання* (дослідження пошукових і нормативних моделей прогнозованого об'єкта відносно очікуваних або намічених змін в його стані).

2.3. Система макроекономічних показників економічної діяльності

Для отримання цілісного уявлення про функціонування економіки країни використовується сукупність взаємопов'язаних між собою показників, що характеризують результати економічної діяльності на мікро- (окреме підприємство, організація), мезо- (сектор або галузь) та макрорівні (країна в цілому). Необхідною умовою зіставності результатів економічної діяльності, що розраховуються на різних рівнях економіки, є обчислення показників на основі єдиних теоретичних та методологічних принципів [10]. Показники результатів економічної діяльності розділяються на показники валових результатів та кінцевих (чистих) результатів. Показники, обчислені на чистій основі, менші за відповідні показники, обчислені на валовій основі, на величину споживання основного капіталу в розмірі амортизації. Обчислювальні на макрорівні економічні процеси характеризуються наступними показниками.

Валовий випуск товарів та послуг – це сумарна вартість товарів та послуг, що є результатами виробничої діяльності одиниць-резидентів економіки в звітному періоді та які мають ринковий та неринковий характер. *Ринковий випуск* містить товари та послуги [9]:

- що реалізуються за економічно значущими цінами шляхом продажу або бартеру;
- що надаються робітникам в якості оплати праці в натуральній формі;
- що виробляються одним відділенням підприємства (підрозділом, що перебуває на самостійному балансі або є окремою обліковою одиницею) та постачаються іншим відділенням того ж самого підприємства для використання у виробництві в тому ж самому або в наступних періодах;
- готову продукцію та незавершене виробництво, що надходять до запасів матеріальних оборотних засобів у виробника та призначені для ринкового використання.

Неринковий випуск містить товари та послуги:

- що виробляються економічними одиницями для їх власного кінцевого споживання або накопичення;
- що надаються на безоплатній основі або за цінами, які не мають економічного значення, іншим економічним одиницям, включаючи послуги, що надаються суспільству в цілому (наприклад, безкоштовна освіта або медичне обслуговування тощо);
- готову продукцію та незавершене виробництво, що призначені для неринкового використання та надходять до запасів матеріальних оборотних засобів у виробника.

Цей показник називається «валовим», тому що при його обчисленні не виключається вартість товарів та послуг, витрачених в процесі виробництва. Отже, валовий випуск містить подвійний облік [29].

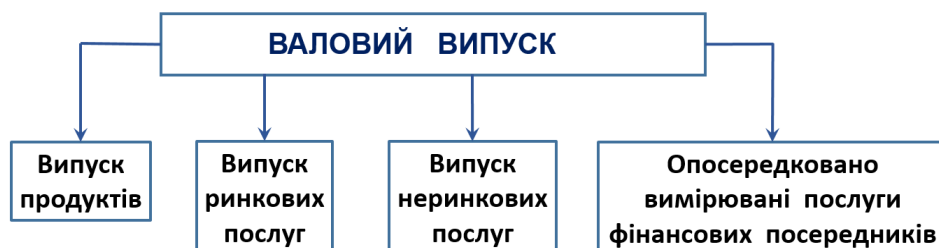


Рис. 2.1 – Склад валового продукту

Ринковий випуск товарів та послуг рекомендується оцінювати в основних цінах або, якщо це неможливо, в цінах виробників [11]. **Основна ціна** – це ціна, яку отримує виробник за товари та послуги, за вирахуванням будь-яких податків на продукти, що підлягають сплаті, та враховуючи

субсидії на продукти. **Ціна виробника** – це ціна, яку отримує виробник за товари та послуги, враховуючи будь-які податки на продукти, що підлягають сплаті, (крім податку на додану вартість та податків на імпорт) та без урахування субсидій на продукти. **Податки на продукти** – це податки, що стягуються пропорційно до кількості або вартості товарів та послуг, що виробляються, продаються або імпортуються підприємствами-резидентами. **Субсидії на продукти** – це субсидії, що виплачуються зазвичай пропорційно до кількості або вартості товарів та послуг, що виробляються, продаються або імпортуються підприємствами-резидентами [9].

До процесу виробництва включаються праця, земля та капітал (засоби виробництва). До поняття «**земля**» належать всі природні ресурси. Під фактором «**праця**» в економіці розуміється використання фізичних та розумових людських здібностей, які застосовуються в виробництві товарів та послуг. Поняття «**капітал**», або «**інвестиційний ресурс**», охоплює гроші, які вкладаються в засоби виробництва, – будівлі, споруди, виробниче обладнання, інструменти, сировина, матеріали тощо [32]. Вважається, що перелічені фактори є факторами, що створюють факторну вартість продукту [11]. Але споживач купує товари та послуги не за цією ціною, а за кінцевою ціною споживача, формування якої подано на рис. 2.2.

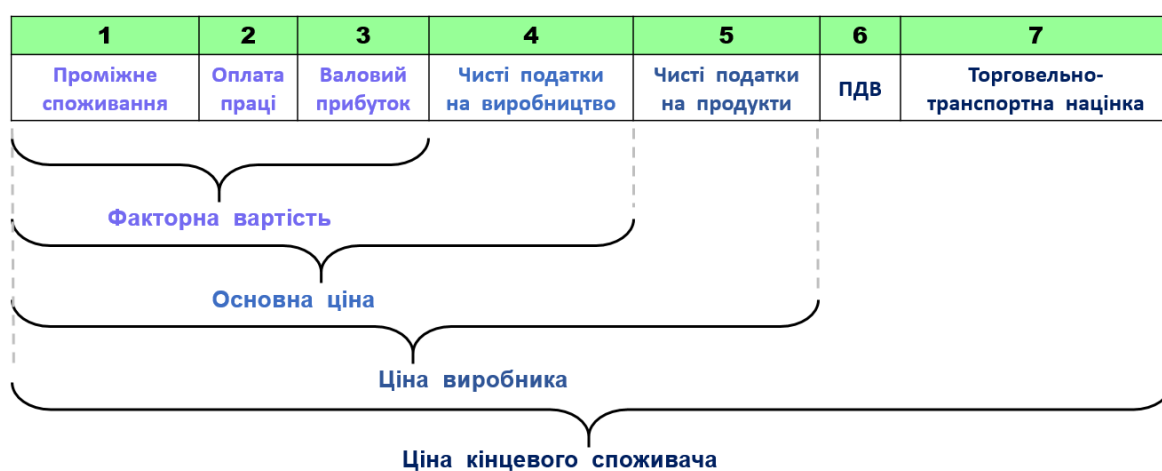


Рис. 2.2 – Формування кінцевої ціни споживача

Сукупність перших трьох позицій складає факторну вартість. Якщо до неї додати 4-у позицію, то сформується основна ціна. Додавання до неї чистих податків на продукти утворює ціну виробника. Кінцева ціна споживачів дорівнює сумі всіх складових, що вказані на рис. 2.2.

В більшості теорій факторів виробництва створення вартості пов'язується саме з вказаними трьома факторами. Однак сучасні економісти додають четвертий фактор – підприємця – як особу, що об'єднує решту три фактори і робить можливим виробничий процес [33]. Таким чином, під **підприємницькою здатністю** розуміється вміння людей поєднувати всі фактори виробництва для створення товарів та послуг з найбільшою ефективністю, приймати основні рішення по здійсненню даного процесу та йти на ризик [32]. В останній час виділяють ще один специфічний фактор виробництва – інформацію, розуміючи під нею упорядковану систему знань та відомостей. Загальною визначною властивістю всіх факторів виробництва є їх обмежена кількість відносно безмежної потреби в них. Тому вивчення впливу факторів виробництва на рівень цін та результати господарської діяльності підприємства в цілому є важливою умовою управління цінами та виробничою діяльністю. Пошук резервів зниження витрат на виробництво, пошук шляхів зниження цін, передбаченні їх руху в перспективі – важлива умова проведення аналізу факторів виробництва [33].

СНР (система національних рахунків) розглядає економіку у вигляді сукупності інституціональних одиниць, що функціонують у взаємозв'язку одна з однією. Звідси випливає класифікація інституціональних одиниць за секторами економіки. Під *інституціональною одиницею* розуміється суб'єкт, що здійснює господарську діяльність, у вигляді юридичної або фізичної особи. Юридичними особами є підприємства, корпорації та квазікорпорації, державні заклади, фінансові посередники, громадські організації. З точки зору функцій, які вони виконують, та способу отримання прибутку інституціональні одиниці згруповані в наступні сектори економіки [11]:

- нефінансові корпорації та квазікорпорації – ті інституціональні одиниці, що виробляють товари та нефінансові послуги для реалізації їх на ринку за цінами, що відшкодовують витрати на виробництво;
- фінансові корпорації та квазікорпорації, до яких належать банки, страхові компанії, інвестиційні фонди та інші фінансові посередники. Їх функція полягає в пошуку на фінансовому ринку вільних грошових коштів, їх акумулюванні, переробці до форми, зручної для інвесторів, та наданні фінансових послуг інвесторам за цінами, що склалися на ринку;
- органи державного управління, до яких належать державні бюджетні заклади, головною функцією яких є надання неринкових послуг як суспільству в цілому, так і окремим його членам. Джерелом фінансування витрат цього сектору є податки, а також прибутки від власності;
- некомерційні організації, що обслуговують домогосподарства. Цей сектор економіки формується із громадських, політичних, профспілкових та інших організацій, головною функцією яких є надання неринкових послуг членам організацій. Прибутки даного сектору складаються із внесків, пожертвувань та прибутків від власності;
- домогосподарства – це окремі особи або групи осіб як споживачі, а також їх підприємницька діяльність, яку неможливо відокремити від домашнього господарства її власника;
- «решта світу», який складається із закордонних одиниць (резидентів інших країн), що зайняті операціями з вітчизняними інституціональними одиницями (резидентами даної країни). Його показники забезпечують узагальнений огляд економічних відносин, що пов'язують національну економіку даної країни з «рештою світу» [10].

Кожний суб'єкт економіки має специфічні особливості виробничої діяльності і, як наслідок, особливості в розрахунку валового випуску.

Розрахунок валового випуску для нефінансових підприємств відбувається за формулою [29]:

$$BB = R + (S_1 - S_0),$$

де R – реалізована продукція;

S_1 – вартість запасів готової продукції та незавершеного виробництва на кінець періоду;

S_0 – вартість запасів готової продукції та незавершеного виробництва на початок періоду.

В умовах високих темпів інфляції, щоб забезпечити оцінку випуску в цінах, чинних на момент виробництва, розраховується холдинговий прибуток:

$$h = \lambda - M,$$

де λ – вартість продукції, відправленої на склад (до запасу), за цінами на той момент, коли ця продукція відправлялася на склад;

M – вартість продукції, вилученої із запасів, за цінами на момент цього вилучення.

Таким чином, вартість виробленої продукції не містить холдингового прибутку.

Розрахунок валового випуску для фінансових закладів відбувається за формулами [29]:

для банків:

$$BB = T_1 - T_0 + Y_{\text{ін}},$$

де T_1 і T_0 – відповідно отримані та виплачені відсотки;

$Y_{ін}$ – платня за інші послуги, надані клієнтам банку;

для страхових компаній

$$BB = R - K + Q - N,$$

де R – страхові премії, виплачені страховими організаціями клієнтам;

K – страхові відшкодування, виплачені клієнтам;

Q – відсотки, отримані страховими компаніями від інвестування страхових технічних резервів;

N – величина збільшення технічних страхових резервів.

Розрахунок валового випуску органів державного управління та некомерційних організацій, що обслуговують домогосподарства, відбувається за формулами [29]:

за неринковими послугами:

$$BB = Z + m + (H - C) + A,$$

де Z – витрати на придбання товарів та послуг для проміжного споживання;

m – оплата праці найманих робітників;

$H - C$ – інші податки на виробництво за вирахуванням субсидій;

A – споживання основного капіталу;

за ринковими послугами – це грошові надходження від продажу ринкової продукції (часткова оплата охорони здоров'я, утримання дітей в дошкільних закладах тощо).

Розрахунок валового випуску домогосподарств здійснюється за формулою [29]:

$$BB = P_{nc} + m + A + (H - C),$$

де P_{nc} – проміжне споживання;

m – оплата праці найманих робітників;

A – споживання основного капіталу,

H – податки, що виплачені за період виробництва;

C – субсидії, отримані за період виробництва.

Випуск товарів та послуг в галузевому розрізі обчислюється в основних цінах.

Проміжне споживання (ПП) складається із вартості товарів та послуг, що трансформуються або повністю споживаються в звітному періоді в процесі виробництва інших товарів та послуг. Споживання основного капіталу (амортизація) не входить до складу проміжного споживання. Але до складу проміжного споживання додається окремою позицією споживання послуг фінансового посередництва (банків), яке вимірюється опосередковано. Теоретично послуги банків мають бути включені до проміжного споживання тих галузей, які фактично споживають ці послуги. Однак інформація, потрібна для таких розрахунків, відсутня. Тому для відображення використання послуг фінансового посередництва введено умовну галузь, щодо якої приймається припущення, що її випуск дорівнює нулю. Ця галузь розглядається як умовний споживач послуг фінансового посередництва. Такий підхід означає, що сума валової доданої вартості для економіки в цілому зменшується на величину випуску послуг фінансового посередництва [10].

Валова додана вартість (ВДВ) – це вперше створена вартість в процесі виробництва товарів та послуг, тобто вартість, додана до вартості спожитих в цьому процесі продуктів та послуг. Вона визначається за галузями економіки як різниця між вартістю випуску товарів та послуг та проміжним споживанням. Термін «валова» вказує на те, що цей показник містить спожиту в процесі виробництва вартість основного капіталу (амортизацію).

Абсолютний приріст валової доданої вартості обчислюється за формулою [29]:

$$\Delta ВДВ = ВДВ_1 - ВДВ_0 = \Delta ВДВ_t + \Delta ВДВ_\omega + \Delta ВДВ_d,$$

в тому числі:

за рахунок зміни витрат праці

$$\Delta ВДВ_t = ВДВ_0(I_t - 1),$$

за рахунок зміни продуктивності праці

$$\Delta ВДВ_\omega = (ВДВ_0 + \Delta ВДВ_t)(I_\omega - 1),$$

за рахунок зміни частки валової доданої вартості у валовому випуску (або зміна частки проміжного споживання у валовому випуску)

$$\Delta ВДВ_d = ВВ_1(d_0 - d_1),$$

де I_t – індекс витрат часу,

I_ω – індекс продуктивності праці,

d_1 і d_0 – частка валової доданої вартості у валовому внутрішньому продукті звітного та базисного періодів відповідно (це може бути також частка проміжного споживання у валовому випуску),

$ВДВ_1$ – валова додана вартість в звітному періоді,

$ВДВ_0$ – валова додана вартість в базисному періоді,

$ВВ_1$ – валовий випуск звітного періоду.

Якщо із показника валової доданої вартості виключити витрати на споживання основного капіталу, то можна буде обчислити показник **чистої доданої вартості (ЧДВ)**. В цілому за економікою сума ВДВ галузей складає валовий внутрішній продукт (ВВП).

Валовий прибуток та валові змішані доходи є частиною валової доданої вартості, яка залишається у виробників після віднімання витрат, пов'язаних з оплатою праці найманих робітників і виплатою податків на виробництво та імпорт. Ця стаття вимірює прибуток (або збиток), отриманий від виробництва, до урахування доходів від власності. Для некорпоративних підприємств, що належать домогосподарствам, в яких члени домогосподарства можуть здійснювати неоплачувані трудові витрати, вона містить елемент винагородження за працю, який не може бути відокремлений від доходу власника або підприємця. В цьому випадку вона називається **змішаним доходом**. До неї належать, наприклад, доходи від власних підсобних господарств населення, доходи дрібних індивідуальних підприємців. Валовий прибуток та валові змішані доходи визначаються до вирахування основного капіталу. Якщо його виділити, то отримуємо чистий прибуток та чисті змішані доходи.

Чистий прибуток – це валовий прибуток за вирахуванням споживання основного капіталу. Аналогічний показник для некорпоративних підприємств домогосподарств називається **чистим змішаним прибутком**. Цей елемент містить винагороди за неоплачувану працю членів домогосподарств [9].

Валовий національний наявний дохід відображає можливості забезпечення кінцевого споживання суспільства та його заощадження. Створені в економіці первинні доходи проходять декілька стадій розподілу та перерозподілу. На стадії первинного розподілу доходи, створені в одних секторах економіки, надходять у вигляді первинних доходів до інших секторів – отримувачів.

Доходи від власності – це первинні доходи, які отримують від надання в користування фінансових або невиробничих активів іншим одиницям. Це можуть бути відсотки, дивіденди, рента, інвестиційні доходи від прямих закордонних інвестицій. При розгляданні економіки в цілому перелічені елементи враховуються лише в обсязі отримання (передачі) від «решти світу». При вторинному

розподілі із доходів вилучається така складова, як «поточні трансферти», отримані (передані) від «решти світу».

Трансферти – це односторонні операції, при здійсненні яких потоку благ або грошей не протистоїть зустрічний потік благ, послуг або грошей. Трансферти можуть виступати в грошовій або натуральній формі. *Поточні трансферти в грошовій формі* містять поточні податки на прибутки та багатство й інші відрахування на соціальне страхування, соціальні та інші поточні виплати. *Поточні трансферти в натуральній формі* містять індивідуальні товари та послуги, що надаються домогосподарствам в натуральній формі органами державного управління та некомерційними організаціями, що обслуговують домогосподарства [11].

Валовий внутрішній продукт (ВВП) – це узагальнюючий показник виробничої діяльності на економічній території країни, тобто це результат діяльності як резидентів, так і нерезидентів. До *резидентів* відносяться всі економічні одиниці (підприємства та домогосподарства) незалежно від їх національної приналежності та громадянства, що беруть участь в економічній діяльності на економічній території країни не менш, ніж один рік, а також особи, які мешкають на території країни більше, ніж один рік. *Нерезиденти* – це громадяни, що мають постійне місце проживання за кордоном, навіть якщо вони тимчасово знаходяться на економічній території даної країни [11]. **Економічна територія країни** – це територія, що адміністративно управляється урядом даної країни, в межах якої особи, товари та гроші можуть вільно переміщатися. На відміну від географічної території, вона не містить територіальні анклавів інших країн (посольства, військові бази тощо), але містить такі анклавні даної країни, що розташовані на території інших країн [9, 10]. ВВП є центральним макроекономічним показником системи національних рахунків, що застосовується у всьому світі для визначення темпів розвитку виробництва, циклічних коливань ділової активності, характеристики структури економіки та багатьох важливих макроекономічних пропорцій, обчислення продуктивності праці та визначення рівня життя населення. *На стадії виробництва* він є сумою доданої вартості галузей економіки, а *на стадії використання* – вартістю товарів та послуг, що призначені для кінцевого споживання, накопичення та експорту. В залежності від напрямків дослідження показника ВВП його оцінка проводиться в *поточних* та *зіставних цінах*, а також може розраховуватися в *цінах базового періоду*. Для зіставності та структурного аналізу, узагальнення різних характеристик соціально-економічної ситуації за певний період часу розраховується **номінальний валовий внутрішній продукт** – обсяг ВВП в поточних цінах періоду, що розглядається. Для аналізу зміни ВВП за певний період (в першу чергу – рік) розраховується **темп реального ВВП**. При цьому темп реального ВВП по відношенню до попереднього періоду (року) розраховується в зіставних цінах попереднього періоду (року). Оскільки ВВП не містить надходжень від міжнародних операцій, то цей показник широко використовується для зіставлення рівнів розвитку економіки різних країн [9].

Термін «валовий» для даного показника підкреслює, що він обчислюється до вилучення споживання основного капіталу. Споживання основного капіталу (амортизація) є зменшенням вартості основного капіталу протягом звітного періоду в результаті його фізичного та морального зношування та випадкових пошкоджень, що не носять катастрофічного характеру. Теоретично внутрішній продукт має визначатися на чистій основі, тобто з вирахуванням споживання основного капіталу. Однак для визначення споживання основного капіталу у відповідності з принципами системи національних рахунків (СНР) необхідні спеціальні розрахунки на основі даних про відновлену вартість основних фондів, їх термін служби та зношування за видами основних фондів. Амортизація за даними бухгалтерського обліку для цих цілей не підходить. Не всі країни здійснюють такі розрахунки, а ті, що здійснюють, використовують різні методи. Таким чином, дані про ВВП більш доступні та порівнянні між країнами. Тому показник ВВП отримав більш широке розповсюдження, ніж чистий внутрішній продукт. Якби економіка країни була закритою, тобто якби не було зв'язків із зовнішнім

світом, то ВВП дорівнював би сумі валових доходів резидентів, отриманих від виробництва. Однак всі країни мають зв'язки із зовнішнім світом, в тому чи іншому вигляді отримують прибутки від інших країн та виплачують їм частину своїх прибутків. Якщо взяти до уваги ці потоки доходів, то можна отримати показник валового національного доходу [9]. **Валовий національний продукт** – це результат діяльності резидентів даної країни незалежно від того, вироблений він на економічній території цієї країни або за її межами [29]. На рис. 2.3 показано взаємозв'язок між показниками валового й чистого внутрішнього продукту та валового й чистого національного доходу.



Рис. 2.3 – Зв'язок між валовими показниками продукту та прибутку

Валове накопичення – це чисте придбання (придбання за вирахуванням вилучення) резидентами товарів та послуг, вироблених та наданих в поточному періоді, але не спожитих в ньому. Валове накопичення містить валове накопичення основного капіталу, зміну запасів матеріальних оборотних засобів та чисте придбання цінностей [9].

Валове накопичення основного капіталу є вкладанням коштів в об'єкти основного капіталу для створення нового прибутку в майбутньому шляхом використання їх в виробництві. **Основний капітал** – це активи, які є результатом виробництва, та які можуть багато разів використовуватися в процесі виробництва:

- будівлі та споруди, машини та обладнання, транспортні засоби;
- різноманітна худоба; сади, виноградники та інші насадження;
- витрати на геологорозвідувальні роботи;
- витрати на програмне забезпечення та бази даних;
- оригінали літературних та художніх творів (фільми, звукозаписи, рукописи, що є основою для тиражування).

Валове накопичення основного капіталу визначається як придбання активів за вирахуванням вилучених нових та існуючих основних фондів. Придбання активів містить в собі покупки, бартер, отримання капітальних трансфертів в натуральній формі, виробництво для власного використання, капітальний ремонт. Вилучення активів відображається як від'ємне придбання. Оцінка складових елементів валового накопичення основного капіталу відбувається [9]:

- при покупці основного капіталу за цінами придбання (цінами споживача), тобто включаючи всі витрати на передачу права власності (вартість послуг, наданих адвокатами, агентами по операціям з нерухомістю та іншими посередниками, мита, комісійні, податки тощо);
- при виробництві основного капіталу для власного використання за основними цінами або за витратами на виробництво (собівартістю).

Валове накопичення основного капіталу містить також витрати на покращення невикористаних

активів та витрати у зв'язку з передачею права власності на невиробничі активи. До невиробничих активів належать активи, що не є результатом виробництва (наприклад, земля, надра та інші природні ресурси), а також патенти, ліцензії тощо. Вони не входять до складу основного капіталу, однак роботи по їх покращенню (меліорація, осушення, розвиток та розширення шахт, лісових ділянок, плантацій, садів та інших сільськогосподарських угідь) та послуги, що надаються у зв'язку з їх передачею іншим одиницям, є виробничою діяльністю. Тому їх вартість додається до валового накопичення основного капіталу.

Зміна запасів матеріальних оборотних засобів – це зміна вартості виробничих запасів, незавершеного виробництва, готової продукції та товарів для перепродажу. Зміна вартості запасів матеріальних оборотних засобів має визначатися як різниця між надходженням продукції до запасу та вилученням з них. При цьому продукція має оцінюватися в ринкових цінах, чинних відповідно на момент надходження або вилучення. Однак на практиці важко отримати інформацію про всі надходження та вилучення продукції протягом звітного періоду, тому зміна запасів зазвичай розраховується як різниця між вартістю запасів на кінець та початок періоду за даними бухгалтерських звітів підприємств. В цьому випадку необхідно виключити вплив зміни вартості продукції в результаті зміни цін за час перебування її в запасах.

Чисте придбання цінностей – це придбання предметів не для виробничих або споживчих цілей, а для збереження вартості, тобто таких предметів, цінність яких з плином часу збільшується: дорогоцінні метали та каміння (крім монетарного золота, а також золота та каменів, призначених для промислового використання), ювелірні вироби, антикваріат, колекції тощо.

Експорт та імпорт товарів та послуг – це експортно-імпортні операції даної країни зі всіма країнами. Експорт та імпорт товарів є вартістю вивезених із країни або ввезених до країни (таких, що перетинають державний кордон) товарів. Вартісна оцінка обсягу експорту та імпорту товарів в цілому по країні визначається в цінах фоб- або франко-кордону країни експортера. Крім експорту та імпорту товарів, що враховуються статистикою зовнішньоекономічної діяльності, в СНР експорт та імпорт товарів містить товари, що постачаються як надання безоплатної (гуманітарної) допомоги і в якості дару, товари неорганізованої торгівлі, посилки, майно мігрантів. Експорт та імпорт послуг охоплює транспортні послуги, туризм, комунікаційні послуги, будівельні, страхові, фінансові, комп'ютерні та інформаційні послуги, рекламу, бухгалтерський облік, управлінське консультування та інші види послуг [9].

Кінцеве споживання містить наступні витрати.

Витрати на кінцеве споживання товарів та послуг – це витрати домогосподарств-резидентів на споживчі товари та послуги, а також витрати закладів державного управління (бюджетних організацій) та некомерційних організацій, що обслуговують домогосподарства, на товари та послуги для індивідуального та колективного споживання. Таке групування показує, хто фінансує витрати на кінцеве споживання.

Витрати на кінцеве споживання домогосподарств містять [9]:

- витрати на покупку споживчих товарів та послуг;
- споживання товарів та послуг, отриманих в натуральній формі в якості оплати праці, подарунків тощо;
- споживання товарів та послуг, вироблених домогосподарствами для власного кінцевого споживання. В частині послуг це стосується лише послуг з мешкання у власному житлі та послуг домашніх робітників, що отримують платню.

Витрати на кінцеве споживання домогосподарств мають враховувати покупки резидентами товарів та послуг за кордоном (наприклад, під час відрядження, туристичних поїздок) та не враховувати аналогічні покупки нерезидентів на території даної країни. Витрати на кінцеве споживання

домогосподарств визначаються в розмірі фактичної оплати ними споживчих товарів та послуг, здійсненої за рахунок їх прибутків.

Витрати на кінцеве споживання закладів державного управління та некомерційних організацій, що обслуговують домогосподарства, визначаються в наступний спосіб: поточні витрати на утримання цих закладів, враховуючи споживання основного капіталу (випуск), мінус надходження цим закладам від продажу товарів та послуг за ринковими цінами та від часткового відшкодування споживачами їх вартості (враховуються у витратах на кінцеве споживання домогосподарств або в проміжному споживанні підприємств в залежності від того, хто їх оплатив), плюс вартість споживчих товарів та послуг, що куплені цими закладами у ринкових виробників для передачі домогосподарствам безоплатно або за цінами, що не мають економічного значення, плюс відшкодування витрат домогосподарств на придбання товарів та послуг за рахунок державних фондів соціального страхування. Бюджетні заклади охорони здоров'я, соціального забезпечення, освіти, культури та мистецтва, а також некомерційні організації, що обслуговують домогосподарства, надають товари та послуги для індивідуального споживання, які використовуються домогосподарствами для задоволення власних потреб. Послуги для колективного споживання, тобто суспільству в цілому, надаються бюджетними закладами управління, захисту, науки тощо.

Для характеристики кінцевого споживання з точки зору того, хто фактично є споживачем товарів та послуг, існує показник **фактичного кінцевого споживання**. Він характеризує вартість всіх товарів та послуг, що придбані домогосподарствами-резидентами для індивідуального споживання незалежно від джерела фінансування, та вартість колективних послуг, що надані органами державного управління суспільству в цілому. Всі товари та послуги, які надаються некомерційними організаціями, що обслуговують домогосподарства, розглядаються умовно як індивідуальні та належать до соціальних трансфертів у натуральній формі. Для цих організацій показник фактичного кінцевого споживання відсутній. Загальна сума соціальних трансфертів в натуральній формі, отриманих домогосподарствами, дорівнює сумі цих трансфертів, переданих закладами державного управління та некомерційними організаціями, які обслуговують домогосподарства. Тому для економіки в цілому показники фактичного кінцевого споживання та витрат на кінцеве споживання мають дорівнювати один одному [9].

Національне заощадження може бути отримане шляхом віднімання із валового національного наявного прибутку величини кінцевого споживання. Заощадження – це джерело фінансування накопичення, тобто зростання основних фондів, запасів матеріальних оборотних засобів, цінностей тощо. Якщо абстрагуватися від існування інших країн, то національне заощадження дорівнює величині національного накопичення.

Чисте кредитування / чисте запозичення – це показник, що характеризує обсяг фінансових ресурсів, тимчасово наданих даною країною іншим країнам або тимчасово отриманих від них.

Національне багатство є сумою чистого капіталу всіх суб'єктів країни, що ведуть господарську діяльність. Іншими словами, національне багатство дорівнює сумі всіх активів країни (нефінансових та фінансових) за вирахуванням фінансових обов'язків. Фінансові вимоги резидентів один до одного взаємно погашаються і в підсумку національне багатство містить (разом з нефінансовими активами) фінансові вимоги до інших країн за вирахуванням фінансових обов'язків перед іншими країнами [9].

Оплата праці найманих робітників є винагородою в грошовій або натуральній формі, яка має бути виплачена роботодавцем найманому робітнику за працю, виконану в звітному періоді. Вона враховується на основі нарахованих сум та складається із двох основних компонентів:

- заробітна платня;
- відрахування роботодавців на соціальне страхування.

Заробітна платня охоплює всі види заробітку (включаючи різні премії, доплати, надбавки), нараховані в грошовій або натуральній формі незалежно від джерела фінансування, тобто за рахунок собівартості та прибутку, а також грошові суми, нараховані робітникам у відповідності із законодавством за неробочий час (щорічна відпустка, святкові дні тощо). Заробітна платня враховується до вирахування податків та інших утримань, що стягуються з найманих робітників. Слід мати на увазі, що в цьому випадку показується заробітна платня, що виплачена підприємцями та організаціями-резидентами робітникам (як резидентам, так і нерезидентам).

Відрахування на соціальне страхування здійснюються роботодавцями, щоб забезпечити найманим робітникам в майбутньому право на отримання соціальних виплат. Соціальні виплати виплачуються органами соціального страхування, державними та недержавними пенсійними фондами, страховими закладами, роботодавцями домогосподарствам при здійсненні певних обставин, що, як правило, призводять до зниження прибутків та добробуту домогосподарств. Розрізняють фактичні та умовно обчислені відрахування роботодавців на соціальне страхування.

Фактичні відрахування на соціальне страхування складаються із платежів, здійснених роботодавцями третій стороні, тобто організаціям соціального страхування у відповідності з програмами соціального забезпечення та соціального страхування населення (фондове соціальне страхування). Ці платежі є основним джерелом коштів для виплат населенню пенсій, дотацій, фінансування витрат на оздоровлення та відпустки працівників. Хоча ці платежі здійснюються роботодавцями безпосередньо організаціям соціального страхування, вони розглядаються як складова оплати праці найманих робітників в розмірі внесків роботодавців на соціальне страхування. Фактичні відрахування роботодавців на соціальне страхування визначаються в розмірі нарахувань на фонд заробітної плати за всіма видами соціального страхування, тобто до фондів соціального страхування, пенсійного фонду, фонду зайнятості та інших аналогічних соціальних позабюджетних фондів. До них належать також обов'язкові відрахування роботодавців на медичне страхування та витрати підприємств на оплату послуг поліклініки за договорами, які укладено з органами охорони здоров'я на надання своїм працівникам медичної допомоги. Добровільне відрахування роботодавців на медичне страхування до недержавних соціальних фондів на користь окремих найманих робітників, згідно з полісами особистого страхування, мають враховуватися як заробітна плата в натуральній формі.

Умовно обчислені відрахування на соціальне страхування є еквівалентом соціальним виплатам, які виплачують роботодавці безпосередньо їх робітникам, колишнім робітникам або їх утриманням, що мають на це право, за рахунок своїх коштів без залучення третьої сторони (наприклад, страхової компанії) і без створення з цією метою окремої інституціональної одиниці у формі спеціального фонду або резерву. Хоча ніяких платежів з метою їх страхування третьою стороною не відбувається, вони визначаються умовно і також додаються до оплати праці найманих робітників. На практиці в якості можливої оцінки умовно нарахованих відрахувань роботодавців на соціальне страхування найманих робітників може служити сума фактично виплачених роботодавцями в поточному періоді соціальних виплат. До них належать, наприклад [9]:

- вихідна допомога при припиненні трудового договору;
- суми, які виплачуються на період працевлаштування звільненим працівникам в зв'язку із скороченням штатів, реорганізацією або ліквідацією підприємства;
- виплати в зв'язку із втратою працездатності;
- надбавки до пенсій;
- оплата учбових відпусток, що надаються працівникам;
- компенсації, що виплачуються жінкам, що перебувають в частково оплачуваній відпустці по догляду за дитиною;
- стипендії студентам та учням, яких направлено на підприємство на навчання.

Податки на виробництво та імпорту – це обов’язкові безоплатні та незворотні платежі, які стягуються органами державного управління з виробничих одиниць в зв’язку з виробництвом та імпортом товарів і послуг або використанням факторів виробництва. Вони називаються безоплатними, тому що держава нічого не надає натомість індивідуальній одиниці, що здійснює виплату, хоча держава може використовувати кошти, зібрані за допомогою податків, для надання товарів та послуг іншим одиницям або суспільству в цілому. Податки, пов’язані з виробництвом та імпортом, виплачуються підприємствами та організаціями незалежно від наявності прибутку. До податків на виробництво та імпорту належать податки на продукти та інші податки на виробництво.

Інші податки на виробництво – це податки, пов’язані з використанням факторів виробництва, а також платежі за ліцензії та дозвіл займатися якоюсь виробничою діяльністю або інші обов’язкові платежі, сплата яких є необхідною для діяльності виробничої одиниці-резидента. Вони можуть сплачуватися за землю, засоби виробництва або робочу силу, що використовуються в процесі виробництва, або за право здійснювати певні види діяльності або операції. Інші податки на виробництво не містять податків на прибуток або інших надходжень, що отримуються підприємством, і вони мають бути сплачені до державного бюджету незалежно від рентабельності виробництва.

Субсидії на виробництво та імпорту – це поточні безоплатні незворотні виплати, що держава здійснює підприємствам у зв’язку з виробництвом, продажем або імпортом товарів та послуг або використанням факторів виробництва для впровадження певної економічної та соціальної політики. До субсидій на виробництво та імпорту належать субсидії на продукти та інші субсидії на виробництво.

Інші субсидії на виробництво – це субсидії, які підприємства отримують від органів державного управління у зв’язку з використанням факторів виробництва [9]:

- субсидії, сплачувані у зв’язку з використанням праці особливого контингенту осіб (інвалідів або підлітків);
- субсидії, пов’язані з використанням інших факторів виробництва (наприклад, для стимулювання використання певних видів сировини, енергії тощо);
- субсидії для зменшення забруднення навколишнього середовища (наприклад, для покриття вартості додаткової обробки відходів виробництва).

2.4. Методи розрахунку ВВП

2.4.1. Виробничий метод (ВВП як сума валової доданої вартості)

ВВП, обчислений виробничим методом, відображає внесок кожного сектору економіки та окремих їх суб’єктів у створення єдиного макроекономічного результату. Таким чином, аналізуючи ВВП в цьому випадку, можна прослідити його виробничу структуру, а також податкову структуру економіки. При розрахунку виробничим методом ВВП обчислюється шляхом сумування валової доданої вартості всіх виробничих одиниць-резидентів, згрупованих за галузями та секторами, тобто створеної у всіх секторах економіки (Σ ВДС), і чистих податків ($H - C$), тобто різниці між сумами податків та субсидій на продукти й послуги, включаючи імпортні [29]:

$$\text{ВВП} = \sum \text{ВДВ} + (H - C).$$

Товари та послуги, вироблені для власного кінцевого споживання, оцінюються в основних цінах на аналогічні ринкові товари та послуги. Неринкові послуги, що надаються закладами держав-

ного управління та некомерційними організаціями, які обслуговують домогосподарства, оцінюються, виходячи із поточних витрат цих організацій, включаючи споживання основного капіталу. Проміжне споживання оцінюється за цінами покупців, чинними на момент надходження товарів та послуг в процес виробництва і такими, що містять торговельно-транспортну націнку та податки на продукти (крім ПДВ) за вирахуванням субсидій на продукти. Крім того, виявляється, що зменшення валової доданої вартості на величину вартості послуг фінансового посередництва для оцінки ВВП в ринкових цінах недостатньо. Необхідно враховувати також чисті податки на продукти, тобто додати податки на продукти, які не ввійшли до оцінки валової доданої вартості галузей або секторів, та відняти субсидії на продукти, що включені в цю оцінку. До таких податків на продукти належать, перш за все, податки на імпорт та податок на додану вартість, які не враховуються у валовій доданій вартості. Крім того, якщо валова додана вартість обчислюється в основних цінах, то необхідно додати також і решту податків на продукти, тому що в цьому випадку вони не враховуються у валовій доданій вартості. Субсидії на продукти (крім субсидій на імпорт), навпаки, включаються в оцінку валової доданої вартості галузей або секторів в основних цінах і тому мають бути виключені із загального підсумку ВВП в ринкових цінах [9].

2.4.2. Метод кінцевого використання (ВВП як сума складових кінцевого використання)

Згідно з методом кінцевого використання, ВВП визначається як сума наступних складових: витрати на кінцеве споживання товарів та послуг (тобто споживчі витрати (C), державні закупівлі (Q)), валове накопичення (I), сальдо експорту та імпорту товарів та послуг:

$$ВВП = C + Q + I + (Ex - Im).$$

Це співвідношення називається **тотожністю національних рахунків** або **макроекономічною тотожністю** [29].

ВВП, обчислений на стадії кінцевого споживання, характеризує його роль у задоволенні потреб кінцевих споживачів та в збільшенні національного багатства країни.

Ґрунтуючись на тотожності національних рахунків, можна визначити ще низку показників [29].

Різниця між ВВП та витратами ($C + Q$) є **національними збереженнями** (S):

$$S = ВВП - C - Q.$$

Сума інвестицій (I) та чистого експорту ($Ex - Im$) також є **національними збереженнями**:

$$S = I + (Ex - Im).$$

Звідси випливає, що

$$(Ex - Im) + (I - S) = 0,$$

де $(Ex - Im)$ – **сальдо поточних операцій** (експорт – імпорт);

$(I - S)$ – **сальдо руху капіталу** (інвестиції – збереження).

Якщо сальдо руху капіталу більше нуля, то це означає, що країна бере займи за кордоном, імпортує товари та послуги. В цьому випадку інвестиції перевищують збереження: $I - S > 0$.

Якщо сальдо руху капіталу менше нуля, то це означає, що країна більше виробляє вітчизняних товарів, і це надає можливість розширення експорту. Таким чином, триває процес накопичення фінансових засобів за рахунок відтоку із країни товарів та послуг: $I - S < 0$.

Якщо сальдо поточних операцій більше нуля, то це означає, що країна більше експортує, ніж

імпортує, товарів та послуг і тому на світовому ринку є нетто-експортером: $Ex - Im > 0$.

Якщо сальдо поточних операцій менше нуля, то це означає, що країна більше імпортує товарів та послуг, тому на світовому ринку виступає як нетто-імпортер: $Ex - Im < 0$.

2.4.3. Розподільний метод (ВВП як сума первинних витрат)

ВВП, розрахований розподільним методом з точки зору «прибуткового» підходу, дозволяє аналізувати склад та структуру прибутків. При визначенні ВВП розподільним методом він містить наступні види первинних прибутків, сплачених виробничими одиницями-резидентами [29]:

- оплата праці найманих виробників (m),
- чисті податки на виробництво та імпорт ($H - C$),
- валовий прибуток та валові змішані прибутки ($ВП$).

В зв'язку з тим, що не завжди є можливим точно визначити деякі види доходів, в статистиці існує показник «*статистична похибка*», яка теж може включатися до ВВП при його розрахунку розподільним методом. Тобто при розрахунках за витратами маємо [29]:

$$ВВП = m + ВП + (H - C).$$

Особливість розподільного методу розрахунку ВВП полягає в тому, що один з його складників (валовий прибуток та валові змішані прибутки) є балансуючою статтею рахунку утворення прибутків та розраховується сальдовим шляхом, тобто як різниця між ВВП та іншими складовими первинних прибутків (оплата праці та чисті податки на виробництво та імпорт). Таким чином, порівняно з двома іншими методами, розподільний метод має підпорядкований характер. Зрозуміло, що за необхідності можна спробувати розраховувати валовий прибуток та валові змішані прибутки незалежним шляхом, наприклад, коригуючи відповідним чином дані про прибуток, отримані із бухгалтерських звітів підприємств, однак зробити це достатньо складно. Тому даний метод розрахунку ВВП не отримав широкого розповсюдження [9].

2.5. Обчислення показників ВВП в постійних цінах

Показники системи національних рахунків (СНР), перш за все, оцінюються в поточних ринкових цінах, які опосередковують реальний обіг продукції в народному господарстві та на основі яких складаються прибутки всіх учасників економічного процесу. Оцінка показника СНР в поточних ринкових цінах дозволяє встановити галузеву структуру економіки, пропорції між споживанням та накопиченням, а також багато важливих макроекономічних співвідношень (наприклад, між дефіцитом державного бюджету і ВВП, між державним боргом і ВВП тощо). Однак оцінка показників в поточних цінах не дозволяє напряму виміряти зміну фізичного обсягу вироблених та використаних товарів та послуг. Між тим, індекси фізичного обсягу ВВП є у всьому світі найбільш важливими показниками зростання обсягу ВВП, коливань економічної кон'юнктури. Дані, отримані шляхом зіставлення індексів фізичного обсягу ВВП з індексами фізичного обсягу інших показників, можна використовувати для прогнозування та аналізу розвитку економіки, показників продуктивності праці та ефективності використання окремих елементів національного багатства тощо. Індекси фізичного обсягу окремих елементів ВВП є необхідними для виявлення змін в структурі економіки, аналізу змін рівня життя тощо. Для розрахунку індексів фізичного обсягу ВВП та його складових показники ВВП, які спочатку оцінені в поточних цінах, мають бути переоцінені в постійні ціни, в якості яких зазвичай використовуються поточні ціни якогось періоду, прийнятого за базу порівняння, тобто базисного періоду [9]. Зазвичай період, який зіставляється, називають *поточним*, а

період, з яким зіставляють інші періоди – *базисним*. За базу зіставлення приймають або попередній, або початковий (перший) період. Якщо ж деякий показник кожного наступного періоду зіставляють з цим показником в попередньому періоді, то отримують *ланцюгові* показники, а якщо кожний наступний період зіставляють з періодом, який взятий за базу порівняння, то отримані показники будуть називатися також *базисними*. За постійну базу порівняння можна взяти не лише початковий, а взагалі будь-який інший наявний період. Іноді за базу зіставлення обирають деякий середній рівень показника будь-якого попереднього періоду. Але в будь-якому разі конкретний вибір бази зіставлення треба обґрунтовувати історичними та економічними особливостями розвитку досліджуваного явища або процесу [3].

Є очевидним, що не всі показники СНР в рівній мірі можуть бути розраховані в постійних цінах. Найчастіше для переоцінки в постійні ціни використовуються показники, які можуть бути відносно легко розкладені на два елементи: на елемент кількості та елемент ціни. До них належать показники ВВП та елементів його використання на споживання, накопичення та експорт, показники випуску, імпорту, проміжного споживання та доданої вартості, а також показники оплати праці й прибутку та показники ресурсів на ту чи іншу дату, тобто елементи національного багатства. Індекси фізичного обсягу оплати праці в даному контексті розглядаються як міра зміни затрат на виробництво, а не як міра зміни купівельної спроможності прибутку. Зрозуміло, що за певних умов оплата праці як елемент витрат на виробництво може зростати, тоді як купівельна спроможність оплати праці може в той же час знижуватися. Показники фізичного обсягу оплати праці прямо пропорційно залежать від зміни кількості відпрацьованих годин, а ставка оплати праці є при цьому важелем для зіставлення кількості годин, відпрацьованих працівниками різної кваліфікації. Показники оплати праці в постійних цінах використовуються головним чином для розрахунку показників продуктивності праці та ефективності виробництва. Найбільш правильним вважається розраховувати індекс продуктивності суспільної праці як відношення індексу фізичного обсягу ВВП до індексу фізичного обсягу оплати праці. На практиці цей показник розраховується як відношення індексу фізичного обсягу ВВП до індексу чисельності зайнятих у виробництві. Однак він не враховує зміни в рівні кваліфікації працівників і тому неточно вимірює динаміку продуктивності живої праці.

Не використовуються для переоцінки в постійні ціни з метою отримання індексів фізичного обсягу показники перерозподілу прибутків (трансфerti), а також показники джерел фінансування інвестицій, чистого кредитування та запозичення. В СНР проводиться чітке розмежування між показниками фізичного обсягу продукції та показниками доходів в реальному вираженні. Показники фізичного обсягу (в постійних цінах) призначені для характеристики змін фізичного обсягу виробленої або використаної продукції (товарів та послуг), а показники доходу в реальному вираженні – для вивчення зміни купівельної спроможності доходу. По відношенню до доходу правильніше говорити про зміну купівельної спроможності в реальному вираженні, а не про зміну фізичного обсягу. Однак часто при розгляданні питань макроекономіки ця розбіжність не враховується і терміни «дохід в реальному вираженні» та «показники фізичного обсягу» використовуються як синоніми або як дуже близькі поняття. Так, часто говорять про зростання ВВП в реальному вираженні, розуміючи при цьому зміну фізичного обсягу ВВП. Однак в змісті показників фізичного обсягу продукції в постійних цінах та доходу в реальному вираженні присутні суттєві розбіжності. Прикладом може бути ситуація, коли фізичний обсяг продукції, створеної в деякій галузі, зростає, а отриманий дохід в реальному вираженні скорочується. Це може відбутися в тому випадку, коли індекс цін на продукцію, придбану цією галуззю, випереджає індекс цін на реалізовану продукцію. Можна уявити і таку ситуацію, за якої індекс фізичного обсягу ВВП деякої країни зростає, а індекс купівельної спроможності національного доходу знижується. Це може відбутися, наприклад, в тому випадку,

коли індекс цін на товари, що імпортуються, виявиться вищим за індекс цін на товари, що експортуються.

Існує декілька методів розрахунку ВВП та його складових в постійних цінах, найважливішими з яких є наступні [9].

Метод дефлятування за допомогою індексів цін застосовується, головним чином, для переоцінки компонентів кінцевого споживання ВВП в постійних цінах. Він полягає в тому, що вартість споживання (накопичення) в поточному періоді (p_1q_1) ділиться на індекс, що відображає зміну цін в поточному періоді (p_1) в порівнянні з цінами в базисному періоді (p_0), що використовуються в якості постійних. Математично цю процедуру переоцінки можна описати в наступний спосіб:

$$\frac{\sum p_1q_1}{\left(\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right)} = \frac{\sum p_1q_1 \cdot \sum p_0q_1}{\sum p_1q_1} = \sum p_0q_1,$$

де $\sum p_1q_1$ – загальна вартість споживання в поточному періоді в поточних цінах;

q_1 – кількість продукції в поточному періоді;

p_1 – ціни в поточному періоді;

$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ – індекс цін;

$\sum p_0q_1$ – загальна вартість споживання в поточному періоді в постійних (базисних) цінах (p_0).

Зіставивши вартість споживання (накопичення) в поточному та базисному періодах в постійних цінах (p_0), отримуємо шуканий індекс фізичного обсягу:

$$I_q = \frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}.$$

Індекси цін, що застосовуються в статистиці, подано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Основні індекси цін в статистиці

№ з/п	ВИД ІНДЕКСУ	РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ	
		Агрегатний індекс	Середній індекс із індивідуальних
1	Індекс цін з базисними важелями (формула Ласпейреса)	$\frac{\sum_j p_{1j}q_{0j}}{\sum_j p_{0j}q_{0j}}$	$\frac{\sum_j \frac{p_{1j}}{p_{0j}} p_{0j}q_{0j}}{\sum_j p_{0j}q_{0j}}$
2	Індекс цін з важелями звітного періоду (формула Пааше)	$\frac{\sum_j p_{1j}q_{1j}}{\sum_j p_{0j}q_{1j}}$	$\frac{\sum_j p_{1j}q_{1j}}{\sum_j \frac{p_{1j}q_{1j}}{i_p}}$
3	Індекс І. Фішера		$\sqrt{\frac{\sum_j p_{1j}q_{1j}}{\sum_j p_{0j}q_{1j}} \cdot \frac{\sum_j p_{1j}q_{0j}}{\sum_j p_{0j}q_{0j}}}$
4	Індекс цін змінного складу	$\left(\frac{\sum_j p_{1j}q_{1j}}{\sum_j q_{1j}}\right) : \left(\frac{\sum_j p_{0j}q_{0j}}{\sum_j q_{0j}}\right)$	
5	Індекс для просторово-територіальних зіставлень (формула Еджворта-Маршалла)	$\frac{\sum_j p_{Aj}(q_{Aj} + q_{Bj})}{\sum_j p_{Bj}(q_{Aj} + q_{Bj})}$	
6	Метод стандартних важелів для індексів територіальних зіставлень (модифікація попереднього індексу)	$\frac{\sum_j p_{Aj} \frac{(q_{Aj} + q_{Bj})}{2}}{\sum_j p_{Bj} \frac{(q_{Aj} + q_{Bj})}{2}}$	

Основні формули розрахунку індексів, наведені в таблиці 2.1, застосовуються при узагальненні даних за одиницями сукупності (наприклад, за підприємствами, регіонами, країнами) або за елементами (наприклад, за видами товарів), а також за одиницями й за елементами. Найбільш розповсюдженими є індекси Ласпейреса, Пааше та Фішера. В зв'язку з цим може постати питання, який саме з цих індексів слід використовувати для оцінки ВВП та розрахунку індексів фізичного обсягу (для яких існують симетричні формули Ласпейреса, Пааше та Фішера). Аналіз окремих елементів ціни дозволяє виявити умови, що склалися для виробництва та обігу конкретного товару, економічні зв'язки між галузями економіки. Особливе значення має аналіз структури роздрібних цін. Структуру роздрібною ціни можна подати як суму витрат на виробництво, прибутку, ПДВ та торговельної націнки.

Індекси цін, розраховані за **формулою Ласпейреса**, особливо широко застосовуються при розрахунку індексів споживчих цін, індексів цін виробників на промислову продукцію за даними про ціни на товари-представники. Однак даний індекс не враховує інвестиційні товари, але при цьому враховує ціни на імпорتنу продукцію [9]. Цей індекс в якості важелів використовує фізичний обсяг продукції (споживчу корзину) базисного періоду [29]. Індекс Ласпейреса показує, в скільки разів товари базисного періоду подорожчали б (подешевшали б) через зміни цін на них в звітному періоді при незмінній базисній структурі товарів-представників, що увійшли в споживчу корзину. По мірі віддалення від базисного року ця споживча корзина все більш за видами, кількості та якості товарів-представників, що увійшли до її складу, зазнає змін. Природно, система важелів має переглядатися при виборі базисного року, тому слід дотримуватися наступних критеріїв [29]:

- базисний рік має розташовуватися в середині тривалої фази підйому (зниження) економічного розвитку;
- динаміка цін в базисному році не має бути стабільною, але в той же час не має бути нижчою за сусідні з ним роки;
- рік має бути «нормальним» з точки зору різноманітних катаклізмів.

Ув'язка індексу, розрахованого за новими важелями, здійснюється за допомогою процедури змицання динамічних рядів.

Якщо індекс Ласпейреса використовувати для оцінки вартості життя, то висновок буде неточним, тому що цей індекс відображає обмежений споживчою корзиною перелік товарів-представників, і радше відображає зміну споживчих цін при незмінній структурі споживання [29]:

$$I_q = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\begin{array}{c} \text{Ціна споживчої корзини} \\ \text{базисного періоду в цінах} \\ \text{звітного періоду} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Ціна споживчої корзини} \\ \text{базисного періоду в цінах} \\ \text{базисного періоду} \end{array}}.$$

Використання індексу цін, що охоплює ширше коло споживчих товарів та послуг, також буде помилкою, тому що це радше індекс роздрібних цін, хоча його часто вважають індексом вартості життя. Тим не менш, в світовій практиці індекс цін Ласпейреса вважається таки саме індексом вартості життя.

Індекси цін, розраховані за **формулою Пааше**, як правило, охоплюють ширше коло товарів та послуг. В якості важелів використовується не структура споживчих витрат, а структура товарообігу, або доданої вартості, або виробленої продукції в поточному (звітному) періоді. Тому вони можуть бути визначені лише по закінченні звітного періоду. Цей індекс характеризує зміну вартості товарів та послуг в звітному періоді порівняно з базисним [29]. Таким чином, індекс цін Пааше – це індекс

роздрібних цін. Він використовується при вимірюванні динаміки цін компонентів ВВП, закупівельних цін в сільському господарстві, кошторисних цін в будівництві, експортних цін.

Індекс Ласпейреса, як правило, більший за індекс Пааше. Ця систематична залежність двох індексів відома як *ефект Гершенкрона* за іменем американського вченого, що займався цією проблемою в 30-х роках XX століття. Він звернув увагу на те, що індекси промислової продукції в деяких країнах були тим більшими, чим далі від поточного періоду відстояв базисний рік, ціни якого використовувалися в якості постійних. Ефект Гершенкрона проявляється в тих випадках, коли існує зворотно пропорційна залежність між кількістю виробленої (реалізованої) продукції та цінами. За нормальних умов, чим більше виробляється продуктів, тим відносно нижчими мають бути їхні ціни [9].

Систематична залежність між індексами Пааше та Ласпейреса створила у деяких вчених уявлення про те, що ці індекси відхиляються від деякого справжнього значення і що це справжнє значення лежить десь посередині між ними. Це, у свою чергу, обумовило використання *індексу Фішера*, який розраховується як середнє геометричне із індексів Ласпейреса та Пааше. Економічного змісту цей індекс не має. Частіш за все він застосовується при обчисленні індексів цін за тривалий період часу для згладжування тенденцій в структурі та складі обсягу продукції, які зазнають значних змін. Індекс цін Фішера оцінює не лише набір товарів базисного періоду за цінами звітного періоду ($\sum p_1 q_0$), але й набір товарів звітного періоду за цінами базисного ($\sum p_0 q_1$). Цей індекс ще називають «ідеальним» індексом, тому що він є оборотним в часі [29]. Раніше індекс Фішера неодноразово критикували за його «формальний» характер. Однак в більшості країн та в міжнародних організаціях його продовжують застосовувати, тому що він має низку переваг порівняно з іншими індексами. Принаймні, при застосуванні індексу Фішера задовольняється одна з найважливіших вимог «аксіоматичної теорії індексів» - вимога незалежності індексу від вибору бази порівняння. Однак цій вимозі не відповідає, наприклад, формула середнього арифметичного [9].

Формула *індексу цін Еджворта-Маршалла* уловлює зсуви в структурі споживчих товарів та послуг, але є прив'язаною до умовної структури товарообігу споживчої корзини, що не є характерною для жодного реального періоду, і тому не має прямого економічного змісту. Важелями в модифікованому варіанті цього індексу (6-й індекс в таблиці 2.1) є середнє арифметичне фізичного обсягу товарної маси споживчої корзини [29].

В теперішній час в СНР пріоритет з точки зору теорії віддано індексу Фішера (як індексу цін, так і індексу фізичного обсягу). Однак на практиці припускається використання як індексу Ласпейреса, так і індексу Пааше. В зв'язку з цим в теорії індексів розрізняють два способи їх використання: аналітичний та теоретичний. При *аналітичному способі* індекси цін використовуються для вивчення динаміки цін. В цьому випадку найбільш прийнятним є індекс Ласпейреса, при розрахунку якого в якості важелів використовується кількість реалізованої продукції в базисному періоді. При *технічному способі* індекси цін використовуються для переоцінки показників в постійних цінах. Для цієї мети найбільш прийнятним є індекс Пааше, тому що при його застосуванні для дефлятування вартісних показників добуток індексів цін та фізичного обсягу дає *індекс вартості*:

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Ув'язка індексів цін, фізичного обсягу та вартості, описана в даному виразі, є однією з вимог аксіоматичної теорії індексів, відома як вимога «факторної проби» [9].

В теперішній час все більшої критики зазнає формула індексу Ласпейреса, що використовується для розрахунку індексу споживчих цін (ІСЦ). В силу того, що при розрахунку цього індексу в

якості важелів використовується базисний період, за думкою багатьох фахівців, це не дозволяє виміряти вплив появи на ринку нових або суттєво покращених товарів. При використанні формули Ласпейреса нові товари, яких не було в базисному періоді, взагалі не враховуються «за означенням». З іншого боку, формула індексу Пааше також має недоліки. По-перше, зберігається проблема вимірювання індексів цін нових товарів, тому що незрозуміло, як розрахувати індекс цін на товари, яких в базисному періоді не було. По-друге, формула Пааше, скоріш за все, знижує силу «ефекту заміщення» [30]. Цей ефект полягає в тому, що споживач переходить з часом до покупок відносно дешевих товарів. Збільшення в загальних витратах частки витрат на придбання відносно дешевих товарів (в силу ефекту заміщення) призводить до відносного заниження індексу цін.

Тим не менш, індексний метод розрахунків є більш точним, ніж розрахунки на основі середніх значень. Використання індексів є особливо ефективним при оцінюванні зміни стану ринку в цілому. Індексний метод більш адекватно відображає зміни рівня цін [36].

Метод подвійного дефлятування застосовується для розрахунку в постійних цінах доданої вартості. Цей метод полягає в послідовному дефлятуванні випуску та проміжного споживання, спочатку оцінених в поточних цінах за допомогою відповідних індексів цін. Додана вартість в постійних цінах визначається як різниця між випуском та проміжним споживанням, розрахованими в постійних цінах. На практиці для обчислення доданої вартості в постійних цінах інколи застосовуються спрощені методи. Так, в низці країн додана вартість в постійних цінах розраховується шляхом дефлятування доданої вартості в поточних цінах за допомогою індексу цін випуску. Застосування такого методу в умовах високої інфляції навряд чи зможе забезпечити задовільний ступінь точності розрахунків [9].

Метод екстраполяції показників базисного періоду за допомогою індексів фізичного обсягу передбачає розрахунок показників в постійних цінах шляхом добутку вартості в поточних цінах в базисному періоді на індекс фізичного обсягу, який виражає відношення фізичного обсягу в поточному періоді до фізичного обсягу в базисному періоді. Ця процедура розрахунку описується за допомогою наступного виразу [9]:

$$\sum p_0 q_0 I_q = \sum p_0 q_1 ,$$

де $p_0 q_0$ – показник в базисному періоді в поточних цінах базисного періоду;

I_q – індекс фізичного обсягу;

$p_0 q_1$ – показник в поточному періоді в постійних цінах (цінах базисного періоду).

Цей метод розрахунку застосовується, коли індекси цін є менш точними, ніж індекси фізичного обсягу, або коли індекс цін взагалі неможливо визначити. Так, індекс цін неможливо визначити відносно вартості неринкових послуг (послуги, що надаються закладами державного управління, наприклад, в галузі оборони та національної безпеки тощо). В цьому випадку в якості індексу фізичного обсягу використовується індекс зміни чисельності зайнятих у відповідних закладах державного управління, що надають неринкові послуги.

За **методом прямої переоцінки** показники в постійних цінах розраховуються шляхом добутку кількості виробленої (використаної) продукції на відповідні постійні ціни. Такий метод застосовується, головним чином, для розрахунку показників виробництва та використання продукції сільськогосподарства. В цій галузі статистика, як правило, має дані як про кількість, так і про ціни найважливіших продуктів (або груп продуктів) [9].

Згідно з **методом переоцінки елементів витрат**, показники в постійних цінах розраховуються

шляхом дефлятування елементів витрат. Такий метод застосовується, головним чином, для переоцінки в постійних цінах показників вартості неринкових послуг, де «за означенням» нема цін, тому що послуги надаються безкоштовно. Метод ґрунтується на припущенні, що динаміка витрат на виробництво послуг (в постійних цінах) пропорційна динаміці фізичного обсягу послуг. Іншими словами, за такого методу умовно припускається, що в сфері неринкових послуг продуктивність праці не змінюється. В деяких країнах для того, щоб подолати явний недолік методу переоцінки показників за елементами витрат, в розрахунки вводять умовне коригування на зміну продуктивності праці. В якості умовної міри зміни продуктивності праці в галузях, зайнятих наданням неринкових послуг, інколи розглядають зростання технічної озброєності праці [9].

Розрахунок показників неринкових послуг в постійних цінах залишається слабким місцем в методології розрахунку індексів фізичного обсягу ВВП. В якості постійних цін в СНР прийнято використовувати середні поточні ціни року, який прийнято за базисний. Теорія розрахунків показників СНР в постійних цінах рекомендує змінювати базисний рік (тобто постійні ціни) кожні п'ять років. Такий підхід дозволяє забезпечити не лише індекси фізичного обсягу ВВП (і його компонентів), але також забезпечити і порівнянні дані в абсолютному поданні, що є важливим для економічного аналізу та прогнозування макроекономічних показників. По завершенні п'ятирічного періоду відбувається перехід до нових постійних цін. Для розрахунку індексу фізичного обсягу ВВП за період, що охоплює більше п'яти років, протягом якого діють різні постійні ціни (встановлені для відповідних п'ятирічних періодів), використовують *метод ланцюгових індексів* [20]. Цей метод передбачає, що ВВП за рік, коли відбувається перехід до нових постійних цін, оцінений в двох видах постійних цін: в старих та нових.

Приклад 2.1. Припустимо, що за період з i -го по j -й роки в якості постійних прийняти ціни i -го року, а в j -му році введені нові постійні ціни j -го року. Розрахувати індекс фізичного обсягу ВВП за період з i -го по k -й роки ($k > j$).

Розв'язання. Для розрахунку індексу фізичного обсягу ВВП за період з i -го по k -й роки ($k > j$) пряме зіставлення даних про ВВП за i -й та j -й роки неможливе, тому що вони виражені в різних постійних цінах. Однак задача може бути розв'язаною за допомогою наступних ланцюгових індексів:

$$I_{q_{k/i}} \approx \frac{\sum p_j q_k}{\sum p_j q_j} \cdot \frac{\sum p_i q_j}{\sum p_i q_i}.$$

Цей метод застосовується, коли дані про ВВП за j -й рік виражені як в старих постійних цінах i -го року, так і в нових постійних цінах j -го року. Абсолютні дані про ВВП за вказаний період, виражені в різних постійних цінах, неможливо порівняти між собою. Однак на практиці дані за період з i -го по j -й роки можуть бути за певних умов перераховані в постійні ціни j -го року. Наприклад, дані про ВВП за i -й рік в цінах j -го року можуть бути отримані в наступний спосіб:

$$\sum p_j q_i \approx \sum p_i q_i \cdot \frac{\sum p_j q_j}{\sum p_i q_j}.$$

Даний метод дозволяє вирішити дві задачі. По-перше, перерахувати дані про ВВП за період з i -го по j -й роки в одні й ті ж самі постійні ціни (в розглянутому прикладі – в ціни j -го року). По-друге, встановити, що динаміка фізичного обсягу ВВП, вирахована за період, коли діють старі постійні ціни (i -го року), не зазнає змін. Однак цей метод містить деякі умовності, оскільки з чисто теоретичної точки зору в результаті застосування нових постійних цін виникає новий ряд даних, що характеризують динаміку фізичного обсягу. Іншими словами, якби перерахунок даних про ВВП за

період з i -го по j -й роки в постійних цінах був здійснений за всіма правилами, тоді був би отриманий новий ряд даних про індекси фізичного обсягу ВВП за цей період. З практичної точки зору зміна даних про індекси фізичного обсягу ВВП в ретроспективі є небажаною та незручною. Тому для розрахунку абсолютних показників ВВП за тривалий період в одних й тих самих цінах (постійних) застосовується описана умовна процедура. Аналогічний метод розрахунку застосовується для отримання в одних постійних цінах показників, що характеризують елементи ВВП (споживання, накопичення, експорт) в ретроспективі. В цьому випадку, як правило, не вдається узгодити дані про ВВП та компоненти його використання в нових постійних цінах, і статистичні органи відображають в своїх таблицях статистичні розбіжності.

Інший спосіб вирішення проблеми, що виникла, полягає в пропорційному розподілі статистичної розбіжності між окремими елементами ВВП [9].

При оцінюванні ВВП в постійних цінах можна встановити середній показник цін в економіці за той чи інший період. Для цього визначають дефлятор ВВП шляхом ділення індексу вартості ВВП (в поточних цінах) на індекс фізичного обсягу ВВП (в постійних цінах):

$$I_p = \left(\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \right) : \left(\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \right),$$

де I_p – дефлятор ВВП;

$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ – індекс вартості ВВП;

$\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$ – індекс фізичного обсягу ВВП.

Таким чином, дефлятор ВВП розраховується непрямым методом. Тому інколи в літературі його називають *неявним дефлятором* (*implicit deflator*). Дефлятор ВВП по суті є індексом цін Пааше. Це означає, що на нього можуть впливати не лише зміни цін, але й зміни в структурі ВВП [9].

Індекс-дефлятор – це відносно новий показник для вітчизняної статистики. Він містить не лише ціни на споживчі товари та послуги, але також і оптові ціни. Таким чином, він характеризує загальну динаміку цін та тарифів для всієї економіки країни, тобто він є індексом валового національного продукту або валового внутрішнього продукту [29]:

$$I_{\text{деф}} = \text{Дефлятор ВВП} = \frac{\begin{array}{c} \text{продукція звітнього періоду} \\ \text{за цінами поточного періоду} \\ \text{(номінальний ВНП)} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{продукція звітнього періоду} \\ \text{за цінами базисного періоду} \\ \text{(реальний ВНП)} \end{array}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Дефлятор виступає показником інфляції разом з індексом споживчих цін для найбільш загальної її характеристики.

Якщо $I_p < 1$, слід коригувати номінальний ВНП в бік збільшення - інфлятування.

Якщо $I_p > 1$, ВНП коригується в бік його зменшення – дефлятування.

Приклад 2.2. Припустимо, що ВВП складається із двох товарів: відносно дорогого товару A і відносно дешевого товару B . Частка товару A збільшилася в звітному періоді порівняно з базисним з 40 одиниць до 60, його ціна також збільшилася з 3 умовних грошових одиниць до 5. Ціна товару B не змінилася та залишилася на рівні 2 умовних грошових одиниць. В той же час його частка зменшилася в звітному періоді порівняно з базисним з 60 одиниць до 40. Розрахувати індекс фізичного обсягу ВВП та його дефлятор [9].

Розв'язання. Конкретні умови прикладу для проведення розрахунків подано у вигляді таблиці:

ТОВАРИ	Базисний період			Звітний період			p_0q_1	p_1q_0
	p_0	q_0	p_0q_0	p_1	q_1	p_1q_1		
A	3	40	120	5	60	300	180	200
B	2	60	120	2	40	80	80	120
РАЗОМ			240			380	260	320

Виходячи із даних, наведених в таблиці, індекс фізичного обсягу ВВП дорівнює

$$I_q = \frac{260}{240} \cdot 100\% = 108\%.$$

Дефлятор ВВП можна розрахувати шляхом ділення індексу вартості ($380/240$) на індекс фізичного обсягу ($260/240$), тобто

$$I_p = \left(\frac{380}{240} : \frac{260}{240} \right) \cdot 100\% = \left(\frac{380}{240} \cdot \frac{240}{260} \right) \cdot 100\% = \frac{380}{260} \cdot 100\% = 146\%.$$

Однак індекс цін за формулою Ласпейреса дорівнює $(320/240) \times 100 = 133\%$. Таким чином, дефлятор ВВП відображає не лише зміни цін, але й зміну в структурі ВВП, тобто в розглянутому прикладі збільшення частки товару A.

Відповідь. $I_q = 108\%$, $I_p = 146\%$.

Слід зазначити, що в умовах високої інфляції неможна використовувати одні й ті ж самі постійні ціни для п'ятирічного періоду (тим паче для більш тривалих періодів), тому що, по-перше, розрахунок індексів цін стає умовною процедурою та, по-друге, дуже важко оцінити ступінь близькості результатів розрахунку індексів цін і, як наслідок, індексів фізичного обсягу. В зв'язку з цим в умовах високої інфляції рекомендується змінювати постійні ціни щорічно, тобто розраховувати індекси фізичного обсягу за кожний рік в цінах попереднього року. При такому підході розрахунок індексів фізичного обсягу за відносно тривалі періоди стає можливим лише за допомогою ланцюгових індексів. Наприклад, індекс фізичного обсягу ВВП за 3-й відносно нульового можна визначити шляхом добутку наступних індексів [9]:

$$I_{3/0} = I_{3/2} \cdot I_{2/1} \cdot I_{1/0} = \frac{\sum p_2q_3}{\sum p_2q_2} \cdot \frac{\sum p_1q_2}{\sum p_1q_1} \cdot \frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}.$$

Слід також зазначити трактування в контексті розрахунків ВВП в постійних цінах так званої дискримінації цін, під якою прийнято розуміти існування розбіжностей в цінах на повністю ідентичні товари. Розбіжності в цінах на схожі товари можуть свідчити про якусь різницю в їх якості, якщо у споживача зберігається вибір щодо придбання відносно дешевих або відносно дорогих товарів (або у різниці в рівнях якихось супутніх послуг). Наприклад, різниця в цінах на товари, що придбані в звичайному продуктовому магазині та у ресторані, мають інтерпретуватися як різниця або в якості, або в рівні супутніх послуг. Таким чином, збільшення частки продуктів, що придбані за більш високими цінами в ресторані, мають інтерпретуватися як збільшення фізичного обсягу ВВП, а не як зростання цін. Однак при дискримінації цін різницю в цінах на ідентичні продукти неможна пояснити ані різницею в якості товарів, ані різницею в рівні супутніх послуг. Інша важлива умова, що визначає дискримінацію цін, полягає в тому, що у споживача, як правило, відсутній вибір при покупці товарів за відносно низькими або високими цінами. Наприклад, в умовах дефіциту він вимушений платити більш високу ціну перекупнику, хоча якість отриманих товарів залишається тією ж

самою, що й в звичайному магазині, де він міг би придбати це товар дешевше. Звичайно, більшу ціну у перекупника можна інтерпретувати як ціну, що містить платежі за посередницькі послуги, і цілком можливо, що так воно і є, і дискримінації цін в чистому вигляді не існує. В цьому випадку необхідно прийняти умовне рішення про те, який чинник переважає: дискримінація цін або оплата супутній послуг. В СНР дискримінацію цін рекомендовано інтерпретувати як чинник зміни цін, а не як чинник зміни фізичного обсягу [9].

Індекси цін використовуються також для оцінки змін темпів інфляції та динаміки вартості життя. Застосовуючи статистичні методи в дослідженні цін, слід [6]:

- мати на увазі, що чим більше різноманітних методів та оцінок задіяні в дослідженні, тим більш точний аналіз або прогноз буде отриманий або вироблений, тобто доцільним буде комплексне застосування методів;
- враховувати особливості (переваги та недоліки) кожного методу: оперативність та доступність описових методів, об'єктивність та визначеність кількісних оцінок;
- проводити порівняльну експертизу результатів у випадку паралельного використання методів;
- здійснювати багатоваріантний (оптимістичний, песимістичний) та інтервальний прогнози цін.

2.6. Показники ефективності розвитку економіки країни

Економічна ефективність характеризується співвідношенням результатів економічної діяльності та витрат факторів виробництва, пов'язаних з досягненням цих результатів. **Економічна ефективність** – відносний показник, в чисельнику якого можуть стояти результати виробничої діяльності (валовий випуск, валовий внутрішній продукт, валова додана вартість), а в знаменнику – витрати ресурсів (жива праця або робоча сила, основні та оборотні фонди, земля, тобто фактори виробництва). Методика побудови частинних показників ефективності виробництва є аналогічною. Таким чином, ефективність використання живої робочої сили характеризується наступними показниками [6].

Продуктивність праці:

$$\text{продуктивність праці} = \frac{\text{ВВП (ВДВ)}}{\text{чисельність робітників}} .$$

Ефективність робочої сили:

$$\text{ефективність робочої сили} = \frac{\text{ВВП (ВДВ)}}{\text{фонд оплати праці}} .$$

Фондовіддача:

$$\text{фондовіддача} = \frac{\text{ВВП (ВДВ)}}{\text{середньорічна вартість основних виробничих фондів}} .$$

Фондомісткість:

$$\text{фондомісткість} = \frac{1}{\text{фондовіддача}} = \frac{\text{середньорічна вартість основних виробничих фондів}}{\text{ВВП (ВДВ)}} .$$

Коефіцієнт оборотності оборотних засобів:

$$K_{об.з.} = \frac{\text{обсяг реалізованої продукції}}{\text{середньорічна вартість оборотних засобів}} .$$

Коефіцієнт закріплення:

$$K_{зак} = \frac{1}{K_{об.з.}} = \frac{\text{обсяг реалізованої продукції}}{\text{середньорічна вартість оборотних засобів}} .$$

Тривалість одного обороту (дні):

$$T_{1 об.} = \frac{\text{календарний період часу}}{K_{об.з.}} .$$

В ринковій економіці система показників рентабельності як співвідношення не відіграє головної ролі, як це відбувається при плановій економіці. В ринковій економіці важливими є характеристики фінансового стану підприємств, платіжної спроможності, ефективності використання капіталу, ефективності використання персоналу. Для цього використовуються наступні показники [6]:

Коефіцієнт фінансової рівноваги:

$$K_{ф.р.} = \frac{\text{власний капітал}}{\text{запозичений капітал}} \cdot 100 \% .$$

Коефіцієнт фінансової напруги:

$$K_{ф.н.} = \frac{\text{короткостроковий запозичений капітал}}{\text{валюта балансу}} \cdot 100 \% ,$$

який характеризує стан підприємства на ринку. Якщо цей показник менший за 50 %, то виробництво розвивається, а якщо більший за 50 % – виробництво згортається.

Коефіцієнт покриття:

$$K_{пок} = \frac{\text{вартість оборотних активів}}{\text{короткостроковий оборотний капітал}} \cdot 100 \% .$$

Коефіцієнт ліквідності:

$$K_{лік} = \frac{\text{вартість ліквідних активів}}{\text{короткостроковий оборотний капітал}} \cdot 100 \% .$$

Коефіцієнт співвідношення активів:

$$K_A = \frac{\text{основні активи}}{\text{оборотні активи}} \cdot 100 \% .$$

Коефіцієнт покриття основних засобів власним капіталом:

$$K_{пок.з.} = \frac{\text{власний капітал}}{\text{вартість основних засобів}} \cdot 100 \% .$$

Коефіцієнт загальної капіталовіддачі:

$$K_{кв} = \frac{\text{виторг від реалізації}}{\text{валюта балансу}} \cdot 100 \% .$$

Швидкість обертання капіталу:

$$v_{\text{об.к.}} = \frac{1}{K_{\text{кв}}} = \frac{\text{валюта балансу}}{\text{виторг від реалізації}} \cdot 100 \%,$$

яка показує, за скільки днів капітал робить один оборот.

Середня норма амортизації:

$$\bar{A} = \frac{\text{щомісячна амортизація} \times 12 \text{ місяців}}{\text{середньорічна вартість основних засобів}} \cdot 100 \%.$$

Показник обертання оборотного капіталу:

$$P_{\text{об.к.}} = \frac{\text{виторг}}{\text{малоліквідні} + \text{ліквідні активи}} \cdot 100 \%,$$

який показує, яка частка вартості основних засобів окупається за рік.

Швидкість обертання товарних запасів:

$$v_{\text{об.т.}} = \frac{\text{вартість товарних запасів}}{\text{ймовірний річний виторг}} \times 360 \text{ днів},$$

яка показує кількість обертів, здійснюваних зв рік оборотним капіталом.

Швидкість обертання дебіторської заборгованості:

$$v_{\text{об.дз}} = \frac{\text{заборгованість покупців}}{\text{ймовірний виторг}} \times 360 \text{ днів},$$

яка показує, скільки днів запаси зберігаються на складі.

Швидкість обертання кредиторської заборгованості:

$$v_{\text{об.кз}} = \frac{\text{короткострокова заборгованість}}{\text{ймовірний річний виторг}} \times 360 \text{ днів},$$

яка показує, скільки днів треба чекати виторгу від покупців.

Загальна рентабельність:

$$\text{загальна рентабельність} = \frac{\text{прибуток від реалізації продукції, робіт або послуг до оподаткування}}{\text{валюта балансу}} \cdot 100 \%,$$

яка характеризує середній термін повернення боргів підприємства або на який термін йому дають кредит.

Чиста рентабельність власного капіталу:

$$\text{чиста рентабельність ВК} = \frac{\text{чистий прибуток}}{\text{власний капітал}} \cdot 100 \%.$$

Чиста рентабельність установчого капіталу:

$$\text{чиста рентабельність УК} = \frac{\text{чистий прибуток}}{\text{установчий капітал}} \cdot 100 \%.$$

Норма дивіденду:

$$N_{\text{див}} = \frac{\text{фактичні кошти, спрямовані в дивіденди}}{\text{вартість установчого капіталу}}.$$

Капіталоозброєність:

$$\text{капіталоозброєність} = \frac{\text{валюта балансу}}{\text{середньоспискова чисельність персоналу}},$$

яка показує, скільки коштів підприємства припадає на кожного співробітника.

Продуктивність персоналу:

$$\text{продуктивність персоналу} = \frac{\text{виторг від реалізації}}{\text{середньоспискова чисельність персоналу}},$$

яка дозволяє оцінити внесок кожного робітника в реалізацію продукції.

Рентабельність персоналу:

$$\text{рентабельність персоналу} = \frac{\text{прибуток}}{\text{середньоспискова чисельність персоналу}},$$

яка показує, який прибуток приносить кожний робітник підприємства [6].

2.7. Моделі економічного прогнозування

В економічному і соціальному прогнозуванні широко використовуються різні моделі. Модель є одним з найважливіших інструментів економічного прогнозування досліджуваного процесу. Змістом процесу моделювання є конструювання моделі на основі попереднього вивчення об'єкта або процесу, виділення його характеристик і ознак, теоретичний та експериментальний аналіз моделі, зіставлення результатів моделювання з фактичними даними про об'єкт або процес, коригування та уточнення моделі.

Способом вивчення закономірностей розвитку економіки, соціальних процесів є **економіко-математична модель**. Вона являє собою систему формалізованих співвідношень, що описують основні взаємозв'язки елементів, що утворюють економічну систему. Система економіко-математичних моделей економетричного типу служить для опису відносно складних процесів економічного або соціального характеру. Економетричне моделювання ґрунтується на обробці статистичної інформації ретроспективного характеру, оцінюванні окремих змінних величин, їх параметрів.

Економіко-математична модель може бути поданою, наприклад, як $Z = aX$ і використаною, припустимо, для прогнозування потреби в матеріалах, необхідних для виготовлення якогось виробу. В цьому випадку X – кількість виробів, a – норма витрат матеріалу на один виріб, Z – загальна потреба в матеріалах. Економіко-математична модель набуває більш складного вигляду, якщо визначається потреба в матеріалах для виготовлення декількох виробів [1]:

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i, \quad n = \overline{1, n}.$$

Ця модель показує залежність потреби в матеріалах від двох чинників: кількості виготовлених виробів та норм затрат матеріалів на виробі. Певні види моделей економічного і соціального прогнозування можуть бути класифіковані в залежності від критерію оптимізації найкращого або очікуваного результату. Так, наприклад, розрізняють економіко-математичні моделі, в яких мінімізуються затрати, і моделі, в яких бажано отримати, наприклад, максимум продукції. Таким чином, економіко-математичні моделі поділяються на [23]:

- *планові*, що застосовуються для оцінки раціональності довгострокових капіталовкладень;
- *виробничі*, що призначені для оптимізації прибутку протягом коротких періодів часу.

Плановими економічними моделями можна користуватися для вивчення економічної доцільності застосування автоматизації керування виробничим процесом, а також для оцінки в широкому сенсі економічної доцільності капіталовкладень в підприємство. Планові моделі можна розробляти шляхом моделювання фінансових результатів запропонованого варіанту капіталовкладення. Таке моделювання є низкою обчислювальних процедур, що імітують складання виробничого фінансового звіту. Після затвердження проекту та початку робіт за ним треба проводити перевірку правильності планових економіко-математичних моделей. На певних етапах робіт слід проводити порівняння для перевірки правильності початкової моделі. Якщо ж реальні економічні характеристики розбігаються з початковим фінансовим графіком, необхідно вжити заходів для відміни проекту або його коригування. Після виконання робіт за проектом остаточні результати можна порівняти з початковими планами для використання накопиченого досвіду при майбутньому плануванні [23].

Виробничі економіко-математичні моделі містять цільові функції, що застосовуються для оптимізації виробничого процесу. Тому їх розробка є складовою частиною створення синтезованої системи оптимального керування підприємством. Виробнича економіко-математична модель дає відповідь на питання не про те, який із різних варіантів капіталовкладень слід обрати в якості найбільш раціонального, а про те, як найкращим чином використати вже наявні виробничі фонди та обладнання. Масштаб часу виробничих моделей виражається годинами або тижнями. Розробка цих моделей є простішою, тому що в них можна не враховувати постійні витрати та капіталовкладення. В цих моделях для простоти приймається припущення, що витрати можна розділити на постійні та змінювані. Передбачається, що постійні витрати не змінюються із зміною обсягу випуску продукції, хоча на практиці вони інколи змінюються ступінчасто. Зміни змінюваних витрат в залежності від обсягу випуску продукції можуть бути лінійними або нелінійними. Крім того, змінювані витрати можуть відставати у часі від відвантаження продукції або випереджати його. Виробнича модель складається із двох частин: обмежень та цільової функції. Обмеження вказують на фізичні межі продуктивності та обумовлюють вимоги до складу продукції. В моделі можуть бути присутніми також і інші обмеження, пов'язані з природою фізичного процесу. При розробці виробничої економіко-математичної моделі в якості цільової функції доцільно використовувати або загальний прибуток від продажу продукції, або змінювані витрати. В першому випадку цей показник слід максимізувати, а в другому – мінімізувати [22].

Таким чином, *загальний вигляд виробничої економіко-математичної моделі* буде наступним [14]:

$$Z = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}$$

за умов:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ g_k(x_p, x_{p+1}, \dots, x_t) \geq 0, \\ x_j \geq 0. \end{cases} \quad - \text{ обмеження на змінні.} \quad (2.1)$$

В залежності від властивостей функцій f і g моделі розв'язання задач вибору оптимального рішення поділяються на

- *лінійні* – моделі лінійного програмування при лінійних функціях f і g ;
- *нелінійні* – при нелінійному характері функції Z та деяких обмеженнях на умови рішення задачі. При цьому моделі нелінійного програмування поділяються, у свою чергу, на опуклі та неопуклі, цілочисельні та дробні тощо.

Для отримання оптимальних рішень можуть використовуватися також моделі балансових методів аналізу. Моделі такого типу застосовуються в основному на рівні міжгалузевого планування та прогнозування. Також балансові моделі застосовуються для аналізу стану та пропорційного розвитку підрозділів, формування планів та економічної стратегії підприємства або організації. Моделі лінійного програмування застосовуються для вирішення задач оперативного-календарного та техніко-економічного планування (визначення оптимальної виробничої програми), технічної підготовки виробництва, прогнозування стану підприємства при зміні цін, кредитів тощо [14].

З урахуванням фактору часу моделі можуть бути

- *статичними* (тобто коли обмеження в моделі встановлені для одного певного проміжку часу протягом планового періоду і при цьому мінімізуються затрати або максимізується остаточний результат);
- *динамічними* (тобто обмеження встановлені для декількох проміжків часу при той самій мінімізації або максимізації ефекту за весь плановий період) [1]. Моделі динамічного програмування дозволяють вирішувати задачі вибору політики заміни обладнання, оптимального розподілу витрат, амортизаційних відрахувань тощо [14].

Прийнято розрізняти такі економетричні моделі:

- *факторні*;
- *структурні*;
- *комбіновані*.

Факторні моделі описують залежність рівня та динаміки того чи іншого економічного показника від рівня та динаміки економічних показників-аргументів, що впливають на нього. Такий самий тип моделей може бути застосований до різних економічних об'єктів. В залежності від рівня агрегування показників розрізняють такі види моделей:

- *макроекономічні*;
- *міжгалузеві*;
- *міжрайонні*;
- *галузеві*;
- *регіональні*.

Змінні економетричної моделі розділюються на *зовнішні (екзогенні)* і *внутрішні (ендогенні)*. Наприклад, екзогенний чинник в моделі може означати для підприємства ритмічність поставок; ендогенний – наявність трудових ресурсів на підприємстві.

Факторні моделі можуть містити різну кількість змінних величин і відповідних їм параметрів. Найпростішими видами факторних моделей є однофакторні, в яких фактором виступає часовий параметр. В цьому випадку аналіз і прогноз будь-якого показника здійснюється в залежності від хронологічного ряду часу, і тим самим визначаються тренди. **Тренд** – залежність, що характеризує загальну тенденцію зміни динамічного ряду в часі.

Багатофакторні моделі лінійного та нелінійного типів дозволяють одночасно враховувати вплив декількох чинників на рівень та динаміку прогнозованого показника. Такими моделями мо-

жуть бути моделі, що описують макроекономічні виробничі функції, моделі аналізу попиту на окремі предмети споживання в залежності від доходів населення, цін, рівня насичення, раціональних норм споживання тощо.

Структурні моделі описують співвідношення, зв'язки між окремими елементами, що утворюють єдине ціле або навіть агрегат. Ці моделі мають структурно-балансовий тип, де поряд з розділенням якогось агрегату на складові елементи розглядаються взаємозв'язки цих елементів. Такі моделі мають матричну форму і використовуються для аналізу та прогнозу міжгалузевих та міжрегіональних зв'язків. Найбільш розповсюдженою формою структурно-балансової моделі є міжгалузевий баланс виробництва та розподілу продукції [1].

Класифікацію сукупності економіко-математичних моделей, що застосовуються для прийняття оптимальних рішень при прогнозуванні, подано на рис. 2.4.

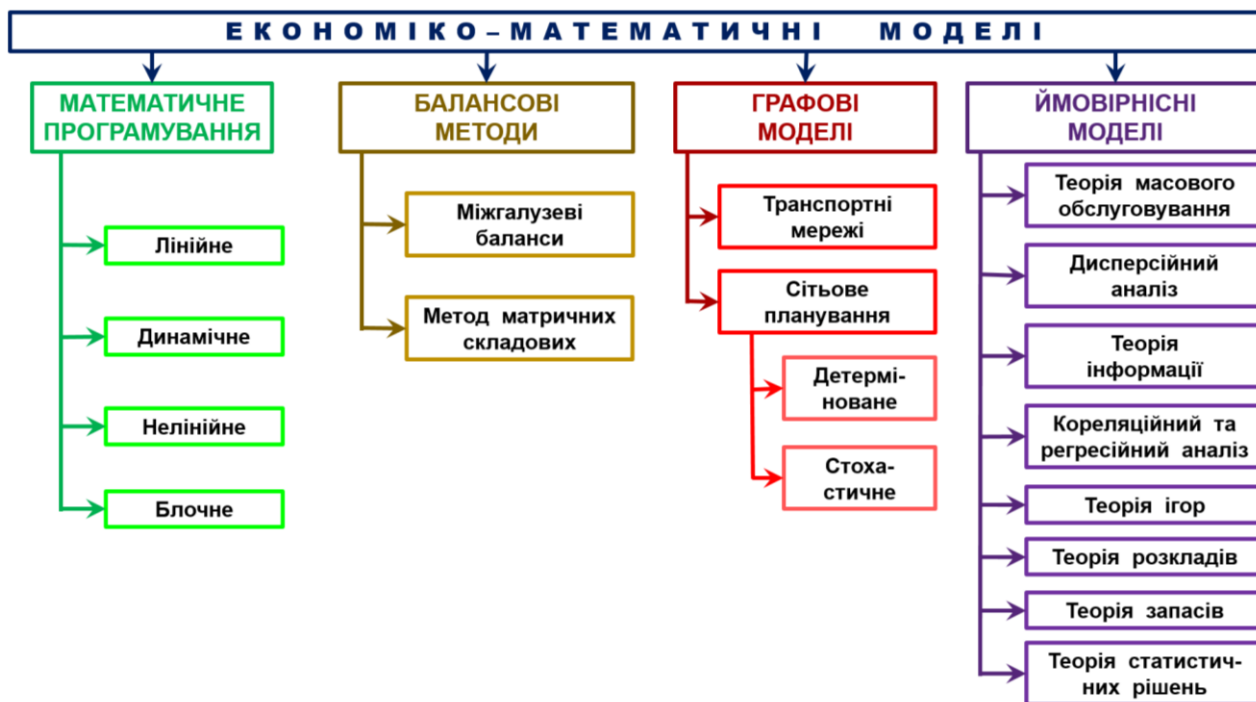


Рис. 2.4 – Класифікація економіко-математичних моделей

Графові моделі використовуються в економічних системах в основному при розв'язанні задач сітьового планування. Моделі кореляційного, регресійного та дисперсійного аналізу використовуються переважно при встановленні різного роду норм та нормативів, побудові моделі розвитку економічної системи тощо. Моделі теорії масового обслуговування застосовуються для визначення технологічних процесів, їх черговості, тривалості операцій. Моделі теорії запасів використовуються для розв'язання задач по оптимізації встановлених розмірів оборотного фонду, оперативного календарного планування. Моделі теорії ігор та статистичних рішень використовуються для розв'язання задач оптимального стимулювання, моделювання роботи підприємства, аналізу та прогнозування тенденцій розвитку ринків збуту тощо.

Також моделі поділяються на аналітичні та динамічні. Моделі з динамічною інтерпретацією змінюють свою конфігурацію з урахуванням деяких початкових умов, що характеризують початкову (базову) ситуацію. Перевага цього класу моделей полягає в тому, що вони дозволяють моделювати та описувати економічні процеси, параметри яких змінюються в часі.

Моделі аналітичного типу ґрунтуються на аналітичних або евристичних методах та дозволяють проводити оцінку ситуації, що прогнозується, в просторі багатьох критеріїв та інтерпретувати

отримані оцінки на множині чинників, що задають необхідний вплив для ефективної зміни ситуації. До переваги цього класу моделей можна віднести їх відносну гнучкість, яка дозволяє змінювати склад множини критеріїв оцінювання, враховувати зміни в системі пріоритетів прийняття рішень [14].

2.7.1. Прогнозування макропоказників

Макроекономічні прогнози дають уявлення про найбільш ймовірний загальний напрямок короткострокового розвитку економіки окремої країни, групи країн або світової економіки в цілому [13]. Основною особливістю прогнозування макропоказників є те, що будь-яка макрозмінна визначається нескінченною множиною компонентів і має тенденцію до меншого відхилення від середньої, ніж кожна з її складових. Прогнозування макропоказників, в першу чергу, пов'язане з розв'язанням широкого кола задач при прогнозуванні економічного зростання економіки держав. Моделі економічного зростання є різновидом багатовимірних моделей економічного розвитку. Метою побудови таких моделей є прогноз основних показників, що характеризують розвиток економіки та її структуру. Для розв'язання таких задач можуть бути використані два підходи [1].

Перший підхід неокейнсіанський, базується на попиті. Одним із чинників попиту є інвестиції, що мультиплікативно збільшують прибуток, в той же час самі вкладення визначаються прибутком. Цей підхід розглядає інвестиції як збільшення попиту на нові блага, тобто на ВВП. В теорії Кейнса інвестиції відіграють надзвичайно важливу роль, оскільки вони набагато менш стійкі, ніж споживчі витрати. Причини цього є очевидними: придбання капітальних благ завжди простіше відкласти, ніж придбання споживчих благ. Умови, що неперервно змінюються, впливаючи на очікування інвесторів, можуть по черзі породжувати відкладання та прискорення інвестицій. З точки зору неокейнсіанського підходу, накопичення заощаджень зовсім не є безумовним благом. Якщо ймовірний обсяг інвестицій знижується, а споживачі намагаються утримати норму заощаджень на тому ж самому рівні, то споживчі витрати не зможуть в достатній мірі компенсувати скорочення сукупного попиту. Це буде тривати доти, поки зниження доходів не примусить ощадників скоротити свою норму заощаджень до того рівня, який згодні витратити інвестори. Інвестування сприяє накопиченню запасу капіталу. Звідси випливає, що чим вища норма інвестицій, тим вищим є темп економічного зростання, скоріше збільшується національний дохід та зростає рівень життя. З точки зору неокейнсіанців, може мати місце хронічна нестача сукупного попиту, що не дозволяє підтримувати високий рівень виробництва та зайнятості. В цих умовах заощадження скорочують сукупний попит і, таким чином, уповільнюється економічне зростання [28].

Другий підхід неокласичний, використовує поняття виробничої функції. В загальному випадку *виробничою функцією* називається технологічний зв'язок між випуском продукції та витратами ресурсів на цей випуск, тобто $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ця функція є відображенням будь-якого вектору витрат (точки простору витрат) в єдине невід'ємне дійсне число, а саме максимальний випуск продукції, який може бути отриманий при використанні цього вектору витрат. Простір витрат I , що складається із усіх можливих векторів витрат, є невід'ємним ортантом n -вимірного евклідового простору в припущенні, що всі витрати можуть безперервно змінюватися. Кожній точці витрат відповідає єдиний максимальний випуск продукції, вироблений з використанням цих витрат. Вважається, що виробнича функція є безперервно диференційованою. Також передбачається, що виробнича функція задовольняє двом аксіомам.

Перша аксіома стверджує, що існує підмножина простору витрат, яка називається *економічною областю*, в якій збільшення будь-якого виду витрат не призводить до зменшення випуску продукції. Таким чином, якщо X_i і X_j – дві точки цієї області, то виконання нерівності $X_i \geq X_j$ тягне за

собою справедливості нерівності $f(X_i) \geq f(X_j)$. Ця область характеризується невід'ємністю всіх перших частинних похідних виробничої функції, які називаються *предільними продуктами*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = MP_i(X) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Вектор предільного продукту визначається як вектор-рядок:

$$MP(X) = \frac{\partial f}{\partial X}(X) = (MP_1(X), MP_2(X), \dots, MP_n(X)).$$

Тоді економічна область буде підмножиною простору витрат, тобто $ER = \{X \in I \mid MP(X) \geq 0\}$.

Друга аксіома стверджує, що особлива область R (опукла підмножина економічної області ER), для якої матриця Гессе виробничої функції

$$H = H(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(X)$$

від'ємно визначена для всіх X із R . В цій особливій області *виробничі множини* $Z = \{X \in I \mid f(X) \geq q^0\}$ є опуклими для кожного невід'ємного числа q^0 . Також в цій області виконуються співвідношення

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X) = \frac{\partial}{\partial x_i}(MP_i(X)) < 0, \quad i = \overline{1, n},$$

яке називається *законом убутної віддачі (убутної прибутковості)*: в ході того, як витрати одного виду додаються до встановлених обсягів інших витрат, врешті решт досягається особлива область, в якій предільний продукт витрат знижується. Згідно з цими двома аксіомами, існує опукла область простору витрат, яка називається *особливою областю R* , яку визначає співвідношення

$$R = \{X \in I \mid (MP(X) \geq 0) \& H(X) - \text{від'ємно визначеною}\}.$$

Виробнича функція в особливій області характеризується віддачою (доходом) від розширення масштабу виробництва та можливістю заміщення. Дохід від розширення масштабів виробництва характеризує виробничу функцію з точки зору «поведінки» випуску продукції, якщо всі витрати змінюються в однаковій пропорції. Нехай, наприклад, в певній точці X простору витрат всі витрати помножуються за масштабом на число $\alpha > 1$, тобто $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. Виробнича функція характеризується *постійним доходом від розширення масштабів виробництва*, якщо випуск зростає в тій самій пропорції, що й витрати, тобто $f(\alpha X) = \alpha f(X)$. Аналогічно, виробнича функція характеризується *зростаючим (убутним) доходом від розширення виробництва*, якщо вона зростає в більшій (меншій) мірі, ніж всі витрати, тобто якщо $f(\alpha X) > \alpha f(X)$ ($f(\alpha X) < \alpha f(X)$). В той же час виробнича функція може характеризуватися постійним доходом від розширення масштабів виробництва в одних точках простору витрат та зростаючим або убутним доходом – в інших. Локальним показником, що характеризує дохід в залежності від розширення масштабів виробництва, визначеним в деякій точці простору витрат, є *еластичність виробництва*

$$\varepsilon(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{f(\alpha X)} \frac{\partial f(\alpha X)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\partial \ln f(\alpha X)}{\partial \ln \alpha},$$

тобто еластичність випуску по відношенню до параметра масштабу α . У випадку постійного (зростаючого або убутного) доходу від розширення масштабів виробництва еластичність заміщення дорівнює одиниці (більша або менша за одиницю). В силу того, що $f(\alpha X) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$, після диференціювання обох сторін за α отримуємо:

$$\frac{\partial f(\alpha X)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\alpha X)}{\partial (\alpha x_i)} x_i .$$

Таким чином, еластичність виробництва можна записати у вигляді

$$\varepsilon(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{f(\alpha X)} \frac{\partial f(\alpha X)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha}{f(\alpha X)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(X)}{\partial (\alpha x_i)} x_i ,$$

або в термінах предільного продукту

$$\varepsilon(X) = \frac{MP(X)}{f(X)}(X).$$

Визначимо *еластичність випуску по відношенню до зміни витрат і-го виду* як

$$\varepsilon_i(X) = \frac{x_i}{f(X)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X), \quad i = \overline{1, n} .$$

Тоді рівняння для еластичності виробництва в термінах предільного продукту набуде вигляду

$$\varepsilon(X) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(X).$$

Таким чином, еластичність виробництва в будь-якій точці особливої області **R** дорівнює сумі еластичностей випуску по відношенню до різних витрат в цій точці. *Можливості заміщення* характеризують виробничу функцію з точки зору різних комбінацій витрат, що породжують однакові умови випуску продукції. Локальним показником заміщення між двома витратами x_j та x_k , коли решта витрат залишаються незмінними, в деякій точці особливої області **R** може служити *еластичність заміщення між витратами j та k*, що визначається як

$$\sigma_{jk}(X) = - \frac{d \ln \left(\frac{x_j}{x_k} \right)}{d \ln \left(\frac{MP_j(X)}{MP_k(X)} \right)}, \quad j, k = \overline{1, n} ,$$

тобто відсоткова зміна співвідношення витрат, розділена на відсоткове співвідношення їх предільних продуктів (знак « – » підтверджує, що $\sigma_{jk}(X) \geq 0$ в особливій області **R**) [24]. В неокласичних моделях використовуються двохфакторні виробничі функції, що в якості витрат розглядають капітал та працю, тобто виробничі функції Кобба-Дугласа, що мають вигляд $Q = f(L, K)$, де **Q** – максимальний обсяг продукції, що виробляється при заданому співвідношенні витрат праці **L** та капіталу **K** для заданої технології [32]. Двохфакторна виробнича функція надає можливість графічного аналізу виробництва із застосуванням ізоквант. *Ізокванта* – це крива, що відображає альтернативні варіанти комбінацій факторів виробництва, які можуть бути використані для випуску заданого обсягу продукції. Графічно ізокванти мають вигляд, поданий на рис. 2.5.

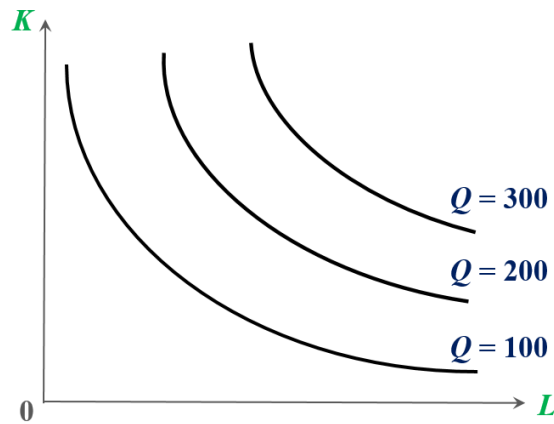


Рис. 2.5 – Ізокванта

Точки на ізокванті – це можливі комбінації праці L та капіталу K , за яких за певний період часу може бути вироблено 100 одиниць умовної продукції при заданій технології та інших незмінних факторах. Графік на рис. 2.5 виконано для варіанту, коли виробник має можливість одночасно змінювати всі виробничі фактори. Для виробничої функції Кобба-Дугласа їх два (капітал та праця), але в умовах реальної дійсності це малоймовірно. Так, відносно легко можуть бути змінені витрати на сировину, паливо, енергію та витрати праці виробничих робітників. Значно складніше з позицій витрат засобів та часу підлягають змінам виробничі площі, кількість одиниць виробничого обладнання. В виробничій діяльності підприємства можна виділити два періоди з точки зору можливості зміни виробничих факторів: короткостроковий та довгостроковий. В короткостроковому періоді окремі фактори змін не зазнають, їх значення фіксовані. В довгостроковому періоді для даної технології можуть зазнати змін всі фактори виробництва [32].

Моделювання економіки в цілому щільно пов'язане з практикою та властиве не лише країнам з економікою, що регулюється державою, але й високорозвиненим країнам з вільною ринковою економікою. Розрізняють три класифікаційні ознаки для моделі економіки країни.

1. За метою побудови прогнозу:
 - *теоретичні* (призначені для дослідження циклічного характеру розвитку економіки);
 - *прикладні* (призначені для прогнозування економіки з метою оцінювання наслідків різних альтернативних варіантів розвитку економіки).
2. За характером і повнотою відображення особливостей об'єкта прогнозування:
 - *довго-, середньо- або короткострокові*;
 - *великомасштабні, централізовані, місцеві*;
 - *екзогенні та ендогенні*.
3. За використанням математичним апаратом:
 - *міжгалузеві моделі*;
 - *мережеві та матричні*;
 - *розрахунково-аналітичні*;
 - *з використанням експертних оцінок*.

До основних моделей при використанні неокейнсіанського підходу можна віднести такі, як модель Даммара-Харрода, модель розрахунку ВВП на душу населення, модель Самуельсона-Хікса тощо [1].

Модель Даммара-Харрода (зростання ВВП залежить від норми та ефективності накопичень):

$$Y_t = Y_0(1 + \alpha\beta)^t \quad \text{або} \quad y = \alpha\beta,$$

де Y_t і Y_0 – обсяги ВВП на початковий та кінцевий роки прогнозованого періоду;

α - норма накопичення;

β - ефективність накопичення;

y – темпи зростання ВВП.

Величина норми накопичення не враховує амортизаційних відрахувань та схильності до заощаджень.

Модифікаційна модель (в цій моделі враховується вплив капіталовіддачі на зростання ВВП):

$$Y_t = Y_0(1 + \alpha_c) \frac{1}{\alpha_n} ((1 + \beta_n \beta)^t - 1),$$

де α_c – середня норма накопичення в період, що передує прогнозованому;

α_n – предільна норма накопичення;

β_n – предільний коефіцієнт капіталовіддачі.

Залежність динаміки коефіцієнту капіталовіддачі від капіталоозброєності та продуктивності праці визначається за наступною формулою:

$$\beta' = \frac{\Delta \Pi}{\Delta K} \quad \text{або} \quad \beta' = \pi - \phi,$$

де β' – темп зростання капіталовіддачі;

Π – продуктивність праці;

K – капіталоозброєність;

ϕ - темп зростання продуктивності праці;

π - темп зростання капіталоозброєності.

Модель розрахунку ВВП (на душу населення). За допомогою цієї моделі обчислюють ВВП на душу населення (темпи зростання ВВП/особу) або визначають норму накопичення для підтримки бажаних темпів економічного зростання.

$$Y_{nt} = Y_{n0}(1 - \alpha\beta - n)^t \quad \text{або} \quad Y_n = \alpha\beta - n,$$

де Y_{nt} і Y_{n0} – доходи на душу населення на початковий та кінцевий періоди;

n – темп зростання населення;

Y_n – темп зростання доходів на душу населення.

Модель Самуельсона-Хікса (модель ділового циклу на основі ефекту акселератора і мультиплікатора):

$$I_t = F(Y_{t-1} - Y_{t-2}),$$

де I_t – інвестиції в році t ;

A – акселератор (постійна величина для економіки країни);

Y_{t-1}, Y_{t-2} – обсяги ВВП в попередні періоди часу.

$Y_t = CB + I_t$ – означення ВВП;

CB – споживчі витрати.

Модель розраховано за умови рівноваги попиту та пропозиції:

$$CB_t = a Y_{t-1} + b,$$

де a – частка національного продукту на споживання;

b – базове споживання;

$$Y_t = (a + A)Y_{t-1} + b - A Y_{t-2} + DZ_{t-1}(1 + R).$$

Кейнсіанська модель дозволяє втручання держави:

$$Y_t = CB + I_t + DZ_t,$$

де DZ – державні закупівлі;

R – темпи приросту державних закупівель:

$$DZ_t = (1 + R)DZ_t.$$

В неокласичних моделях, як вже було зазначено, використовуються такі фактори для виробничої функції, як капітал і праця, тобто $Y=f(K, T)$. При цьому обсяг ВВП:

$$Y_t = d K^\varepsilon T^\varepsilon,$$

де K – капітал (темпи зростання);

T – праця;

d – коефіцієнт пропорційності;

ε – еластичність.

2.7.2. Прогнозування грошової маси

Важливим аспектом в галузі економічного прогнозування макропоказників є *прогнозування грошової маси*. При цьому можуть використовуватися два основні підходи [1]:

- прогнозування попиту;
- прогнозування пропозиції.

Прогнозування пропозиції здійснюється за формулою:

$$M_1 = \frac{1 + C}{\underbrace{n_b + n_d B + n_p + C}_{(m_1 - \text{грошовий мультиплікатор})}} \cdot H.$$

При цьому обсяг грошової маси в обігу обчислюється за формулою

$$M_2 = \frac{1 + C + B}{\underbrace{n_b + n_d B + n_p + C}_{(m_2 - \text{грошовий мультиплікатор})}} \cdot H.$$

де n_b, n_d, n_p – норма внесків до запитання, депозитів, надлишкових резервів;

B – співвідношення строкових внесків з депозитами до запитання;

C – норма грошей в обігу або відношення грошей в обігу до депозитів; $ВНД$

H – грошова база.

Грошова база – це самостійний компонент грошової маси. Він містить готівкові гроші в обігу, грошові кошти в касах банків та обов'язкові резерви комерційних банків в Національному банку та їх кошти на кореспондентських рахунках в Національному банку. **Грошовий мультиплікатор** – це коефіцієнт, що характеризує збільшення грошової маси в обігу в результаті зростання банківських активів [36].

Прогнозування швидкості обертання грошей здійснюється за наступною формулою:

$$V = \frac{ВНД}{M},$$

де $ВНД$ – валовий національний дохід;

M – грошова маса;

V – швидкість обертання грошей.

Моделювання економіки в цілому щільно пов'язане з практикою державного регулювання. Воно властиве окремим країнам, особливо з економікою, що регулюється. Лідером моделювання економіки є США. Найбільш відомою американською моделлю є ОВЕ, що призначена для вибору заходів державної економічної політики для досягнення рівноваги попиту та пропозиції. Критеріями ефективності цієї моделі є досягнення мінімально можливого рівня безробіття при максимально можливому темпі зростання ВВП. Ця модель складається із 34 рівнянь.

Уортонська модель (річна). Ця модель призначена для довгострокового прогнозування економіки. Період упередження даної моделі складає 10 років. Вона містить галузеву таблицю із 265 рівнянь і 324 тотожностей, що описують 47 галузей економіки.

Бруклінська модель. Ця модель є найбільш докладною та призначена для аналізу та довгострокового прогнозування економіки США. Вона складається із 30 галузевих блоків, 68 стохастичних рівнянь, оперує 200 ендегенними і 100 екзогенними змінними.

Модель Фера. Ця короткострокова квартальна модель призначена для прогнозування економіки з упередженням у 3-5 кварталів. Вона містить 14 рівнянь і 6 тотожностей.

2.8. Аналітичні показники прогнозування динаміки розвитку економічних систем

Слід окремо розглянути використані у вказаних моделях показники темпів динаміки.

Абсолютний приріст Δ_y обчислюється як різниця між поточним та базисним періодами. Він показує, на скільки одиниць збільшився або зменшився рівень показника порівняно з базисним за певний період часу [3]. В залежності від бази зіставлення абсолютні прирости можуть бути ланцюговими (Δ_y^s) та базисними (Δ_y^0):

$$\Delta_i^0 = y_i - y_0 ,$$

$$\Delta_i^s = y_i - y_{i-1} ,$$

де y_i – поточний рівень показника (значення показника в поточному періоді),

y_{i-1} – попередній рівень показника (значення показника в попередньому періоді),

y_0 – базисний рівень показника (значення показника за період, який прийнятий за базу порівняння).

Таким чином, абсолютний приріст відображає абсолютну швидкість зміни значень показника за одиницю часу. Якщо абсолютний приріст приймає від'ємні значення, то він називається **абсолютним скороченням** [7]. Для глибшої та вичерпної характеристики досліджуваного явища або процесу абсолютні величини доповнюють відносними [3].

Темп зростання T є відношенням значень показника за два різні періоди часу, подане у відсотках. Темпи зростання також можуть бути розраховані як базисні (T^0) та як ланцюгові (T^s):

$$T_i^0 = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100 \% ,$$

$$T_i^s = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100 \% .$$

Темпи зростання також можуть бути подані в якості коефіцієнтів. В цьому випадку вони називаються **коефіцієнтами зростання** [11]:

$$K_i^0 = \frac{y_i}{y_0} ,$$

$$K_i^s = \frac{y_i}{y_{i-1}} .$$

При аналізі ситуації та складанні прогнозів зазвичай використовується лише один з цих показників (або темп, або коефіцієнт), тобто зростання може оцінюватися або у відсотках (***T***), або в разях (***K***). Ланцюгові темпи зростання характеризують інтенсивність зміни значень показника від періоду до періоду (від року до року, від місяця до місяця тощо). Базисні темпи зростання фіксують інтенсивність зростання (зниження) за весь проміжок часу між поточним та базисним періодами.

Темп приросту ΔT є відношенням абсолютного приросту до значення показника за період, що прийнятий за базисний (базисний темп приросту ΔT^0), або до значення показника в попередньому періоді (ланцюговий темп приросту ΔT^s) [11]:

$$\Delta T_i^0 = \frac{\Delta y^0}{y_0} \cdot 100 \% ,$$

$$\Delta T_i^s = \frac{\Delta y^s}{y_{i-1}} \cdot 100 \% .$$

Темп приросту показує, на скільки відсотків порівнюване значення показника є більшим або меншим за його значення в базисному або попередньому періодах [3]. Темп приросту часто називають **відносним приростом**. В загальному випадку він може приймати як додатні, так і від'ємні значення на відміну від темпу зростання, який завжди є додатною величиною. Часто виміряні показники аналізованого явища або процесу можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення. Наприклад, фінансовий результат від реалізації продукції підприємством може відображати прибуток (додатне число) або збитки (від'ємне число). В цьому випадку темп зростання та темп приросту обчислювати неможна. В цьому випадку такі показники втрачають зміст та не мають економічної інтерпретації, а зберігають зміст лише абсолютні показники динаміки розвитку системи [7].

Темпи приросту, як і темпи зростання, можуть бути подані як коефіцієнти. В цьому випадку вони називаються **коефіцієнтами приросту**:

$$\Delta K_i^0 = \frac{\Delta y^0}{y_0} ,$$

$$\Delta K_i^s = \frac{\Delta y^s}{y_{i-1}} .$$

Щоб дізнатися, що саме приховується за кожним відсотком приросту, розраховується **абсолютне значення 1 % приросту**. Воно є відношенням абсолютного приросту значення показника за певний інтервал часу до темпу приросту за той самий проміжок часу, тобто [11]:

$$A_i = \frac{\Delta_i^s}{\Delta T_i^s}$$

або

$$A_i = \frac{\Delta_i^s}{\frac{\Delta_i^s}{y_{i-1}} \cdot 100\%} = 0,01 \cdot y_{i-1} .$$

Іншими словами, абсолютне значення 1 % приросту в розглянутому періоді є сотою часткою досягнутого рівня показника в попередньому періоді. В зв'язку з цим розрахунок абсолютного значення

1 % приросту базисним методом не має сенсу, тому що для кожного періоду це буде одна й та ж сама величина – сота частка базисного періоду [11].

Якщо значення абсолютних приростів систематично зростають, то система розвивається з абсолютним прискоренням. Величина **абсолютного прискорення** визначається як

$$\Delta_i^{abs} = \Delta_i - \Delta_{i-1},$$

Тобто обчислення здійснюються аналогічно до обчислення ланцюгових абсолютних приростів, але при цьому порівнюються між собою не значення показника за різні періоди, а швидкості його зміни за ці періоди. Ця величина обчислюється лише в ланцюговому варіанті, але не в базисному. Якщо вона приймає від'ємні значення, то це свідчить про уповільнення зростання або про прискорення зниження значення досліджуваного показника [7].

Якщо систематично збільшуються ланцюгові темпи зростання, то система розвивається з відносним прискоренням. **Відносне прискорення** визначається як різниця крокуючих один за одним темпів зростання або приросту:

$$\Delta_i^{\%} = T_i - T_{i-1} = \Delta T_i - \Delta T_{i-1}.$$

Отримана величина вимірюється у відсоткових пунктах.

Також відносне прискорення може бути виміряне за допомогою коефіцієнту випередження. **Коефіцієнт випередження** визначається як відношення наступних темпів зростання до попередніх, тобто

$$K_i^{вип} = \frac{T_i}{T_{i-1}}.$$

Аналізуючи цей коефіцієнт, можна зробити висновок про збільшення або зменшення темпів зростання. Якщо $K_i^{вип} > 1$, то має місце прискорення темпів зростання. Якщо ж $0 < K_i^{вип} < 1$, то має місце уповільнення темпів зростання.

Коефіцієнти випередження також використовуються при порівняльному аналізі декількох часових рядів. Для цього досліджувані ряди зазвичай зводяться до однієї основи шляхом розрахунку базисних темпів зростання з однаковою за часом базою для порівняння всіх рядів. Це дозволяє наочно побачити, для якого ряду інтенсивність зміни досліджуваних показників є найбільшою. Порівнюючи далі найбільші темпи зростання з найменшими, визначаються коефіцієнти випередження в розвитку одного явища відносно іншого [11].

Приклад 2.3. Розрахувати та проаналізувати показники динаміки обсягу випуску продукції підприємства за 5 років, дані про які містяться в наступній таблиці

Період	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
Вироблено продукції (тис. од.)	20	25	35	40	50

Розв'язання. Дані розрахунків показників динаміки зручно також подавати у вигляді таблиці.

Період	Вироблено продукції (тис. од.)	Абсолютні прирости (тис. од.)		Темпи зростання (%)		Темпи приросту (%)		Абсолютне значення 1% приросту (тис. од.)
		базисні	ланцюгові	базисні	ланцюгові	базисні	ланцюгові	
t_0	20			100				
t_1	25	5	5	125	125,0	25	25	0,20
t_2	35	15	10	175	140,0	75	40	0,25
t_3	40	20	5	200	114,3	100	14,3	0,35
t_4	50	30	10	250	125,0	150	25	0,40
Разом	170		30					

Даний приклад показує, що однаковий за величиною абсолютний приріст може відповідати різній інтенсивності зміни рівнів значення показника. За даними наведеної розрахункової таблиці за періоди t_1 і t_3 абсолютні зміни обсягу випуску продукції були однаковими (ланцюгові показники за ці періоди дорівнюють 5 тис. од.). Однак інтенсивність зростання обсягу виробленої продукції в ці періоди була різною: за період t_1 приріст в 5 тис. од. Порівняно з попереднім періодом склав 25 %, а за період t_3 порівняно з попереднім періодом – всього лише 14,3 %. Аналогічно однаковий абсолютний приріст 10 тис. од. для періодів t_2 і t_4 відповідає різній інтенсивності зростання: за період t_2 приріст порівняно з попереднім періодом склав 40 %, а за період t_4 порівняно з попереднім періодом – всього лише 25 %.

Також дані наведеної розрахункової таблиці показують, що найбільшій інтенсивності зростання було досягнуто за період t_2 , коли темп зростання склав 140 % або в 1,4 рази перебільшив рівень попереднього періоду. Цього висновку можна дійти на основі розрахунків ланцюгових темпів зростання за розглянуті періоди. Базисний темп зростання за весь проміжок часу від t_0 до t_4 склав 250 % (в якості бази порівняння прийнятий початковий період t_0).

Найбільший ланцюговий темп приросту спостерігається за період t_2 . Він склав $(10:25) \times 100 \% = 40 \%$, тобто за період t_2 обсяг виробленої продукції порівняно з періодом t_1 збільшився на 40 %. При цьому за останній період t_4 цей приріст порівняно з попереднім періодом t_3 склав всього лише 25 %, але за весь розглянутий проміжок часу (базисний темп приросту для останнього періоду t_4) приріст виробництва продукції склав 150 %.

Абсолютне прискорення випуску продукції має місце лише в періоди t_2 і t_4 . Для цих періодів абсолютне прискорення склало $\Delta_i^{abs} = 10 - 5 = 5$ тис. од. Відносне прискорення має місце t_2 , коли темп зростання збільшився на 15 відсоткових пунктів порівняно з періодом t_1 ($\Delta_2^{\%} = 140 - 125 = 40 - 25 = 15$) та в періоді t_4 , коли темп зростання збільшився на 10,7 відсоткових пунктів порівняно з періодом t_3 ($\Delta_4^{\%} = 125 - 114,3 = 25 - 14,3 = 10,7$). Згідно з коефіцієнтом випередження, для цих періодів має місце прискорення

$$K_2^{\text{вип}} = \frac{140}{125} = 1,12 > 1 \quad \text{і} \quad K_4^{\text{вип}} = \frac{125}{114,3} = 1,09 > 1.$$

Це означає, що за період t_2 темп зростання був у 1,12 рази більшим, ніж за період t_1 , а за період t_4 темп зростання був у 1,09 рази більшим, ніж за період t_3 . Для періоду t_3 має місце уповільнення темпів зростання, тому що

$$K_3^{\text{вип}} = \frac{114,3}{140} = 0,82 < 1.$$

Ця величина означає, що за період t_3 темп зростання знизився у 1,22 рази ($1:0,82 = 1,22$) порівняно з періодом t_2 .

Між ланцюговими та базисними величинами зміни значення досліджуваного показника існує взаємозалежність [11].

- сума ланцюгових абсолютних приростів дорівнює базисному абсолютному приросту. В прикладі 2.3 в підсумковому рядку показаний накопичений приріст за весь розглянутий проміжок часу. Його величина складає 30 тис. од. і збігається з базисним абсолютним приростом для останнього періоду t_4 ;
- добуток ланцюгових коефіцієнтів зростання дорівнює базисному коефіцієнту зростання за останній період, тобто за весь розглянутий проміжок часу. Звідси випливає, що ділення один на другий базисних коефіцієнтів зростання, що розташовані у сусідніх рівнях, дорівнює ланцюговим коефіцієнтам зростання. Із прикладу 2.3 маємо:

$$K_1^s \times K_2^s \times K_3^s \times K_4^s = 1,25 \times 1,40 \times 1,143 \times 1,25 = 2,5 .$$

В той же час 250 % - базисний показник зростання для останнього періоду t_4 , тобто за весь розглянутий проміжок часу. Одночасно, наприклад,

$$\frac{K_3^0}{K_2^0} = \frac{2}{1,75} = 1,143 = K_3^s .$$

Взаємозв'язок ланцюгових та базисних коефіцієнтів зростання дозволяє при аналізі динаміки розвитку системи або об'єкта за потреби переходити від ланцюгових показників до базисних та навпаки;

- темپ приросту пов'язаний з темпом зростання наступним співвідношенням:

$$\Delta T_i = T_i - 100 .$$

У випадку, коди розраховуються коефіцієнти приросту, користуються формулою

$$\Delta K_i = K_i - 1 .$$

Із розрахункової таблиці прикладу 2.3 можна побачити, що темпи приросту менші за темпи зростання за той же період саме на 100 (для коефіцієнтів зростання та приросту ця різниця складає рівно одиницю). Враховуючи це співвідношення, в розрахункових таблицях зазвичай наводиться лише один з цих показників – або темп зростання, або темп приросту. Знаючи ланцюгові темпи приросту, можна також визначити базисний темп приросту. Для цього необхідно від темпів приросту перейти до темпів зростання, а потім до коефіцієнтів зростання і далі скористатися вказаним вище взаємозв'язком коефіцієнтів зростання [11];

- значення ланцюгових темпів зростання, розрахованих кожний відносно своєї бази порівняння, розрізняються не лише відсотковими пунктами, але й величиною абсолютного значення 1 % приросту. Тому додавати або віднімати ланцюгові темпи приросту неможна [7].

2.9. Основи теорії корисності

Своїм походженням термін «корисність» зобов'язаний англійському соціологу Дж. Бентаму. Прибічники цієї теорії зсунули предмет дослідження із сфери виробництва до сфери обігу. В основі ціни згідно з цією теорією лежить корисність, ступінь якої кожний учасник обміну визначає, виходячи із власних суб'єктивних уявлень. Безпосередніми попередниками теорії корисності були роботи німецького економіста Г. Госсена. Він виходив з того, що корисність – суб'єктивна категорія,

а споживання є єдиним гідним об'єктом для економічного дослідження. Він сформулював два закони, що описують взаємозв'язок корисності деякого товару, наявного запасу цього товару та ступеня насиченості потреби в цьому товарі [33].

Перший закон Госсена. *При послідовному споживанні корисність кожної наступної одиниці товару буде нижчою за попередню.*

Другий закон Госсена. *За наявності певної кількості різних продуктів споживач протягом даного обмеженого періоду часу може спожити їх в різних комбінаціях, одна з яких має бути найвигіднішою, такою, що приносить максимум задоволення, що досягається при встановленні рівності предільних корисностей всіх продуктів.* Ціна товарів та кількість грошей – головні чинники, що обмежують споживання. Тому оптимальним буде той альтернативний варіант споживання, за якого досягається рівність між предільними корисностями, які мають бути отриманими від останніх грошових одиниць, що були витрачені на придбання окремих товарів [34].

Предільна корисність є тією ціною, за якою споживач згоден придбати товар. Якщо оцінка споживача вища за фактичний рівень цін, то в цьому випадку попит на товарному ринку перевищує наявну пропозицію, і тому має місце процес недоспоживання. В протилежному випадку, тобто якщо оцінка споживача є нижчою за фактичний рівень цін, стан, що склався на ринку, відповідає ситуації перевиробництва. Якщо ж предільна корисність збігається з фактичною ціною, то на товарному ринку спостерігається рівновага.

Корисність товарів може бути класифікованою з різних точок зору [33].

1. **Загальна та предільна корисність.** *Загальна (сукупна) корисність* – це задоволення, яке можна отримати від певного набору товарів та послуг. *Предільна корисність* – це приріст, збільшення загальної корисності в результаті придбання додаткової одиниці даного товару.
2. **Додатна та від'ємна корисність.** Якщо велика кількість товару є переважною за меншу, то це є повноцінний товар з *додатною* корисністю. Такий стан є характерним для більшості товарів. Якщо ж справи йдуть навпаки, то товар є неповноцінним, з *від'ємною* корисністю. В якості прикладу можна навести швидкопсовані види продовольства.
3. **Кількісна та порядкова корисність.** *Кількісна корисність* полягає в можливості не лише визначити, що товар *A* є кориснішим за товар *B*, але й наскільки він корисніший. Однак знайти якісь об'єктивні одиниці вимірювання корисності дуже складно. Через ранжування корисностей може бути виділена *порядкова корисність*, що характеризує відносну корисність одного товару порівняно з іншими.
4. **Абстрактна та конкретна корисність.** *Абстрактна (родова) корисність* – це здатність товару задовольняти якусь потребу людини. *Конкретна корисність* є суб'єктивною оцінкою користі даного екземпляру даного товару для даного споживача (наприклад, корисність не просто окулярів, а даних окулярів для даної людини).

К. Менгер першим сформулював теорію корисності та здійснив спробу показати залежність корисності від рідкості предметів споживання (передбачається ринок з фіксованою товарною пропозицією). За обмеженості ресурсів перед споживачем стає проблема, як найкращим чином розподілити свої кошти для задоволення потреб. Менгер визначав цінність як судження, яке мають люди, що здійснюють господарчу діяльність, про значення наявних у них товарів. Інакше кажучи, цінності не можуть існувати поза свідомістю суб'єктів господарювання. Шкалу Менгера побудовано за принципом убутної корисності (перший закон Госсена). Вона призначена пояснити, чому товари меншої родової корисності можуть мати більшу цінність (це пояснюється розташуванням кожного товару на шкалі корисності та ступенем насиченості цим товаром) та проілюструвати оптимальний вибір за принципом здійснення рівності предільних корисностей товарів різного роду (другий закон Госсена). В силу того, що передбачається, що всі включені в шкалу товари мають

однакову ціну, то споживач, маючи обмежений споживчий фонд, отримує максимальне задоволення своїх потреб за умови рівності предільної корисності та придбаних товарів [33].

Однак модель предільної корисності є умовною та обмеженою.

По-перше, механізм порівняння предільної корисності діє в шкалі Менгера за припущення вже наявної ціни та заданого доходу споживачів. Таким чином, відкидається основне положення про визначення ціни предільною корисністю. Ймовірно, що й самі суб'єктивні оцінки у вигляді предільної корисності обумовлені рівнем цін та величиною доходу. В результаті отримуємо замкнене коло: ціни виводяться із суб'єктивних оцінок, які самі, у свою чергу, залежать від цін.

По-друге, числові позначення корисності товарів не містять реального змісту, носять довільний характер, відображаючи відсутність об'єктивних одиниць вимірювання суб'єктивної цінності.

Суб'єктивна цінність – це особиста оцінка товару споживачем та продавцем. **Об'єктивна цінність** – це ціни, які формуються в результаті існування конкуренції на ринку. В ринковій економіці ціни споживчих товарів та попит на них залежать від того, які думки мають майбутні покупці з приводу корисності цих товарів. Такі оцінки неможливо відокремити від кількості, в якій ці товари надходять до ринку. Кількісний підхід заснований на припущенні про можливість вимірювання корисності різних товарів в деяких гіпотетичних одиницях – ютілах (від англійського *utility* – корисність). Тоді основою ціни є предільна корисність [33, 34]:

$$MU_i = \frac{\Delta TU_i}{\Delta q_i} = \frac{\partial U_i}{\partial q_i},$$

де MU_i – предільна корисність i -го товару,

U – загальна корисність i -го товару,

ΔTU_i – приріст загальної корисності i -го товару,

Δq_i – приріст обсягу споживання i -го товару.

З урахуванням цього співвідношення другий закон Госсена можна записати у вигляді формули

$$\frac{MU_i}{p_i} = \frac{MU_j}{p_j} = \lambda,$$

де MU_i і MU_j – предільні корисності відповідно i -го та j -го товарів,

p_i і p_j – ринкові ціни відповідно i -го та j -го товарів,

λ - деякий коефіцієнт, що характеризує предільну корисність грошей.

Після перетворень такий запис другого закону Госсена набуває вигляду, що має назву формули Л. Клейна [33]:

$$\frac{MU_i}{MU_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Ця формула описує деякі покупні сприйняття цін в реальній практиці. З одного боку, суб'єктивні оцінки корисності товарів, що зіставляються, співвідносяться у свідомості як їх ціни. Але з іншого боку, за співвідношенням цін відбувається порівняння якості, технічного рівня, споживчих властивостей, корисності різних товарів. Ця обставина використовується, зокрема, в ціновій політиці через «сигналізування цінами». Висока ціна для недостатньо компетентного покупця зазвичай свідчить про високу якість пропонованого товару. І навпаки, низька ціна психологічно пов'язується з низькою якістю [33].

Незважаючи на те, що всі положення теорії корисності характеризуються абстрактністю, штучністю та умовністю, вони зовсім не є некорисними для прийняття рішень та розробки прогнозів на

практиці. Компоненти цієї теорії обґрунтовують ціноутворення, що базується на попиту або ціннісному підході. Зокрема, практичні застосунки можна виявити в наступних аспектах [33]:

- покупні мотиви, психологію сприйняття ціни слід розглядати в якості важливого чинника ціноутворення;
- виробники та продавці мають вивчати своїх ймовірних споживачів-покупців, виявляти їх потреби. Треба виробляти лише те, що можна продати. При продажу треба емпірично виявляти (через експериментальну реалізацію за різними цінами) переваг покупців, конкретні корисності товарів;
- покупець завжди намагається досягти оптимального співвідношення «цінність/ціна»;
- в практичному ціноутворенні дуже важливо враховувати ступінь насиченості споживання тими чи іншими товарами чи послугами, а також масштаби та динаміку доходів споживачів.

Контрольні запитання

1. Що таке прогноз?
2. Що таке економічне прогнозування?
3. Назвіть етапи процесу прогнозування.
4. Які існують форми передбачення?
5. Що складає початкову базу побудови гіпотези?
6. Як характеризуються об'єкти на рівні гіпотези?
7. На яких параметрах ґрунтується прогноз?
8. Назвіть особливості планування.
9. За якими ознаками відбувається класифікація прогнозів?
10. Які бувають прогнози в залежності від об'єктів прогнозування?
11. Які бувають прогнози в залежності від масштабів прогнозування?
12. Які бувають прогнози за тривалістю часу упередження?
13. Які бувають прогнози в залежності від характеру досліджуваного об'єкта?
14. Які бувають прогнози за функціональною ознакою?
15. Що таке виробнича функція?
16. Назвіть основні аналітичні показники динаміки розвитку економічної системи.
17. Сформулюйте основні закони теорії корисності.
18. Дайте означення економіко-математичної моделі.
19. На чому ґрунтується економетричне моделювання?
20. Як класифікуються економіко-математичні моделі з урахуванням чиннику часу?
21. Які ви знаєте види економетричних моделей?
22. Що таке факторні моделі?
23. За якою ознакою класифікуються факторні моделі?
24. Наведіть приклади багатофакторних моделей.
25. Що таке структурні моделі?
26. Яку форму мають структурні моделі?
27. Наведіть приклади структурних моделей.
28. Які моделі є неокейнсіанськими?
29. Які моделі є неокласичними?
30. Назвіть класифікаційні ознаки для моделі економіки країни.
31. Які бувають прогнози за метою побудови?

32. Які бувають прогнози за характером і повнотою відображення особливостей об'єкта прогнозування?
33. Які бувають прогнози за використанням математичним апаратом?
34. Які існують методи розрахунку ВВП?
35. Наведіть формулу розрахунків моделі Даммара-Харрода.
36. За якою формулою обчислюється залежність динаміки коефіцієнту капіталовіддачі від капіталоозброєності та продуктивності праці?
37. Наведіть формулу розрахунків моделі ВВП на душу населення.
38. Що дозволяє обчислити модель розрахунку ВВП на душу населення?
39. Наведіть формулу розрахунків моделі Самуельсона-Хікса.
40. Які показники використовуються в неокласичних моделях?
41. Які підходи використовуються при прогнозуванні обсягів грошової маси?
42. Наведіть формулу розрахунків обсягу грошової маси.
43. Дайте означення проміжного споживання.
44. Дайте означення валової доданої вартості.
45. Що таке валовий прибуток?
46. Що таке чистий прибуток?
47. Що таке валовий внутрішній продукт (ВВП)?
48. Як проводиться оцінка показника ВВП?
49. Що таке номінальний внутрішній продукт?

3. АНАЛІЗ ЧИННИКІВ ВПЛИВУ ТА СТАНУ СИСТЕМИ ПРИ ПРОГНОЗУВАННІ

3.1. Чинники, що впливають на результат прогнозування

Проблеми прогнозування економічних процесів відносяться до так званих погано визначених проблем, тому що причинно-наслідкові зв'язки цих процесів є достатньо складними для побудови задовільної теорії економічного розвитку. Тому пізнання реальної структури процесів полягає в складанні ряду наближень та виявленні причинно-наслідкових зв'язків між елементами системи, що пояснюють її поведінку. Рушійні сили розвитку не діють ізольовано, вони є взаємозалежними та взаємообумовленими. Фактичний розвиток економіки в цілому складається під впливом відхилень, що виникають під час реалізації планових рішень по керуванню відповідними процесами, що мають інерційний характер. Основними рушійними силами розвитку економіки є економічна доцільність, технічні можливості та соціальні потреби.

Розглянемо чинники зміни характеру розвитку економічного процесу [1].

1. Реалізація досягнень науково-технічного прогресу відбувається в часі та просторі і не може розглядатися ізольовано, без зв'язку з зовнішніми процесами та явищами. Характер впливу НТП на ефективність перетворення ресурсів в продукцію визначається типом і формою прогресу, масштабом досліджуваного об'єкта та його розташуванням на фазовій траєкторії розвитку. Роль впливу НТП на зміну характеру розвитку економічних процесів проявляється в якісній зміні умов їх перебігу.

2. Стадійність розвитку об'єкта досліджень або об'єктів системи (опанування, стабільне функціонування, старіння) обумовлює зміну характеру економічного розвитку в залежності від ступеню залучення ресурсів у виробництво і повноти їх використання.
3. Зміна природних умов впливає як на кількісні, так і на якісні показники, що характеризують розвиток. Їх дія в певній мірі еквівалентна стадійності розвитку.
4. Зміна масштабів виробництва та рівнів використання ресурсів загалом змінює не стільки якісну картину виробництва, як кількісну, що обумовлено стрибкоподібною зміною початкових умов функціонування.
5. Зміна якості організації та керування змінює, як правило, якісну природу структури розвитку.
6. Зміна зовнішніх умов функціонування економічного об'єкта позначається як на кількісному, так і на якісному розвитку процесу.
7. Чинник часу обумовлює як неоднорідність, так і нестабільність процесу розвитку.

Від повноти врахування цих чинників в моделюванні економічних процесів залежить якість прогнозів. Модель може виступати як надійний інструмент прогнозу та керування лише в тому випадку, якщо вона достатньо адекватно відображає причинно-наслідкові зв'язки. Тому зсуви та зміни у виробничих умовах і нормативах, вплив науково-технічного прогресу на перебіг економічних процесів, зміна природного середовища та рівня запасів мають визначатися на основі методів прогнозування, що дозволяють враховувати ці сукупні взаємообумовлені зміни.

В залежності від характеристик процесу, інтервалу та цілей прогнозування здійснюється вибір класу моделей прогнозу. Прогнозування економічних процесів неможливе без розглядання таких питань, як **структура соціально-економічної системи**, яка розуміється як сукупність елементів, з яких вона складається, та їх взаємозв'язків, що проявляються у відношеннях з приводу виробництва, обміну, розподілу та споживання. Під **структурою економічних процесів** розуміють те відносно стале, незмінне, що зберігається в економічній системі при зміні чинників економічного розвитку [1].

Чим складніше система, тим більше вона містить різнорідних елементів, тим вона більш інерційна. При цьому передбачається, що розвиток економічних процесів має еволюційний, а не революційний характер, при якому зміна стану не відбувається стрибкоподібно. Цей висновок підтверджує можливість і доцільність прогнозування розвитку економічних процесів, що відбуваються в складних економіко-соціальних системах на основі методів прогнозування, що використовують інформацію про минулий розвиток системи. Одним із чинників, що впливає на результати прогнозування, є сама прогнозуюча система. **Прогнозуюча система** – це сукупність методів, прийомів та процедур, що дозволяють отримати прогнози при заданій цільовій функції розвитку об'єкта прогнозування, при заданому обсязі прогнозної інформації. Вони є частиною систем прогнозування, що забезпечують вирішення задач планування та управління перспективним розвитком.

Прогнозуючі системи виконують дві основні операції [1]:

- *формування множини альтернатив об'єктів прогнозування;*
- *порівняння та вибір альтернатив.*

Поєднання цих операцій визначає комплексну проблему системного прогнозування, засобом вирішення якої є прогнозуюча система.

В прогнозуючих системах реалізуються такі основні принципи:

- *взаємний зв'язок та взаємна підпорядкованість прогнозів різних рівнів ієрархії об'єкта прогнозування, зовнішнього оточення, різних аспектів дослідження об'єкта прогнозування;*
- *узгодженість нормативних та дослідницьких прогнозів;*
- *неперервність прогнозування, яка потребує коригування прогнозів в ході отримання нової інформації.*

В прогнозуючій системі остаточний вибір варіанту рішення науково-технічної проблеми не виробляється, а визначається сукупність оптимальних альтернатив за критеріями переваги. Блок-схему прогнозуючої системи подано на рис. 3.1.

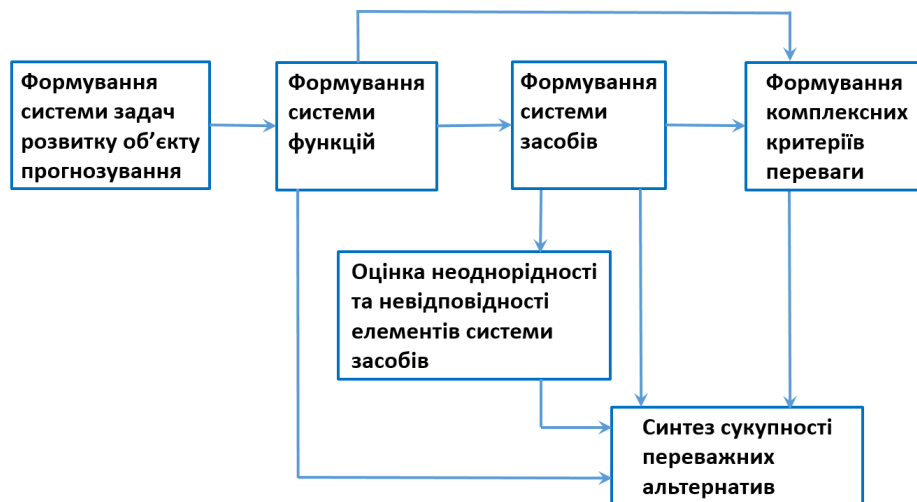


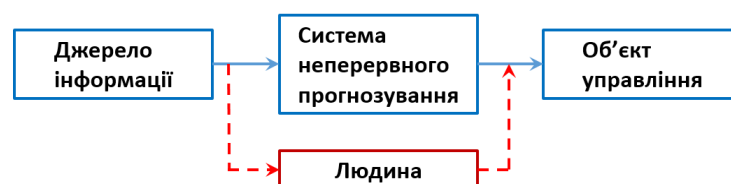
Рис. 3.1 – Схема побудови прогнозуючої системи

Остаточний вибір здійснюється або введенням операцій оптимізації параметрів всередині сукупності найкращих альтернатив, або введенням евристичних процедур вибору. Зв'язок із зовнішнім середовищем визначається:

- сукупністю тенденцій розвитку досліджуваної системи, її функціонуванням в системах вищого порядку;
- переліком та характеристиками критеріїв переваги;
- комплексом заходів, спрямованих на ліквідацію стримування виконання цільових вимог системи шляхом розвитку елементів, здатних виконувати певні завдання.

В окремих випадках необхідне впровадження неперервних прогнозуючих систем. Існують три основних класи неперервних систем:

- **системи, що працюють в реальному часі** – це системи, до яких висуваються жорсткі вимоги щодо часу реакції системи на зміни об'єкта.



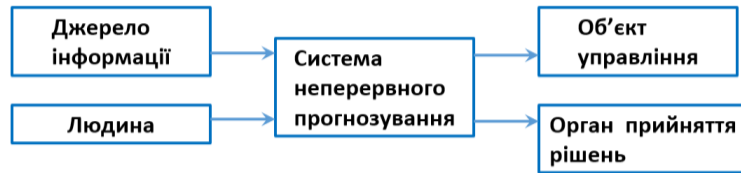
Умова: $\Delta t_{\text{пр}} = \Delta t_{\text{кер}}$, де

$\Delta t_{\text{пр}}$ – час прогнозу;

$\Delta t_{\text{кер}}$ – час керування.

Тому людина практично виключається із процесу створення прогнозів та вироблення управлінських рішень і долучається до цих процесів лише у надзвичайних ситуаціях.

- **системи, що працюють в квазіреальному часі** – це системи, до яких висуваються менш жорсткі вимоги щодо часу розробки прогнозів та часу реакції системи на зміни об'єкта, але більш високі вимоги відносно своєчасного попередження та глибини ретроспективного аналізу.

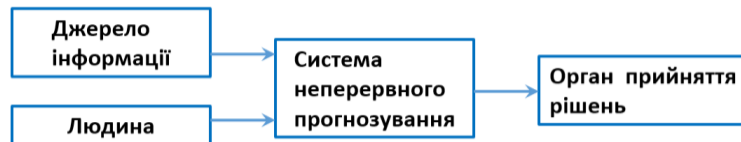


Умова: $\Delta t_{\text{пр}} = \Delta t_{\text{кер}}$, де

$\Delta t_{\text{пр}}$ – час прогнозу;

$\Delta t_{\text{кер}}$ – час керування.

- **системи, що працюють в режимі пакетної обробки інформації** – це системи, в яких вимоги стосовно часу практично відсутні, але висувуються високі вимоги до своєчасності попередження, до застосованих методів (прогнози для регіону, країни тощо).



3.2. Аналіз ситуації або стану системи

Перспективна інформація (прогноз) носить ймовірнісний характер і має певну достовірність в межах довірчого інтервалу. Збільшення глибини прогнозу при постійній довірчій ймовірності призводить до розширення довірчого інтервалу оцінки. Таким чином, чим більший інтервал прогнозування, тим меншою є та евристична самоорганізація, що дозволяє обирати кращі з точки зору прогнозу змінні, здійснюючи в такий спосіб відкидання «сумнівних» показників. Модель, яку отримано в результаті застосування даного методу, не обов'язково відображає реальні взаємні зв'язки між показниками. Іншими словами, в модель, що описує систему, можуть ввійти показники, що відображають супутні явища, які не перебувають в причинно-наслідковій залежності від досліджуваного процесу, але відображають певну глибинну сутність, зрозуміти або оцінити яку за деяких причин неможливо. Одним із шляхів вирішення цієї проблеми в прогнозуванні та в прийнятті рішень є урахування зовнішніх умов (прогнозного фону) [1].

Прогнозний фон – це сукупність об'єктів і зв'язків між ними, яка визначає умови існування та функціонування об'єкта дослідження. Використання інформації прогнозного фону для побудови моделі процесу економічного розвитку дозволяє суттєво збільшити точність прогнозу. Крім того, модель, що задовольняє вимогам прогнозного фону, відповідає і принципу верифікованості прогнозу, тобто його певній достовірності і обґрунтованості. В якості прогнозного фону для прогнозування економічних процесів можуть служити відомі економічні закони та співвідношення (наприклад: темпи зростання середньої заробітної плати повинні бути меншими за темпи зростання продуктивності праці; фондівдача дорівнює відношенню об'єму виробленої продукції до вартості фондів тощо). У випадку нормативного прогнозування функції прогнозного фону виконують обмеження на потребу в ресурсах, виробничі потужності та ресурси часу, тобто обмеження на величини цих показників в діапазоні часу упередження.

На якість прогнозування розвитку економічних систем великий вплив має об'єм ретроспективної інформації. Тому збільшення точності та достовірності прогнозу може досягатися шляхом чотирьох чинників [1]:

- більш глибокої ретроспективи;
- збільшення переліку показників (чинників), які характеризують процеси, що прогножуються;

- вибору класу моделей прогнозу, що забезпечує можливість описання процесу розвитку системи;
- визначення методів прогнозування.

Для економічних процесів є характерними малі вибірки інформації (за 10-15 років), а збільшити глибину ретроспективи неможливо через якісь обставини. З одного боку, умови збереження та накопичення економічної інформації через її великі обсяги та різний характер показників викликають великі складнощі в отриманні ретроспективних даних навіть за 15 років. З іншого боку, в більшості випадків інформація, яку зібрано за період, що перевищує 15 років, виявляється нерепрезентативною за низкою причин [1]:

- *введення нових цін на продукцію та методик розрахунку показників, несумісність зібраної інформації;*
- *зміна рівнів технічного оснащення протягом тривалого часу призводить до якісно нових закономірностей;*
- *зміна умов використання матеріальних і трудових ресурсів якісно змінює процес функціонування системи;*
- *введення нових об'єктів та нових потужностей, по суті, змінює саму систему тощо.*

Ці причини призводять до того, що відібрана інформація не буде відображати реальної динаміки процесу, а використання низки поправочних коефіцієнтів для приведення її до зіставного вигляду вносить додаткову системну помилку в дані. Крім того, цінність ретроспективної інформації в процесі збільшення її давності зменшується, знижується також і її прогнозна сила, тобто відбувається дисконтування ретроспективної інформації. Таким чином, чим більша глибина ретроспективи, тим менш надійними будуть вихідні дані, а в підсумку – менш точними прогнози. В більш давній інформації міститься менше паростків майбутнього і більше спадщини минулого. Здавалося б, виходом із такої ситуації може стати подальше квантування інформації за рахунок подрібнення інтервалів часу. Так, річну інформацію можна подати в кварталному розрізі, кварталну – в місячному тощо. Однак таке збільшення об'ємів інформації призведе не до підвищення точності моделювання процесів, а лише до зниження точності прогнозу через посилення впливу сезонних чинників, прояву специфіки виробництва та інших причин, дія яких не проявилася в інформації, наприклад, за рік. Таким чином, для підвищення точності прогнозу економічних процесів збільшення глибини ретроспективи або квантування інформації не дає бажаного ефекту.

В умовах маленької вибірки, якою є ретроспективні дані за техніко-економічними показниками розвитку економічної системи, важливим є все: об'єм інформації, причинно-наслідковий зв'язок між показниками, прогнозний фон, що виражається у використанні знань економічних законів і умов протікання економічних процесів, а також в урахуванні обмежень, що накладаються на показники, системні особливості досліджуваного процесу. Використання всієї інформації про економічний процес розширює можливості в ідентифікації системи і отриманні обґрунтованих, збалансованих прогнозів на довгострокову перспективу. Загальні закономірності зміни цілісної системи економічних показників приховані як в їх динаміці, так і в притаманних їм обмеженнях, в їх взаємозв'язку. Чим більша кількість вагомих чинників, що впливають на економічний процес, буде врахована в процесі моделювання розвитку економічної системи, тим більша кількість елементів загальної закономірності буде виявленою. Іншими словами, відносну бідність ретроспективної інформації можна компенсувати багатством використаних чинників та урахуванням властивостей зв'язків між ними (прогнозного фону) [1].

Таким чином, можна зробити висновок про те, що прогнозування окремих показників без урахування системи взаємозв'язків між цими показниками не дозволяє вирішити проблему побудови моделі, яка була б адекватною досліджуваному економічному процесу, в якому показники взаємно

зумовлені і взаємно незалежні. Саме цим в основному й відрізняється прогнозування соціально-економічних процесів від прогнозування інших процесів, в яких чинники є незалежними. Висока точність апроксимації моделі на ретроспективних даних, навіть якщо оцінка її параметрів відбувалася найсучаснішими методами, не може бути гарантією обґрунтованості самого прогнозу, тому що на ретроспективній ділянці всі вимоги прогнозного фону виконуються. Врахувати ж їх на довгострокову перспективу при прогнозуванні окремих показників неможна саме тому, що прогнозувалася не система, а окремі показники, незалежно від того, які використовувалися методи синтезу системи на основі рівнянь за показниками, що прогножуються.

Контрольні запитання

1. Що таке прогнозуюча система?
2. Які принципи реалізуються в прогнозуючих системах?
3. Чим визначається зв'язок системи з зовнішнім середовищем?
4. Назвіть основні класи безперервних систем прогнозування.
5. Наведіть схему та умову системи, що працює в реальному часі.
6. Наведіть схему та умову системи, що працює в квазіреальному часі.
7. Наведіть схему системи, що працює в режимі пакетної обробки інформації.
8. Дайте означення прогнозного фону.
9. За рахунок чого може бути досягнуте збільшення точності та достовірності прогнозу?
10. Чому інформація, яку зібрано за період більший, ніж 15 років, не є репрезентативною?
11. Чому подальше квантування інформації не є доцільним?
12. В чому полягає основна відмінність прогнозування соціально-економічних процесів від прогнозування решти процесів?

4. МЕТОДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ПЕРЕВІРКИ ВХІДНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

4.1. Кількість вхідної інформації

Незважаючи на існуючі національні та регіональні розбіжності в інформаційному забезпеченні менеджменту та в економічній та фінансовій звітності, можна сформулювати загальні вимоги, що висувуються до інформації для управління та прогнозування. Сукупність цих вимог передбачає опис характеристик якості інформації як початкового матеріального ресурсу для дослідження процесів прогнозування з різних боків. При дослідженні інформації зазвичай використовують два основних підходи [14]:

- *атрибутивний*, який трактує інформацію як властивість матерії, що рухається, яка полягає в структурності, упорядкованості, різноманітності її станів. Визнання загальності того боку реальних об'єктів та процесів, який відображається в понятті «інформація» як прояв атрибутивних властивостей об'єктивної реальності, – є суть цієї концепції, її відмінна риса;
- *функціонально-кібернетичний*, який розглядає інформацію як властивість певного класу матеріальних систем, яка виникає та збагачується в процесі становлення та розвитку цих систем, їх функціональної взаємодії та взаємодії із зовнішнім світом.

Формалізація та аналіз інформації як об'єкта дослідження, з одного боку, та інформаційних ресурсів, що приносять деяку користь споживачу, – з іншого, полягає у використанні змістовних

уявлень, що склалися в прикладній теорії інформації, для побудови обґрунтованих та ефективних методів та систем її обробки. На теперішній час вже розроблено багато моделей та теорій семантичної інформації, заснованих на різноманітних уявленнях про її природу. Центральним питанням теорії завжди є питання про кількісне подання інформації. І хоча кількісний, так званий чисельний, бік питання є по суті лише математизацією категорії кількості, тим не менш можливості кількісного оцінювання характеристик явищ можуть суттєво сприяти їх вивченню та використанню. Однак труднощі полягають в тому, що дана характеристика кількості інформаційних процесів в силу її специфіки не піддається прямому вимірюванню, як, наприклад, характеристики фізичних явищ. Дуже складно сконструювати міру інформації, що є адекватною до об'єктивних уявлень про інформацію. Прямі вимірювання тут неможливі, і це дає привід заперечувати використання в інформаційній (семантичній) науці поняття міри інформації, яка приписує кожній одиниці інформації деяке число, що є її центральною характеристикою [14].

В загальному випадку інформація для прогнозу має містити:

- мету і задачу прогнозу, зміст і форму прогнозної інформації, вимоги до її достовірності;
- інформацію про механізм функціонування і розвиток об'єкта (теоретичний опис, закономірності, формальне подання механізму);
- інформацію про поточний стан об'єкта;
- інформацію про ретроспективний розвиток об'єкта і основні тенденції;
- інформацію про чинники і умови, що визначають функціонування та напрямки розвитку об'єкта.

Конкретна форма і зміст цієї інформації визначаються, з одного боку, вимогами до прогнозу, а з іншого – природою об'єкта прогнозування та рівнем знань про нього. В залежності від мети та задач прогнозу можуть коригуватися в процесі дослідження. Розглянемо аспект інформаційного забезпечення прогнозу, пов'язаний з кількістю інформації, за умови, що інформація за своїм змістом відповідає вимогам прогнозу. Фактично, це питання про залежність ступеня невизначеності прогнозу від кількості початкової інформації. Будемо вимірювати невизначеність прогнозу ентропією E , тобто кількістю прогнозної інформації про майбутній стан об'єкта, яку не вдалося отримати в результаті досліджень. Майбутній стан системи описується обраним набором параметрів, точні значення яких залишаються невідомими. В залежності від властивостей об'єкта, кількості та змісту початкової інформації, способів прогнозування та інших умов вдається визначити лише той чи інший інтервал їх можливих значень. В сукупності ці інтервали можливих значень параметрів описування об'єкта створюють область його можливих станів, що може бути охарактеризоване кількістю інформації, що вимірюється ентропією E . Чим точніший прогноз, тим меншою є область можливих станів об'єкта і, відповідно, меншою є ентропія E , і навпаки [1].

Залежність невизначеності прогнозу від кількості початкової інформації, тобто функція $E_j = f(I)$ в загальному вигляді може бути поданою гіпотетичною залежністю, зображеною на рис. 4.1.

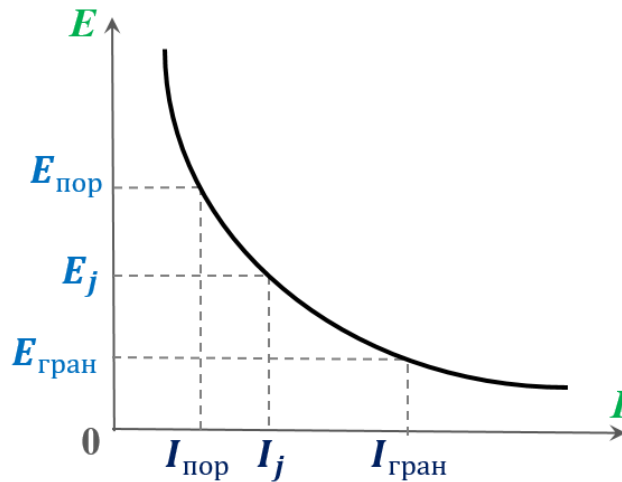


Рис. 4.1 – Гіпотетична залежність невизначеності прогнозу від кількості початкової інформації

де $I_{\text{пор}}$ – мінімальна (порогова) кількість початкової інформації, яка є необхідною для прогнозу.

Якщо кількість початкової інформації менша за $I_{\text{пор}}$, ніяких припущень відносно майбутнього стану об'єкта зробити неможливо.

$I_{\text{гран}}$ – максимальна (гранична) кількість інформації, яка може бути використаною при прогнозі, коли її подальше збільшення не зменшує невизначеність прогнозу.

Реальна невизначеність прогнозу $E_{\text{дост}}$ знаходиться в інтервалі $0 \leq E_{\text{гран}} \leq E_j \leq E_{\text{пор}}$, где $E_{\text{пор}}$ означає відсутність прогнозової інформації, тобто $E_{\text{пор}}$ – це ентропія області визначення параметрів майбутнього стану об'єкта. $E_{\text{гран}}$ – залишкова невизначеність прогнозу, яка не може бути визначена ніякими об'єктивними методами. В реальних дослідженнях залишкова невизначеність прогнозу E_j завжди більша за граничне значення $E_{\text{гран}}$. Вона залежить від багатьох чинників, в тому числі й від застосованого методу прогнозування. Кожному методу необхідні свої власні зміст та кількість інформації, тому кожному з них відповідає і своя власна залежність $E_j = f(I)$. Ця залежність відображає загальну властивість, яка полягає в тому, що збільшення кількості інформації впливає на зменшення невизначеності прогнозу на первинному етапі її накопичення, потім цей ефект зменшується, а після досягнення $I_{\text{гран}}$ зникає зовсім. Питання оцінки початкової інформації для прогнозування є одним з основних в прогнозному дослідженні. Від того, наскільки об'єктивно та повно проведено оцінку початкової інформації, залежить вибір конкретного методу прогнозування та якість отриманого результату [1].

4.2. Оцінка вхідної інформації

Розглянемо сукупність статистичних критеріїв для оцінки вхідної інформації, що використовується при прогнозуванні на основі часових рядів. Для прогнозування є важливим *вибір інтервалів* між сусідніми рівнями ряду. При занадто великому інтервалі можуть бути втрачені деякі закономірності в динаміці показника. При занадто малому інтервалі збільшується обсяг обчислень, а також можуть з'являтися несуттєві деталі в динаміці процесу. Вибір інтервалу часу між рівнями ряду має вирішуватися індивідуально для кожного процесу, причому зручніше мати рівні, що розташовані на однаковій відстані один від одного [2].

Важливою умовою правильного відображення часовим рядом реального процесу розвитку є зіставність рівнів ряду. Для незіставних величин показника неможна проводити його прогнозування.

Важливою умовою будь-яких динамічних порівнянь є зіставність території рівнів динамічного ряду. Кордони територіальних одиниць країн, областей, районів протягом досліджуваного періоду змінюються внаслідок приєднання до них нових територій або відокремлення їх певної частини. В кожному окремому випадку питання зіставності розглядають в залежності від мети дослідження. Для зведення даних динамічного ряду до зіставного вигляду здійснюють перерахунок попередніх даних з урахуванням нових кордонів.

Статистичні дані, необхідні для побудови ряду динаміки, мають бути зіставними за колом охоплених об'єктів. Незіставність може бути наслідком переходу деяких об'єктів із одного підпорядкування в інше. Зіставність за колом охоплених об'єктів забезпечується змиканням динамічних рядів шляхом заміни абсолютних рівнів відносними.

В моментних рядах динаміки необхідно дотримуватися зіставності за критичним моментом реєстрації рівнів явищ, які схильні до сезонних коливань.

Рівні динамічного ряду мають бути зіставними за методом обчислення показників.

Статистичні дані динамічного ряду мають бути зіставними за періодами, або тривалістю часу. Щоб виявити закономірності розвитку явищ зі значними сезонними коливаннями, необхідно зіставляти між собою дані за одні й ті ж самі періоди часу, однакові за тривалістю. Наприклад, виробництво продукції за різні роки необхідно зіставляти лише за однойменні місяці (січень з січнем тощо). Також неможна зіставляти виробництво продукції за місяць і квартал, за квартал і півріччя тощо. Тобто інтервали часу, за які наведено дані динамічного ряду, мають бути рівними [3].

Часто статистичні величини виражають в різних одиницях, що призводить до незіставності динамічних рядів. Необхідно дотримуватися зіставності показників ряду за одиницями вимірювання величин, якщо ряд явищ описується паралельно в різних фізичних або облікових одиницях. Зіставність за одиницями вимірювання потребує, щоб рівні динамічного ряду завжди були виражені в однакових величинах. Статистичний аналіз такого ряду завжди доповнюють паралельним аналізом за іншими способами вимірювання. Незіставність рядів динаміки за одиницями вимірювання досліджуваних величин виникає внаслідок незіставності грошової оцінки (заміна грошової одиниці, інфляція, зміна курсу валют тощо). Для зведення до зіставного вигляду таких рядів динаміки всі попередні рівні досліджуваних ознак перераховують в чинну грошову оцінку.

Незіставність статистичних показників динаміки також може бути обумовлена різною структурою сукупності за декілька років. Для зведення даних таких рядів до зіставного вигляду використовують так звану стандартизацію структури (наприклад, стандартизовані коефіцієнти народжуваності, смертності, природнього зростання тощо). В якості стандартної структури використовують структуру певного періоду часу, а всі показники інших періодів розраховуються за цією структурою, що й робить такі показники зіставними.

Для забезпечення зіставності рівнів часового ряду можуть здійснюватися додаткові розрахунки. Одним із видів таких розрахунків є змикання рядів динаміки. Його зміст полягає в тому, що за період зміни методології розрахунку (наприклад, через зміни територіальних кордонів) для одного й того ж самого рівня ряду здійснюється подвійне оцінювання: за попередньою та за новою методикою (наприклад, в старих та нових кордонах), що дозволяє для цього періоду знайти співвідношення двох оцінок одного й того ж самого рівня і на його основі перерахувати рівні минулих періодів [11]. Для цього використовується коефіцієнт перерахунку

$$k = \frac{y_i^1}{y_i^0},$$

де y_i^0 – значення показника, розраховане за попередньою методикою,

y_i^1 – значення показника, розраховане за новою методикою,

i – період зміни методології розрахунку або вимірювання показника.

На цей коефіцієнт помножуються всі значення, розраховані за попередньою методикою. В результаті буде отриманий зімкнений ряд, на основі якого можна аналізувати та прогнозувати досліджуваний процес або явище.

Приклад 4.1. Є інформація про загальну чисельність зайнятих в регіоні за 7 років. В році t_5 адміністративні кордони регіону було змінено. Дані про загальну чисельність зайнятих в старих та нових кордонах наведені в таблиці.

Рік	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
В попередніх кордонах	570	565	550	520	500		
В нових кордонах					600	590	585

Зімкнути ці ряди, зводячи дані до зіставного вигляду. Проаналізувати отримані дані.

Розв'язання. Зміна адміністративних кордонів відбулася в році t_5 , тому саме за цей рік наявні дані, що є двома оцінками: загальна чисельність зайнятих в старих та в нових адміністративних кордонах регіону. Ґрунтуючись на цих двох оцінках, можна обчислити коефіцієнт перерахунку:

$$k = \frac{y_5^1}{y_5^0} = \frac{600}{500} = 1,2.$$

Помножуємо тепер на коефіцієнт $k = 1,2$ всі значення для минулих адміністративних кордонів. Наприклад, для року t_5 отримуємо зіставне значення $y_5^1 = 570 \times 1,2 = 684$. Таким чином, отримуємо зімкнений ряд, поданий наступною розрахунковою таблицею.

Рік	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
В попередніх кордонах	570	565	550	520	500		
В нових кордонах					600	590	585
Зімкнений ряд	684	678	660	624	600	590	585

Відповідь. Коефіцієнт перерахунку даних для приведення їх до зіставного вигляду дорівнює $k = 1,2$. На основі аналізу зімкненого ряду можна дійти висновку про тенденцію до зниження загальної чисельності зайнятих в регіоні.

Рівні часових рядів можуть мати **аномальні значення**. Поява таких значень може бути викликана помилками при зборі, записі або передачі інформації – це технічні помилки або помилки першого роду. Однак аномальні процеси можуть відображати реальні процеси, наприклад, стрибок курсу валюти або падіння курсу цінних паперів на фондовому ринку тощо. Такі аномальні значення відносять до помилок другого роду. Вони не підлягають усуненню [2].

Для виявлення аномальних значень рівнів часових рядів можна застосовувати **метод Ірвіна** [2]. Нехай є часовий ряд

$$y_t = y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n, \quad t = \overline{1, n}.$$

Метод Ірвіна передбачає використання наступної формули

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{s_y}, \quad t = \overline{1, n},$$

де s_y – середньоквадратичне відхилення часового ряду $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n$, обчислене, виходячи із формули для дисперсії (1.12):

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}.$$

Розрахункові значення $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ порівнюються з табличними значеннями критерію Ірвіна λ_α . Якщо яке-небудь із них виявляється більшим за табличне, то відповідне значення y_t рівня ряду вважається аномальним. Значення критерію Ірвіна для рівня значимості $\alpha = 0.05$ наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Критичні значення критерію Ірвіна

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_n	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

Після виявлення аномальних рівнів слід виявити причини їх виникнення. Якщо вони викликані помилками технічного порядку, то вони усуваються або заміною аномальних значень рівнів відповідними значеннями за кривою, що апроксимує даний часовий ряд, або заміною значення аномального рівня середнім арифметичним значенням двох сусідніх рівнів ряду, які були використані для обчислення відповідного значення λ_t . Помилки, що виникають через вплив чинників, що носять об'єктивний характер, усуненню не підлягають.

Приклад 4.2. Часовий ряд задано таблично:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	1,6	1,9	2,1	2,4	4,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,8

Перевірити його на наявність аномальних значень.

Розв'язання. Обчислимо середнє арифметичне значення рівнів ряду:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n} = \frac{29,1}{10} = 2,91.$$

Розрахунки для обчислення дисперсії будемо проводити також таблично.

t	y_t	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - \bar{y})^2$
1	1,6	-1,31	1,72
2	1,9	-1,01	1,02
3	2,1	-0,81	0,66
4	2,4	-0,51	0,26
5	4,5	1,59	2,53
6	2,8	-0,11	0,01
7	3,1	0,19	0,04
8	3,3	0,39	0,15
9	3,6	0,69	0,48
10	3,8	0,89	0,79
Σ	29,1		7,66

Тепер обчислимо середньоквадратичне відхилення для досліджуваного часового ряду:

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{7,66}{9}} = 0,92.$$

Дослідимо на аномальні значення точку $t = 2$.

$$\lambda_2 = \frac{|y_2 - y_1|}{s_y} = \frac{1,9 - 1,6}{0,92} = \frac{0,3}{0,92} = 0,32.$$

Для $n = 10$ $\lambda_{\text{табл}} = 1,5$. Отже, отримане розрахункове значення $\lambda_2 = 0,32 < 1,5 = \lambda_{\text{табл}}$. Це означає, що рівень $t = 2$ є нормальним.

Тепер дослідимо на аномальні значення точку $t = 5$.

$$\lambda_5 = \frac{|y_5 - y_4|}{s_y} = \frac{4,5 - 2,4}{0,92} = \frac{2,1}{0,92} = 2,28.$$

Отже, отримане розрахункове значення $\lambda_5 = 2,282 > 1,5 = \lambda_{\text{табл}}$. Це означає, що рівень $t = 5$ є аномальним. Якщо цей рівень належить до помилок 1-го роду, то його можна замінити на середнє арифметичне значень y_5 і y_4 :

$$y_5 = \frac{2,4 + 4,5}{2} = \frac{6,9}{2} = 3,45.$$

Відповідь. Рівень $t = 2$ є нормальним, рівень $t = 5$ є аномальним. Якщо рівень $t = 5$ є помилкою 1-го роду, його значення можна замінити на $y_5 = 3,45$. Якщо він є помилкою 2-го роду, то вона усуненню не підлягає.

Початкова інформація тісно пов'язана, по-перше, з визначенням задачі прогнозування, по-друге, з методами прогнозування і, по-третє, з отриманим результатом. Дійсно, вже формулювання задачі, яка має підкорятися методичним принципам прогнозування, містить в собі певну «орієнтованість» початкової інформації, яка знаходить вираження в структурі прогнозного описання об'єкта, що розглядається [1]. При цьому на основі використання логічних процедур дається структурований опис самого об'єкта, його декомпозиція за вертикальними рівнями, визначається горизонтальний склад для кожного рівня, дається характеристика зв'язків і можливі зміни структури. При визначенні задачі прогнозування визначаються також системні характеристики об'єкта, такі як зв'язність, складність, стійкість та інерційність.

При підборі та дослідженні початкової інформації для отримання прогнозних результатів її оцінка лише в дуже простих випадках може бути проведена в межах самої інформації. Частіше ця оцінка пов'язана з розгляданням деякого «пробного» результату, отриманого при використанні того чи іншого методу. Тому, як правило, не може бути розірваним такий ланцюг оцінки початкової інформації: *інформація – метод – результат – метод – результат – ... – інформація*, в якому у відповідності з вимогами результату прогнозування (ці вимоги можуть бути сформульовані у вигляді величин періоду прогнозування та точності прогнозу) відбувається перебір методів для конкретної фіксованої інформації, або коригування цієї інформації.

За ознакою стабільності інформацію прийнято поділяти на [14]:

- *умовно-постійну*, яка містить реквізити, що належать до групи постійних, тобто які не зазнають змін протягом деякого проміжку часу;
- *змінну*, яка містить змінні реквізити.

Вказані групи розрізняються коефіцієнтом стабільності K_{st} , який характеризує ступінь змін, яких зазнає зміст інформації з плином часу. Даний коефіцієнт розраховується як відношення кількості реквізитів R_n , які не зазнали змін протягом певного проміжку часу n , до загальної кількості реквізитів R_0 на початок періоду, що розглядається:

$$K_{st} = \frac{R_n}{R_0}.$$

Коефіцієнт стабільності приймає значення в інтервалі від **0** до **1**, і чим ближчим є його значення до одиниці, тим стабільнішою є інформація. Граничним значенням тут є величина коефіцієнту, що дорівнює **0,5**. Якщо $K_{st} \geq 0,5$, то інформація належить до умовно-постійної групи, якщо ж $K_{st} < 0,5$, то інформація є змінною [14].

Корисність інформації визначається ступенем її впливу на рішення, що приймаються, та ступенем придатності (переважно прагматичний аспект) для вирішення саме цієї задачі, дозволяючи оцінювати попередні та поточні події, а також розробляти необхідні прогнози. Наприклад, відомості про ймовірну рентабельність нового інвестиційного проекту впливає на рішення банку про надання кредиту. Але для укладання контракту на постачання продукції підприємству-контрагенту така інформація не потрібна. Рівень корисності інформації може бути різним в залежності не лише від її змісту, але й від типу користувачів (наприклад, інформація про виплату дивідендів для акціонерів є корисною, а для кредиторів, як правило, надлишковою). Поняття «корисності» можна трактувати достатньо широко, пов'язуючи її з такими характеристиками, як достовірність, точність та повнота описання тощо.

Достовірність інформації передбачає наявність чинників, що знижують достовірність як на семантичному (помилки в змістовному описанні – зазвичай для вторинних та інших джерел), так і на синтаксичному (помилки перетворення із однієї форми подання інформації в іншу) та прагматичному (помилки актуалізації інформації споживачем) рівнях інформаційного описання ситуації.

Повнота інформації про процес або явище, що прогнозуються, визначається як наявність про них всіх необхідних елементів семантичної структури та відношень між ними при описанні ситуації для прийняття рішення. Разом з тим, інформація не має бути надлишковою, за винятком тих випадків, коли дублювання відбувається з метою перевірки її достовірності. Неповнота наданих відомостей може призвести до прийняття неоптимального рішення або до побудови неправильного прогнозу.

В деяких дослідженнях зустрічається така характеристика, як своєчасність інформації. Показник своєчасності зазвичай визначається часом надходження інформації, по закінченні якого вона втрачає сенс для даного конкретного застосування в менеджменті. Під втратою змісту розуміється втрата корисності, яку приносить дана інформація для задач прийняття рішень при прогнозуванні. На базі отриманого інформаційного ресурсу виявляються взаємозалежності початкових та результативних чинників, які служать для встановлення зв'язків між процесами, явищами, подіями та фактами [14].

4.3. Джерела інформації

При прогнозуванні в ринкових умовах є обов'язковим системний підхід, тому що не всі зв'язки є прямими. Тому необхідно враховувати наявність як внутрішніх, так і зовнішніх джерел інформації. Зовнішні джерела розділяються на [1]:

- *спеціалізовані окремі* (бюлетені агенцій по маркетинговим дослідженням);
- *вторинні* – джерела опублікованої інформації (бюлетені статистики, баланси банків);

- *оригінальні джерела* (корисні дослідження з позиції споживача, проведені власними відділами маркетингу, досліджень та збуту).

Внутрішні джерела інформації містять:

- дослідження внутрішніх даних відділом аналізу;
- дослідження інформації, що надходить від функціональних підрозділів підприємства.

Інформація – це сукупність даних, що характеризують діяльність підприємства.

Зовнішня інформація – це економічна, соціальна, ділова інформація тощо, яка описує та характеризує стан зовнішнього відносно об'єкта прогнозування середовища.

Внутрішня інформація – це результати діяльності підприємств (остаточні та проміжні), прогнози, задачі та напрямки діяльності (маркетингові дослідження) та виробничо-постачальні можливості, що визначаються технічним рівнем підприємства.

Інформація має бути об'єктивною, конкретною, комплексною, оперативною, систематичною.

Аналізу початкових даних при складанні прогнозу має передувати перевірка інформації, що здійснюється за наступними видами:

- *за змістом напрямку аналізу* (загальна відповідність наявної інформації цілям та задачам прогнозування);
- *технічна перевірка* (наявність підпису на документах, повнота звітних даних, відповідність звітних форм, зіставність);
- *розрахункова перевірка* – правильність висновків (вибіркова перевірка).

Інформаційне забезпечення прогнозування містить в собі різноманітні види інформації:

1. Правове, господарче та фінансове законодавство.
2. Нормативно-планову інформацію (фінансові, виробничо-планові дані).
3. Облікову інформацію:
 - а) дані бухгалтерського обліку;
 - б) поточний облік: журнали-ордери, електронні звіти по балансовим рахункам, головна книга;
 - в) балансова звітність;
 - г) статистичний облік та його інформація;
 - д) оперативний облік (зведення, довідки).
4. Позазвітну інформацію.

Головне місце в інформаційному забезпеченні прогнозування діяльності виробничих та торговельно-посередницьких організацій займає бухгалтерська звітність, яка досвідченому аналітику дає повну інформацію про фінансовий стан, сталість положення та можливі перспективи підприємства. **Планово-нормативна інформація розділяється на:**

- дані планів;
- нормативні матеріали;
- дані інструкцій, всіляких паспортів, прейскурантів, довідників.

Крім планової інформації на діючих підприємствах є позазвітна інформація, що також може бути використана, причому частіше за все саме цей тип інформації містить в собі приховані тенденції в розвитку досліджуваного об'єкта і може в значній мірі вплинути на остаточний результат.

Позазвітна інформація розділяється на:

- матеріали ревізій;
- матеріали аудиторських перевірок;
- матеріали лабораторного та лікарсько-санітарного контролю;
- матеріали виробничих нарад;

- пояснювальні та доповідні записки;
- матеріали періодики.

Збір, ведення та зберігання інформації має ґрунтуватися на наступних принципах:

- об'єктивність відображення всієї господарчої діяльності;
- єдність інформації;
- виявлення споживачів наявної інформації та засобів їх задоволення;
- запобігання дублюванню в первинній інформації;
- оперативність інформації;
- надійність зберігання та захищеність;
- простота й висока швидкість доступу до даних.

Контрольні запитання

1. Що має містити інформація для прогнозу?
2. Чим визначається конкретна форма та зміст інформації для прогнозу?
3. Дайте означення ентропії.
4. Як визначається залежність між ентропією та точністю прогнозу?
5. В якому інтервалі знаходиться реальна невизначеність прогнозу?
6. Як впливає збільшення кількості інформації на невизначеність прогнозу?
7. Які умови висуваються для зіставлення рівнів динамічного ряду?
8. За якими ознаками можна порівнювати статистичні дані?
9. Чим можуть бути викликані аномальні значення статистичного ряду?
10. В чому полягає метод Ірвіна?
11. За якою формулою обчислюється коефіцієнт стабільності інформації?
12. За яким алгоритмом відбувається змикання рядів динаміки?
13. Які бувають зовнішні джерела інформації?
14. Що містять внутрішні джерела інформації?
15. За якими чинниками відбувається перевірка інформації?
16. З чого складається планово-нормативна інформація?
17. З чого складається позазвітна інформація?
18. На яких принципах ґрунтується збір, ведення та зберігання інформації?

5. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ПРОГНОЗУВАННЯ

В теперішній час за оцінками вчених нараховується більше, ніж 200 різних методів прогнозування. Однак на практиці використовуються в якості основних 15-20 методів. **Метод прогнозування** – це сукупність способів та прийомів мислення, що дозволяють на основі аналізу ретроспективних, екзогенних (зовнішніх) та ендогенних (внутрішніх) даних, а також їх змін в розглянутому періоді часу вивести судження певної ймовірності відносно майбутнього розвитку об'єкта [1].

Можна виділити два види прогнозованих характеристик системи, що залежать від часу: змінні стану та змінні інтенсивності. **Змінна стану** визначається періодично, її значення протягом невеликого інтервалу часу не залежить від часу, що минув з моменту початку спостереження. **Змінна ін-**

тенсивності також визначається періодично, але її значення є пропорційним часу, що минув з моменту попереднього спостереження. Такі характеристики системи як температура, швидкість та ціна є прикладами змінних стану. Прикладом змінної інтенсивності може служити кількість опадів, обсяг реалізованої продукції, попит на товари. Якщо змінна стану характеризує кількість, то змінна інтенсивності – швидкість її зміни. Процеси прогнозування змінних стану та інтенсивності відрізняються один від одного наступними особливостями [22]:

- якщо вимірювання характеристик системи здійснюються через різні інтервали часу, то величину інтервалу необхідно враховувати при оцінюванні змінних інтенсивності, в той же час при оцінюванні змінних стану ця величина не має значення;
- в силу того, що прогнози зазвичай здійснюються для декількох послідовних інтервалів часу в межах певного періоду упередження, після якого стають важливими результати реалізації прийнятих рішень, то правильний прогноз змінної стану має визначати її значення наприкінці періоду упередження, а прогноз змінної інтенсивності має являти собою суму прогнозів протягом періоду упередження;
- функція розподілу в часі ймовірностей помилок прогнозу для змінної стану має відповідати функції розподілу ймовірностей помилок у вхідних даних. В той же час для змінної інтенсивності закон розподілу ймовірностей помилок прогнозу в часі прагне до нормального закону розподілу за будь-якого закону розподілу ймовірностей помилок у вхідних даних, тому що ці помилки є сумою помилок прогнозу в окремі інтервали часу.

В існуючих джерелах подано різні класифікаційні принципи методів прогнозування. В першу чергу, методи прогнозування можуть бути розділені на три великі групи: статистичні (описові), причинно-наслідкові та комбіновані. Для вивчення досліджуваного процесу слід задати закон зміни вхідних змінних в часі. Вихідні змінні системи можуть бути описані за допомогою деякої моделі, значення коефіцієнтів якої визначається підбором. При цьому різні спостереження враховуються з різними ваговими множниками. За такими моделями, що містять опис попередньої історії системи (ретроспективну інформацію), прогноз можна скласти шляхом розрахунку станів системи для деякого майбутнього моменту часу. Якщо вдається побудувати модель навколишнього середовища, що дозволяє виявити причини змін в системі (друга група методів), то прогноз, отриманий за допомогою такої моделі, пояснює майбутнє системи. Такі методи охоплюють широке коло моделей від формальних моделей економіки до дуже суб'єктивних моделей типу вербальної моделі ринку. Статистичний прогноз в кращому випадку дозволяє висунути ймовірнісні твердження про можливі появи та моменти появи екстремумів в розглянутій часовій залежності змінних системи, а також про значення змінних в екстремальних точках. З іншого боку, прогнози на основі аналізу причинно-наслідкових зв'язків призначені головним чином саме для передбачення моментів появи екстремумів та значень змінних в екстремальних точках. Прикладом такого прогнозу можуть стати криві життєвого циклу будь-якої продукції. Попит на будь-яку продукцію має фази початкового зростання, найвищого рівня та спаду. Під час останньої фази продукція зникає з ринку. Хоча подібні моделі точно описують історію попиту на продукцію, тим не менш вони не дають достатньо твердої основи для передбачення переходу із однієї фази попиту в іншу [22]. В останній час все більш необхідним та корисним стає прогнозування науково-технічного прогресу. Воно переслідує цілі передбачення основних чинників, що впливають на навколишнє середовище. Між прогнозованими даними та деякими основними показниками також може існувати причинно-наслідковий зв'язок. Наприклад, коливання кількості заяв, що надаються в різні роки до приймальних комісій учбових закладів, безпосередньо пов'язане із змінами народжуваності, що мали місце 17 років тому. Цей приклад наочно показує причинний взаємозв'язок двох показників. Тому упереджуваний показник може бути використаний для розробки прогнозу при правильно обраному періоді упередження.

Між двома будь-якими автокорельованими часовими рядами завжди існує статистична кореляція. Як наслідок, існує серйозна небезпека безглузлого використання множинної регресії в пошуку «гарного» коефіцієнту кореляції між прогнозованими (вихідними) змінними та різними потенційно інформативними вхідними змінними. Ретроспектива, що є відомою, в дійсності є лише елементом повного часового ряду. Є очевидним, що, якщо шукати достатньо довго, зв'язок між змінними буде встановлений. Однак, якщо із збільшенням обсягу інформації коефіцієнти моделі починають дорівнювати нулю, то така модель є непридатною для прийняття правильного рішення, тому що саме в критичний момент основні показники перестають бути такими. Статистичні методи прогнозування використовуються при уточненні прийнятих рішень, що розповсюджуються на відносно короткі проміжки часу. Слід також зазначити, що найкращі результати вдається отримати при використанні комбінації статистичних та причинно-наслідкових методів прогнозування [22].

Також однією з найважливіших класифікаційних ознак методів прогнозування є ступінь формалізації, що достатньо повно охоплює прогностичні методи. Другою класифікаційною ознакою можна вважати загальний принцип дії методів прогнозування, третьою ознакою – спосіб отримання прогнозованої інформації. В більшості класифікаційних схем методи прогнозування поділяються на три основних класи:

- *екстраполяційні методи;*
- *методи експертних оцінок;*
- *методи моделювання.*

При такому поділенні методам екстраполяції протиставляються як самостійний клас методи моделювання. Галузь застосування основних класів методів прогнозування показано в наступній таблиці.

Вид прогнозу	Клас методів прогнозування		
	Екстраполяційні методи	Методи моделювання	Методи експертних оцінок
Короткостроковий	+	+	+
Середньостроковий	-	+	+
Довгостроковий	-	-	+

З одного боку, побудова моделей ставить за мету виявити закономірність розвитку досліджуваного об'єкта або процесу на деякій ретроспективній ділянці. І якщо модель побудовано правильно та вона адекватно відображує зв'язки та властивості реального об'єкта, то її можна брати за основу для екстраполяції, тобто для перенесення деяких висновків про поведінку моделі на об'єкт. Це і є прогнозуванням поведінки об'єкта шляхом екстраполяції тенденцій, що проявляються на моделі. З іншого боку, методи екстраполяції є ні чим іншим, ніж як використанням теоретичних та емпіричних моделей, змінених поза ретроспективною ділянкою спостережень за даними залежностей між ними на ретроспективній ділянці. Таким чином, використання екстраполяції в прогнозуванні завжди припускає застосування якихось моделей. Тому будь-яке моделювання є основою для екстраполяції.

На першому рівні всі методи за ознакою «інформаційний ґрунт методу» поділяються на три класи:

- **фактографічні** – ґрунтуються на фактичній інформації про об'єкт прогнозування та його розвиток в минулому;

- **експертні** – методи, що ґрунтуються на думках експертів в даній галузі знань з подальшою обробкою отриманих результатів з метою виявлення основних критеріїв та тенденцій, притаманних об'єкту. В експертних методах використовується інформація, яку надають фахівці-експерти в ході систематизованих процедур виявлення та узагальнення їх думок;
- **комбіновані** – методи зі змішаною інформаційною основою.

В свою чергу, класи експертних та фактографічних методів поділяються на підкласи за методами обробки інформації.

Експертні методи поділяються на два підкласи:

- **прямі експертні оцінки** – будуються за принципом отримання та обробки незалежної узагальненої думки колективу експертів (або одного з них) при відсутності впливу на кожного експерта думок іншого експерта та всього колективу;
- **експертні оцінки зі зворотним зв'язком** – в тому чи іншому вигляді реалізують принцип зворотного зв'язку на основі впливу на оцінку експертної групи (одного експерта) думок, отриманих раніше від цієї групи.

Експертні методи в прогнозуванні застосовуються в таких випадках [8]:

- за відсутності достатньо репрезентативної та достовірної статистичної характеристики об'єкта та чинників, що впливають на нього;
- за великою невизначеністю середовища функціонування об'єкта для тих галузей промисловості, на які сильно вплинули нові відкриття;
- показник неможливо виміряти чисельно (кількісно), він виражається лише якісними ознаками;
- показник, що аналізується, не може бути описаний на основі еволюційного розвитку, тому що змінюється стрибкоподібно, а природа цих змін невідома;
- у разі дефіциту часу;
- в екстремальних ситуаціях.

Широке застосування експертні оцінки знаходять при прогнозуванні основних напрямків науково-технічного прогресу, суспільної та політичної сфер діяльності. Експертні методи засновані на двох основних принципах. З одного боку, експерт є носієм значного обсягу раціонально опрацьованої інформації. Це накопичений експертом досвід, його знання предметної області, а також в певній мірі обґрунтована цими знаннями та досвідом професійна інтуїція. Саме тому такий експерт може розглядатися як якісне джерело ретроспективної інформації. З іншого боку, думка групи експертів збільшує шанси прийти до найбільш ефективного вирішення проблеми. Практичні дослідження свідчать про те, що навіть прості статистичні методи обробки інформації в поєднанні з експертною інформацією під час вибору перспективних рішень часто дають кращі результати, ніж точні розрахунки з орієнтацією на середні показники [12]. Методи експертних оцінок можуть бути застосовані для прогнозування будь-яких процесів: для неперервних та дискретних, стаціонарних та нестаціонарних, незалежно від наявності статистики, стрибків у розвитку процесу та опису математичної закономірності. Експертні методи прогнозування можуть використовуватися для отримання як кількісних, так і якісних прогнозів. Недоліком методів експертних оцінок є суб'єктивність оцінки та залежність застосування від наявності експертів, обізнаних з ситуацією, що прогнозується [8].

Клас фактографічних методів поєднує три підкласи [1]:

- **Методи аналогій** спрямовані на виявлення схожості в закономірностях розвитку різних процесів. До них відносяться методи математичних та історичних аналогій.

- *Методи математичних аналогій* як аналог для об'єкта прогнозування використовує об'єкти іншої фізичної природи, інших галузей науки, що мають математичний опис процесу розвитку, що збігається з об'єктом прогнозування.
- *Методи історичних аналогій* як аналог використовують процеси однакової природи, що передували в часі розвитку об'єкту прогнозування.
- *Випереджальні методи* прогнозування ґрунтуються на певних принципах спеціальної обробки науково-технічної інформації, які враховують її особливості випереджати прогрес науки та техніки. До них відносяться методи дослідження динаміки науково-технічної інформації, що використовують побудову динамічних рядів на основі різних видів такої інформації, аналізу та прогнозування на цій основі розвитку відповідного об'єкта. До випереджальних методів можна віднести також методи дослідження та оцінки рівня техніки, засновані на використанні спеціальних методів аналізу кількісної та якісної науково-технічної інформації для визначення характеристик рівня якості техніки, яка вже існує та ще проектується.
- *Статистичні методи* являють собою сукупність методів обробки кількісної інформації про об'єкт прогнозування, яку об'єднано за принципом виявлення математичних закономірностей, змін, що в ній містяться, характеристик даного об'єкта з метою отримання прогнозних моделей.

Також методи прогнозування класифікуються за видами на методичній основі. Кожний вид об'єднує методи, що мають в якості основи однаковий апарат їх реалізації. Так, наприклад, статистичні методи поділяються на:

- методи екстраполяції та інтерполяції;
- методи, в яких використовується апарат регресійного та кореляційного аналізу;
- методи, що використовують факторний аналіз;
- методи евристичної самоорганізації моделей тощо.

Серед статистичних методів, що використовуються при прогнозуванні економічних систем, особливий клас складають методи побудови та оцінки одночасних рівнянь, що відображають сукупність законів, одночасна дія яких обумовлює поведінку об'єкта. Система одночасних рівнянь використовується, коли виникають труднощі в моделюванні таких економічних об'єктів, як галузь або підприємство, і необхідність системного подання розвитку цих об'єктів на основі прогнозування систем взаємозалежних показників, коли модель розвитку об'єкта не може бути поданою механічною сумою ізольованих рівнянь за окремими показниками. Рівняння моделі мають враховувати не лише початкову інформацію, але й причинно-наслідкові зв'язки між показниками, тобто мають описувати систему показників, що характеризують об'єкт як єдине ціле. На рис. 5.1 подано класифікаційну схему методів прогнозування [1].

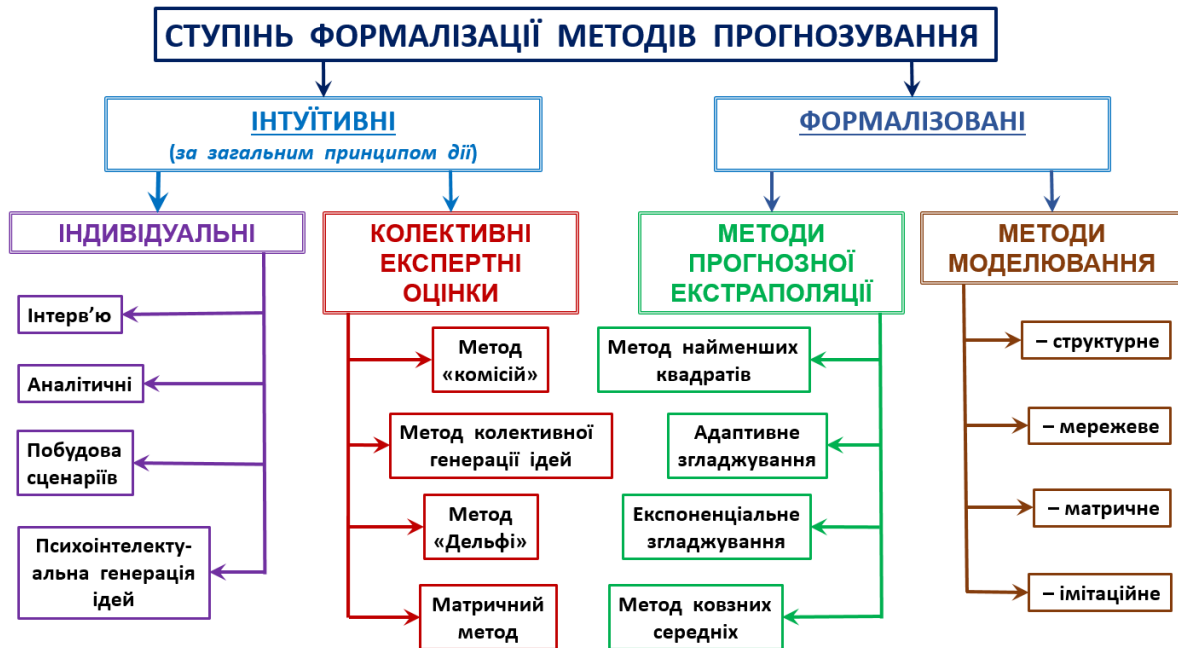


Рис. 5.1 – Класифікація методів прогнозування

При формуванні методики прогнозування доцільно розглядати прогноз у вузькому (I тип прогнозу) та в широкому (II тип прогнозу) сенсі. У вузькому сенсі прогноз виконується за умови, що основні чинники, які визначають розвиток процесу або явища, що прогнозується, не зазнають суттєвих змін. Це дозволяє висувати гіпотези про майбутній розвиток процесів та явищ, які в значній мірі базуються на аналізі минулого. Прогнози I-го типу здійснюються із застосуванням симплексних або статистичних методів на основі часових рядів. Для прогнозів I-го типу характерним є наступне:

- кількість значущих змінних містить від одного до трьох параметрів, тобто такі прогнози є локальними;
- при застосуванні одного параметру (наприклад, часу) такі прогнози вважаються надпростими, при двох-трьох взаємопов'язаних параметрах – складними;
- за ступенем інформаційного забезпечення кроку ретроспекції прогнози I-го типу відносяться до об'єктів з повним інформаційним забезпеченням.

Для підвищення точності та достовірності прогнозних оцінок I-го типу доцільно використовувати комбіновані методи. При цьому бажано використовувати велику кількість варіантів прогнозу, які розраховані на основі різних підходів або альтернативних джерел інформації.

Прогноз II-го типу передбачає, що вхідні дані для отримання оцінок визначаються з використанням випереджальних методів прогнозування. Як правило, прогнози II-го типу використовуються для довгострокового прогнозування і розбиваються на два етапи:

- 1) отримання прогнозних оцінок основних факторів;
- 2) сам прогноз розвитку процесу або явища.

Враховуючи об'єктивну складність та трудомісткість виконання прогнозів II-го типу, можна стверджувати, що найбільше розповсюдження отримали методи прогнозування I-го типу [8].

Контрольні запитання

1. Чим відрізняються змінні стану та змінні інтенсивності?
2. Що таке метод прогнозування?

3. Назвіть три основні класи методів прогнозування.
4. Як розділюються методи прогнозування за ознакою «інформаційне підґрунтя»?
5. На які класи поділяються експертні методи прогнозування?
6. В яких випадках для прогнозування доцільно використовувати експертні методи?
7. Охарактеризуйте фактографічні методи прогнозу.
8. Які бувають методи аналогій?
9. Опишіть статистичні методи прогнозування.
10. Відтворіть класифікаційну схему методів прогнозування.

6. МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС – ЗАСІБ ВИВЧЕННЯ МІЖГАЛУЗЕВИХ ЗВ'ЯЗКІВ

6.1. Схема міжгалузевого балансу

В СНР міжгалузовий баланс виконує специфічну функцію деталізації рахунків товарів та послуг, виробництва та створення прибутків в галузевому розрізі. МГБ є економіко-статистичною моделлю у вигляді системи взаємопов'язаних таблиць [11]. В схемі МГБ виділяються три основні частини (квадранти): внутрішній (або перший) квадрант (I), бічне (або праве) крило (II), нижнє крило (III). IV квадрант відображає перерозподіл кінцевої продукції, тобто блок розрахунку ВВП. Зазвичай він не розробляється. Загальна схема МГБ має наступний вигляд [9]:

Проміжне споживання <i>(I квадрант)</i>	Кінцеве використання <i>(II квадрант)</i>
Валова додана вартість <i>(III квадрант)</i>	(IV квадрант)

Внутрішній (або перший) квадрант характеризує взаємозв'язки галузей економіки, відображає проміжне споживання; в другому квадранті подається структура кінцевого використання валового внутрішнього продукту (ВВП); в третьому квадранті подається структура валової доданої вартості за елементами.

I квадрант («шахова таблиця») характеризує виробничі взаємозв'язки галузей. В цьому квадранті по рядках та стовпцях записуються галузі економіки. В стовпцях першого квадранту по кожній галузі подані витрати на виробництво товарів та послуг (вартість сировини, матеріалів, палива, енергії, послуг), а по рядках показується, як розподіляється продукція кожної галузі між всіма галузями.

В правій частині МГБ (II квадрант) рядки відповідають галузям-виробникам конкретних продуктів. Стовпці є категоріями кінцевого використання [9]: кінцеве споживання (витрати на кінцеве споживання домогосподарств, державного управління та некомерційних організацій, що обслуговують домогосподарства), валове накопичення (валове накопичення основного капіталу, зміна запасів матеріальних оборотних засобів, чисте придбання цінностей), сальдо експорту-імпорту товарів та послуг.

В III квадранті подано вартісну структуру ВВП. Стовпці третього квадранту відповідають галузям-виробникам, а рядки – основним вартісним компонентам валової доданої вартості (оплата праці найманих виробників, валовий прибуток, валовий змішаний дохід, податки та субсидії на виробництво, чистий прибуток, споживання основного капіталу), а також податкам та субсидіям на

продукти. Таким чином, III-й квадрант ніби розділяється ще на дві частини та є таблицею первинних витрат та ресурсів [11].

Таким чином, якщо розглядати дані МГБ по вертикалі, то **по стовпцях показується вартісна структура випуску продукції окремих галузей**, який складається із проміжного споживання (I-й квадрант) та валової доданої вартості (III-й квадрант), а по горизонталі – **по рядках – натурально-речовий склад продукції**, яка витрачається на проміжне споживання (I-й квадрант) та кінцеве використання (II-й квадрант). Для кожної галузі економіки ресурси продуктів дорівнюють їх використанню [9].

Блок розрахунку ВВП (**IV квадрант**) є оцінкою ВВП виробничим методом. При побудованні МГБ *галузь економіки* визначається як сукупність одиниць однорідного виробництва або закладів, тобто підприємств або підрозділів підприємств, що розташовані в одному місці, зайняті одним видом виробничої діяльності або тих, в яких на долю основної діяльності припадає більша частина випуску. Особливістю сформованих в такий спосіб галузей є те, що результат їх виробничої діяльності виражається випуском лише основної продукції. Тому їх можна назвати однопродуктовими, або «*чистими*» галузями.

МГБ є аналітичним інструментом дослідження взаємозв'язків між галузями, виявлення найважливіших економічних пропорцій та структурних зсувів в економіці. Дані МГБ дозволяють вивчати структуру економіки в різних аспектах: галузеву структуру ВВП, структуру використання ВВП, структуру витрат на виробництво. Крім того, модель МГБ дозволяє вирішувати наступні типові задачі прогнозування [11]:

- визначення валових випусків за даними про обсяги кінцевого використання;
- визначення обсягів кінцевого використання за даними про валові випуски;
- визначення валових випусків за одними видами продуктів та кінцевого використання за іншими.

6.2. Основне рівняння МГБ

Дані МГБ можна застосовувати при економіко-математичних методах дослідження міжгалузевих зв'язків. Це означає, що кількісне відображення економічних зв'язків кожної галузі з іншими галузями може бути подане у вигляді системи рівнянь. При побудові моделі МГБ використовується припущення про залежності міжгалузевих потоків від обсягів виробництва продукції: $x_{ij} = \varphi_{ij}(x_j)$. В простій моделі МГБ використовується лінійна залежність, тобто приймається гіпотеза про пропорційність між витратами та обсягами виробництва, яка означає, що $x_{ij} = a_{ij}x_j$. За такого припущення міжгалузеві зв'язки подаються системою лінійних рівнянь. МГБ має наступний вигляд [9]:

ГАЛУЗІ		ПРОМІЖНЕ СПОЖИВАННЯ (галузі)					КІНЦЕВЕ ВИКОРИСТАННЯ	ВСЬОГО ВИКОРИСТАНО
		1	...	j	...	n		
ПРОМІЖНЕ СПОЖИВАННЯ (галузі)	1	$x_{11}=a_{11}x_1$	...	$x_{1j}=a_{1j}x_j$	...	$x_{1n}=a_{1n}x_n$	y_1	x_1
	...	...	...	...	...	...	...	...
	i	$x_{i1}=a_{i1}x_1$	...	$x_{ij}=a_{ij}x_j$	...	$x_{in}=a_{in}x_n$	y_i	x_i
	...	...	...	...	...	...	...	...
	n	$x_{n1}=a_{n1}x_1$	...	$x_{nj}=a_{nj}x_j$	...	$x_{nn}=a_{nn}x_n$	y_n	x_n
ВАЛОВА ДОДАНА ВАРТІСТЬ		z_1	...	z_j	...	z_n		
ВСЬОГО РЕСУРСІВ		x_1	...	x_j	...	x_n		

Якщо розглядати дані МГБ по рядках, то кожен галузь можна описати у вигляді наступного рівняння:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, (i = \overline{1, n}), \quad (6.1)$$

де x_i – продукція i -тої галузі;

a_{ij} – коефіцієнт прямих витрат продукції i -тої галузі на виробництво одиниці продукції j -тої галузі ($a_{ij} = x_{ij}/x_j$);

x_j – продукція j -тої галузі;

y_i – кінцевий попит i -тої галузі (кінцеве споживання, валове накопичення, сальдо експорту-імпорту).

Рівняння (6.1) характеризує використання продукції кожної галузі на проміжне та кінцеве споживання, накопичення та інші кінцеві потреби. Це співвідношення складено для I-го та II-квadrantів. Є очевидним, що $a_{ij}, x_i, y_i \geq 0$.

При розгляданні даних МГБ по стовпцях кожна галузь може бути поданою наступним рівнянням:

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + z_j, (j = \overline{1, n}), \quad (6.2)$$

де x_i – продукція i -тої галузі;

a_{ij} – коефіцієнт прямих витрат продукції i -тої галузі на виробництво одиниці продукції j -тої галузі ($a_{ij} = x_{ij}/x_j$);

x_j – продукція j -тої галузі;

z_j – валова додана вартість j -тої галузі.

Рівняння (6.2) характеризує вартісний склад випуску продукції кожної галузі. Це співвідношення складено для I-го та III-го квадрантів.

Єдність матеріально-речового та вартісного складу ВВП, кінцевого споживання та національного доходу проявляється в збалансованості підсумків ВВП по рядках та стовпцях: обсяги продукції, що розподіляється дорівнюють обсягам виробничих витрат:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + z_j.$$

В цілому, виконується співвідношення ВВП як суми розподіленої продукції галузей і ВВП як суми всіх виробничих витрат:

$$\sum_i x_i = \sum_j x_j,$$

і за матеріально-речовим складом:

$$\sum_i y_i = \sum_j z_j.$$

В матричній формі рівняння (6.1) набуває вигляду [9]:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

або

$$X = AX + Y, \quad (6.4)$$

де X – вектор випуску продукції;

A – матриця елементів прямих витрат, що дозволяє встановити прямі виробничі зв'язки між галузями;

Y – вектор кінцевого попиту.

На базі матриці A розраховується матриця коефіцієнтів повних витрат, які показують як прямі, так і непрямі витрати на виробництво одиниці кінцевої продукції. Найважливішою особливістю матриці коефіцієнтів повних витрат є те, що якщо ці коефіцієнти помножити на вектор кінцевого попиту, то можна отримати випуск продукції по кожній галузі. Наведемо математичне обґрунтування цього розрахунку. Із формули (6.4) випливає, що

$$Y = X - AX, \quad (6.5)$$

або

$$Y = (E - A)X, \quad (6.6)$$

де E – одинична матриця. Рівняння (6.6) називається **рівнянням МГБ відносно кінцевого споживання**. Воно використовується, коли необхідно визначити вектор кінцевого споживання на основі вектору випуску та матриці прямих витрат.

Помноживши обидві частини цього рівняння на $(E - A)^{-1}$, отримаємо:

$$(E - A)^{-1}Y = (E - A)^{-1}(E - A)X, \quad (6.7)$$

де $(E - A)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів повних витрат. Тоді:

$$(E - A)^{-1}Y = X. \quad (6.8)$$

Рівняння (6.8) є **рівнянням МГБ відносно внутрішнього (проміжного) споживання**. Воно називається **основним рівнянням МГБ**, тому що воно може використовуватися, перш за все, для прогнозування. Маючи матрицю коефіцієнтів повних витрат та перебираючи різні варіанти вектору розподілення кінцевого попиту, можна розрахувати різні варіанти прогнозу [9].

Актуальним є питання про існування рішення рівнянь МГБ, тобто в якому випадку буде існувати невід'ємний вектор X при будь-якому невід'ємному векторі Y ? Відповідь на це питання пов'язана з продуктивністю матриці A . Невід'ємна **матриця A є продуктивною**, якщо існує хоча б один такий вектор X , що $(E - A)X > 0$. Економічний зміст цього означення полягає в наступному. Матриця A є продуктивною, якщо існує такий вектор випуску, за якого кожна галузь системи може виробити деяку кількість продукції. Таким чином, забезпечується певний рівень споживання. В залежності від матриці A , і **систему** називають **продуктивною**.

Теорема 6.1 (про існування рішення рівняння МГБ). Формулювання. Продуктивність невід'ємної матриці A є необхідною та достатньою умовою існування, єдиності та невід'ємності рішення рівняння (6.6) при будь-якому векторі $Y \geq 0$.

Якщо множина продуктів, що випускаються в системі, хоча б раз збігається з множиною продуктів, які використовувалися у виробничих (технологічних) процесах, і якщо не існує джерела витрат, крім поточної продукції, що випускається, а ця продукція використовується лише в якості витрат для виробничих способів, то така **модель** називається **замкненою**. В протилежному випадку **модель** називається **відкритою**.

Розглянута модель називається **моделью Леонтьєва**. Вона використовує наступні основні припущення:

1. Пропорційність витрат та обсягів виробництва.
2. Кожний вид продукції виробляється лише одним способом (технологією).
3. Кожний виробничий спосіб (технологія) виробляє лише один вид продукції, тобто між видами продукції, що випускається, та способами виробництва цих видів продукції існує взаємно однозначна відповідність.
4. Відкритість моделі. Часто про це судять за співвідношенням ендо- та екзогенних величин. Виходячи з цього, модель МГБ – широко відкрита модель.

Розглянемо процедуру побудови МГБ на умовному прикладі [9].

Приклад 6.1. Припустимо, що економіка країни складається із трьох галузей. Взаємозв'язки між цими галузями можна прослідити за їх рахунками. В даному прикладі не враховується виплата цими галузями податків.

Рахунок галузі A , млн грн.

Дебет (Д ^т)		(К ^т) Кредит	
Запаси готової продукції на початок року	10 1	Отримано за продукцію, продану галузі B	70 5
Куплено матеріалів у галузі B	20 2	Отримано за продукцію, продану населенню	70 6
Куплено матеріалів у галузі C	50 3	Запаси готової продукції на кінець року	10 7
Виплачено робітникам	60 4		
Всього витрат	140	Всього отримано	150
Прибуток	10 8		
РАЗОМ	150	РАЗОМ	150

Рахунок галузі B , млн грн.

Дебет (Д ^т)		(К ^т) Кредит	
Куплено матеріалів у галузі A	70 9	Отримано за продукцію, продану галузі A	20 11
Виплачено робітникам	20 10	Отримано за продукцію, продану галузі C	70 12
		Запаси готової продукції на кінець року	9 13
Всього витрат	90	Всього отримано	99
Прибуток	9 14		
РАЗОМ	99	РАЗОМ	99

Рахунок галузі **С**, млн грн.

Дебет (Д ^т)		(К ^т) Кредит	
Куплено матеріалів у галузі В	70 15	Отримано за продукцію, продану галузі А	50 17
Виплачено робітникам	30 16	Отримано за продукцію, продану населенню	40 18
Всього витрат	100	Всього отримано	90
		Збитки	10 19
РАЗОМ	100	РАЗОМ	100

Прослідити зв'язки між цими галузями на основі наведених рахунків.

Розв'язання. Зв'язки, що існують між галузями **А**, **В** і **С**, можна показати за допомогою таблиці МГБ. Для цього необхідно узгодити номенклатури витрат за всіма рахунками галузей, що в даному прикладі було враховано заздалегідь. МГБ для економіки, що складається лише із наведених галузей, має наступний вигляд (млн грн.):

ГАЛУЗІ К ^т \ Д ^т		ПРОМІЖНЕ СПОЖИВАННЯ (виробники)			РАЗОМ	КІНЦЕВЕ СПОЖИВАННЯ	ВАЛОВЕ НАКОПИЧЕННЯ	РАЗОМ	ВСЬОГО
		1 (А)	2 (В)	3 (С)					
ПРОМІЖНЕ СПОЖИВАННЯ (споживачі)	1 (А)	—	70 5 = 9	—	70	70 6	—	70	140
	2 (В)	20 11 = 2	—	70 12 = 15	90	—	9 13	9	99
	3 (С)	50 17 = 3	—	—	50	40 18	—	40	90
РАЗОМ		70	70	70	210	110	9	119	329
ОПЛАТА ПРАЦІ НАЙМАНИХ РОБІТНИКІВ		60 4	20 10	30 16	110	} К ^т			
ВАЛОВИЙ ПРИБУТОК		10 8	9 14	-10 19	9				
РАЗОМ		70	29	20	119	} Д ^т			
ВСЬОГО		140	99	90	329				

Як впливає із наведених рахунків галузей, внутрішнє галузеве споживання в досліджуваній економіці відсутні. Це означає, що головна діагональ матриці повних витрат буде нульовою, тобто $a_{ii} = 0$, а в таблиці МГБ на головній діагоналі I-го квадранту будуть стояти прочерки. Далі при заповненні для цієї економіки I-го квадранту враховуються наступні узгодження наведених рахунків:

- кредитовий рахунок **5** галузі **А** є дебетовим рахунком **9** галузі **В**. Таким чином, $x_{12} = 70$;
- кредитовий рахунок **11** галузі **В** є дебетовим рахунком **2** галузі **А**. Отже, $x_{21} = 20$;
- кредитовий рахунок **12** галузі **В** є дебетовим рахунком **15** галузі **С**. Отже, $x_{23} = 70$;
- кредитовий рахунок **17** галузі **С** є дебетовим рахунком **3** галузі **А**. Таким чином, $x_{31} = 50$;
- дебетовий рахунок **1** та кредитовий рахунок **7** для галузі **А** взаємно погашаються.

При заповненні II-го квадранту враховується наступне:

- кінцеве споживання галузі **А** відображене її кредитовим рахунком **6**, а валове накопичення для цієї галузі **А** відсутнє, тобто її кінцеве використання складається лише із кінцевого споживання;
- аналогічна ситуація склалася і в галузі **С**: валове накопичення у неї відсутнє, а кінцеве споживання відображене кредитовим рахунком **18**, тобто кінцеве використання галузі **С** також складається лише із кінцевого споживання;

- у галузі **B** відсутнє кінцеве споживання, а валове накопичення відображене кредитовим рахунком **13**, тобто кінцеве використання галузі **B** складається лише із валового накопичення.

При заповненні III-го квадранту враховується, що валова додана вартість складається із оплати праці найманих робітників та валового прибутку. У всіх трьох галузях ці показники відображені в рахунках наступним чином:

- у галузі **A** оплата праці – дебетовий рахунок **4** та валовий прибуток – дебетовий рахунок **8**;
- у галузі **B** оплата праці – дебетовий рахунок **10** та валовий прибуток – дебетовий рахунок **14**;
- у галузі **C** оплата праці – дебетовий рахунок **16**, а замість валового прибутку за дебетовим рахунком були отримані збитки за кредитовим рахунком **19**. Тому в дебетовому III-му квадранті в розділі валового прибутку ця сума вказується зі знаком «–».

Із розглянутого прикладу видно, що по кожній галузі ресурси (підсумки по стовпцях) дорівнюють їх використанню (підсумкам по рядках).

6.3. Види МГБ

Схема МГБ, наведена вище, є універсальною. Її зовнішній вигляд не відображає змісту таблиці МГБ, тому необхідно коротко охарактеризувати види МГБ та встановити зв'язки між ними [9].

1. За періодом аналізу МГБ поділяються на два типи. Якщо в МГБ розглядається процес виробництва протягом декількох років, причому результати першого року визначають умови виробництва в другому році тощо, то таку систему називають *динамічною*, а МГБ, що описує її розвиток, – *динамічним МГБ*. Особливістю динамічних МГБ є те, що в них із складу кінцевого використання вилучаються капіталовкладення. Це означає, що капіталовкладення в динамічному МГБ є функцією випусків галузей в наступні роки. Динамічні МГБ значно точніше описують розвиток економіки, ніж будь-які інші економіко-математичні методи. Але на теперішній час існує лише теорія таких балансів, тому що їх практична побудова є дуже важкою. Іншим типом МГБ є *статичні* баланси, в яких капіталовкладення містяться в складі кінцевого використання. Таким чином, статичні МГБ складаються для одного року, а динамічні – за декілька років.

2. За обсягом використаної інформації МГБ поділяються на:

- національні (побудовані для країни в цілому);
- районні (побудовані для окремих районів);
- міжрайонні (такі, що описують виробничі зв'язки різних районів);
- галузеві (складені для окремої галузі).

Перелічені МГБ відрізняються один від одного лише обсягом використаної інформації. Вони однакові за побудовою та можуть бути як статичними, так і динамічними [9].

3. За характером використаних вимірювачів МГБ бувають

- грошовими (вартісними);
- натуральними.

В грошових (вартісних) МГБ всі показники подаються в грошовому вираженні. В натуральних МГБ принаймні частина показників подається в натуральному вираженні. Різниця між цими балансами полягає в тому, що показники грошового (вартісного) балансу можна сумувати по стовпцю, а натурального – ні. Ціни, що використовуються в грошовому (вартісному) МГБ, відіграють лише роли важелів. Тому можна використовувати будь-які інші вимірювачі, наприклад, трудові. Якщо для одного й того ж району скласти МГБ в грошовому та натуральному поданні, то теоретично їх показники мають бути зіставними. Але на практиці забезпечити таку дуже важко. Це пояснюється

як особливостями статистичного обліку, так і природою чинних цін. Слід зазначити, що в світовій практиці широко розповсюджені лише МГБ в грошовому (вартісному) поданні.

4. За характером відображення міжгалузевих зв'язків МГБ поділяються на два типи. Найширше розповсюдження отримали МГБ, складені за схемою «витрати – випуск». Крім того, складаються таблиці «ресурси та використання товарів».

6.4. Основні схеми та методи оцінювання показників МГБ «витрати – випуск»

В СНР передбачено дві схеми складання таблиці МГБ типу «витрати – випуск».

В першій схемі аналізуються підсумки діяльності галузей в широкому розумінні. Ці галузі називаються *господарчими* галузями на відміну від *чистих* галузей, які є групою однорідних товарів.

В другій схемі аналізуються потоки товарів, згрупованих за чистими галузями. *Чисті* галузі містять товари даного виду незалежно від того, в якій господарчій галузі їх було вироблено. Наприклад, чиста галузь «сільське господарство» містить сільськогосподарські продукти, вироблені в сільському господарстві в якості основної продукції, а також сільськогосподарські продукти, вироблені в якості негалузевої продукції в інших галузях економіки (наприклад, на промислових підприємствах). Господарчі галузі, де одиницею класифікації є заклад, крім основної продукції виробляють деяку кількість вторинної (непрофільної) продукції. З теоретичної точки зору розробка МГБ за схемою чистих галузей є більш бажаною, тому що в цьому випадку досягаються більша однорідність записів в МГБ та більш висока стабільність коефіцієнтів прямих витрат. Однак з практичної точки зору складання МГБ за схемою чистих галузей є набагато складнішим, тому що для цього потрібні дані про непрофільну продукцію та витрати на її виробництво. При розробці МГБ його показники можуть бути оцінені в цінах кінцевого споживання, тобто цінах покупців, цінах виробників та в основних цінах. Перевага віддається оцінюванню в основних цінах, тому що в цьому випадку забезпечується найбільша однорідність записів в МГБ.

Методи оцінювання потоків в МГБ розрізняються, перш за все, трактовкою торговельно-транспортних витрат та податків на продукти. При складанні МГБ в цінах кінцевого споживання (в цінах покупців) записи в рядках, відведених для торгівлі та транспорту, показують торговельно-транспортні націнки по доведенню продукції галузей, для яких відведені відповідні стовпці, до кінцевого споживача. З іншого боку, якщо МГБ складається в цінах виробників або в основних цінах, записи в рядках, відведених для торгівлі та транспорту, показують торговельно-транспортні витрати по доведенню до споживачів всіх проміжних товарів та послуг для виробничого споживання (в межах I-го квадранту) і по доведенню кінцевих товарів та послуг до споживачів (в межах II-го квадранту). Записи в II-му квадранті оцінено в цінах, включаючи торговельно-транспортні націнки. В II-му квадранті не має бути окремих записів про торговельно-транспортні витрати.

При аналізі МГБ в основних цінах і в цінах кінцевого споживання (в цінах покупців) можна виявити особливості трактування в них податків на продукти. Так, в МГБ в цінах кінцевого споживання чисті податки на продукти показані в окремому рядку, а саме в клітинках на перетині його зі стовпцями, відведеними для галузей економіки. При цьому рядок «чисті податки на продукти» винесено за межі розділу, присвяченого валовій доданій вартості, але він залишається в межах III-го квадранту. З іншого боку, в МГБ в основних цінах чисті податки на продукти частково відображені в I-му квадранті (тут вказуються податки на продукти, що відносяться до всіх проміжних товарів та послуг, витрачених на виробництво) і частково в II-му квадранті (тут вказуються чисті податки на продукти, що відносяться до всіх кінцевих товарів та послуг). В обох випадках валова додана вартість оцінюється в основних цінах, тобто за вирахуванням податків на продукти, але з урахуванням субсидій на продукти.

На основі МГБ можна розрахувати ВВП всіма трьома розглянутими вище способами. В загальній формі обчислення ВВП цими трьома методами на основі даних МГБ можна проілюструвати за допомогою наступної спрощеної двохгалузевої моделі [9],

	1	2	y	x
1	d_{11}	d_{12}	y_1	x_1
2	d_{21}	d_{22}	y_2	x_2
z	z_1	z_2		
x	x_1	x_2		

де d_{ij} – міжгалузеві потоки,

y_i – кінцевий попит, який містить кінцеве споживання, валове накопичення та чистий експорт,

z_i – валова додана вартість i -ї галузі,

x_i – випуск i -ї галузі.

В даній схемі передбачається, що вся економіка складається із двох галузей: 1-ї та 2-ї. Також в цій схемі ми абстрагуємося від особливостей у відображенні податків на продукти. Таким чином, ВВП можна обчислити:

як різницю між випуском та проміжним споживанням

$$BBB = (x_1 + x_2) - (d_{11} + d_{12} + d_{21} + d_{22}),$$

шляхом додавання валової доданої вартості за галузями економіки

$$BBB = z_1 + z_2,$$

шляхом додавання елементів кінцевого попиту

$$BBB = y_1 + y_2.$$

При складанні МГБ існує два основних способи відображення імпорту в таблиці балансу [9]. Перший спосіб полягає в тому, що показники використання імпортової продукції реєструються окремо (в особливому рядку) від показників використання вітчизняної продукції. В цьому випадку імпорт має бути показаний зі знаком «–» в II-му квадранті МГБ. Другий спосіб полягає в тому, що дані про використання продукції в I-му та II-му квадрантах відносять як до імпортової, так і до вітчизняної продукції. В цьому випадку в клітинці на перетині рядку, відведеного для імпорту, з відповідними стовпцями I-го квадранту будуть зроблені записи, що показують надходження імпортової продукції, яка відноситься до відповідної галузі економіки. Інколи імпорт додатково поділяється на доповнюючий та конкуруючий. **Доповнюючий імпорт** – це імпортна продукція, яка не виробляється вітчизняними виробниками. **Конкуруючий імпорт** – це ввезення продукції, зразки якої виробляються (але, можливо, в недостатній кількості) вітчизняними виробниками. В МГБ використання конкуруючої імпортової продукції відображається разом з використанням вітчизняної продукції, тоді як використання доповнюючого імпорту показується в окремому рядку.

Вибір того чи іншого методу відображення імпорту в МГБ залежить від цілей аналізу, ступеню важливості імпорту для вітчизняної економіки, а також від способу отримання відповідних даних.

6.5. Методи складання МГБ

Світова практика складання МГБ СНР орієнтована на отримання інформації шляхом лише вибірових досліджень, які є набагато дешевшими, ніж суцільні, тому що вони не потребують виділення значних фінансових коштів із державного бюджету країни. В світовій практиці дані про види витрат на виробництво продукції збираються для господарчих галузей. Отримувати дані від підприємств за господарчими галузями простіше, оскільки для цього не потрібно здійснювати додаткові спеціальні розрахунки, як при збиранні даних про витрати за чистими галузями. В світовій статистичній практиці побудову I-го квадранту таблиці «витрати – випуск» з єдиним групуванням товарів та послуг починають не відразу. В СНР для складання таблиці «витрати – випуск» основними таблицями є [9]:

- перераховані базисні таблиці, що містять дані про витрати на виробництво продукції;
- агреговані таблиці товарних потоків, що містять дані про випуск продукції.

В світовій статистичній практиці процес розрахунку таблиці «витрати – випуск» складається із трьох основних етапів.

На першому етапі з великим ступенем диференціації (близько 3000 товарів та послуг) розраховується обсяг виробництва вітчизняної продукції та імпорту за даними статистики промисловості та зовнішньої торгівлі. Дани про обсяг виробництва заносяться в підсумкові рядки або стовпці таблиці «витрати – випуск». Дані по стовпцях заповнюються методом витрат, дані по рядках – методом випуску.

На другому етапі методом витрат на основі якнайбільш докладних даних про структуру проміжного споживання та компоненти валової доданої вартості визначають, яким чином всі витрати розподіляються по окремим галузям (складається таблиця витрат). При цьому треба мати на увазі, що дані про види витрат є за господарчими галузями. Ці дані про витрати за господарчими галузями перераховуються в чисті за допомогою так званої моделі переміщення. В цьому випадку використовується друга таблиця – таблиця випуску, в якій вся продукція господарчих галузей поділена за видами. Модель переміщення застосовується, виходячи із наступного припущення: для виробництва одних й тих самих продуктів незалежно від того, в якій саме галузі відбувається це виробництво, завжди використовується одна й та ж сама технологія, для якої є характерною однакова структура витрат.

Існують два типи припущень про технології виробництва продукції [9]:

- всі продукти, що виготовляються підприємствами даного виду діяльності в галузі, виробляються при однаковій структурі витрат (*галузева технологія*);
- всі продукти, що належать до даної групи продукції, мають однакову структуру витрат незалежно від того, в якій саме господарчій галузі вони виробляються (*технологія продукції*).

Обрати найкраще припущення стосовно конкретного випадку досить важко, оскільки це залежить від структури галузей економіки конкретної країни, ступеню спеціалізації, однорідності національних технологій, що використовуються для виробництва продукції в межах однієї й тієї ж самої групи продуктів. Наприклад, взуття може вироблятися із натуральної шкіри та із штучних матеріалів. Тому припущення про однакову технологію виробництва для всього взуття є дуже суперечливим, і в цьому випадку кращим варіантом є припущення про галузеву технологію. Але на практиці за інших однакових умов перевагу рекомендується віддавати припущенню про технологію продукції.

Модель переміщення полягає в тому, що із витрат кожної господарчої галузі виділяються витрати, потрібні для виробництва непрофільної продукції, а до решти витрат в межах основного виду діяльності відповідної галузі додаються витрати інших галузей, пов'язані з виробництвом продукції, що належить до основного виду діяльності галузі, що розглядається. В результаті визначається структура витрат чистих галузей, в яких виробляється однорідна продукція. Обсяг непрофільної

продукції, яка переміщується до іншої галузі, залежить не лише від організації виробництва в економіці, але й від кількості галузей економіки, які виділяються (чим більша кількість галузей виділяється, тим більшим є обсяг непрофільної продукції). Переміщення непрофільних продуктів може містити також переміщення побічних продуктів. При цьому виділення виробництва побічних продуктів може мати досить штучний характер, якщо таке виробництво неможливо технологічно відокремити від виробництва основного продукту.

На третьому етапі методом випуску складаються таблиці товарних потоків. Для цього в моделі випуску по рядках визначається використання вітчизняної та імпоротної продукції. При цьому виходять із детального групування (близько 3000 видів товарів та послуг) даних про виробництво всередині країни та імпорт, що на базі наявної інформації розподіляються по розглянутим чистим галузям та по категоріям кінцевого споживання. На відміну від методу витрат, при даному методі не застосовується модель переміщення, тому що розрахунки з самого початку здійснюються в групуванні за видами товарів та послуг та за чистими галузями.

В результаті всіх етапів розрахунку складається таблиця «витрати – випуск» в групуванні за видами товарів та послуг та за чистими галузями.

Таким чином, в світовій практиці для розрахунку проміжного споживання використовуються два методи. Тому при складанні I-го квадранту МГБ прогалини в статистичній інформації, отриманій одним методом, можна заповнити даними, отриманими іншим методом. Основна перевага полягає в тому, що в процесі узгодження підсумкових даних, отриманих за допомогою обох методів, можуть бути виявлені неточності, які можуть бути усунені з урахуванням в кожному конкретному випадку базисних даних [9].

6.6. Таблиця «ресурси та використання товарів»

Ця таблиця не має суворо витриманої «шахової» структури, але все ж таки містить риси МГБ. Головна відмінність таблиці «ресурси та використання товарів» від МГБ полягає в тому, що за її рядками показується використання товарів, згрупованих у відповідності з Міжнародною стандартною класифікацією товарів, тоді як її стовпці призначені для відображення структури витрат на виробництво продукції галузей економіки. Інакше кажучи, при розробці даних про використання продукції застосовується класифікація товарів, а при розробці даних, що характеризують структуру витрат на виробництво, – класифікація галузей економіки, в яких одиницею класифікації є заклад [9]. Таблиця «ресурси та використання товарів» складається із двох частин. Частину А подано в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Частина А: Ресурси та використання товарів

ГРУПИ ТОВАРІВ	РЕСУРСИ							ВИКОРИСТАННЯ						
	Виробництво в галузях					Імпорт	Чисті податки на продукти	Торговельно-транспортна націнка	ВСЬОГО	Проміжне споживання	Кінцеве споживання	Накопичення	Експорт	ВСЬОГО
	Сільське господарство	Видобувна промисловість	Обробна промисловість	:	РАЗОМ									
Сільськогосподарські товари														
Промислові товари														
...														
Послуги														
Всі продукти														

На основі даних цієї таблиці можна обчислювати ВВП двома методами: шляхом віднімання із випуску проміжного споживання та додавання суми чистих податків на продукти, а також шляхом сумування елементів кінцевого використання.

Частина **Б** подано в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2

Частина Б: Структура випуску за елементами витрат

СТАТТІ ВИТРАТ		ГАЛУЗІ ЕКОНОМІКИ				
		Сільське господарство	Видобувна промисловість	Обробна промисловість	...	РАЗОМ
1	Проміжне споживання					
	в тому числі за групами товарів					
2	Оплата праці					
3	Інші податки на виробництво					
4	Прибуток					
5	Змішаний дохід					
6	Споживання основного капіталу					
7	Випуск					

В частині **Б**, безпосередньо пов'язаній з частиною **А**, містяться записи про структуру випуску за елементами витрат. При цьому випуск кожної галузі в частині **Б** в рядку 7 дорівнює випуску даної галузі в частині **А** (рядок «Всі продукти»). Наприклад, випуск сільського господарства в таблиці частини **Б** дорівнює сумі продуктів, вироблених в сільському господарстві (сільськогосподарські та несільськогосподарські продукти), яка вказана в таблиці частини **А** в рядку «Всі продукти» (стовпець «Сільське господарство»). На основі даних таблиці частини **Б** можна обчислити ВВП шляхом сумування валової доданої вартості та чистих податків на продукти, дані про яких містяться в таблиці частини **А**.

Таким чином, дані МГБ можуть бути використані для [9]:

- розробки прогнозів;
- побудови міжгалузевих моделей на перспективу з метою планування або перевірки збалансованості розроблених планів;
- аналізу економіки, зокрема для виявлення ролі окремих факторів.

6.7. Динамічні міжгалузеві моделі

Ці моделі засновані на використанні матриць міжгалузевого балансу. Отже, для них також мають місце припущення, прийняті в балансових моделях. З точки зору цих моделей та теорії економічного зростання, ці моделі є деталізованими моделями зростання суспільного продукту та національного доходу. З точки зору вивчення структури взаємозв'язків – це розвиток статичної моделі міжгалузевого балансу. З прикладної точки зору – ці моделі є основою прикладних моделей.

Динамічну модель Леонтьєва було запропоновано на початку 50-х років XX століття. Вона є дезагригованою простою моделлю відтворення суспільного продукту.

Основне рівняння динамічної моделі Леонтьєва має наступний вигляд:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX}{dt} + C(t), \quad (6.9)$$

де $X(t)$ – вектор обсягів виробництва,

$\frac{dX}{dt}$ – вектор-стовпець абсолютних приростів виробництва в предільному вигляді;

$C(t)$ – вектор-стовпець невиробничого споживання, включаючи невиробниче накопичення;

A – матриця коефіцієнтів прямих витрат. Від статичної моделі міжгалузевого балансу ці коефіцієнти відрізняються тим, що містять витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

$B = \{b_{ij}\}$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва, тобто b_{ij} – це витрати виробничого накопичення продукції виду i на одиницю приросту продукції виду j .

Таким чином, матриця B – це матриця приростної капіталомісткості.

Припущення динамічної моделі Леонтьєва:

- A – продуктивна та нерозкладна, $\det B \neq 0$ (тобто матриця B є невиродженою).
- Капіталовкладення виступають єдиним джерелом зростання виробництва, тобто

$$\frac{dX}{dt} \geq 0.$$

Таким чином, в динамічній моделі Леонтьєва припустимими є лише ті траєкторії, що не убавляють за всіма видами продукції. Якщо припустити, що $\frac{dX}{dt}$ може бути менше за нуль, то можуть виникнути від'ємні компоненти капіталовкладень, тобто може мати місце деінвестування. Щоб цього уникнути, можна зв'язати капіталовкладення з приростом виробничих потужностей.

- В моделі не враховується НТП.
- Миттєвість перетворення капіталовкладень в приріст виробництва.
- Неперервність часу.

Рівняння (6.9) може бути записане в іншому вигляді відносно національного доходу:

$$Y(t) = (E - A) X(t).$$

З урахуванням того, що національний дохід та валовий суспільний продукт пов'язані співвідношенням

$$\frac{dX}{dt} = (E - A)^{-1} \cdot \frac{dY(t)}{dt},$$

замість (6.9) можна записати

$$Y(t) = B (E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t). \quad (6.10)$$

Позначимо

$$B (E - A)^{-1} = \tilde{B}. \quad (6.11)$$

Розглянемо спочатку рішення однорідної системи, тобто рішення системи (6.10) за умови, що $C(t) = 0$. Тоді наша система буде мати наступний вигляд:

$$Y(t) = B (E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}, \quad (6.12)$$

де кожна галузь розвивається з деяким постійним темпом λ_q , однаковим для всіх галузей. Тоді рішення системи (6.12) має вигляд:

$$Y_1(t) = \sum_{q=1}^n d_q K_q e^{\lambda_q t}, \quad (6.13)$$

де λ_q – величина, зворотна до власних чисел матриці $\tilde{B}$, тобто

$$\lambda_q = \frac{1}{s_q},$$

K_q – власний вектор, що відповідає власному числу s_q .

Тоді маємо:

$$Y(0) = \sum_{q=1}^n d_q K_q. \quad (6.14)$$

Із (6.14) визначаємо скаляри d_q . Таким чином, можна стверджувати, що в загальному випадку єдина траєкторія, що виходить із $Y(0)$, є комбінацією експонент з різними темпами приросту. Розвиток з однаковими темпами приросту всіх компонент вектору Y є неможливим. Але певна схожість є. Вона пов'язана з тим, що матриця $\tilde{B}$ має так звані корені Фробеніуса-Перрона. Є очевидним, що

$$(E - A)^{-1} > E + A.$$

В силу того, що матриця B є невід'ємно визначеною, маємо:

$$B (E - A)^{-1} > B(E + A).$$

Це, в свою чергу, в силу прийнятого позначення (6.11), означає, що $\tilde{B} > B$. Звідси, у свою чергу, впливає позитивність матриці $\tilde{B}$. Таким чином, в матриці $\tilde{B}$ існує таке додатне власне число $\hat{s}$, яке за модулем є більшим за всі решта власних чисел матриці $\tilde{B}$. Цьому власному числу $\hat{s}$ відповідає суворо позитивний власний вектор $\hat{K}$. При цьому гарантується наявність від'ємних компонент у інших векторів, що відповідають іншим власним числам. Слід також звернути увагу на наступні важливі факти:

- корінь Фробеніуса-Перрона містить лише додатні компоненти;
- всі інші вектори обов'язково знакозмінні.

$$\min_j \tilde{B}_j \leq \hat{s} \leq \max_j \tilde{B}_j ,$$

$$\tilde{B}_j = \sum_i \tilde{b}_{ij} ,$$

$$\min_j \left(\frac{1}{\tilde{B}_j} \right) \leq \hat{\lambda} \leq \max_j \left(\frac{1}{\tilde{B}_j} \right) .$$

Якщо при цьому всі суми по стовпцях $\tilde{B}_j$ дорівнюють деякому одному й тому ж самому числу $\tilde{B}_0$, тобто у випадку однакових коефіцієнтів повних галузевих капіталомісткостей, то тоді маємо, що

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\tilde{B}_0} ,$$

де $\hat{\lambda}$ - технологічний темп приросту в міжгалузевій динамічній моделі.

Проаналізуємо, що означає такий темп приросту для рішення (6.13). Якщо розглядати нескінченний відрізок часу, то починає переважати експонента з максимальним темпом $\max \lambda_q$. В такому випадку галузева структура національного доходу прагне до власного вектору, який відповідає цьому темпу. Тут є можливими дві ситуації.

1. Домінуючою виявляється експонента з технологічним темпом приросту $\lambda_q = \hat{\lambda}$. Тоді вектор національного доходу прагне до вектору, що відповідає технологічному темпу, який є суворо позитивним. Як наслідок, в цій ситуації траєкторія розвитку не виходить за межі припустимої області (рис. 6.1а).
2. Домінує експонента з темпом приросту $\lambda_q \neq \hat{\lambda}$. Таким чином, якщо матриця $\tilde{B}$ має додатні власні числа крім коренів Фробеніуса-Перрона, то реалізується саме ця ситуація, та траєкторія розвитку також не виходить за межі припустимої області (рис. 6.1а). Якщо ж разом з коренем Фробеніуса-Перрона вона має від'ємні власні числа, то в цьому випадку реалізується друга ситуація (рис. 6.1б):

$$s_q K_q = \tilde{B} K_q = B (E - A)^{-1} K_q .$$

В силу того, що $s_q K_q$ є знакозмінним вектором, $B(E - A)^{-1} K_q$ також є знакозмінним вектором. Тоді неминуче у векторі

$$X(t) = \sum_{q=1}^n d_q (E - A)^{-1} K_q e^{\lambda_q t}$$

з'являться від'ємні елементи та почнуть переважати. Це означає, що у векторі $\frac{dX}{dt}$ також з'являться від'ємні елементи. Як наслідок, в цьому випадку траєкторія розвитку виходить в неприпустиму область.

Відміна цієї моделі від макроекономічного аналогу полягає в тому, що в макроекономічній моделі траєкторія також може вийти в неприпустиму область, але там це відбувається внаслідок неприпустимого (надмірного) споживання. Сама система технологічно цілком може розвиватися навіть з максимально можливим темпом зростання. В даній моделі траєкторія розвитку може вийти в неприпустиму область, лише виходячи із певного поєднання технологічних та структурних параметрів. Початковий стан системи відносно припустимої області визначається в наступний спосіб. Якщо реалізується перша ситуація, то де б не знаходилася б система в початковий момент, вона

обов'язково ввійде в припустиму область і буде прагнути до деякого стаціонарного стану (рис. 6.1а). Область припустимих траєкторій моделі характеризується єдиним критерієм $\frac{dX}{dt} \geq 0$ (друге припущення динамічної моделі Леонт'єва). Якщо ж $\frac{dX}{dt} \leq 0$, то область є неприпустимою. На рис. 6.1 І – це стаціонарна пряма лінія, яка фіксує певне співвідношення між елементами національного доходу як незмінне і таке, що відповідає вектору K_{λ} .

Якщо реалізується друга ситуація, то де б система не знаходилася з самого початку, вона обов'язково вийде із припустимої області та знизиться до нуля (рис. 6.1б). Параметри макротехнології при цьому можуть бути постійними, а структура може змінюватися.

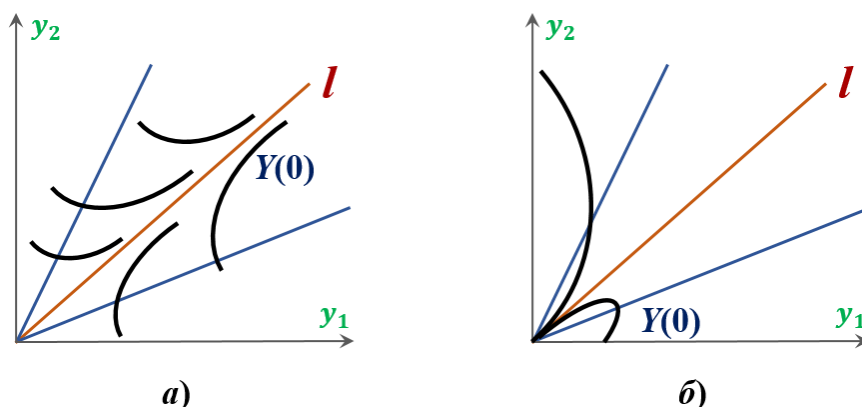


Рис. 6.1 – Траєкторії національного доходу

Контрольні запитання

1. Наведіть схему МГБ по квадрантах.
2. Охарактеризуйте зміст кожного квадранту МГБ.
3. Яке припущення використовується при побудові моделі МГБ?
4. Якою формулою описується кожна галузь по рядках МГБ?
5. Якою формулою описується кожна галузь по стовпцях МГБ?
6. Запишіть рівняння МГБ відносно кінцевого споживання.
7. Запишіть рівняння МГБ відносно внутрішнього (проміжного) споживання.
8. Сформулюйте теорему про існування розв'язку рівняння МГБ.
9. Сформулюйте основні припущення моделі Леонт'єва.
10. Які типові задачі можна розв'язувати, користуючись рівняннями МГБ?
11. За якими ознаками класифікуються моделі МГБ?
12. Назвіть основні види МГБ за періодом аналізу.
13. Назвіть основні види МГБ за обсягом використаної інформації.
14. Назвіть основні види МГБ за характером відображення міжгалузевих зв'язків.
15. Чим відрізняються господарчі та чисті галузі економіки?
16. В чому полягає модель переміщення?
17. Сформулюйте основні припущення динамічної моделі Леонт'єва.
18. Для чого можуть бути використані дані МГБ?

7. ІНТУЇТИВНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ

7.1. Сутність та сфери застосування інтуїтивних методів прогнозування

Сутність методу прийняття рішень, заснованого на експертних оцінках, полягає в проведенні ретельного аналізу структури проблемної ситуації, адекватному оцінюванні можливих варіантів рішення, їх об'єктивності та надійності. Як і в будь-якому методі, в ньому є свої переваги та недоліки. До явних переваг можна віднести спрощену процедуру організації прийняття рішення, економію ресурсів на пошук необхідної інформації, розподіл відповідальності по членах експертної групи. Слід враховувати, що однаковість більшості експертів, яку можна спостерігати в ході прийняття рішень, не завжди є критерієм адекватності та достовірності прогнозів розвитку досліджуваного об'єкту або явища, які формує ця група експертів. Це тягне за собою потребу в більш ретельному відборі експертів. При використанні методу експертних оцінок зазвичай виходять із припущення, що при вирішенні проблеми в умовах існуючої невизначеності думка відібраної групи експертів є надійнішою, ніж думка окремого експерта. Однак достатньо часто оцінки експертів не мають потрібної сталості, тобто експерт може одні й ті ж самі події за деяких повторних експертиз оцінювати по-різному. Також до недоліків можна віднести те, що при використанні даного методу крім похибки, що викликана недоліком інформації про прогнозні ситуації або недостатньою компетентністю експертів, можлива також похибка, обумовлена ймовірною зацікавленістю експертів в результатах оцінювання.

В процесі експертизи деякої події можливе використання індивідуальних та групових експертних оцінок. **Сферою застосування індивідуальних експертних оцінок** можуть бути наступні напрямки прийняття рішень [14]:

- узагальнення результатів, наданих іншими експертами;
- висновки про роботу інших експертів або організації (відгуки, рецензії, експертизи);
- прогнозування розвитку проблемної ситуації або явища, а також оцінювання їх значущості в поточному періоді.

До **групових експертних оцінок** можна віднести:

- відкрите обговорення питань з подальшим голосуванням;
- закрите обговорення (тобто обговорення без прямого контакту його учасників при збереженні анонімності їх думок) з подальшим заповненням анкет експертного опитування (закрите голосування);
- вільні висловлювання без обговорення та голосування;
- сумісне вироблення синтетичних рішень, які є композицією різних частин раціональних рішень, що були сформульовані різними експертами.

Інтуїтивні методи прогнозування використовуються за умови високої складності об'єкта прогнозування. В цьому випадку може стати неможливим урахування впливу багатьох факторів [1]. Інтуїтивні методи прогнозування можуть використовувати як індивідуальні, так і колективні експертні оцінки. При застосуванні **методу «інтерв'ю»** здійснюється безпосередній контакт експерта з фахівцем за схемою «питання – відповідь». При **аналітичному методі** здійснюється аналіз якої-небудь прогнозної ситуації, складаються аналітичні доповідні записки. **Метод побудови сценарію** заснований на визначенні логіки процесу або явища в часі за різних умов. **Методи колективних експертних оцінок** засновані на тому, що при колективному міркуванні, по-перше, є більш високою точність результату та, по-друге, при обробці індивідуальних незалежних оцінок, що надаються експертами, можуть виникнути продуктивні ідеї.

Розглянуті класи інтуїтивних та формалізованих методів подібні за своїм складом експертним та фактографічним методам.

До класу експертних методів прогнозування належить **метод евристичного прогнозування**. Це аналітичний метод, суть якого полягає в побудові та подальшому усіченні «дерева пошуку» експертної оцінки з використанням якої-небудь евристики. При використанні цього методу здійснюється спеціалізована обробка прогнозних експертних оцінок, отриманих шляхом систематизованого опиту висококваліфікованих фахівців. Він застосовується для розробки прогнозів науково-технічних проблем та об'єктів, аналіз розвитку яких або в цілому, або частково не підлягає формалізації. Структура методу евристичного прогнозування містить в собі в якості основних елементів [1]:

- синтез граф-моделі об'єкта;
- формування експертних бригад та оцінки компетентності експертів;
- формування питань та розробку таблиць експертних оцінок;
- аналіз роботи експертів;
- алгоритми обробки таблиць експертних оцінок;
- способи варіації отриманих прогнозів;
- синтез прогнозних моделей.

Достовірність експертного оцінювання може бути визначена лише на основі практичного вирішення проблеми та аналізу його результатів. Використання експертів обумовлено саме тим, що відсутні які-небудь інші способи отримання інформації. Тому оцінка достовірності експертизи може здійснюватися, як правило, лише за апостеріорними даними. Якщо експертиза проводиться систематично приблизно з одним й тим самим складом експертів, то з'являється можливість накопичення статистичних даних про достовірність роботи групи експертів та отримання стійкої кількісної оцінки достовірності. Цю оцінку можна використовувати в якості апріорних даних про достовірність групи експертів для подальших експертиз. Достовірність групового експертного оцінювання залежить також від загальної кількості експертів в групі, пайового складу різних фахівців в групі, від характеристик експертів [14].

Особливе місце в класифікації методів економічного прогнозування займають так звані комбіновані методи, що об'єднують різні інші методи. Програмний аспект прогнозу полягає у визначенні можливих шляхів досягнення бажаних та необхідних результатів, очікуваних під час реалізації кожного із можливих варіантів, та ступеню ймовірності вдалого досягнення результату при здійсненні того чи іншого варіанту. Організаційний бік прогнозу містить в собі комплекс організаційно-технічних заходів, що забезпечують досягнення певного результату тим чи іншим варіантом. В організаційному аспекті виходять з уявлення про наявні економічні ресурси та накопичений науковий потенціал [1].

7.2. Методи евристичної самоорганізації моделей

Самоорганізація – це процес організації, що відбувається взагалі без участі людини або при зовсім малій її участі. В сучасній теорії самоорганізації ставиться задача розробки методів програмування, за допомогою яких можна було б вирішувати задачі з мінімальною кількістю апріорної інформації. Метод розв'язання має бути універсальним для усіх задач. Людина фактично задає при цьому лише невелику таблицю експериментальних даних для низки можливих величин, що спостерігаються (тим самим вказуючи так зване «середовище» розв'язання задачі) та, головне, – критерій селекції математичної моделі складного об'єкта. Самоорганізація спрямована на якнайбільше зменшення обсягу апріорної інформації, яка потрібна для синтезу прогнозуючої та керуючої моделей. Програма синтезує модель за невеликою кількістю змінних та за невеликою кількістю експериментальних даних.

Досвід розв'язання аналогічних одна одній конкретних задач, якими б складними вони не були, закладається в критерії вибору моделі або критерії управління. Оператор лише вказує, які вимоги висуваються до моделі: точність прогнозу, незсуваність коефіцієнтів моделі або баланс змінних тощо. Апріорну інформацію, що закладається в програму, легко узгодити з людьми найрізноманітніших точок зору. Тому навіть економіку в масштабах країни або групи країн можна прогнозувати при мінімальному обсязі апріорної інформації та за невеликим обсягом експериментальних даних [4].

Згідно з теорією самоорганізації, універсальний метод розв'язання задачі – перебір (тобто поступова апробація) різних варіантів математичних моделей та їх комбінацій при поступовому збільшенні складності. Оптимальне рішення визначається при складності моделі, що є адекватною до складності об'єкта. Перебір моделей за тим чи іншим критерієм селекції моделі може бути повним (тобто починатися з найпростішої лінійної моделі від одного аргументу та закінчуватися такою складністю, яка є очевидно завищеною) або неповним, раціоналізованим. Повний перебір не потребує розробки ніякої теорії: він може бути застосований до будь-яких об'єктів, лінійних та нелінійних, стаціонарних та нестаціонарних. При ньому взагалі ніякі відомості із математичної статистики не потрібні. Розробка теорії є необхідною лише при скороченні або раціоналізованому переборі. Тут необхідно з'ясувати умови, за яких не буде втрачений результат, який можна було б отримати при повному переборі.

Основний принцип теорії самоорганізації полягає в наступному: при поступовому збільшенні складності математичної моделі деякі критерії спочатку знижуються, досягають мінімуму, а потім починають збільшуватися. Програма за допомогою перебору здатна знаходити мінімальне значення критерію. Це й надає можливість передати машині процес знаходження єдиної моделі оптимальної складності, тобто реалізувати на ній загальну ідею самореалізації моделі складного об'єкта. Роль людини при цьому зводиться лише к наданню машині критерію вибору та середовища розв'язання задачі. При цьому для отримання точного прогнозу не обов'язково бути кваліфікованим фахівцем в цій конкретній галузі. Вивчення об'єкта є необхідним лише в тій мірі, яка дозволить правильно обрати достатньо повний перелік змінних, які підлягають спостереженню – середовище розв'язання задачі – та вказати універсальний критерій селекції моделі оптимальної складності.

Повний перебір всіх варіантів розв'язання може бути застосований лише при малій кількості змінних. Програми евристичної самоорганізації діють подібно до способу мислення людини: в них передбачені генератори комбінацій та порогові самостійні відбори найбільш корисної інформації за низкою евристичних критеріїв. В теорії самоорганізації розроблено так звані раціоналізовані багаторядні алгоритми, що суттєво скорочують обсяг перебору моделей. Однак зі всього сказаного не впливає, що всі основні задачі самоорганізації математичних моделей в програмній реалізації вже повністю розв'язані. Існує п'ять основних задач, які для здійснення повної самоорганізації необхідно комп'ютеризувати.

1. Вибір критерію селекції. Досі цей вибір є евристичним та належить людині. В якості критеріїв використовуються помилка прогнозу, що визначається на нових точках (критерій регулярності), і так званий критерій незсуваності моделі. Існує ще третій критерій селекції моделей оптимальної складності, який називається «*критерій балансу змінних*». Він пов'язаний з тим, що точно не відомо, чи будуть так звані балансові співвідношення виконуватися через десять років так само, як вони виконуються зараз або виконувалися в минулому. Це означає, що комп'ютер має обрати таку систему рівнянь, за якої не порушуються балансові співвідношення. Таким чином, критерій балансу змінних є універсальним та найбільш ефективним критерієм селекції для всіх задач.

2. Вибір середовища моделювання або переліку можливих змінних, що утворюють так звану систему елементів даного складного об'єкта. Для розв'язання цієї задачі за методом самоорганізації необхідно моделювати мозок з його «поверхами» абстрактної та конкретної пам'яті, організувати накопичення великої кількості інформації (досвіду) та вибір розв'язання за критеріями подібності та близькості ситуацій. Доти, поки не будуть створені моделі генерації евристик, можна використовувати так званий комбінований метод: перелік можливих змінних береться із всіх робіт детерміністичного напрямку, поєднуючи всі відомі змінні в один список. При цьому всі непотрібні змінні комп'ютер відкине самостійно.
3. Вибір опорної функції та її складності. В зв'язку з тим, що підхід самоорганізації моделей оптимальної складності є універсальним, то при моделюванні практично використовується дуже обмежена кількість опорних функцій. Комп'ютер за допомогою перебору вказує найбільш відповідну з них: кращою є та опорна функція (або їх суперпозиція), яка визначає глибший мінімум критерію селекції. Глибина мінімуму критерію є показником достовірності отриманого рішення. Якщо глибокого мінімуму не отримано, це означає, що в області комп'ютерного перебору немає ані відповідних даних, ані переліку змінних, ані переліку опорних функцій. В цьому випадку необхідно уточнити або доповнити апіорну інформацію.
4. Визначення числових оцінок коефіцієнтів опорної функції оптимальної складності, яку отримано в результаті розв'язання попередньої, третьої, задачі. Комп'ютерне розв'язання четвертої задачі вже давно запропоноване та не містить труднощів. Тут найбільше застосування знаходять методи адаптації, випадкового пошуку або розв'язання системи нормальних рівнянь Гауса. **Четверту** задачу часто називають задачею адаптації, на відміну від **третьої**, яка власне і є задачею самоорганізації.
5. Як краще використовувати прогнози для автоматичного керування об'єктом. Розроблено методи використання точних прогнозів для вироблення рекомендацій по автоматичному керуванню складними виробничими та економічними об'єктами. При цьому принцип керування складним об'єктом з оптимізацією прогнозу може бути застосований навіть до таких несталіх об'єктів, якими раніше могла керувати лише людина. Встановлений так званий «асимптотичний закон», згідно з яким збільшення часу упередження прогнозу обов'язково призведе до сталого керування. Прогнозуючі моделі при цьому безперервно синтезуються методами самоорганізації за частиною змінних і невеликою кількістю експериментальних точок. Це робить перспективним перехід від автоматизованих систем керування, в яких рішення по керуванню приймає людина (ЛПР), до автоматизованих систем керування, в яких людина вказує лише критерії керування.

7.3. Класифікація шкал при експертному оцінюванні

Рациональне використання інформації, отриманої або в результаті аналізу, або від експертів, можливе за умови її формального перетворення до вигляду, зручному для подальшого аналізу, спрямованого на підготовку та прийняття рішень. Можливості формалізації первинної інформації залежать від специфічних особливостей прогнозованого об'єкту, надійності та повноти наявних даних, рівня прийняття рішень. Форма подання даних залежить від прийнятого критерію, на обрання якого, у свою чергу, суттєво впливає специфіка досліджуваної проблеми. Формалізація інформації, отриманої від експертів, має бути спрямованою на підготовку прогнозного рішення таких техніко-економічних та господарчих задач, які не можуть бути в повній мірі описані математично через свою слабку структурованість, тобто через те, що вони містять невизначеності, пов'язані не лише з вимірюванням, але й з самим характером досліджуваних цілей, засобів їх досягнення та зовнішніх умов

[14]. При аналізі перспектив розвитку досліджуваного об'єкта або явища необхідно не лише подати інформацію у вигляді непрямих оцінок, але й ще ту частину інформації, яка не підлягає кількісному вимірюванню, слід виразити за допомогою експертних оцінок та якісних ознак, на базі яких можна формалізувати цю інформацію.

Якщо експерт може порівняти та оцінити можливі варіанти дій, приписавши кожному з них якісну міру, то в такий спосіб може бути утворено деяку систему переваг. В залежності від того, за якою шкалою можуть бути задані ці переваги, експертні оцінки містять більший або менший обсяг інформації та мають різну здатність до формалізації. Класифікація типів шкали на базі емпіричних операцій та математичної структури розрізняє наступні **основні типи шкал** [14].

1. **Номинальні (класифікаційні)**, або **шкали найменувань**, за якими встановлюється приналежність об'єкта до якого-небудь класу. Значеннями такої шкали можуть бути, наприклад, оцінки якісних ознак у вигляді логічних констант **0** і **1** (відповідь «так/ні», тобто наявність або відсутність в об'єкті розглянутої ознаки) [15]. Ці шкали в загальному випадку ґрунтуються на приписуванні об'єктам вимірювань довільних чисел для їх ідентифікації та класифікації. Приписування відбувається в такий спосіб, коли кожному елементу із одного класу приписується одне й те ж саме число. Основною емпіричною операцією, яка визначає даний тип шкали, є визначення рівності елементів.
2. **Порядкова (ординальна) шкала** передбачає природне упорядкування об'єктів вимірювання відносно якоїсь властивості. Така шкала визначає інтенсивність ознаки без вказівки кількості. Процедура упорядкування задається двома емпіричними операціями: встановлення рівності та встановлення відношення «менше/більше», «краще/гірше» тощо. Припустимо, що необхідно розташувати в певній послідовності n об'єктів за якимось критерієм (ознакою, фактором). Таке упорядкування зазвичай подається у вигляді матриці $A = \|a_{ij}\|$, де $i, j = \overline{1, n}$. Величини a_{ij} встановлюють співвідношення між об'єктами і можуть бути визначені в наступний спосіб [14]:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } i \text{ переважніше, ніж } j, \text{ тобто } i > j, \\ 0, & \text{якщо } i \text{ та } j \text{ еквівалентні, тобто } i \sim j, \\ -1, & \text{якщо } i \text{ не більше (менше) переважним, ніж } j, \text{ тобто } i < j. \end{cases}$$

Співвідношення $a_{ij} = +1$, яке означає, що i переважнішим за j ($i > j$), має наступні властивості:

- асиметричність: якщо $a_{ij} = +1$, то $a_{ji} = -1$,
- транзитивність: якщо $a_{ij} = +1$ і $a_{jk} = +1$, то $a_{ik} = +1$.

Співвідношення $a_{ij} = 0$, яке означає, що i та j рівноцінні, тобто еквівалентні ($i \sim j$), є відношенням еквівалентності та має наступні властивості [16]:

- рефлексивність: $a_{ii} = 0$,
- симетричність: якщо $a_{ij} = 0$, то $a_{ji} = 0$,
- транзитивність: якщо $a_{ij} = 0$ і $a_{jk} = 0$, то $a_{ik} = 0$.

Крім того, ці два співвідношення мають бути сумісними, тобто якщо $a_{ij} = +1$ і $a_{jk} = 0$, то $a_{ik} = +1$, а також якщо $a_{ij} = 0$ і $a_{jk} = +1$, то $a_{ik} = +1$. Також це упорядкування має бути зв'язним, тобто для будь-яких i та j обов'язково виконується одне з трьох співвідношень: або $a_{ij} = +1$, або $a_{ji} = -1$, або $a_{ij} = 0$.

Використання порядкових шкал дозволяє розрізняти об'єкти і в тих випадках, когда коли критерій (ознака, фактор) не заданий в явному вигляді, тобто коли сама ознака порівняння

невідома, але при цьому можливо частково або повністю упорядкувати об'єкти на основі системи переваг, яку має експерт [14]. Будь-яка множина A називається упорядкованою, якщо для будь-яких двох її елементів A_i та A_j встановлено, що або A_i передує A_j , або A_j передує A_i . Інколи не вдається встановити суворе передуювання для всіх елементів множини, але можна здійснити «групове» упорядкування, коли упорядковуються підмножини еквівалентних (рівноцінних) елементів. Також використання порядкових шкал дозволяє проводити перетворення отриманих від експертів оцінок, що відповідають всім монотонно зростаючим функціям. Так, наприклад, додатні оцінки можуть бути замінені їх квадратами, логарифмами або будь-якою іншою монотонно зростаючою функцією.

3. Інтервальна шкала (шкала інтервалів) відрізняється від попередніх тим, що потребує встановлення певної одиниці вимірювання та початкової точки відліку. Емпірична операція припускає лише таке числове приписування, за якого рівність проміжків між двома шкальними значеннями виражає рівність інтервалів між вимірюваними елементами відносно деякої властивості. Інтервальні шкали мають можливість оцінки, отримані за однією шкалою, трансформувати в оцінки за іншою шкалою. Різниця між значеннями на шкалі інтервалів стають мірами на шкалі відношень. В деяких випадках при формалізації експертних оцінок використовується властивість адитивності, яка притаманна лише шкалі відношень. Наявність адитивності виражається наступними властивостями:

- якщо $j = a$ та $i > 0$, то $i + j > a$;
- $i + j = j + i$;
- якщо $i = a$ та $j = b$, то $i + j = a + b$;
- $(i + j) + k = i + (j + k)$.

Звичайна ситуація, коли потрібно прийняти рішення з урахуванням адитивності, полягає в тому, що є декілька (принаймні, дві) якісні ознаки. За наявності декількох ознак, які характеризують конкретні об'єкти, існує безліч реальних властивостей та типів зв'язків об'єктів. В залежності від характеру та цілі досліджуваного явища чи об'єкта ознаки, за якими розрізняються об'єкти, можуть бути кількісно порівняними або непорівняними між собою, частково порівняними (тобто не будь-який з будь-яким, а лише деякі з них), упорядковані за ступенем їх важливості тощо. Несумірність різних ознак обумовлена не лише необхідністю застосування різних одиниць вимірювання, але й тим, що кожна ознака, виражаючи певну властивість, одночасно є оцінкою відношення до даної властивості з боку особи, що приймає рішення.

4. Шкала відношень передбачає, що вимірювані об'єкти характеризуються масштабом. Вона є інтервальною шкалою з природним початком. Емпіричною операцією, яка доповнює попередні шкальні типи, є визначення рівності відношень [14].

5. Абсолютна шкала не має визначеної розмірності та дозволяє порівнювати різні характеристики. Ця шкала базується на шкалі відношень, для якої вводяться нормовані (базові) характеристики:

$$f = \frac{x_i}{\tilde{x}}, f = \frac{x_i}{s_i}, f = \frac{x_i - \tilde{x}}{s_i}, f = \frac{x_{\max} - x_i}{x_{\max}}, f = \frac{x_{\max} - x_i}{R_i},$$

де $\tilde{x}$ – математичне очікування,

s_i – середньоквадратичне відхилення,

R_i – розмах варіації.

Класифікацію шкал наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Класифікація шкал за використаними критеріями

Вид критерію	Найменування шкали	Множина припустимих перетворень критерію
Якісні критерії	Номінальна (шкала найменувань)	Всі взаємнооднозначні функції
	Порядкова (ординальна)	Всі монотонно зростаючі функції
Кількісні критерії	Інтервальна (шкала інтервалів)	Всі додатні афінні перетворення
	Шкала відношень	Всі лінійні перетворення з додатними коефіцієнтами
	Абсолютна	Тотожні перетворення

7.4 Методи колективної експертної оцінки

Суть методу колективної експертної оцінки для розробки прогнозів полягає в досягненні узгодженості думок експертів за перспективними напрямками розвитку об'єкту прогнозування, що були сформульовані раніше окремими фахівцями, а також в наданні оцінки аспектам розвитку об'єкту, яка не може бути визначена іншими методами (наприклад, аналітичним розрахунком, експериментом тощо).

Зміст методу колективної експертної оцінки полягає в наступному [1]:

1. Для організації проведення експертних оцінок створюються робочі групи, до функцій яких належать проведення опитування, обробка матеріалів та аналіз результатів колективної експертної оцінки. Робоча група призначає експертів, які дають відповіді на поставлені питання, що стосуються перспектив розвитку даної галузі. Кількість експертів, що залучені до розробки прогнозу, може коливатися від 10 до 150 осіб, в залежності від складності об'єкта.
2. Перед тим, як організувати опитування експертів, необхідно уточнити основні напрямки розвитку об'єкта, а також скласти матрицю, що відображає генеральну мету, локальні цілі та способи їх досягнення. При цьому в ході попереднього аналізу разом з групою фахівців визначаються найбільш важливі та локальні цілі для розв'язання поставленої задачі. Під засобами досягнення мети розуміють напрямки наукових досліджень та розробок, результати яких можуть бути використані для досягнення мети. При цьому напрямки наукових досліджень та розробок не мають перетинатися один з одним. Наступний етап колективної експертної оцінки складається із вироблення питань, що будуть запропоновані експертам. Форма питання може бути розробленою у вигляді таблиць, але зміст цих питань має визначатися специфікою об'єкта або галузі, що прогнозується. При цьому питання мають бути складені за певною структурно-ієрархічною схемою (від широких питань до вузьких, від складних до простих).
3. При проведенні опитування експертів необхідно забезпечити однозначність розуміння окремих питань, а також незалежність суджень експертів.
4. Ведеться обробка матеріалів колективної експертної оцінки, що характеризують узагальнену думку та ступінь узгодженості індивідуальних оцінок експертів. Обробка даних оцінок експертів служить початковим матеріалом для синтезу прогнозних гіпотез і варіантів розвитку в галузі. Остаточна оцінка визначається або як деяке середнє судження, або як середнє арифметичне значення оцінок всіх експертів, або як середнє нормоване зважене значення оцінки.

Методика статистичної обробки матеріалів колективної експертної оцінки для розробки науково-технічних прогнозів є сукупністю оцінок відносної важливості, що присвоєні експертами кожному із напрямків наукових досліджень, що оцінюються. Оцінки важливості виражаються в балах і можуть приймати значення від 0 до 1, від 0 до 10, від 0 до 100 тощо. При обробці матеріалів оцінки

важливості з визначеного питання заводяться до таблиці, рядки якої відповідають напрямкам досліджень, а стовпці – експертам. До оцінки відносної важливості можна віднести показники, які характеризують [1]:

- узагальнену думку групи експертів про відносну важливість розвитку різних напрямків досліджень та розробок, ступінь узгодженості експертів;
- статистичну значущість показника узгодженості думок експертів;
- «активність» експертів (ступінь їхньої участі в оцінюванні різних напрямків досліджень);
- компетентність експертів за кожним із запропонованих їм питань.

Процедура отримання експертних оцінок може бути формалізованою та поданою на рис. 7.1 [8].

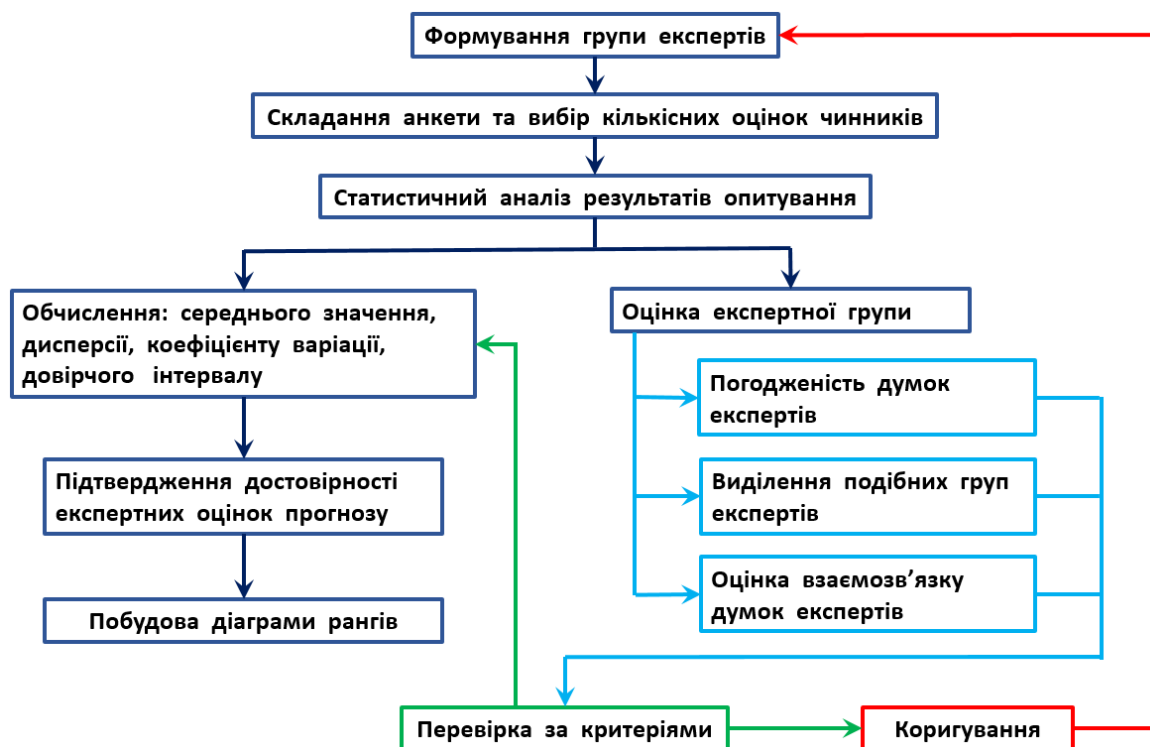


Рис. 7.1 – Схема вироблення прогнозу на основі експертного опитування

Формування групи експертів – найважливіша складова експертних методів. При визначенні чисельності групи експертів слід враховувати наступні вимоги [14]:

- кількість експертів в групі не має бути замалою, щоб не втратити змістовного складу процедури формування експертних оцінок;
- значна за кількістю група експертів має наступні недоліки:
 - меншу еластичність впливу оцінки кожного експерта на групову оцінку;
 - трудомісткість організації експертизи, пов'язану з обробкою результатів опитування та безпосередньою координацією роботи групи.

В практиці проведення експертиз існують граничні оцінки чисельності групи експертів від нижньої N_{min} до верхньої N_{max} . Нижня границя чисельності групи залежить від складності та кількості m подій, що оцінюються. Для дотримання вимог репрезентативності групи має виконуватися правило $N_{min} \geq m$. Обмеженням для максимальної чисельності групи є потенційно можлива кількість експертів N_n , тобто $N_{max} \leq N_n$. Таким чином, маємо [14]:

$$m \leq N_{min} \leq N \leq N_{max} \leq N_n.$$

Максимальна кількість експертів в групі перевіряється також на обмеження за фінансовими ресурсами. Визначивши залежність між достовірністю, кількістю експертів та витратами на оплату, група управління надає керівництву цю інформацію та формулює можливі альтернативи рішень. Такими альтернативами можуть бути або знижені достовірності результатів експертного оцінювання до рівня, що забезпечує виконання обмеження по витратам, або збереження початкової вимоги на достовірність експертизи та збільшення витрат на оплату.

Одним з методів обчислення чисельності експертної групи є припустима величина ступеню розбіжності думок окремих експертів в групі. Існує деяка емпірична залежність, що визначає зв'язок між кількістю N експертів в групі та величиною середньої групової помилки ξ [14].

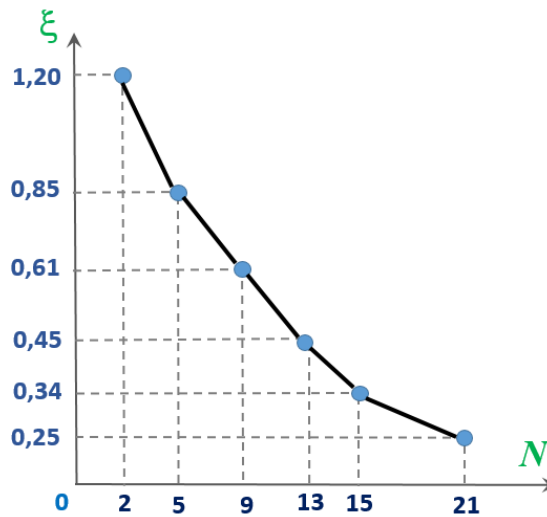


Рис. 7.2 – Залежність величини помилки прогнозу від кількості експертів в групі

Використання кривої такого типу дозволяє обирати мінімально припустиму кількість експертів, враховуючи той рівень достовірності, якого потребує процес прийняття рішення. Однак дана модель не є універсальною та обумовлена специфікою та сталими параметрами експертної групи.

Природно, що при прогнозуванні з метою мінімізації витрат на прогноз намагаються долучати якнайменшу кількість експертів за умови, що помилка результату прогнозу не перебільшить припустимої величини ξ , що буде знаходитися в інтервалі $0 < \xi < 1$. Тому рекомендована кількість експертів може бути визначена за формулою [8]

$$N_{min} = 2,5 + \frac{1,5}{\xi}.$$

При підстановці в цю формулу граничних значень припустимої помилки прогнозу ξ отримуємо:

$$N_{min}(E = 0) \rightarrow \infty, \quad N_{min}(E = 1) = 2,5 + \frac{1,5}{1} = 4.$$

Для визначення максимальної чисельності експертної групи використовується нерівність [8]

$$N_{max} \leq 3 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{2 \cdot K_{max}},$$

де K_i – компетентність i -го експерта, яку обчислено на основі анкети самооцінки або в якійсь інший спосіб;

K_{max} – максимально можлива компетентність за використаною шкалою компетентності експертів.

7.5. Математична формалізація методів колективної експертної оцінки

Вимірювання характеристик при обранні найбільш переважного варіанту рішення із деякої множини альтернатив передбачає наявність в якості об'єктів вимірювання деякої сукупності характеристик, що описують сам економічний об'єкт або проблемну ситуацію. Процедура вимірювання цих характеристик та подальше порівняння цих вимірних значень здійснюється на базі наявності деяких ознак та правил порівняння, а також вибору відповідного методу порівняння. При вимірюванні характеристик можуть бути використані будь-які з описаних шкал. Існує декілька методів математичної обробки результатів колективної експертної оцінки.

Метод ранжування є процедурою, яка передбачає упорядкування об'єктів в порядку їх переваги (передування) на основі порівняння властивостей цих об'єктів. Для аналізу порівнюваних властивостей вводяться відношення еквівалентності та переваги. Якщо на множині об'єктів $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ визначено лише відношення переваги, то тим самим заданий суворий порядок. Наприклад, нехай для поданої множини об'єктів є порядок $\{a_8 > a_3 > a_1 > a_2 > \dots > a_n\}$. Це означає, що в даній послідовності a_8 – самий переважний об'єкт серед усіх досліджуваних. Він переважніший за a_3 , який, в свою чергу, переважніший за a_1 тощо. Самий непереважний елемент в цьому ранжуванні – a_n . Якщо до цього відношення додається відношення еквівалентності [16], то тим самим задається несуворий порядок $\{a_8 > a_3 \sim a_1 \sim a_2 > a_7 \dots > a_n\}$. Тут об'єкт a_8 є більш переважним, ніж об'єкт a_3 , який є еквівалентним до a_1 . Об'єкт a_1 , в свою чергу, є еквівалентним до об'єкту a_2 , але вони всі три є переважнішими, ніж a_7 тощо. Тоді з урахуванням введених відношень є справедливим логічний наслідок $(a_i > a_j) \Rightarrow (\varepsilon_i \geq \varepsilon_j)$, де $\varepsilon_i = f(a_i)$. При цьому величину ε_i називають **рангом об'єкта**. Він дорівнює порядковому номеру об'єкта в ранжованому переліку [14].

Наприклад, для упорядкованої множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ визначені відношення переваги та еквівалентності. Присвоюємо елементам ранжованої множини порядкові номери із натурального ряду чисел. При цьому отримаємо, наприклад, наступний результат:

Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \sim a_5 \sim a_6 > a_7 > \dots > a_n$							
Ранги	1	2	3	4	5	6	7	... N

Ранги для еквівалентних об'єктів a_4 , a_5 і a_6 обчислюються як середнє арифметичне, тобто

$$\varepsilon_{4,5,6} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

З урахуванням обчислених середніх рангів, маємо наступний ряд об'єктів:

Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \sim a_5 \sim a_6 > a_7 > \dots > a_n$							
Ранги	1	2	3	5	5	5	7	... N

Метод простого ранжування при проведенні колективної експертної оцінки полягає в тому, що кожний експерт розташовує ознаки в порядку збільшення переваги. Припускається розташування ознак в зворотній послідовності – від найменш до найбільш переважної [8]. Після того, як дані від експертів зібрані, відбувається обробка отриманих оцінок. Методика статистичної обробки даних містить наступні етапи.

- Визначення для кожного фактору суми рангів:

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2} + \dots + \varepsilon_{im},$$

де ε_{ij} – ранг, присвоєний j -м експертом i -му фактору,
 m – кількість експертів.

- Визначення середньої величини суми рангів:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i,$$

де k – кількість факторів, які оцінюються.

- Визначення суми квадратів відхилень:

$$S = \sum_{i=1}^k (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2.$$

- Визначення коефіцієнту конкордації W , який дозволяє оцінити ступінь узгодженості думок експертів (за відсутності рівних рангів, тобто за умови, що на множині об'єктів задано лише відношення переваги та не задано відношення еквівалентності):

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot k \cdot (k^2 - 1)}.$$

Коефіцієнт конкордації приймає свої значення в діапазоні від **0** до **1**. При цьому $W = 0$ відповідає повній відсутності узгодженості думок експертів, а $W = 1$ відповідає повній однотайності. Таким чином, якщо W суттєво відрізняється від нуля, то можна вважати, що між оцінками експертів існує певна узгодженість, і чим ближче значення коефіцієнта до одиниці, тим більший ступінь узгодженості думок експертів.

- Оцінка невинуватості узгодженості думок експертів відбувається за допомогою критерію Пірсона за величиною $\chi^2 = \sqrt{S}$ при числі ступенів свободи $f = k - 1$ та заданому рівні значимості α :

$$\chi_m^2(f, \alpha) < \chi^2,$$

де $\chi_m^2(f, \alpha)$ – табличне значення [17].

У випадку виконання цієї нерівності з довірчою ймовірністю $P = 1 - \alpha$ можна стверджувати, що думки експертів відносно ймовірності факторів узгоджуються невинуватково.

Приклад 7.1. П'ять експертів висловили свої переваги відносно досліджуваних шести об'єктів:

Експерт № 1: $a_1 > a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_6$;

Експерт № 2: $a_5 > a_1 > a_4 > a_2 > a_3 > a_6$;

Експерт № 3: $a_1 > a_4 > a_3 > a_5 > a_2 > a_6$;

Експерт № 4: $a_1 > a_4 > a_5 > a_3 > a_2 > a_6$;

Експерт № 5: $a_1 > a_4 > a_5 > a_3 > a_2 > a_6$.

Визначити ступінь узгодженості думок експертів.

Розв'язання. Визначимо ранги об'єктів, які їм присвоїв кожний з експертів.

Експерт № 1:	Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_6$					
	Ранги	1	2	3	4	5	6
Експерт № 2:	Ранжовані об'єкти	$a_5 > a_1 > a_4 > a_2 > a_3 > a_6$					
	Ранги	1	2	3	4	5	6
Експерт № 3:	Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_4 > a_3 > a_5 > a_2 > a_6$					
	Ранги	1	2	3	4	5	6
Експерт № 4:	Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_4 > a_5 > a_3 > a_2 > a_6$					
	Ранги	1	2	3	4	5	6
Експерт № 5:	Ранжовані об'єкти	$a_1 > a_4 > a_5 > a_3 > a_2 > a_6$					
	Ранги	1	2	3	4	5	6

Зведемо ці результати в таблицю, яку будемо використовувати для подальших статистичних розрахунків.

ЕКСПЕРТ ОБ'ЄКТ	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	ε_i	$\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$	$(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$
a_1	1	2	1	1	1	6	- 11,5	132,25
a_2	5	4	5	5	5	24	+ 6,5	42,25
a_3	4	5	3	4	4	20	+ 2,5	6,25
a_4	3	3	2	2	2	12	- 5,5	30,25
a_5	2	1	4	3	3	13	- 4,5	20,25
a_6	6	6	6	6	6	30	+ 12,5	156,25
Разом						105		387,5

В наведених розрахунках було враховано, що кількість об'єктів $k=6$, а кількість експертів $m=5$. Тому

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = \frac{105}{6} = 17,5,$$

$$S = \sum_{i=1}^k (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2 = 387,5.$$

Експерти висловили свої переваги однозначно, тобто на розглянутій множині об'єктів задано лише відношення переваги та не задано відношення еквівалентності. В силу відсутності рівних рангів у об'єктів, можна обчислити коефіцієнт конкордації:

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot k \cdot (k^2 - 1)} = \frac{12 \cdot 387,5}{5^2 \cdot 6 \cdot (6^2 - 1)} = 0,89.$$

Отриманий результат свідчить про достатньо високий ступінь узгодженості думок експертів. Оцінимо, наскільки це узгодження не випадкове. В даному прикладі число ступенів свободи та розрахункова величина критерію Пірсона наступні:

$$f = k - 1 = 6 - 1 = 5, \quad \chi^2 = \sqrt{S} = \sqrt{387,5} = 19,69.$$

За таблицею 1.3 критичних значень критерію χ^2 Пірсона знаходимо значення критерію Пірсона для $\alpha = 0,05$ і $\alpha = 0,01$ [17]. Із наведеної таблиці видно, що $\chi^2_5(5; 0,05) = 11,1$, $\chi^2_5(5; 0,01) = 15,1$. Таким чином, табличні критичні значення критерію Пірсона менші за його отримане розрахункове значення. Отже, узгодженість думок експертів відносно важливості (переваги) досліджуваних об'єктів є не випадковою.

Відповідь. Думки експертів узгоджені на **89 %** (коефіцієнт конкордації **$W = 0,89$**). Ця узгодженість є не випадковою.

Переваги методу ранжування полягають в порівняній простоті процедури отримання оцінок та в меншій кількості експертів, яка є необхідною для оцінки показників (в порівнянні з іншими методами). Недолік цього методу полягає в свідомо рівномірному розподілі оцінок та зменшенні важливості ознак [8].

Метод задання вагових коефіцієнтів полягає в присвоєнні всім ознакам вагових коефіцієнтів (коефіцієнтів важливості). Присвоєння може відбуватися в такий спосіб, щоб загальна сума балів дорівнювала якомусь числу (наприклад, 100). Інколи найбільш важливій ознаці пропонується присвоїти фіксоване число (наприклад, 100), а решті ознак – задати числа, що дорівнюють долям від цього числа. Узагальнена думка експертів розраховується як середнє арифметичне. Очевидно, що чим більшим є значення цього коефіцієнту, тим вищою є важливість цієї ознаки. Застосування результатів експертного опитування, яке було виконано за даним методом, також потребує перевірки узгодженості думок експертів [8].

Метод послідовних порівнянь використовується в ситуаціях, коли є оцінка кожного об'єкта пріоритетного порівняння, бажано подана в нормованому вигляді [14]. Процедура послідовних порівнянь складається із наступних етапів [8, 14].

- *Ранжування об'єктів*, за якого i -й експерт упорядковує всі ознаки в порядку зменшення їх значущості, тобто в порядку зменшення переваги $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n$.
- *Оцінка об'єктів*, за якої експерт присвоює першій ознаці значення, що дорівнює одиниці, а решті призначає вагові коефіцієнти ϵ_{ij} в долях від одиниці.
- *Рішення аналізу* того, чи буде об'єкт a_1 переважнішим за решту об'єктів, взятих усі разом. Для цього проводиться порівняння першої ознаки із сумою коефіцієнтів всіх наступних ознак. При цьому має здійснитися один з трьох наступних результатів:

$$a_{1i} > a_{2i} + a_{3i} + \dots + a_{mi} ;$$

$$a_{1i} = a_{2i} + a_{3i} + \dots + a_{mi} ;$$

$$a_{1i} < a_{2i} + a_{3i} + \dots + a_{mi} .$$

Експерт обирає найбільш придатний, за його думкою, варіант та здійснює у відповідності з ним оцінку першої ознаки. Процедура повторюється з відбракуванням останніх ознак по одній до порівняння a_1 з ознаками a_2 і a_3 .

- Аналогічно формується *процедура оцінки за другою ознакою*. Експерт здійснює порівняння ознаки a_2 з наступними ознаками. Процедура повторюється доти, поки можливості порівняння не будуть вичерпані.

При вимірюванні характеристик, що оцінюються як в кількісних, так і в якісних шкалах, а також при аналізі узгодженості характеристик використовуються спеціальні методи нормування [14]. Перевага даного методу полягає в тому, що експерт аналізує оцінки за сукупністю ознак. Однак цей метод є достатньо складним і дуже громіздким. Тому його не рекомендується використовувати, коли кількість ознак перевищує сім [8].

Метод парних порівнянь полягає в визначенні переваги об'єктів при порівнянні лише двох об'єктів. При цьому для пари об'єктів x і y можливі лише наступні три ситуації: $x \succ y$ (x є переважнішим за y), $x \sim y$ (x є еквівалентним до y) і $x \prec y$ (x не є переважнішим за y). Кожний i -й експерт проводить попарну оцінку переважності ознак. При цьому кожним i -м експертом заповнюється матриця $E_i = \|\varepsilon_{kj}^i\|$, елементи якої в залежності від вибору експерта обчислюються за формулою [8]

$$\varepsilon_{kj}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_k \succ a_j, \\ 0, & \text{якщо } a_k \prec a_j. \end{cases}$$

Таким чином, значення «1» при порівнянні двох об'єктів ставиться лише в тому випадку, коли об'єкт a_k є переважнішим або еквівалентним до об'єкту a_j .

Далі визначається сумарна матриця Z оцінок всіх експертів, тобто

$$z_{kj} = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{kj}^i,$$

де m – кількість експертів,

$k, j = \overline{1, n}$ – номери ознак.

За допомогою елементів сумарної матриці Z визначається остаточна матриця R , кожний елемент якої визначається за формулою

$$r_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } z_{kj} \geq \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{якщо } z_{kj} < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

За матрицею R віднаходиться сума балів, яку набрала кожна ознака [8].

Приклад 7.2. П'ять експертів заповнили матриці парних порівнянь для п'яти об'єктів. Отримані наступні результати:

$E_1 =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	1	1	1	0	0
	a_2	0	1	1	0	1
	a_3	0	0	1	1	0
	a_4	1	1	0	1	1
	a_5	1	0	1	1	1

$E_2 =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	1	0	1	0	1
	a_2	1	1	1	0	0
	a_3	0	0	1	1	0
	a_4	1	1	0	1	1
	a_5	0	1	1	0	1

$E_3 =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	1	0	1	0	1
	a_2	1	1	1	0	1
	a_3	1	0	1	1	0
	a_4	1	1	0	1	1
	a_5	0	0	1	0	1

$E_4 =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	1	1	1	0	1
	a_2	0	1	1	0	1
	a_3	0	0	1	1	0
	a_4	1	1	0	1	1
	a_5	0	0	1	0	1

$E_5 =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	1	0	1	0	1
	a_2	1	1	1	0	1
	a_3	0	0	1	1	1
	a_4	1	1	0	1	0
	a_5	0	0	0	1	1

Упорядкувати об'єкти за ступенем їх важливості.

Розв'язання. Побудуємо для проведених парних порівнянь сумарну матрицю Z .

$Z =$		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	a_1	5	2	5	0	4
	a_2	3	5	5	0	4
	a_3	1	0	5	5	1
	a_4	5	5	0	5	4
	a_5	1	1	4	2	5

Визначимо тепер остаточно матрицю **R**, додавши до її таблиці стовпець з підсумковою сумою балів, яку набрав кожний із розглянутих об'єктів. При обчисленні елементів матриці **R** було враховано, що кількість об'єктів $n = 5$.

$$R =$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Сума балів	Коефіцієнт важливості
a_1	1	0	1	0	1	3	$3 / 15 = 0,2$
a_2	1	1	1	0	1	4	$4 / 15 = 0,27$
a_3	0	0	1	1	0	2	$2 / 15 = 0,13$
a_4	1	1	0	1	1	4	$4 / 15 = 0,27$
a_5	0	0	1	0	1	2	$2 / 15 = 0,13$
Разом						15	1

Сума балів кожного об'єкта показує підсумкові голоси експертів, віддані за те, що даний об'єкт (ознака, фактор) буде переважнішим за решту. Для оцінки частки даного об'єкта в системі переваг досліджуваних об'єктів необхідно взяти відношення суми балів даного об'єкта до загальної кількості балів. Ці нормовані результати відображено в останньому стовпці таблиці для матриці **R**. Знайдені параметри характеризують коефіцієнт важливості об'єкта в загальній системі об'єктів, що можна інтерпретувати як суб'єктивний пріоритет об'єкта, його важливість [14]. Таким чином, для даної сукупності об'єктів колективна експертна оцінка дала наступний результат:

$$a_2 \sim a_4 > a_1 > a_3 \sim a_5 \quad \text{або} \quad a_4 \sim a_2 > a_1 > a_5 \sim a_3.$$

Відповідь. $a_2 \sim a_4 > a_1 > a_3 \sim a_5$.

7.6. Колективна генерація ідей («мозковий штурм» або брейнстормінг)

Задачі прогнозування, що вирішуються за допомогою методів експертних оцінок, містять два формально не пов'язаних між собою елементи: визначення можливих варіантів розвитку об'єкта прогнозування та їх оцінку. Аналіз експертних методів показує доцільність застосування «мозкових штурмів» для визначення можливих варіантів розвитку. Їх використання дозволяє отримати продуктивні результати за короткий період часу і долучити всіх експертів до активного творчого процесу. Методи «мозкових штурмів» можна класифікувати за ознакою наявності або відсутності зворотного зв'язку між керівником та учасниками «мозкової атаки» в процесі вирішення першої проблемної ситуації. Наявність зворотного зв'язку дозволяє зосередити увагу учасників лише на тих варіантах, що є корисними за тим чи іншим критерієм для вирішення проблемної ситуації. Однак, штучно вводячи обмеження, ми втрачаємо можливість побачити все розмаїття підходів. Отже, виникає ймовірність пропустити оригінальні думки, що мають потенційну цінність, яка на даний момент часу ще не усвідомлюється. Відсутність зворотного зв'язку, тобто максимальна стимуляція висловлювань, припускає проведення складної та великої за обсягом роботи на етапах їх оцінювання [1].

Ситуація, що склалася, потребує розробки методу «мозкового штурму», який був би здатний якісно та достатньо швидко проводити оцінювання варіантів, не обмежуючи при цьому їх кількості. Суть такого методу полягає в актуалізації творчого потенціалу фахівців при «мозковому штурмі» проблемної ситуації, що реалізує спочатку генерацію ідей та подальше руйнування або критику цих ідей із одночасним формулюванням зустрічних ідей. Тому група експертів поділяється на дві підгрупи: генераторів та критиків ідей. Цей розподіл пов'язаний з особливостями характеру кожного експерта як людини. В неформальній обстановці одні люди починають виробляти величезну кількість ідей, а інші більш схильні до критики та аналізу чужих ідей. Саме цими психологічними спостереженнями керувався автор цього методу, американський вчений Алекс Осборн. Ці підгрупи як

наслідок, в ході «мозкового штурму» виконують дві різні, але взаємно пов'язані задачі. Група генераторів за дуже стислий термін часу має видати максимальну кількість ідей. За умови правильної організації процесу штурму така підгрупа здатна згенерувати за неповну годину до сотні різних ідей. При цьому можна висловлювати абсолютно все, що спадає на думку з приводу досліджуваної проблемної ситуації, навіть ті ідеї, які здаються незвичними, нездійсненими або непродуктивними самому генератору. Тобто в ході штурму з боку учасників підгрупи генераторів самокритика не є доцільною [19].

Таким чином, робота з методом передбачає реалізацію наступних етапів [18].

1. **Формування групи учасників «мозкового штурму» (за чисельністю та складом).** Оптимальна чисельність групи учасників визначається емпіричним шляхом: найбільш продуктивними визнано групи від 3 до 12 осіб (кількість учасників має бути кратною трьом), але не більше 15. При цьому вважається доцільним забезпечити наявність в групі фахівців інших галузей знань, що володіють високим рівнем загальної ерудиції та добре розуміють суть проблемної ситуації. Якщо учасників більше, ніж 15 осіб, то така група розбивається на дві частини. Перша частина бере безпосередню участь у «мозковому штурмі», а друга частина записує не менше трьох власних думок щодо досліджуваної проблемної ситуації. Після завершення штурму ідеї, висловлені цією другою групою, додаються до загального списку ідей [19].
2. **Складання проблемної записки учасника «мозкового штурму».** Вона складається групою аналізу проблемної ситуації та містить опис методу та проблемної ситуації, опис умов, що забезпечують найефективніший «мозковий штурм», авторство результатів атаки, основні правила проведення штурму. Опис проблемної ситуації містить [18]:
 - опис причин виникнення проблемної ситуації;
 - аналіз причин та можливі наслідки проблемної ситуації, що виникла (доцільно перебільшити наслідки, щоб гостріше відчувалася необхідність розв'язання протиріччя);
 - аналіз світового досвіду вирішення схожої проблемної ситуації (якщо він є);
 - класифікацію (систематизацію) існуючих шляхів вирішення проблемної ситуації, формулювання проблемної ситуації у вигляді центрального питання з ієрархією проміжних питань.
3. **Генерація ідей.** Вона починається з того, що ведучий (спікер, модератор) розкриває зміст проблемної записки. Передбачаючи опис методу, він концентрує увагу присутніх учасників на правилах проведення «мозкового штурму» [18, 19]:
 - висловлення учасників мають бути чіткими та стислими;
 - скептичні зауваження та критика попередніх виступів (наприклад, «згоден, але можна й по-іншому») не припускаються, але можна ставити уточнюючі запитання;
 - кожен із учасників має право виступати багато разів, але не поспіль;
 - не припускається зачитувати поспіль перелік тих ідей, що може бути підготовлений учасниками заздалегідь;
 - відмова від деяких (попередньо обумовлених) стереотипів та традицій, висловлення нестандартних ідей навіть заохочується;
 - участь кожного учасника штурму оцінюється балами. Це надає процедурі штурму атмосфери здорових змагань.

Тривалість «мозкового штурму» рекомендується не менша за 20 хвилин і не більша за 1 годину в залежності від активності учасників. Доцільно вести запис висловлених ідей, щоб не пропустити жодної ідеї та мати можливість систематизувати їх для наступного етапу [1, 18].

4. **Систематизація ідей, що були висловлені на етапі генерації.** Систематизацію ідей група аналізу проблемної ситуації здійснює в такій послідовності:

- складається номенклатурний перелік усіх висловлених ідей;
- кожна з ідей формулюється в загальноновживаних термінах;
- визначаються ідеї, що повторюються або доповнюють одна одну;
- ідеї, що повторюються або доповнюють одна одну, об'єднуються та формулюються у вигляді однієї комплексної ідеї;
- виокремлюються ознаки, за якими ідеї можуть бути об'єднані;
- ідеї об'єднуються в групи у відповідності з виокремленими ознаками;
- складається перелік ідей по групах (в кожній групі ідеї записуються в порядку їх загальності: від більш загальних до конкретних, що доповнюють або розвивають більш загальні ідеї).

5. **Руйнування систематизованих ідей** (спеціалізована процедура оцінювання ідей з точки зору можливості практичної реалізації в ході «мозкового штурму», коли кожна з них піддається всебічній критиці з боку учасників «мозкового штурму»). Основне правило етапу руйнування – розглядати кожну із систематизованих ідей лише з точки зору перешкод на шляху її здійснення, тобто учасники штурму висувають доводи, що спростовують систематизовану ідею. Особливо цінною є та обставина, що в ході руйнування може бути згенеровано зустрічну ідею, яка формулює наявні обмеження та висуває припущення про можливість зняття цих обмежень. Група учасників «мозкового штурму» цього етапу складається із висококваліфікованих фахівців в галузі, що обговорюється, тривалість цього етапу може досягати 1,5 години. Процес руйнування триває доти, поки кожна із систематизованих ідей не піддається критиці. Всі висловлені критичні зауваження обов'язково мають бути зафіксовані [1, 18].

6. **Оцінювання критичних зауважень та складання переліку ідей, що можуть бути застосовані на практиці.** Реалізацію цього етапу здійснює група аналізу проблемної ситуації:

- складається перелік всіх критичних зауважень, отриманих на етапі руйнування. За необхідності ці критичні зауваження уточнюються, відкидаються ті, що повторюються;
- складається зведена таблиця етапів систематизації та руйнування ідей, а також перелік показників можливості практичного застосування ідей;
- оцінюється кожне критичне зауваження та зустрічна ідея:
 - викреслюється із таблиці, якщо спростовується хоча б одним показником практичної застосовності;
 - не викреслюється, якщо воно не спростовується жодним показником;
- складається остаточний перелік ідей. До переліку переносяться лише ті ідеї, що не спростовані критичними зауваженнями, а також зустрічні ідеї.

Перевагами цього методу можна вважати стрімку активізацію мислення експертів та заохочення креативного підходу до вирішення проблемної ситуації. Безумовно, не всі висловлені в ході штурму ідеї можуть бути в подальшому прийняті в розробку. Зазвичай штурм можна вважати вдалим, якщо в результаті його проведення залишається одна чи дві ідеї, які відповідають всім висунутим критеріям та можуть бути використані для подальшої роботи. Особливо цінним результатом є можливість вишикувати відібрані для роботи ідеї в логічно послідовний ланцюг [19].

Метод колективної генерації ідей випробуваний на практиці та дозволяє знаходити групове вирішення при визначенні можливих варіантів розвитку об'єктів прогнозування, крім шляху компромісів, коли єдину думку неможливо вважати результатом неупередженого аналізу проблеми [1].

7.7. Метод «Дельфі»

На теперішній час створено окремі методики, що дозволяють в певній мірі організувати статистичну обробку думок експертів-фахівців та досягти більш-менш узгодженої думки. Метод «Дельфі» - один з найбільш розповсюджених методів експертної оцінки майбутнього, тобто експертного прогнозування [1]. Цей метод розроблений американською дослідницькою корпорацією RAND та призначений для визначення та оцінки ймовірності здійснення тих чи інших подій. Спочатку цей метод використовувався для аналізу перспектив науково-технічного прогресу і вимірювання якості життя, але згодом був переорієнтований переважно на військові цілі [12].

Метод «Дельфі» ґрунтується на наступному принципі: в неточних науках думки експертів та суб'єктивні судження за необхідності мають замінити точні закони причинності, що відображаються природничими науками. Метод «Дельфі» характеризується трьома особливостями, що відрізняють його від звичайних методів групової взаємодії експертів [1, 12]:

1. **Анонімність експертів** полягає в тому, що під час проведення експертної оцінки явища чи об'єкта, для яких складається прогноз, учасники експертної групи невідомі один одному. При цьому взаємодія членів групи під час заповнення анкет повністю виключається. В результаті автор відповіді може змінити свою думку, уникаючи публічного сповіщення про це.
2. **Використання результатів попереднього туру опитування** полягає в наступному: в силу того, що групова взаємодія відбувається безпосередньо за допомогою відповіді на анкетні запитання, окремий фахівець або організація, що проводять дослідження за цим методом, вилучає з анкет лише ту інформацію, яка має безпосереднє відношення до даної проблемної ситуації.
3. **Статистична характеристика групової відповіді** полягає в тому, що група фахівців складає прогноз, що містить точку зору лише більшості експертів, тобто таку точку зору, з якою могла б погодитися більшість груп. В той же час мало шансів, що може існувати який-небудь показник ступеню розбіжності думок експертів, які могли б мати місце серед членів групи. Замість цього в методі «Дельфі» використовуються статистичні характеристики відповіді, яка містить думку всієї групи експертів. Кожна відповідь всередині групи враховується при побудові медіани, а величина дисперсії відповідей характеризується величиною інтервалу між квантилями. Іншими словами, групова відповідь може бути поданою у вигляді медіани двох квантилей, тобто у вигляді такого числа, оцінки якого однією половиною членів групи експертів були більшими за це число, а іншої половини – відповідно меншими за це число. Метод «Дельфі» дає можливість ефективно взаємодіяти членам журі, незважаючи на те, що результати цієї взаємодії контролюються керівником групи шляхом сумування аргументів. Члени журі змінюють свої оцінки саме тоді, коли у їх колег є переконливі аргументи. В протилежному випадку вони вперто дотримуються своїх протилежних думок.

При введенні перехресної кореляції значення кожної події через введення певних зв'язків будуть змінюватися або в додатний, або в від'ємний бік, коригуючи в такий спосіб рівень ймовірності розглянутих подій. З метою майбутньої відповідності моделі об'єкта прогнозування реальним умовам до моделі можуть бути введені елементи випадковості. Основним недоліком даного методу є те, що проблема науково-технічних зсувів, що впливають один на другий, є дуже складною, тому що в реальному житті точну величину цієї кореляції дуже важко обчислити. Кореляційні зв'язки, як правило, не є чіткими та коливаються в широких межах в залежності від розглянутих досягнень.

Технологія застосування методу «Дельфі» передбачає участь в процесі вирішення проблемної ситуації, окрім експертів, спеціально організованої групи фахівців, яка розробляє анкети-опитувальники, опрацьовує отримані відповіді і забезпечує експертів необхідною інформацією. Чим більшим обсягом інформації володіють експерти (за умови їх високої кваліфікації, ерудиції, креативності мислення, компетентності тощо), тим більш точним та обґрунтованим буде прогноз [12].

7.8. Метод огляду думок та цілей

Збирання та огляд думок, а також огляд локальних цілей та головної мети розв'язання задачі є суб'єктивними методами прогнозування, заснованими, головним чином, на зважених та незважених усереднених думках та очікуваннях. Передумова, на якій ґрунтується цей метод, полягає в тому, що співвідношення, які впливають на економічні рішення, можуть бути визначені та виміряні на достатньо тривалий період часу вперед. Тому можна проектувати зміни в тренді ділової активності. Інформацію отримують за допомогою індивідуального опитування про очікування та наміри відносно майбутньої економічної діяльності. Для економічного та торгового прогнозування використовуються різні форми та типи опитувань [1].

7.8.1. Прогнозування обсягів продажу

Методи збирання думок не пристосовані для прогнозування змін економічних умов. Багато підприємств використовують варіанти цього методу для прогнозування обсягу продажу. Часто використовується опитування керівників підприємства, для якого потім комбінуються та усереднюються результати. При такому підході початкова передумова полягає в тому, що загальна думка групи є важливішою, ніж окрема думка кожного опитаного. Таким чином, керівники за круглим столом формують загальну думку відносно майбутнього обсягу продажу в наступному році. Зазвичай в групі є люди з різними спеціалізаціями – в галузі торгівлі, виробництва, фінансів, постачання та адміністрування. В тих компаніях, де прогнозування пов'язане з отриманням та обробкою інформації про ринки, обсяги продажу та формальні економічні прогнози, метод опитування керівників може виявитися достатньо успішним. Однак без ретельної оцінки цей метод може легко перетворитися у ворожіння, в результаті чого прогнози не будуть здійснюватися. Компанії, що використовують метод опитування керівників організації, можуть також комбінувати його зі статистичними вимірюваннями його трендів та циклів або з іншими аналітичними способами, збільшуючи або знижуючи їх результати у відповідності з власною думкою.

Іншим варіантом є опитування тих людей, які за своєю діяльністю ближчі за решту до ринку. Прогноз обсягу продажу може біти виведений із оцінок, наданих робітниками торгівлі разом із галузевими або регіональними менеджерами, або шляхом безпосереднього спілкування з наймачами робочої сили, посередниками та основними споживачами. Однією з переваг даного методу є те, що в ньому використовується інформація «з перших рук», спеціалізовані знання тих, хто є найближчим до ринку. Однак робітники торгівлі можуть не знати про структурні зміни, що відбуваються на ринку, і, як наслідок, будуть неспроможні дати прогноз з урахуванням наслідків змін. Крім того, ґрунтовний прогноз потребує більше часу та зусиль, витрачених на питання та відповіді, ніж можуть приділити робітники торгівлі. Тому результат буде скоріш нагадувати вигадки, ніж реальний прогноз. Більш за те, їх вигадки навіть можуть залежати від ступеню їх участі в торгівельній системі. Тому компанії, що використовують цей метод, мають встановити систему контролю та підбиття підсумків при використанні оцінок, наданих робітниками торгівлі, а також періодично фіксувати, коригувати та переглядати ці дані з урахуванням накопиченого досвіду та перспективних планів [1].

Для прогнозування обсягів продажу використовується наступна виробнича інформація [23]:

- загальний обсяг продукції, що випускається;
- склад поточних ліній випуску продукції;
- асортимент продукції, якій видає поточна лінія;
- ціна кожного виду виробу;
- тенденції зміни цін;
- асортимент додаткової продукції та послуг: запасні частини, приналежності, технічне обслуговування;
- практичне передбачення терміну служби кожного виду виробів від випуску до зношування;
- ймовірні ринки для збуту продукції кожної поточної лінії та методи проникнення на кожний з них.

З метою збільшення обсягів збуту може використовуватися стимулювання споживачів. Воно є стимулюванням обсягів продажу, спрямованим на споживача (наприклад, купони на покупку зі знижкою, премії, накопичувальні знижки та лотереї). Також може використовуватися стимулювання торгівлі. Торговельні стимули призначені заохочувати роздрібних розповсюджувачів та оптових закупників рекламувати продукти даної компанії. Стимулювання торгівлі є найдорожчим в перерахунку на одного цільового споживача. Значне зростання стимулювання торгівлі пояснюється тим, що компанії намагаються отримати більше негайного прибутку на вкладений в цей сектор капітал [27].

7.8.2. Прогнозування витрат на рекламу

В практиці маркетингових досліджень велика увага приділяється моделюванню витрат на рекламу. При цьому можуть використовуватися наступні методи:

- метод попереднього року (з урахуванням інфляції);
- метод фінансових можливостей;
- метод відсотків від обігу;
- метод досягнення цілей та задач;
- метод урахування поведінки конкурентів;
- метод розрахунку залежності поведінки споживача від рівня комунікації;
- метод розробки рекламного бюджету на основі планування витрат.

Точність та доцільність використання цих методів залежить від керівництва компанії. Але в першу чергу все залежить від споживача. А його поведінку можна прогнозувати різними методами – як математично формалізованими, так і виключно інтуїтивними. В той же час найбільш виважений та аргументований прогноз можна отримати, користуючись достатньо трудомісткими математичними методами прогнозування витрат на рекламу [1].

Відносно нещодавно реклама була основним елементом маркетингових комунікацій. Вважалося, що стимулювання збуту відрізняється від реклами, що воно є корисним як засіб охоплення споживчих ніш ринку, за допомогою якого можна досягти короткострокового збільшення обсягів збуту. Технології стимулювання обсягів продажу настільки різноманітні й так широко використовуються, що стали частиною програм просування товарів фактично для кожної компанії. Стимулювання продажу спрямоване на низку різних цільових ринків та впливає на них цілим набором чинників. Незважаючи на велику кількість різновидів, у всіх технологій стимулювання збуту спільна мета: створення короткострокових продажів. В той же час визнано необхідність поєднання зусиль

зі створення прихильності до бренду та забезпечення довгострокових продажів (реклама) із зусиллями зі стимулювання споживачів до негайної покупки (стимулювання продажу). При нехтуванні цією координацією виникає небезпека пожертвувати довгостроковою прихильністю на користь короточасних продажів. Низка компаній покладає загальну відповідальність за рекламу та стимулювання продажу на одного керівника.

Незважаючи на деяке злиття реклами та стимулювання продажу з точки зору керівницької відповідальності та творчого виконання, слід усвідомлювати, що реклама та стимулювання продажу доповнюють одне одного, але все ж таки є різними методами просування товару на ринку. Ефективне стимулювання продажу має інформувати споживачів про продукт та мотивувати його до покупки. Стимулювання збуту, як і будь-які інші комунікації маркетингу, має надавати споживачам інформацію про продукт. Світовий досвід досліджень в даній галузі свідчить про те, що стимулювання продажу виявляється найбільш ефективним, коли його повідомлення узгоджене з рекламою. Поза залежністю від використаних методів основа звернення стимулювання та реклами має бути спільною. Інша особливість стимулювання продажу – мотивація – за деякими важливими аспектами відрізняється від реклами. Мотивація в маркетинговому сенсі – це засіб спонукання споживача до покупки конкретної торгівельної марки. Цей процес зазвичай проходить шлях від обізнаності (початкове знайомство з продуктом) до покупки. Із рис. 7.3 видно, що у реклами та стимулювання обсягів продажу різні обов'язки в ході комунікації та покупки [27]. Природно, що ці розбіжності відображаються в пов'язаних з ними цілях та задачах.

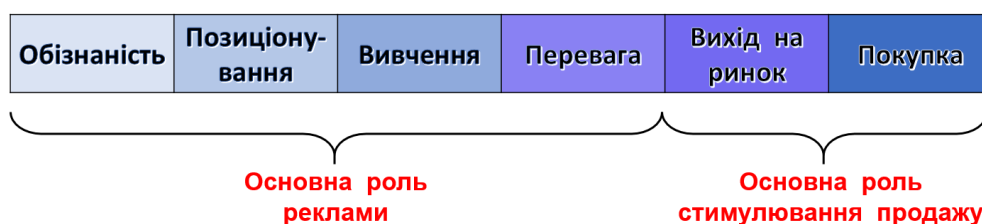


Рис. 7.3 – Комунікація зі споживачем в ході покупки

Стимулювання збуту краще за все підходить для:

- короткострокового просування товару;
- вимірюваних негайних результатів;
- спонукання споживачів спробувати нову продукцію;
- продажу товарів, які нічим не відрізняються один від одного, з використанням привабливих цін;
- досягнення торгівельної обізнаності та доброзичливого ставлення.

Реклама краще за все підходить для:

- створення довгострокового іміджу та марочного капіталу;
- сукупних ефектів через якийсь час;
- повідомлення інформації про особливості та користь товару;
- досягнення обізнаності про товар і його споживчої обізнаності та доброзичливого ставлення.

Спільні бюджети просування товарів на ринку, як правило, розподіляються між рекламою, стимулюванням споживачів та стимулюванням торгівлі (стимулювання дилерів або мерчендайзінг). Дуже важливо тісно координувати ці напрямки. Незважаючи на деякі пересування коштів між цими категоріями, довгострокова тенденція має наступний вигляд: 75 % коштів витрачається на стимулювання торгівлі та споживачів і 25 % - на рекламу. Відносно невелика частка реклами може в подальшому ще знизитися, якщо точно виміряти рекламні кошти, що призначені для підтримки таких

видів просування товарів, як лотереї, знижки або розпродажі. Більшість фахівців з маркетингу передбачають, що в майбутньому частка реклами в спільних бюджетах просування товарів на ринку збільшиться, але в незначній мірі [27].

Метод розрахунку витрат на рекламу в залежності від змін обсягів збуту (модель Відаля-Х. Вольфа)

Ця модель заснована на припущенні, що зміна обсягу збуту товару в періоді є функцією 4-х факторів: витрат на рекламу; константи, що відображає реакцію збуту на рекламу; рівня насиченості ринку рекламованими товарами; константи, що відображає зменшення обсягу реалізації [1]. Рівняння моделі має вигляд:

$$\frac{dS}{dt} = r \cdot A \cdot \frac{M - S}{M} - b \cdot S,$$

де S – обсяг збуту товару в період t (змінна);

$\frac{dS}{dt}$ – зміна обсягу збуту товару в період t ;

A – обсяг витрат на рекламу в період t ;

r – реакція обігу коштів на рекламу, що визначається як обсяг реалізації, викликаний кожною витраченою на рекламу грошовою одиницею в умовах, коли $S = 0$ – константа;

M – рівень насиченості ринку даним товаром (параметр);

b – зниження обсягу реалізації (визначається як частка обсягу реалізації, на якій цей обсяг зменшується в одиницю часу за умов, коли $A = 0$ – константа).

Перевагою цього методу є те, що витрати на рекламу узгоджуються не лише з бажаним зростанням товарообігу, але й з характеристиками ринку. Недоліком цього методу вважається його складність та трудомісткість. Крім того, модель припускає функціональну залежність між показниками в той час, коли кількісна невизначеність ефекту реклами є однією з її характерних рис. Похибки у визначенні параметрів рівняння, а потім і в розрахунках за його допомогою можуть значно перевищувати ті, що припускаються при використанні експертних оцінок, інтуїції досвідчених практикуючих фахівців.

Наприклад, знайдемо загальне неоднорідне рішення диференціального рівняння першого порядку, яким є рівняння моделі Відаля-Вольфа. Воно складається із загального однорідного та неоднорідного [1]:

$$S(t) = c \cdot e^{\frac{(r \cdot A + b \cdot M)t}{M}} + \frac{r \cdot A \cdot M}{r \cdot A + b \cdot M}.$$

За початкових умов $S(0) = S_0$ і $t_0 = 0$, загальне неоднорідне рішення має вигляд:

$$S(t) = \left(S_0 - \frac{r \cdot A \cdot M}{r \cdot A + b \cdot M} \right) \cdot e^{\frac{(r \cdot A + b \cdot M)t}{M}} + \frac{r \cdot A \cdot M}{r \cdot A + b \cdot M}.$$

З плином часу при $t \rightarrow \infty$ буде спостерігатися збіжність до стаціонарного рішення

$$S(t) = \frac{r \cdot A \cdot M}{r \cdot A + b \cdot M},$$

причому початковий рівень збуту S_0 в підсумку не впливає на збіжність моделі (модель є стійкою).

Для простоти розрахунків прийемо, що обсяг рекламних витрат складає $A = 10000$ \$, рівень насиченості ринку в кількості $M = 1000$ виробів, реакція обороту коштів на рекламу $r = 0,2$ і константа зменшення обсягу реалізації $b = 0,2$. За цих умов підприємство до 3-го року досягне обсягу збуту товару в кількості, який не набагато перебільшує 900 виробів, причому при незмінних параметрах, що збігаються, більшої кількості виробів воно реалізувати не зможе (рис. 7.4).

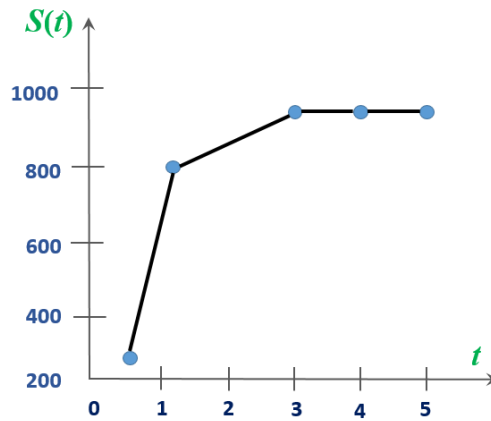


Рис. 7.4 – Обсяг збуту за умови, що:
 $A=10000$ \$; $r=0,2$ штук/\$; $M=1000$ виробів; $b=0,2$

Тепер розглянемо поведінку моделі при значно меншому обсязі рекламних витрат $A = 100$ \$. Причому, змінюючи цей показник, інші залишимо без змін, що надає можливість побачити, як він впливає на поведінку збуту продукції.

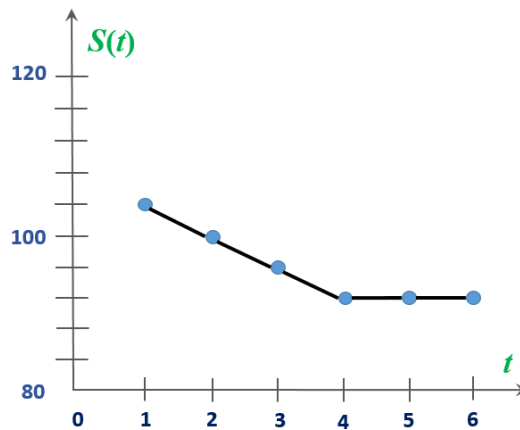


Рис. 7.5 – Обсяг збуту за умови, що:
 $A=100$ \$; $r=0,2$ штук/\$; $M=1000$ виробів; $b=0,2$

При недостатньому обсязі витрат на рекламу можна не лише не досягти бажаного обсягу збуту, а й спостерігати значне зниження обсягів реалізації (рис. 7.5). Отже, кошти, що були витрачені на рекламу, були витрачені даремно. Правильно складений бюджет на рекламу дозволить використати ці кошти з максимальною ефективністю. Таким чином, виникає парадокс: дослідження витрат на рекламу нібито є актуальним, але, в той же час, підприємства вирішують спочатку всі свої фінансові та господарчі проблеми, а вже потім розглядають можливість проведення рекламної кампанії. В ході вирішення поточних проблем вони втрачають своїх реальних споживачів [1].

7.8.3. Прогнозування часової складової попиту

В економіці майже всі процеси є динамічними, тому в більшості випадків їх можна охарактеризувати, наприклад, як перетворення грошей в товари та послуги. Як наслідок, навіть глибинні основи даних процесів можуть бути виражені чисельно та досліджені за допомогою різних математичних методів. Питання обрання конкретного засобу дослідження є достатньо складним, і відповідь на нього залежить від конкретного класу досліджуваних проблем. Розглянемо приклад застосування на практиці одного з таких засобів, а саме – аналіз рядів на основі положень арифметичної та геометричної прогресії. Відомо, що людина відкладає в кожний період часу деяку частку k %

свого прибутку, що складає d грошових одиниць. При первинному обсязі його накопичення дорівнюють a_0 грошових одиниць. Тоді через n місяців сума накопичень дорівнюватиме n -му члену арифметичної прогресії

$$a_n = a_0 + n \cdot d, \quad n \in \mathbb{N},$$

де a_n – сума накопичень після n періодів часу;

a_0 – початкова сума накопичень;

n – кількість періодів часу, що минули з початку накопичення;

d – сума, яку людина відкладає в кожний період часу.

Нехай процес накопичення має якусь мету. Наприклад, гроші відкладаються, щоб в майбутньому придбати якусь річ вартістю C ($C > a_0$, отже $n > 0$, бо в іншому випадку споживачу нема потреби робити накопичення, тому що він вже має в своєму розпорядженні достатньо коштів для придбання потрібної речі). Тоді покупка відбувається через

$$n(d) = \frac{C - a_0}{d}$$

періодів часу, де

n – кількість періодів, що минуть до придбання обраної речі;

C – вартість обраної речі;

a_0 – початкова сума накопичень;

d – сума, яку людина відкладає в кожний період часу,

причому права частина наведеної формули округлюється зі збільшенням, тому що n може приймати лише натуральні значення. У відповідності з цією формулою можна побудувати залежність n від величини прибутку d , який відкладається. Можна розглянути декілька варіантів розмірів майбутніх прибутків: песимістичний $d < d_{\text{норм}}$, реалістичний $d = d_{\text{норм}}$ та оптимістичний $d > d_{\text{норм}}$, де $d_{\text{норм}}$ – частина прибутку, яку людина буде відкладати за умови, що його прибуток в майбутньому і не збільшиться, і не зменшиться [1].

В аналогічний спосіб встановлюється збільшення попиту внаслідок зниження ціни товару на x % як наслідок залежності $n(x)$ – кількості періодів часу, при закінченні яких відбудеться покупка, від розміру знижки x :

$$n(x) = \frac{\frac{100 - x}{100} \cdot C - a_0}{d}.$$

де n – кількість періодів, що минуть до придбання обраної речі, за умови, що ціна цієї речі знизиться на x %;

C – початкова ціна обраної речі;

a_0 – початкова сума накопичень;

d – сума, яку людина відкладає в кожний період часу.

В цій формулі вираз

$$\frac{100 - x}{100} \cdot C \geq a_0,$$

і, як наслідок, $n > 0$, тому що в іншому випадку замість цієї формули $n(x)$ мала би дорівнювати нулю – тобто ціна знизилася настільки, що споживачу вже нема потреби накопичувати кошти, бо він може одразу придбати обрану річ, розрахувавшись із суми початкових накопичень a_0 . Крім того, права частина наведеної формули знову округлюється із збільшенням, тому що n – натуральне число. До

того ж такі розрахунки можна робити не лише на поточний момент часу, але й складати прогнози на майбутнє.

Крім того, на реальному ринку існує природний бар'єр, нижче якого виробник ціну знижувати не буде – це витрати, яких він зазнав при виробництві даної продукції. Інколи виробник все ж таки знижує ціну продукції нижче собівартості. Наприклад, щоб розорити конкурента, але на це здатні лише досить великі фірми, або для того, щоб швидко розпродати велику кількість товарів, що довгий час не знаходили збуту. Але ми ці окремі випадки не будемо брати до уваги. В подальшому будемо вважати, що ціна товару нижче за собівартість не знижується. Таким чином, даний метод можна використовувати для прогнозування ймовірного попиту на певні види товарів на основі даних про їх ціни, потребу в цих товарах, розмірах регулярних накопичень потенційних покупців. Цей розрахунок може бути доданий в розділі бізнес-плану, що присвячені дослідженню попиту. Причому цей розрахунок дає часову складову попиту, тобто визначає, через який період часу при незмінних прибутках споживач буде спроможний придбати товар, який його цікавить. Це, в першу чергу, стосується коштовних, крупних придбань: нерухомість, автомобілі, побутова техніка, меблі тощо.

7.9. Математична формалізація індивідуального експертного оцінювання

Індивідуальне експертне оцінювання використовується, зокрема, для моделювання комп'ютерних експертних систем, тому що зазвичай не рекомендується намагатися моделювати експертні знання декількох експертів в одній системі. Але моделювання експертних знань декількох експертів в декількох системах для напрацювання, якнайменш, загальної думки більшості є цілком виправданою. Задача, пов'язана з визначенням ступеню значущості думки кожного окремого експерта є достатньо складною. Тому при розробці експертних систем дотримуються принципу «одна система – один експерт» [26]. Задачі такого типу зазвичай характеризуються одним цілком визначеним прогнозованим процесом або явищем S_0 , множиною цілей (критеріїв) $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ та єдиним експертом-ЛПР, що здійснює процес вибору оптимального прогнозного рішення. Для кожної цілі K із множини цілей $K \subseteq \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ можуть бути задані пріоритети $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, що визначають ступінь важливості цілі при вирішенні задачі та обмеження. Таким чином, по кожній задачі прогнозування при індивідуальному експертному оцінюванні проблемної ситуації відома наступна інформація:

- вектор альтернатив рішення $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$,
- вектор цілей рішення (векторний критерій) $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$,
- заданий вектор пріоритетів цілей за ступенем їх важливості $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Для кожної альтернативи за кожним критерієм рішення оцінюється значення функції корисності $f = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{21}, \dots, f_{mn})$ [14, 24]. Інформація для описання такої задачі зазвичай задається матрицею, загальний вигляд якої подано в таблиці 7.2,

Таблиця 7.2

Загальний вигляд платіжної матриці

Критерії (цілі)	K_1	K_2	...	K_n
Альтернативи				
Y_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}
Y_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}
...	...	...	...	...
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mn}
Пріоритет (ступінь важливості) цілі	β_1	β_2	...	β_n

де K_j – цілі (цільові, або локальні критерії);

β_j – пріоритети критеріїв;

f_{ij} – значення функції корисності. Блок таблиці, складений із цих елементів, називається *платіжною матрицею*.

При цьому висувається вимога, щоб значення корисностей були подані в однаковій категорії значень, для чого необхідно сформувати категорію рангових оцінок. Для цього може бути використана будь-яка шкала: порядкова (ранги), кількісна (ступінь досягнення) тощо [14]. Значення функції корисності для всіх критеріїв мають бути виміряні в однакових або еквівалентних шкалах.

Для задач, в яких кількість припустимих альтернативних варіантів рішення є достатньо великою та значну роль відіграють обмеження на ресурси управління [26], зазвичай використовують складні оптимізаційні моделі векторного типу або застосовують послідовне розв'язання задачі з одним критерієм, упорядковане додатковими обмеженнями для критеріїв, що використовуються.

7.9.1. Векторні критерії. Загальна постановка задачі багатокритеріальної оптимізації

Нехай в просторі R^n задані скалярні функції $K_j(Y)$, $j = \overline{1, n}$, $Y \in D$, які називають *критеріями якості*, або *локальними критеріями*. Тут D є замкненою множиною припустимих рішень виробничої економіко-математичної моделі. Векторна функція $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ називається *векторним критерієм якості*. Нехай задано скалярні функції $g_k(Y)$, що визначають обмеження, задані в загальній формі виробничої економіко-математичної моделі (2.1). Вектор $Y \in R^n$, що задовольняє нерівностям (2.1), називається *припустимим вектором*. На кожному припустимому векторі Y функція $K(Y)$ приймає деяке значення [4]. На відміну від скалярного випадку тепер важко порівняти два припустимих вектори Y_1 і Y_2 . Зрозуміло, що лише у виняткових випадках (що не представляють інтересу) знайдеться точка Y^* , в якій всі функції $K_j(Y^*)$, $j = \overline{1, n}$ досягають екстремуму, тобто всі критерії K_j узгоджені між собою. Загальною є ситуація, коли зменшення значення однієї з функцій $K_j(Y^*)$ збільшує значення якоїсь іншої функції, тобто якщо [24]

$$K_j(Y^*) \geq K_i(Y^*), \quad i \in I_1,$$

і хоча б для одного j

$$K_j(Y^*) > K_i(Y^*),$$

то для інших

$$K_r(Y^*) \leq K_i(Y^*), \quad r \in I_2,$$

і хоча б для одного r

$$K_r(Y^*) < K_i(Y^*).$$

Тут $I_1 \cup I_2 = \overline{1, n}$, $I_1 \neq \emptyset$, $I_2 \neq \emptyset$.

Є очевидним, що значення функції корисності у випадку, коли всі критерії максимізуються, має зростати при збільшенні значення хоча б одного локального критерію і незмінному значенні решти локальних критеріїв. Рішення, оптимальне за одним із локальних критеріїв, називається **субоптимальним**. В загальному випадку ці рішення за різними локальними критеріями не збігаються. Тому задача полягає в тому, щоб відшукати найкраще рішення з точки зору сукупності всіх локальних критеріїв. При цьому виникають три основні проблеми.

1. Задача вибору оптимуму векторної функції не розв'язується суворо математично.
2. Кожний локальний критерій $K_j, j = \overline{1, n}$, може вимірюватися в різних одиницях. Однак цю проблему можна вирішити, тому що завжди можна перейти до відносних значень критеріїв.
3. Критерії можуть мати пріоритети. Якщо ці пріоритети можна визначити, то вони обов'язково мають враховуватися.

Пошук найкращого рішення в задачах багатокритеріальної оптимізації починається з визначення або відшукування множини ефективних або оптимальних за Парето рішень.

Точки $Y^* \in D$, для яких не виконується принцип домінування для якоїсь точки $Y \in D$, називають **ефективними**. Ці точки також називають **непокрашуваними рішеннями, оптимальними за Парето**. Множина K , що відповідає множині всіх ефективних точок, називається **областю компромісів (множиною узгоджень)**, а сама множина $D_Y \in D$ ефективних точок – **областю оптимальних за Парето**. Оптимальність за Парето означає, що подальше збільшення хоча б одного з локальних критеріїв без зменшення при цьому хоча б одного з інших є неможливим (рис. 7.6).

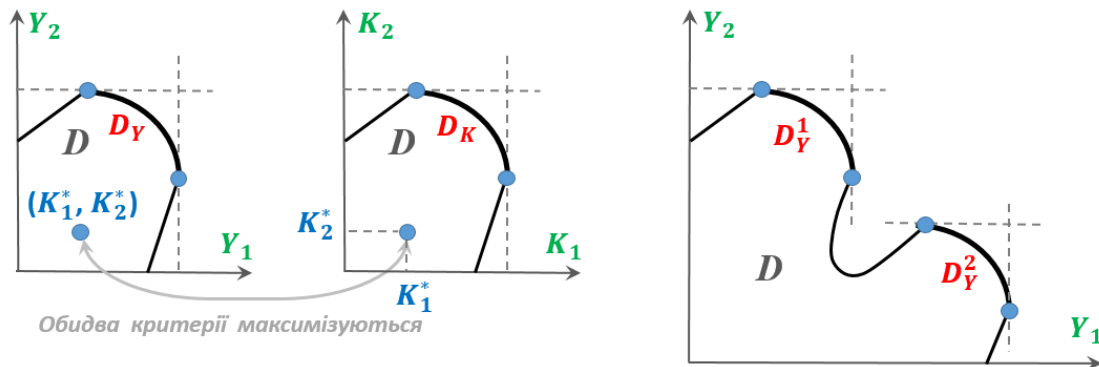


Рис. 7.6 – Оптимальність за Парето

Таким чином, розв'язання задачі векторної оптимізації та пошук оптимального компромісного рішення поділяється на два етапи:

1. визначення ефективних точок Y^* , що відповідають одній із умов;
2. вибір серед декількох ефективних точок оптимальних компромісних рішень, що є найбільш переважними з точки зору ЛПР.

На практиці рідко вдається подати єдиний критерій оптимізації. Така ситуація, як правило, відображає неповне розуміння експертом-дослідником своїх цілей при постановці задачі прогнозування або проектування. Наслідком таких невизначених ситуацій часто є моделі, в яких немає єдиного критерію ефективності [5]. Замість цього з'являється векторний критерій, що складається зазвичай із всіх або декількох критеріїв, які залежать від всіх або декількох змінних. Є очевидним, що кожен компоненту векторного критерію $K(Y)$ слід збільшувати або зменшувати, але залишається

незрозумілим, яким саме комбінаціям значень компонент вектору слід віддати перевагу перед іншими, коли немає можливості (а найчастіше це саме так і є) збільшувати або зменшувати їх одночасно. В реальних задачах проектування та прогнозування, як правило, переслідується не одна, а декілька цілей. Тому практично завжди постає задача об'єднання цілей. Часто ці локальні критерії є суперечливими, а зміна керуючих змінних, що призводять до бажаного збільшення одного з локальних критеріїв, в той же час призводить до небажаного збільшення (або зменшення) іншого локального критерію. Тому постає питання, в який же спосіб скласти єдиний критерій. Розглянемо низку методів об'єднання (згортки) локальних критеріїв, які найчастіше фігурують в практиці оптимізації.

Якщо існує D_Y , то вибір здійснюється за допомогою методу парного порівняння критеріїв [4, 14]. Так, $K_i > K_j$ визначає, що K_i домінує відносно K_j , а якщо $K_i \sim K_j$, то вони мають однакову важливість, тобто є еквівалентними. Такого ж принципу дотримуються і відносно точок простору критеріїв, тобто якщо $K(Y_i) > K(Y_j)$, то $Y_i \succ Y_j$. Як вже зазначалося, введення відношення переваги дозволяє якісно порівнювати критерії. За допомогою функції корисності можна знайти ефективну точку $Y^* \in D_Y$, розв'язуючи задачу параметричної оптимізації

$$f(Y^*) = \max_i (K(Y_1), \dots, K(Y_m)) .$$

Це означає, що вказані рівності дозволяють отримати саме ту точку $Y^* \in D_Y$, в якій значення функції корисності $f(Y^*)$ (векторний критерій $K(Y^*)$) буде максимальним.

Описана процедура побудови функції корисності називається *згорткою* (об'єднанням) векторного критерію $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$. Операція згортки є можливою, якщо:

- локальні критерії можна кількісно виміряти за важливістю, тобто кожному з них відповідає певне число β_j , яке кількісно визначає його відносну важливість стосовно інших критеріїв;
- локальні критерії є однорідними, тобто кількісно порівняними (цього завжди можна досягти).

Для задач, що містять декілька критеріїв, але з незначною потенційною кількістю припустимих варіантів можливих прогнозних рішень, зазвичай застосовуються наступні принципи згортки локальних критеріїв [25]:

- *принцип зважених сум* (економічний принцип об'єднання),
- *принцип Лапласа*,
- *принцип гарантованого результату* (принцип максиміну, або критерій Вальда),
- *принцип оптимізму* (принцип максимаксу),
- *принцип Гурвіца* (комбінований метод прийняття прогнозного рішення),
- *принцип Севіджа* (принцип мінімаксного ризику).

7.9.2. Принцип зважених сум (економічний принцип згортки локальних критеріїв)

Якщо критерії мають пріоритети, то нема сенсу розглядати область компромісів. **Сумування або «економічний» принцип згортки** локальних критеріїв застосовується, коли метою об'єднання критеріїв є максимізація сумарного критерію. Таким чином, при використанні цього принципу в якості найефективнішої обирається та альтернатива (стратегія розвитку), яка має найбільше серед сумарних значень функції корисності. Отже, стратегія вибору за принципом *зважених сум* відбувається за наступним правилом:

$$f(Y^*) = \max_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j f(Y) \right), \quad f(Y^*) \rightarrow Y^*,$$

де $f(Y^*)$ – функція корисності, а відповідна їй альтернатива Y^* є оптимальною (раціональною) та характеризує процедуру раціонального вибору. Коефіцієнти β_j називаються **ваговими коефіцієнтами** або просто «**важелями**» критеріїв [5]. Величина цього коефіцієнту відповідає важливості того чи іншого критерію, тобто відображає його пріоритет: чим важливішим є збільшення саме цього локального критерію, тим більшою має бути величина відповідного вагового коефіцієнту. Додатний знак вагового коефіцієнту відповідає критеріям, які слід збільшувати (тобто які максимізуються). Для локальних критеріїв, що мінімізуються, можуть бути прийняті від’ємні значення вагових коефіцієнтів β_j .

Процедура прийняття рішення за цим принципом відбувається в два етапи. На **першому етапі** в платіжній матриці по кожній альтернативі (по кожному рядку) відшукується сумарне значення функції корисності за всіма критеріями. На **другому етапі** із отриманих значень обирається максимальне, тобто

$$f(Y^*) = \max_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij} \right).$$

Загальний вигляд процесу пошуку оптимального рішення з точки зору принципу зважених сум можна подати наступною таблицею.

Альтернативи	Критерії (цілі)				$\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij}$
	K_1	K_2	$\dots$	K_n	
Y_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1n}	$\sum_{j=1}^n \beta_j f_{1j} = f_1$
Y_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2n}	$\sum_{j=1}^n \beta_j f_{2j} = f_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	$\dots$	f_{mn}	$\sum_{j=1}^n \beta_j f_{mj} = f_m$
Пріоритет (ступінь важливості) цілі		β_1	β_2	$\dots$	β_n
Максимум із $\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij}$					$\max \{f_1, \dots, f_m\}$

Приклад 7.3. Підприємство має можливість закупляти оптову продукцію у трьох постачальників, тобто $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Для здійснення вибору були сформульовані наступні цільові (локальні) критерії:

- оптова ціна K_1 (грош. од.),
- термін зберігання K_2 (кількість днів),
- асортимент торговельної марки K_3 (шт.).

При цьому найважливішим критерієм вибору вважається ціна одиниці продукції. Цей критерій має найвищий пріоритет. Однак з урахуванням того, що між абсолютним показником критерію та його рангом існує зворотна залежність (чим нижчою є ціна, тим більш привабливим є товар, тобто цей локальний критерій мінімізується), то його пріоритет взятий зі знаком «–», тобто $\beta_1 = -3$. Другим за важливістю вважається термін зберігання продукції. Цей локальний критерій максимізується,

тому значення його пріоритету є додатним числом і дорівнює $\beta_2 = 2$. Найменший пріоритет має асортимент торговельної марки. Цей критерій також максимізується, тому його пріоритет також є додатним числом та дорівнює $\beta_3 = 1$.

Вхідні дані, виміряні в абсолютній шкалі, наведено в таблиці.

Критерії (цілі) \ Альтернативи	K_1 (грош.од.)	K_2 (днів)	K_3 (шт.)
Y_1	12,20	2	4
Y_2	14,35	6	6
Y_3	18,15	4	7
Пріоритет (ступінь важливості) цілі	- 3	2	1

Необхідно обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись *принципу зважених сум*.

Розв'язання. На підготовчому (так би мовити, нульовому) етапі необхідно привести значення цільових критеріїв до нормованого (єдиного) вигляду. Один з варіантів нормування значень функції корисності альтернатив ґрунтується на нормуванні поточних значень через відношення до максимального значення критерію. Таким чином, процедуру нормування можна виконувати, користуючись співвідношенням

$$a_{ij} = \frac{f_{ij}}{\max_i f_{ij}},$$

де f_{ij} – поточне значення функції корисності,

$\max_i f_{ij}$ – максимальне значення критеріального параметру.

Із зведеної таблиці умови задачі можна побачити, що максимальна оптова ціна

$$\max f_{i1} = \max \{12, 20; 14, 35; 18, 15\} = 18, 15,$$

максимальний термін зберігання

$$\max f_{i2} = \max \{2; 6; 4\} = 6,$$

максимальний асортимент

$$\max f_{i3} = \max \{4; 6; 7\} = 7.$$

Тоді перераховані дані умови задачі можна записати в нормованому вигляді:

Критерії (цілі) \ Альтернативи	K_1 (грош.од.)	K_2 (днів)	K_3 (шт.)
Y_1	0,67	0,33	0,57
Y_2	0,79	1	0,86
Y_3	1	0,67	1

На першому етапі обчислюються сумарні зважені значення функції корисності за кожною альтернативою. На другому етапі із цих значень обирається максимальне. Таким чином, повна матриця розв'язання для даної задачі має наступний вигляд.

Критерії (цілі) \ Альтернативи	K_1	K_2	K_3	$\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij}$
Y_1	0,67	0,33	0,57	$0,67 \cdot (-3) + 0,33 \cdot 2 + 0,57 \cdot 1 = -0,78$
Y_2	0,79	1	0,86	$0,79 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 0,86 \cdot 1 = 0,49$
Y_m	1	0,67	1	$1 \cdot (-3) + 0,67 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -0,66$
Пріоритет (ступінь важливості) цілі	-3	2	1	
Максимум із $\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij}$				$\max \{-0,78; 0,49; -0,66\} = 0,49$

Як можна побачити із наведеної таблиці, максимальним (найкращим) із сумарних зважених значень функції корисності є значення **0,49**, яке відповідає 2-й альтернативі. Отже, при заданих умовах з точки зору принципу зважених сум оптимальною є альтернатива Y_2 .

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_2 .

При цьому слід зазначити, що якщо зворотна залежність між абсолютною величиною критерію та його рангом має місце для всіх критеріїв, тобто всі критерії мінімізуються, то на протилежне змінюється також і напрямок оптимізації при формулюванні остаточного вирішального правила, тобто [25]:

$$f(Y^*) = \min_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j f_{ij} \right).$$

Окремим випадком наведеної згортки критеріїв є критерій у вигляді дробу, в чисельнику якого стоять ті величини, збільшення яких є бажаним (тобто ті, критерії, що максимізуються), а в знаменнику – ті, збільшення яких не є бажаним (тобто ті критерії, що мінімізуються). Наприклад, в чисельнику – критерій, що відповідає комфортності житла, а в знаменнику – вартість будівлі. Головним недоліком таких «складених» критеріїв є те, що тут недолік в одному критерії може бути скомпенсований за рахунок іншого критерію. Наприклад, недостатня комфортність житла за рахунок невисокої вартості будівлі [5]. Подається такий об'єднаний критерій у вигляді дробу, де різні локальні критерії піднесені до деяких обраних ступенів, що відповідають «важливості» критеріїв:

$$f_i = \frac{f_{i1}^{\beta_1} \cdot f_{i2}^{\beta_2} \cdot \dots \cdot f_{ik}^{\beta_k}}{f_{i,k+1}^{\beta_{k+1}} \cdot f_{i,k+2}^{\beta_{k+2}} \cdot \dots \cdot f_{in}^{\beta_n}}.$$

Тепер логарифмуємо цей дріб:

$$\lg f_i = (\beta_1 f_{i1} + \dots + \beta_k f_{ik}) - (\beta_{k+1} f_{i,k+1} + \dots + \beta_n f_{in}) = \sum_{j=1}^k \beta_j f_{ij} - \sum_{j=k+1}^n \beta_j f_{ij}.$$

Є очевидним, що це правило є принципом зважених сум, де враховується, що для критеріїв, які мінімізуються, значення пріоритету є від'ємним.

Однак вказаний недолік такої згортки критеріїв не означає, що цим способом неможна користуватися. Такого роду критерії можуть бути успішно використані, якщо на локальні критерії накладаються відповідні обмеження, які не дозволяють якомусь окремому локальному критерію стати меншим (або більшим) за граничне припустиме значення [5].

7.9.3. Принцип Лапласа

Якщо існує інформація про рівноцінну важливість локальних критеріїв, то згортка здійснюється за допомогою адитивного критерію з рівними ваговими коефіцієнтами, який називається **критерієм Лапласа** [25]. Принцип Лапласа спирається на принцип недостатнього обґрунтування, який стверджує, що через відсутність інформації про розподіл ймовірності значень функції корисності, немає ґрунту вважати їх різними. Як наслідок, використовуються оптимістичне припущення, що ймовірності всіх станів системи дорівнюють одна одній. Таким чином, стратегія вибору за принципом Лапласа здійснюється за наступним правилом:

$$f(Y^*) = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Y) \right), \quad f(Y^*) \rightarrow Y^*.$$

Із цього правила можна побачити, що принцип Лапласа також є окремим випадком принципу зважених сум, коли всі значення пріоритетів критеріїв дорівнюють одне одному, тобто $\beta_i = \beta_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Можна стверджувати, що крім наявності інформації про рівноцінну важливість всіх критеріїв обґрунтуванням для застосування принципу Лапласа є також відсутність будь-якої інформації про важливість критеріїв.

Процедура обрання оптимальної стратегії за цим методом також здійснюється в два етапи. На першому етапі по кожній альтернативі (по кожному рядку) визначається середнє арифметичне значення функції корисності. На другому етапі із отриманих середніх арифметичних значень обирається максимальне, яке й визначає вибір найкращої альтернативи, тобто [25]

$$f(Y^*) = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij} \right).$$

Загальний вигляд процесу пошуку оптимального рішення з точки зору принципу Лапласа можна подати наступною таблицею.

Альтернативи \ Критерії (цілі)	Критерії (цілі)				$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$
	K_1	K_2	$\dots$	K_n	
Y_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1n}	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{1j} = f_1$
Y_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2n}	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{2j} = f_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	$\dots$	f_{mn}	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{mj} = f_m$
Максимум із $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$					$\max \{f_1, \dots, f_m\}$

Приклад 7.4. Припустимо, що в умовах прикладу 7.3 відсутня інформація про пріоритети критеріїв. Тому будемо виходити із припущення про їх рівноцінність. За цього припущення необхідно

обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись *принципу Лапласа*.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі врахуємо, що зведення всіх показників до нормованого вигляду, тобто підготовчий етап вже здійснено при розв'язанні прикладу 7.3. Далі на першому етапі обчислюється середнє арифметичне значення функції корисності за кожною альтернативою. При цьому враховується, що за тими критеріями, для яких значення параметру та його ранг пов'язані зворотною залежністю (тобто чим більшим є абсолютне значення параметру, тим нижчим є його ранг), зручно використовувати при виборі не саме відносне (нормоване) значення параметру f_{ij} , а його доповнення $(1 - f_{ij})$. Така ситуація в даному прикладі склалася для першого критерію K_1 (оптова ціна). Решта критеріїв пов'язані прямою залежністю між їх значеннями та рангом (чим більшим є значення параметру, тим вищим є його ранг). Тоді з урахуванням цього перетворення повна матриця розв'язання для даної задачі набуває наступного вигляду.

Критерії (цілі) \ Альтернативи	K_1	K_2	K_3	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$
Y_1	0,67	0,33	0,57	$((1 - 0,67) + 0,33 + 0,57) : 3 = \mathbf{0,41}$
Y_2	0,79	1	0,86	$((1 - 0,79) + 1 + 0,86) : 3 = \mathbf{0,69}$
Y_m	1	0,67	1	$((1 - 1) + 0,67 + 1) : 3 = \mathbf{0,56}$
Максимум із $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$				$\max \{0,41; 0,69; 0,56\} = \mathbf{0,69}$

На другому етапі із середніх арифметичних значень обирається максимальне. Як можна побачити із наведеної таблиці, в даному прикладі це максимальне (найкраще) значення дорівнює **0,69**. Воно характеризує 2-у альтернативу. Отже, при заданих умовах з точки зору принципу Лапласа оптимальною є альтернатива Y_2 .

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_2 .

При цьому слід зазначити, що якщо зворотна залежність між абсолютною величиною критерію та його рангом має місце для всіх критеріїв, тобто всі критерії мінімізуються, то на протилежне змінюється також і напрямок оптимізації при формулюванні остаточного вирішального правила, тобто [25]:

$$f(Y^*) = \min_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij} \right).$$

7.9.4. Принцип гарантованого результату (критерій максимуму)

При використанні цього критерію відбувається орієнтація єдиного експерта, що приймає прогнозне рішення, на вибір такої стратегії, яка забезпечить гарантований результат при мінімальних втратах у випадку вибору не найкращої альтернативи, тобто цей принцип заснований на консервативній обережній поведінці експерта [25]. Принцип максимуму полягає у виборі в якості найефективнішої тієї альтернативи (стратегії розвитку об'єкту, для якого розробляється прогноз), яка має найбільше серед найменших за всіма альтернативами значення функції корисності. У відповідності з цим принципом вибору із множини альтернатив $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$ обирають ту, яка при самому

несприятливому стані зовнішнього середовища має найбільше значення показника цільової функції. Для цього за кожною альтернативою визначають значення функції корисності та фіксують альтернативи з мінімальним значенням цього показника. З визначених мінімальних значень обирають максимальне, тобто максимально можливе в умовах даної проблемної ситуації. При цьому альтернативі Y_i , що має максимальне значення функції корисності зі всіх наявних мінімальних, приписується найвищий пріоритет. Експерт, який приймає рішення, в цьому випадку готовий піти на ризик, орієнтуючись на несприятливий розвиток проблемної ситуації, але при цьому вимагає, щоб величина цього ризику та рівень відповідних втрат були б мінімальними. Таким чином, дана стратегія орієнтована не на максимальний виграш при зміні ситуації, а на мінімальний програш. Цей принцип називається **стратегією вибору Вальда** та передбачає максимум несприятливого розвитку стану зовнішнього середовища з урахуванням найменш сприятливого розвитку для кожної альтернативи. Формалізуючи цей принцип вибору оптимального прогностичного рішення, можна сказати, що ЛПР обирає стратегію, яка гарантує максимальне значення, але із значень найгіршого виграшу. Таким чином, стратегія вибору у відповідності з принципом максимуму, визначається наступним правилом [14]:

$$f(Y^*) = \max_i \min_j (f(Y)) , f(Y^*) \rightarrow Y^* ,$$

Процедура прийняття рішення за цим методом також проводиться в два етапи [14]. На **першому етапі** в платіжній матриці для кожної альтернативи (в кожному рядку) обирається для множини локальних критеріїв (цілей) мінімальне значення функції корисності. На **другому етапі** із отриманих мінімальних значень необхідно виділити максимальне значення функції корисності, тобто

$$f(Y^*) = \max_i \{ \min_j f_{ij} \} .$$

Загальний вигляд процесу відшукування оптимального рішення з точки зору принципу максимуму можна подати наступною таблицею.

Критерії (цілі)	K_1	K_2	...	K_n	$\min_j f_{ij}$
Альтернативи					
Y_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}	$\min \{f_{11}, \dots, f_{1n}\} = \min f_1$
Y_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}	$\min \{f_{21}, \dots, f_{2n}\} = \min f_2$
...	...	...	...	...	...
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mn}	$\min \{f_{m1}, \dots, f_{mn}\} = \min f_m$
Максимум із $\min f_i$					$\max \{ \min f_1, \dots, \min f_m \}$

Приклад 7.5. В умовах прикладу 7.3 відсутня інформація про пріоритети критеріїв. Тому будемо виходити із припущення про їх рівноцінність. В цьому припущенні необхідно обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись принципу гарантованого результату.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі можна врахувати, що зведення всіх показників до нормованого вигляду, тобто підготовчий етап вже здійснено при розв'язанні прикладу 7.3. На **першому етапі** треба обрати за кожною альтернативою мінімальне (найгірше) для всіх критеріїв значення, враховуючи при цьому, що для першого критерію K_1 існує зворотна залежність між значенням функції корисності та її рангом. Тому для обчислення найгірших значень за цим локальним критерієм використовується при виборі не саме відносне (нормоване) значення параметру f_{i1} , а

його доповнення $(1 - f_{i1})$. З урахуванням цього перетворення повна матриця розв'язання для даної задачі має наступний вигляд.

Критерії (цілі) Альтернативи	K_1	K_2	K_3	$\min_j f_{ij}$
Y_1	0,67	0,33	0,57	$\min \{(1 - 0,67); 0,33; 0,57\} = \min \{0,33; 0,33; 0,57\} = \mathbf{0,33}$
Y_2	0,79	1	0,86	$\min \{(1 - 0,79); 1; 0,86\} = \min \{0,21; 1; 0,86\} = \mathbf{0,21}$
Y_3	1	0,67	1	$\min \{(1 - 1); 0,67; 1\} = \min \{0; 0,67; 1\} = \mathbf{0}$
Максимум із $\min f_i$				$\max \{0,33; 0,21; 0\} = \mathbf{0,33}$

Для цього перетворення також можна використовувати попередню оцінку асортиментного набору за ранговою шкалою, тобто приписати кожній альтернативі в межах досліджуваного критерію ранг пріоритету альтернативи за значенням даного критерію. Тоді значення локального критерію, наприклад, для K_1 буде перетворене із абсолютної шкали (оптова ціна в умовних грошових одиницях) в рангову оцінку у вигляді номеру місця, що відповідає даній альтернативі за шкалою можливих цін.

Як можна побачити із наведеної таблиці, на другому етапі здійснюється вибір максимальної (найкращої) із отриманих мінімальних (найгірших) критеріальних значень альтернатив, в результаті якого виявляється, що йому відповідає значення, яке дорівнює **0,33**. Це значення характеризує 1-у альтернативу. Таким чином, оптимальною за критерієм максимуму є альтернатива Y_1 .

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_1 .

При цьому слід зазначити, що якщо зворотна залежність між абсолютною величиною критерію та його рангом має місце для всіх критеріїв, тобто всі критерії мінімізуються, то принцип гарантованого результату стає принципом мінімаксу [25]:

$$f(Y^*) = \min_i \left\{ \max_j f_{ij} \right\}, f(Y^*) \rightarrow Y^* .$$

7.9.5. Принцип оптимізму (критерій максимаксу)

У відповідності з принципом оптимізму, в якості найефективнішої альтернативи прогнозного рішення обирається та, яка має найбільше досягне значення показника, що прогнозується. В той час, коли при використанні принципу гарантованого результату експерт орієнтується на отримання гарантованого мінімуму бажаності (не гірше, ніж «кращий із гірших»), при використанні принципу оптимізму експерт враховує можливість отримання максимального із можливих результатів. При цьому експерт-ЛПР не розраховує на несприятливі зміни зовнішнього середовища прийняття рішення та не враховує ризик несанкціонованої зміни проблемної ситуації, тобто різноманітні форс-мажорні обставини. Цей принцип вибору оптимального прогнозу зазвичай використовується тими ЛПР, що розраховують на цілком сплановану ситуацію, яка не зазнає змін [14]. Принцип оптимізму полягає в виборі в якості найефективнішої тієї альтернативи (стратегії), яка має найбільше із найбільших за всіма альтернативами значення функції корисності. Таким чином, принцип оптимізму передбачає вибір альтернатив у відповідності з правилом «кращий із кращих». Ця стратегія реалізується правилом

$$f(Y^*) = \max_i \max_j f(Y) , f(Y^*) \rightarrow Y^* .$$

Процедура прийняття оптимального рішення у відповідності з принципом оптимізму також проводиться в два етапи з урахуванням перетворення критеріальних параметрів до єдиного ранжованого або нормованого вигляду на підготовчому етапі. Далі на першому етапі за кожною альтернативою (в кожному рядку) обирається для множини локальних критеріїв (цілей) найкраще, тобто максимальне значення функції корисності. На другому етапі із отриманих максимальних значень здійснюється вибір найкращого із всіх можливих для даної задачі максимальних значень функції корисності, тобто

$$f(Y^*) = \max_i \{ \max_j f_{ij} \} .$$

Загальний вигляд процесу відшукування оптимального рішення з точки зору принципу оптимізму можна подати наступною таблицею.

Критерії (цілі)	K_1	K_2	...	K_n	$\max_j f_{ij}$
Альтернативи					
Y_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}	$\max \{f_{11}, \dots, f_{1n}\} = \max f_1$
Y_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}	$\max \{f_{21}, \dots, f_{2n}\} = \max f_2$
...	...	...	...	...	...
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mn}	$\max \{f_{m1}, \dots, f_{mn}\} = \max f_m$
Максимум із $\max f_i$					$\max \{ \max f_1, \dots, \max f_m \}$

Слід зазначити, що для критеріїв, для яких виконується зворотна залежність між абсолютною величиною параметру та його рангом, необхідно використовувати перетворення доповнення, тобто при обчисленні максимуму використовувати не відносно нормоване значення параметру f_{ij} , а його доповнення $(1 - f_{ij})$.

Приклад 7.6. В умовах прикладу 7.5 необхідно обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись *принципу оптимізму*.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі можна врахувати, що приведення всіх показників до нормованого вигляду, тобто підготовчий етап вже здійснено в прикладі 7.3. Далі на першому етапі оберемо для кожної альтернативи максимальне за всіма локальними критеріями значення, враховуючи при цьому, що для першого критерію K_1 існує зворотна залежність між значенням функції корисності та його рангом. Повну матрицю розв'язання цієї задачі можна подати наступною таблицею.

Критерії (цілі)	K_1	K_2	K_3	$\max_j f_{ij}$
Альтернативи				
Y_1	0,67	0,33	0,57	$\max \{(1 - 0,67); 0,33; 0,57\} = \max \{0,33; 0,33; 0,57\} = \mathbf{0,57}$
Y_2	0,79	1	0,86	$\max \{(1 - 0,79); 1; 0,86\} = \max \{0,21; 1; 0,86\} = \mathbf{1}$
Y_3	1	0,67	1	$\max \{(1 - 1); 0,67; 1\} = \max \{0; 0,67; 1\} = \mathbf{1}$
Максимум із $\max f_i$				$\max \{0,33; 0,21; 0\} = \mathbf{1}$

Як можна побачити із наведеної таблиці, на другому етапі здійснюється вибір максимальної (найкращої) із отриманих максимальних (кращих) значень за кожною альтернативою. В результаті

застосування вирішального принципу оптимізму виявляється, що йому відповідає нормоване значення, що дорівнює одиниці. Це значення характеризує дві різні альтернативи Y_2 і Y_3 . Вони визначають множину Парето. В цьому випадку при виборі єдиного варіанту для його подальшої реалізації треба порівняти дві виділені альтернативи між собою для виявлення найбільш переважної. Для цього можна задати вагові коефіцієнти важливості критеріїв та здійснити вибір за зваженими функціями корисності:

$$f(Y^*) = \max_i \{ \max_j (\beta_j f_{ij}) \} ,$$

або провести попарне порівняння альтернатив за інтегральним критерієм або за додатково заданим критерієм. Однак в даному прикладі немає потреби у введенні додаткового критерію, тому що для розглянутих критеріїв в прикладі 7.3 такі вагові коефіцієнти вже було задано. Перерахуємо отримані результати з урахуванням цих коефіцієнтів.

Альтернативи \ Критерії (цілі)	K_1	K_2	K_3	$\max_j f_{ij}$
Y_1	0,67	0,33	0,57	$\max \{((-3) \cdot 0,67); (2 \cdot 0,33); (1 \cdot 0,57)\} = \max \{-2,01; 0,66; 0,57\} = \mathbf{0,66}$
Y_2	0,79	1	0,86	$\max \{((-3) \cdot 0,79); (2 \cdot 1); (1 \cdot 0,86)\} = \max \{-2,37; 2; 0,86\} = \mathbf{2}$
Y_3	1	0,67	1	$\max \{((-3) \cdot 1); (2 \cdot 0,67); (1 \cdot 1)\} = \max \{0; 0,67; 1\} = \mathbf{1}$
Пріоритет (ступінь важливості) цілі	-3	2	1	
Максимум із $\max f_i$				$\max \{0,66; 2; 1\} = \mathbf{2}$

Таким чином, найефективнішим рішенням з точки зору принципу оптимізму за нормованими значеннями критеріальних параметрів є альтернатива Y_2 .

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_2 .

При цьому слід зазначити, що якщо зворотна залежність між абсолютною величиною критерію та його рангом має місце для всіх критеріїв, тобто всі критерії мінімізуються, то принцип оптимізму стає принципом мініміну [25]:

$$f(Y^*) = \min_i \left\{ \min_j f_{ij} \right\}, f(Y^*) \rightarrow Y^* .$$

7.9.6. Принцип Гурвіца

Розглянуті вище принципи обрання альтернатив гарантованого результату (песимізму-максиміну) та оптимізму (максимаксу) є двома крайовими стратегіями вибору, що орієнтують ЛПР або на отримання гарантованого, хоча б і мінімального, виграшу, або на максимальний виграш, але без урахування ризику, пов'язаного із зміною ситуації, за якої можливий повний програш. На практиці такі крайові стратегії вибору використовуються досить рідко. Тому існує комбінований підхід до процесу вибору альтернативи розвитку, за якого можна коригувати ступінь наближення до однієї (песимізму) або до іншої (оптимізму) стратегії вибору, який носить назву принципу Гурвіца. Для принципу вибору Гурвіца є характерним використання зважених значень принципу Вальда (гарантованого результату або песимізму) та принципу оптимізму. Кожна альтернатива, яку обрано за

одним з цих принципів, характеризується своїм коефіцієнтом важливості $\alpha, \gamma \in [0, 1]$. Ці коефіцієнти важливості пов'язані співвідношенням $\alpha = 1 - \gamma$. Отже, правило вибору оптимальної альтернативи з точки зору принципу Гурвіца відображене формулою [14]

$$f(Y^*) = \alpha f_1(Y) + \gamma f_2(Y) = \alpha f_1(Y) + (1 - \alpha) f_2(Y),$$

де $f_1(Y)$ – альтернатива, оптимальна з точки зору *принципу гарантованого результату*,
 $f_2(Y)$ – альтернатива, оптимальна з точки зору *принципу оптимізму*.

Таким чином, загальний вираз для принципу Гурвіца можна подати у вигляді

$$f(Y^*) = \alpha \left(\max_i \{ \min_j f_{ij} \} \right) + (1 - \alpha) \left(\max_i \{ \max_j f_{ij} \} \right),$$

або

$$f(Y^*) = \max_i \left(\alpha \left(\min_j f_{ij} \right) + (1 - \alpha) \left(\max_j f_{ij} \right) \right).$$

При цьому в залежності від значення вагового коефіцієнту α можна отримати різні види принципу вибору оптимальної альтернативи [14]:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{принцип гарантованого результату;} \\ 0, & \text{принцип оптимізму.} \end{cases}$$

За відсутності у ЛПР чітко вираженої схильності до оптимізму або песимізму вибір в якості вагового коефіцієнта значення $\alpha = 0,5$ уявляється найрозумнішим [25]. Таке значення відповідає нейтральній позиції експерта при обранні оптимальної альтернативи. При цьому обирається не крайова, а проміжна – середня альтернатива розвитку.

Задача вибору оптимальної альтернативи за принципом Гурвіца розв'язується в декілька етапів.

На першому етапі проводиться оцінка тієї стратегії, якої потребує ЛПР для проведення процесу вибору. При цьому задається значення вагового коефіцієнту α , який і визначає різні принципи вибору, а значення цільових локальних критеріїв зводяться до нормованого вигляду.

На другому етапі поставлена задача розв'язується з використанням *принципу гарантованого результату*, а саме обчислюються всі значення $\min_j f_{ij} = f_i^1$.

На третьому етапі та ж сама задача розв'язується з використанням *принципу оптимізму*, а саме обчислюються всі значення $\max_j f_{ij} = f_i^2$.

На четвертому етапі з використанням визначеного на 1-му етапі коефіцієнта α за кожною альтернативою (по кожному рядку) обчислюється значення функції корисності за принципом Гурвіца:

$$f_i^G = \alpha f_i^1 + (1 - \alpha) f_i^2.$$

Це співвідношення носить назву *вирішального правила принципу Гурвіца*.

На п'ятому етапі серед обчислених значень функції корисності f_i^G обирається максимальне (найкраще). На його ґрунті проводиться виділення найефективнішої альтернативи, яка відповідає вимогам принципу Гурвіца.

Формальний зміст кожного етапу можна подати наступною зведеною таблицею.

1-й етап					2-й етап	3-й етап	4-й етап
Альтернативи	Критерії (цілі)				$\min_j f_{ij} = f_i^1$	$\max_j f_{ij} = f_i^2$	$\alpha f_i^1 + (1 - \alpha) f_i^2 = f_i^G$
	K_1	K_2	...	K_n			
Y_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}	$\min \{f_{11}, \dots, f_{1n}\} = \min f_1 = f_1^1$	$\max \{f_{11}, \dots, f_{1n}\} = \max f_1 = f_1^2$	$\alpha f_1^1 + (1 - \alpha) f_1^2 = f_1^G$
Y_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}	$\min \{f_{21}, \dots, f_{2n}\} = \min f_2 = f_2^1$	$\max \{f_{21}, \dots, f_{2n}\} = \max f_2 = f_2^2$	$\alpha f_2^1 + (1 - \alpha) f_2^2 = f_2^G$
...	...	...	...	...	...	...	...
Y_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mn}	$\min \{f_{m1}, \dots, f_{mn}\} = \min f_m = f_m^1$	$\max \{f_{m1}, \dots, f_{mn}\} = \max f_m = f_m^2$	$\alpha f_m^1 + (1 - \alpha) f_m^2 = f_m^G$
5-й етап					Максимум із f_i^G		$\max \{f_1^G, \dots, f_m^G\}$

Приклад 7.7. Припустимо, що в умовах прикладу 7.3 відсутня інформація про пріоритети критеріїв. Тому будемо виходити із припущення про їх рівноцінність, тобто із припущення, що всі вагові коефіцієнти локальних критеріїв $\beta_j = 1$. В цьому припущенні необхідно обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої її реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись принципу Гурвіца.

Розв'язання. На першому етапі розв'язання цієї задачі будемо враховувати, що нормування всіх значень функції корисності було виконане в прикладі 7.3. Також на цьому етапі приймемо значення коефіцієнту узгодженості стратегій вибору $\alpha = 0,5$. Результати другого етапу було отримано в ході розв'язання прикладу 7.5. Результати третього етапу було отримано в ході розв'язання прикладу 7.6. Скористаємося тими результатами, для яких не враховувалися пріоритети локальних критеріїв. На четвертому етапі обчислимо значення функції корисності за кожною альтернативою з використанням вирішального правила принципу Гурвіца. Таким чином, повна матриця розв'язання цієї задачі подається наступною таблицею.

1-й етап				2-й етап	3-й етап	4-й етап
Альтернативи	Критерії (цілі)			$\min_j f_{ij} = f_i^1$	$\max_j f_{ij} = f_i^2$	$0,5 \cdot f_i^1 + (1 - 0,5) f_i^2 = 0,5 \cdot f_i^1 + 0,5 \cdot f_i^2$
	K_1	K_2	K_3			
Y_1	0,67	0,33	0,57	0,33	0,57	$0,5 \cdot 0,33 + 0,5 \cdot 0,57 = \mathbf{0,45}$
Y_2	0,79	1	0,86	0,21	1	$0,5 \cdot 0,21 + 0,5 \cdot 1 = \mathbf{0,605}$
Y_3	1	0,67	1	0	1	$0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 1 = \mathbf{0,5}$
5-й етап				Максимум із f_i^G		$\max \{0,45; 0,605; 0,5\} = \mathbf{0,605}$

Як можна побачити із наведеної таблиці, максимальне (найкраще) значення функції корисності із обчислених за вирішальним правилом принципу Гурвіца дорівнює **0,605**. Воно характеризує 2-у альтернативу. Отже, з точки зору принципу Гурвіца найефективнішою стратегією розвитку буде альтернатива Y_2 .

Для перевірки правильності отриманого рішення в процесі вибору зазвичай використовують різні значення параметру α , який змінюють з інтервалом **0,1**. За цими значеннями параметру будують підсумкову таблицю розв'язання. Та альтернатива, яка найбільшу кількість разів визначається в якості ефективної, обирається за оптимальний варіант рішення [14]. Для розглянутого прикладу

можна отримати наступні результати вибору для різних значень параметру α , подані в наступній таблиці.

α	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	Ефективне рішення
Y_1	0,57	0,546	0,522	0,498	0,474	0,45	0,426	0,402	0,378	0,354	0,33	
Y_2	1	0,921	0,842	0,763	0,684	0,605	0,526	0,447	0,368	0,289	0,21	
Y_3	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	
f^G	1	0,921	0,842	0,763	0,684	0,605	0,526	0,447	0,378	0,354	0,33	
Y^*	Y_2, Y_3	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2	Y_2	Y_1	Y_1	Y_1	Y_2

В даному випадку найбільшу кількість разів в якості раціонального вибору пропонується 2-а альтернатива. Тому саме вона обирається в якості оптимальної альтернативи рішення даної задачі з точки зору принципу Гурвіца.

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_2 .

При цьому слід зазначити, що якщо зворотна залежність між абсолютною величиною критерію та його рангом має місце для всіх критеріїв, тобто всі критерії мінімізуються, то альтернатива $f_1(Y)$, яка відображає рішення за принципом гарантованого результату, обирається за принципом мінімаксу. Одночасно з цим альтернатива $f_2(Y)$, що відображає рішення за принципом оптимізму, обирається за принципом мініміну. Тоді правило для прийняття рішення з використанням принципу Гурвіца перетворюється в наступне [25]:

$$f(Y^*) = \min_i \left(\alpha \left(\max_j f_{ij} \right) + (1 - \alpha) \left(\min_j f_{ij} \right) \right).$$

7.9.7. Принцип Севіджа (принцип мінімаксного ризику)

Стратегія вибору, заснована на використанні принципу Севіджа, характеризується тими потенційними втратами, яких може зазнати експерт-ЛПР, якщо вибере неоптимальне рішення. Процедура вибору зазвичай відбувається в чотири етапи та ґрунтується на використанні не функції корисності, а на обчисленні проміжного показника функції втрат (W) на базі наявних для кожної альтернативи значень функції корисності f_{ij} . Таким чином, дана стратегія зводиться до пошуку функції втрат та вибору із множини значень потенційних втрат в якості раціональної тієї альтернативи, втрати якої будуть найменшими.

На першому етапі для кожного критерію (по кожному стовпцю) визначається максимальне значення функції корисності, тобто

$$k_j^{\max} = \max_i f_{ij},$$

що показує найкращий можливий рівень корисності $k_j^{\max}$, який може бути отриманий для критерію K_j .

На другому етапі на основі отриманих максимальних значень $k_j^{\max}$ для кожної альтернативи визначається показник ризику (потенційних втрат), який обчислюється за наступним правилом [14]:

$$W_{ij} = k_j^{\max} - f_{ij}.$$

Виходячи з цього правила, початкова платіжна матриця перераховується в **матрицю ризиків**.

Критерії (цілі) Альтернативи	K_1	K_2	...	K_n
Y_1	$W_{11} = k_1^{\max} - f_{11}$	$W_{12} = k_2^{\max} - f_{12}$	...	$W_{1n} = k_n^{\max} - f_{1n}$
Y_2	$W_{21} = k_1^{\max} - f_{21}$	$W_{22} = k_2^{\max} - f_{22}$	...	$W_{2n} = k_n^{\max} - f_{2n}$
...	...	...	...	...
Y_m	$W_{m1} = k_1^{\max} - f_{m1}$	$W_{m2} = k_2^{\max} - f_{m2}$	...	$W_{mn} = k_n^{\max} - f_{mn}$
$k_j^{\max} = \max_i f_{ij}$	$k_1^{\max}$	$k_2^{\max}$	...	$k_n^{\max}$

Значення елементів матриці ризиків характеризують потенційний ризик від обрання неоптимальної i -ї альтернативи для критерію K_j . Іншими словами, ці значення показують, наскільки близько розташована обрана альтернатива відносно тієї, яку буде обрано в якості оптимальної за тим чи іншим критерієм. В тому випадку, коли це значення дорівнює нулю, експерт-ЛПР не зазнає ризику (значення втрат дорівнює нулю), тому що обрав правильну альтернативу (її функція корисності є максимальною серед можливих). Якщо ж величина втрат є великою, то ЛПР буде зазнавати ризику, тому що його втрати при виборі неоптимальної альтернативи будуть великими, а функція корисності далекою від максимально можливої (для оптимальної альтернативи).

Однак якщо для деякого критерію існує зворотна залежність між його абсолютним показником та рангом, то елементи відповідного стовпця в матриці ризиків будуть обчислюватися за правилом

$$W_{ij} = f_{ij} - k_j^{\min}.$$

Таким чином, процес пошуку елементів матриці ризиків можна звести до наступного узагальненого правила [25]:

$$W_{ij} = \begin{cases} k_j^{\max} - f_{ij}, & \text{якщо } K_j \rightarrow \max; \\ f_{ij} - k_j^{\min}, & \text{якщо } K_j \rightarrow \min. \end{cases}$$

На **третьому етапі** відбувається визначення показника максимального ризику для кожної альтернативи (по кожному рядку), тобто

$$W_i = \max_j W_{ij} = \max_j (k_j^{\max} - f_{ij}).$$

На **четвертому етапі** відбувається вибір найменшої серед отриманих максимальних за кожною альтернативою втрат, тобто

$$f(Y^*) = \min_i \max_j W(Y), \quad f(Y^*) \rightarrow Y^*.$$

Таким чином, найефективніша альтернатива визначається за правилом

$$f(Y^*) = \min_i \max_j W_{ij}.$$

Загальний вигляд процесу пошуку оптимального рішення з точки зору принципу Севіджа можна подати наступною таблицею.

Критерії (цілі) Альтернативи	K_1	K_2	...	K_n	$\max_j W_{ij}$
Y_1	W_{11}	W_{12}	...	W_{1n}	$\max \{W_{11}, \dots, W_{1n}\} = \max W_1$
Y_2	W_{21}	W_{22}	...	W_{2n}	$\max \{W_{21}, \dots, W_{2n}\} = \max W_2$
...	...	...	...	...	...
Y_m	W_{m1}	W_{m2}	...	W_{mn}	$\max \{W_{m1}, \dots, W_{mn}\} = \max W_m$
Мінімум із $\max W_i$					$\max \{\max W_1, \dots, \max W_m\}$

Приклад 7.8. В умовах прикладу 7.5 необхідно обрати найкращу стратегію оптових закупівель продукції для подальшої її реалізації в роздрібній торгівлі, дотримуючись *принципу Севіджа*.

Розв'язання. При розв'язанні цієї задачі врахуємо, що зведення всіх показників до нормованого вигляду, тобто *підготовчий етап* вже здійснено в прикладі 7.3. Далі на *першому етапі* визначимо максимальні значення для кожного з трьох задіяних критеріїв. При цьому треба враховувати, що для критерію K_1 між його абсолютною величиною та рангом існує зворотна залежність (чим вищою є ціна, тим нижчим є ранг). З урахуванням цього, маємо:

$$k_1^{\min} = \min_i f_{i1} = \min \{0,67; 0,79; 1\} = 0,67,$$

$$k_2^{\max} = \max_i f_{i2} = \max \{0,33; 1; 0,67\} = 1,$$

$$k_3^{\max} = \max_i f_{i3} = \max \{0,57; 0,86; 1\} = 1.$$

Повну матрицю розв'язання даної задачі можна подати наступною таблицею.

Критерії (цілі) Альтернативи	K_1	K_2	K_3	$\max_j W_{ij}$
Y_1	$(0,67 - 0,67) = 0$	$(1 - 0,33) = 0,67$	$(1 - 0,57) = 0,43$	$\max \{0; 0,67; 0,43\} = 0,67$
Y_2	$(0,79 - 0,67) = 0,12$	$(1 - 1) = 0$	$(1 - 0,86) = 0,14$	$\max \{0,12; 0; 0,14\} = 0,14$
Y_3	$(1 - 0,67) = 0,33$	$(1 - 0,67) = 0,33$	$(1 - 1) = 0$	$\max \{0,33; 0,33; 0\} = 0,33$
$k_j^m \in \{\max_i f_{ij}, \min_i f_{ij}\}$	$k_1^{\min} = 0,67$	$k_2^{\max} = 1$	$k_3^{\max} = 1$	
Мінімум із $\max_j W_{ij}$				$\min \{0,67; 0,14; 0,33\} = 0,14$

На *третьому етапі* для кожної альтернативи (по кожному рядку) були визначені максимальні значення втрат (максимальні потенційні ризики).

На *четвертому етапі* із максимальних ризиків по кожній альтернативі обирається мінімальне значення. Як можна побачити із наведеної таблиці, для даної задачі таким значенням є величина **0,14**. Вона характеризує 2-у альтернативу. Отже, з точки зору принципу Севіджа найефективнішою стратегією розвитку буде альтернатива Y_2 .

Відповідь. Оптимальною стратегією є здійснення оптових закупівель продукції у постачальника Y_2 .

7.9.8. Принцип рівномірності

Цей принцип полягає в намаганні досягнути рівномірного та гармонічного покращення рішення за всіма локальними критеріями. Він має декілька різновидів.

Принцип рівності

В цьому випадку найкращим вважається таке рішення, за якого досягається рівність один одному всіх локальних критеріїв, тобто т. A буде найкращим рішенням в області D_Y (рис. 7.7а). Цей принцип є дуже жорстким. Він може призводити до рішення, яке знаходиться поза областю припустимих рішень (рис. 7.7б) або навіть зовсім не мати припустимих рішень (рис. 7.7в), особливо в дискретному випадку.

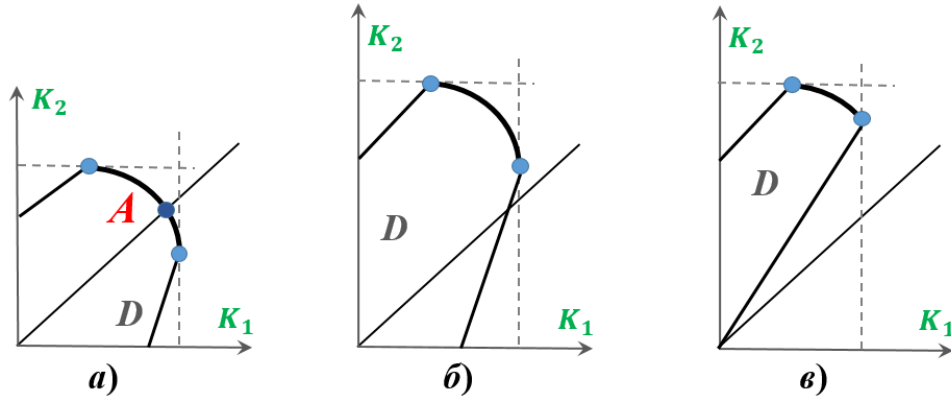


Рис. 7.7 – Принцип рівності

Принцип Чебішевської рівномірної оптимізації

Ідея рівномірності тут знаходить своє вираження в намаганні збільшувати рівень всіх критеріїв за рахунок підтягування найгіршого із локальних критеріїв, тобто того критерію, який має мінімальне значення. При використанні цього принципу спочатку із всіх локальних критеріїв обирається $\min_j K_j(Y)$, а потім відшукується така точка області D_Y , яка максимізує цей мінімальний критерій:

$$f(Y^*) = \max_{D_Y} \min_D K_j(Y) .$$

Графічно реалізацію цього принципу подано на рис. 7.8. Цей принцип подібний принципу гарантованого результату (принципу Вальда).

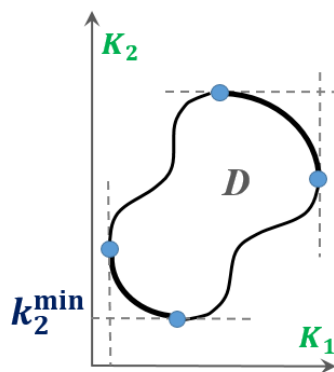


Рис. 7.8 – Принцип Чебішевської рівномірної оптимізації

Принцип квазірівності

Ідея рівності тут реалізується приблизно з точністю до деякої величини δ . Іншими словами, рішення вважається найкращим, якщо значення окремих локальних критеріїв відрізняються одне

від одного не більше, ніж на вказану величину δ . Графічну реалізацію цього критерію подано на рис. 7.9.

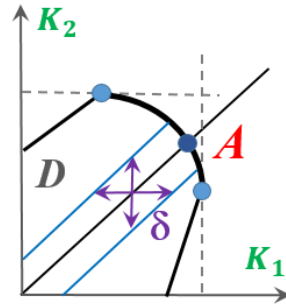


Рис. 7.9 – Принцип квазірівності

7.9.9. Принцип справедливої поступки

Цей принцип має два різновиди, які обидва засновані на оцінюванні та зіставленні приросту та втрати значень локальних критеріїв.

Принцип абсолютної поступки

В цьому випадку найкращим вважається таке рішення, за якого сумарний абсолютний рівень зниження одного або декількох критеріїв не перевищує сумарного абсолютного рівня збільшення інших критеріїв.

Нехай є два ефективних рішення (альтернативи) Y_1 і Y_2 . Тоді у відповідності з принципом абсолютної поступки при переході від альтернативи Y_1 до Y_2 отримуємо наступну оцінку сумарної абсолютної зміни рівня критерію:

$$\Delta_{\text{abs}} = \sum_{j=1}^n (K_j(Y_2) - K_j(Y_1)) = \sum_{j=1}^n K_j(Y_2) - \sum_{j=1}^n K_j(Y_1).$$

При $\Delta_{\text{abs}} > 0$ альтернатива Y_2 вважається кращою, ніж Y_1 . Отже, найкращим з точки зору абсолютної поступки рішенням буде така альтернатива розвитку, для якої $\Delta_{\text{abs}} \leq 0$ при переході до будь-якої іншої альтернативи. Цьому принципу відповідає оптимальне значення вектору $K(Y)$, яке забезпечується максимізацією суми локальних критеріїв, тобто

$$f(Y^*) = \max_i \sum_{j=1}^n f_{ij}.$$

Принцип абсолютної поступки є подібним до скалярного критерію економічної згортки локальних критеріїв.

Принцип відносної поступки (принцип справедливого компромісу)

В цьому випадку найкращим вважається таке рішення, за якого сумарний відносний рівень зниження одного або декількох критеріїв не перевищує сумарного відносного рівня зростання за іншими критеріями. У відповідності з цим принципом при переході від альтернативи Y_1 до Y_2 отримуємо наступну оцінку відносної поступки:

$$\Delta_{\text{rel}} = \sum_{j=1}^n \frac{K_j(Y_2) - K_j(Y_1)}{K_j(Y_1)}.$$

При $\Delta_{\text{rel}} > 0$ альтернатива Y_2 вважається кращою, ніж Y_1 . Отже, найкращим з точки зору відносної поступки рішенням буде така альтернатива розвитку, для якої $\Delta_{\text{rel}} \leq 0$ при переході до будь-якої іншої альтернативи. Принципу відносної поступки відповідає скалярна модель оптимізації з критерієм у вигляді добутку локальних критеріїв:

$$f(Y^*) = \max_i \prod_{j=1}^n f_{ij}.$$

Різний ступінь важливості критеріїв β_j можна врахувати, застосовуючи формулу:

$$f(Y^*) = \max_i \prod_{j=1}^n f_{ij}^{\beta_j}.$$

7.9.10. Принцип виділення головного критерію

Зміст цього принципу полягає в наступному: із сукупності локальних критеріїв обирається один та приймається в якості головного. До рівнів решти локальних критеріїв висувається вимога, щоб вони були не меншими за деякі задані значення, створюючи в такий спосіб деяку область, в якій відшукується рішення, найкраще з точки зору головного критерію. Цей принцип є протилежним до принципу Чебишевської рівномірної оптимізації. Існує два різновиди диференціальної оптимізації, що є подібними до принципу оптимізму.

максимізація максимального критерію

$$\max_D \max_{D_Y} K_j,$$

мінімізація мінімального критерію

$$\min_D \min_{D_Y} K_j.$$

7.9.11. Принцип послідовної поступки

Цей принцип також є аналогічним до скалярного критерію. Існує два його різновиди, що називаються також *квазіоптимізаційними* принципами.

Принцип жорсткого пріоритету

Якщо критерії мають пріоритети, то нема сенсу розглядати область компромісу.

Передбачається, що локальні критерії розташовані в деякому порядку зменшення їх важливості: $K_1 > K_2 > \dots > K_n$. Процедура пошуку найкращого рішення зводиться до наступних кроків: спочатку відшукується рішення, найкраще з точки зору критерію K_1 . Таким чином, область D_Y скорочується до деякої області D_{K_1} . Потім вже в області D_{K_1} відшукується оптимальне рішення з точки зору критерію K_2 тощо доти, поки ми не прийдемо до деякої точки. Недоліком цього принципу є

швидке насичення за вибором критерію, тобто реальному розгляданню підлягають лише перші найбільш важливі критерії. Графічну реалізацію цього принципу показано на рис. 7.10.

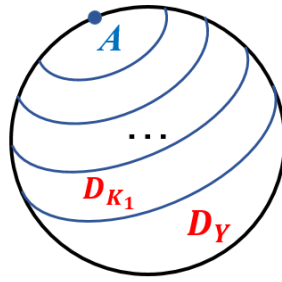


Рис. 7.10 – Принцип жорсткого пріоритету

Принцип гнучкого пріоритету

При реалізації цього принципу після того, як знайдено рішення, оптимальне з точки зору критерію K_1 , призначається, виходячи із практичних міркувань точності початкових даних, деяка поступка ΔK_1 , якої ми згодні припуститися заради того, щоб відшукати рішення, оптимальне з точки зору критерію K_2 . Далі для показника критерію K_1 вводиться обмеження [5]

$$k_1 \geq k_1^{\max} - \Delta K_1,$$

за якого й відшукується рішення, в якому досягається максимум критерію K_2 . Потім знову призначається поступка ΔK_2 , за рахунок якої досягається максимум наступного за важливістю критерію K_3 . І так далі описана процедура повторюється для всіх решти критеріїв.

Перевагою цього принципу є те, що можна наочно побачити, ціною якої саме поступки в одному локальному критерії досягається вигравш в іншому. Свобода вибору рішення при реалізації принципу гнучкого пріоритету, яка досягається ціною навіть незначних поступок, може виявитися дуже суттєвою, тому що в області екстремуму ефективність рішення зазвичай змінюється дуже слабо [5].

7.9.12. Логічні критерії

Критерії, що досі розглядалися, являли собою **кількісні цілі**, тобто цілі, що полягають в прагненні збільшити або зменшити значення деякої величини, залежність якої від змінних і є критерієм оптимізації. Це, наприклад, вартість продукції (задача максимізації) або мінімальна довжина маршруту в задачах про перевезення (задача мінімізації) тощо. Прагнення до збільшення або зменшення величини критерію є математичним описом цілі. В заданій конкретній моделі цей критерій повністю замінює собою ціль, і далі дослідник має справу лише з ним. Однак за способом досягнення існує ще один різновид цілей – **якісні цілі**, що можуть бути лише досягнуті або не досягнуті. Всі результати операцій, що призводять до досягнення цілей, однаково гарні. Аналогічно всі результати, що не призводять до досягнення цілей, однаково незадовільні. При цьому критерій може приймати лише два значення: **1** – у разі успіху та **0** – в протилежному випадку. Іншими словами, вдалість операції оцінюється за схемою «так – ні», тобто описується булевими змінними. Це може бути, наприклад, виконання чи невиконання плану тощо.

Критерієм кон'юнкції називається критерій, що ставить за мету досягнення всіх без виключення локальних критеріїв:

$$f(Y) = \prod_{j=1}^n K_j(Y) = \bigwedge_{j=1}^n K_j(Y).$$

В силу того, що кон'юнкція є операцією логічного добутку, вона дорівнює нулю, якщо хоча б один із кон'юнктив (логічних множників) дорівнює нулю [15]. Аналогічно результат звичайного арифметичного добутку стає нульовим, якщо серед множників є хоча б один нульовий. Тому у випадку лише двох можливих значень критерію (**0** або **1**) для його згортки можна застосовувати як арифметичний добуток, так і логічну операцію кон'юнкції.

Критерій диз'юнкції описує ситуацію, коли сумарна мета досягається при виконанні хоча б одного локального критерію. Якщо дотримуватися припущення про лише два можливих значення критерію, то підсумковий критерій можна отримати за допомогою операції диз'юнкції [15]:

$$K(Y) = \bigvee_{j=1}^n K_j(Y).$$

Однак більш розповсюдженою є ситуація, коли використовуються не два граничні значення критерію (**0** або **1**), а обирається показник ефективності у вигляді ймовірності досягнення бажаного результату. Тоді

$$K(Y) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - P(K_j(Y))),$$

де $P(K_j(Y))$ – ймовірність виконання j -го критерію або ймовірність досягнення оптимуму за j -м критерієм;

$1 - P(K_j(Y))$ – ймовірність невиконання j -го критерію;

$\prod_{j=1}^n (1 - P(K_j(Y)))$ – ймовірність одночасного невиконання всіх критеріїв.

Якщо критерії є суперечливими, то використовується **критерій заперечення (ні)**:

$$\bar{K}_j(Y) = 1 - P(K_j(Y)).$$

Інколи застосовуються **комбіновані критерії** (рис. 7.11).

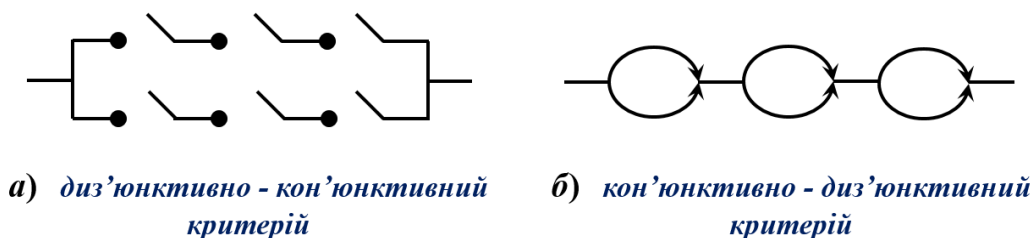


Рис. 7.11 – Комбіновані логічні критерії

Контрольні запитання

1. Перелічіть основні елементи методу евристичного прогнозування.

2. Дайте означення процесу самоорганізації.
3. Який метод розв'язання задач є універсальним згідно з теорією самоорганізації?
4. Сформулюйте основний принцип теорії самоорганізації.
5. Сформулюйте основні задачі, які мають бути передані для машинного розв'язання для здійснення повної самоорганізації.
6. Охарактеризуйте кожну з цих задач.
7. В чому полягає зміст методу колективної експертної оцінки?
8. Які показники характеризують відносну значущість?
9. Коли доцільно застосовувати методи колективної генерації ідей?
10. Які етапи прогнозування реалізуються методом «мозкової атаки»?
11. Охарактеризуйте кожний з цих етапів.
12. Назвіть особливості методу «Дельфі».
13. На чому ґрунтується метод думок та цілей?
14. Для чого призначений цей метод?
15. Назвіть методи прогнозування витрат на рекламу.
16. В які способи можна прогнозувати поведінку споживача?
17. На якому припущенні ґрунтується модель Видаля-Х. Вольфа?
18. Запишіть основне рівняння моделі Видаля-Х. Вольфа.
19. В чому полягає перевага моделі Видаля-Х. Вольфа?
20. Опишіть процес прогнозування часової складової попиту.
21. Опишіть методи формалізації результатів колективного експертного оцінювання.
22. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом зважених сум?
23. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом Лапласа?
24. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом Вальда?
25. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом оптимізму?
26. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом Гурвіца?
27. Як відбувається вибір оптимальної стратегії розвитку за принципом Севіджа?
28. Що таке оптимальність за Парето?
29. В чому полягає принцип рівномірності? Назвіть його різновиди.
30. В чому полягає принцип справедливої поступки? Назвіть його різновиди.
31. В чому полягає принцип послідовної поступки? Назвіть його різновиди.
32. В яких випадках застосовуються логічні критерії?

8. АНАЛІЗ РЯДІВ ДИНАМІКИ

8.1. Класифікація динамічних рядів

Всі явища природи та суспільства, в тому числі й економічні, змінюються та розвиваються. Тому аналіз та прогнозування економічних систем є неможливим без вивчення їх поведінки та розвитку в часі, тобто в динаміці. Розвиток економічних явищ в часі називається **динамічним розвитком**, а інформація про цей розвиток – **динамічним** або **часовим рядом** [6].

Окремі спостереження часового ряду називаються **рівнями** цього ряду.

Кожний динамічний ряд складається із **періодів** або **моментів часу t** , до яких належать рівні ряду, та **статистичних показників y** , що характеризують рівні ряду [3].

В залежності від характеру рівнів ряду розрізняють

- *моментні*,
- *інтервальні* (періодичні),
- *похідні* часові ряди.

Моментні ряди характеризують значення показника в певні моменти часу. Сумування рівнів моментного ряду не має сенсу, тому що це призводить до повторного обліку. Однак різниця рівнів має певний економічний зміст. **Інтервальні** ряди характеризують значення показника за певні інтервали часу. Сумування рівнів такого ряду має важливе економічне значення. Сума рівнів інтервального ряду динаміки характеризує рівень даного явища за тривалий проміжок часу. При одночасному використанні в аналізі та прогнозуванні декількох рядів динаміки, як вже зазначалося, виникає проблема забезпечення зіставності їх рівнів за одні й ті ж самі періоди. Особливу увагу при цьому слід звертати саме на зіставність рівнів моментних та інтервальних рядів. Наприклад, нехай є дані за ряд років про прибуток підприємства (інтервальний ряд) та про вартість основних виробничих фондів на кінець року (моментний ряд). Їх зіставлення дозволяє охарактеризувати ефективність використання основних виробничих фондів. Однак для того, щоб таке зіставлення було можливим, необхідно рівні моментного динамічного ряду перерахувати в середньорічні рівні. Такий перерахунок зробить ці ряди порівняними, тому що в цьому випадку і прибуток, і основні фонди будуть відображати річні значення [11]. Таким чином, **похідні** ряди отримують із середніх або відносних величин показника.

За кількістю вимірюваних показників ряди динаміки бувають

- *одновимірні*,
- *багатовимірні*.

Одновимірні часові ряди характеризують зміни в часі одного показника. **Багатовимірні** ряди динаміки характеризують зміни в часі двох, трьох та більшої кількості показників. В свою чергу, багатовимірні динамічні ряди розділяються на

- *паралельні* ряди,
- *ряди взаємопов'язаних показників*.

Паралельні ряди динаміки відображають зміни в часі або одного показника різних об'єктів (наприклад, чисельність населення різних країн), або різних показників одного об'єкту (наприклад, валовий збір врожаю різних культур в одному регіоні). **Ряди взаємопов'язаних показників** характеризують залежність одного явища від іншого (наприклад, залежність заробітної плати працівників від їх тарифного розряду).

За повнотою часу часові ряди розділяються на

- *повні*,
- *неповні*.

В **повних** динамічних рядах дати або періоди крокують один за іншим з рівними інтервалами. В **неповних** динамічних рядах в послідовності показників спостерігають неоднакові часові інтервали.

За способом подання рівнів динамічні ряди розділяються на [3]

- *ряди абсолютних величин*,
- *ряди середніх величин*,
- *ряди відносних величин*.

Ряди **абсолютних величин** найбільш повно характеризують розвиток процесу або явища (наприклад, видобуток корисних копалин, обсяг ВВП в цілому та по галузям тощо). Ряди **відносних величин** подані, наприклад, рядами індексів фізичного обсягу ВВП, споживчих цін тощо. **Серед-**

німи величинами є рівні рядів динаміки, наприклад, нарахованої заробітної платні, доходів та витрат на душу населення, прожиткового мінімуму на душу населення, споживання продуктів на душу населення тощо [35].

8.2. Розрахунок середніх показників за рядами динаміки

Для узагальнення даних за рядами динаміки розраховуються *середні показники ряду*. Вони характеризують загальну тенденцію динаміки явища або процесу протягом тривалого інтервалу часу. Обчислюються ці показники для виявлення закономірностей розвитку соціально-економічних явищ. До середніх показників належать [35]:

- *середній рівень ряду*,
- *середній абсолютний приріст*,
- *середній темп зростання*,
- *середній темп приросту*.

Вибір формули розрахунку середнього рівня ряду залежить від виду динамічного ряду: моментний або інтервальний, повний або неповний. Для різних рядів використовуються різні формули.

По інтервальному динамічному ряду із абсолютних величин з рівними інтервалами середній рівень визначається як просте середнє арифметичне значення для всіх рівнів ряду [11]:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

де y_i – рівень ряду для i -го періоду,

n – кількість рівнів в досліджуваному динамічному ряду.

Якщо в інтервальному ряду відрізки між рівнями мають неоднакову тривалість, то середній рівень ряду розраховується як зважене середнє арифметичне значення [35]:

$$\bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{y}_i h_i \right) : \left(\sum_{i=1}^n h_i \right),$$

де $\bar{y}_i$ – суміжне парне середнє значення рівня для i -го інтервалу,

h_i – тривалість i -го інтервалу, тобто період, протягом якого рівень y_i залишається незмінним (період дії рівня y_i).

При цьому суміжне парне середнє значення рівня для i -го інтервалу обчислюється як просте середнє арифметичне значення для двох інтервалів, що стоять поряд, та відображає середній рівень вимірюваного показника за i -й інтервал часу.

$$\bar{y}_i = \frac{y_i + y_{i-1}}{2}.$$

Для моментних динамічних рядів величина середнього рівня залежить від того, в який спосіб йшов розвиток процесу або явища в межах інтервалів, що розділюють окремі спостереження. Таким чином, для моментного динамічного ряду в залежності від вхідної інформації можливі наступні чотири ситуації [11].

1. Якщо відомі повні вичерпні дані про зміни рівня моментного ряду всередині всього часового проміжку спостережень, то середній рівень ряду визначається як зважене середнє арифметичне значення:

$$\bar{y} = \left(\sum_{i=1}^n y_i h_i \right) : \left(\sum_{i=1}^n h_i \right),$$

де y_i – рівень моментного динамічного ряду,

h_i – тривалість i -го інтервалу, тобто період, протягом якого рівень y_i залишається незмінним (період дії рівня y_i).

Цей метод розрахунку середнього рівня моментного динамічного ряду є найбільш точним.

Приклад 8.1. Є наступна інформація про рух грошових коштів по розрахунковому рахунку підприємства протягом січня поточного року. Залишок коштів на розрахунковому рахунку підприємства на **01.01** склав 100 тис. грош. од., **10.01** надійшло від покупців 250 тис. грош. од., **15.01** списано з рахунку на господарські потреби 15 тис. грош. од., **18.01** знято з рахунку для виплати заробітної плати 180 тис. грош. од., **25.01** надійшло від покупців 420 тис. грош. од. Іншого руху грошових коштів до кінця місяця не було. Визначити середній залишок коштів на розрахунковому рахунку підприємства в січні.

Розв'язання. З урахуванням того, що в умові задачі наданий вичерпний перелік грошових операцій за січень, ми маємо справу з неповним моментним динамічним рядом. Для визначення середнього залишку коштів в січні складемо наступну розрахункову таблицю.

Календарний період	Залишок коштів (y_i), тис. грош. од.	Період дії рівня (h_i), днів	$y_i h_i$
01.01 – 09.01	100	10 – 1 = 9	900
10.01 – 14.01	100 + 250 = 350	15 – 10 = 5	1750
15.01 – 17.01	350 – 15 = 335	18 – 15 = 3	1005
18.01 – 24.01	335 – 180 = 155	25 – 18 = 7	1085
25.01 – 31.01	155 + 420 = 575	31 – 25 + 1 = 7	4025
Разом		31	8765

Весь проміжок часу спостережень склав 31 день. Виходячи з даних наведеної таблиці, маємо наступне значення середнього рівня неповного моментного ряду:

$$\bar{y} = \frac{8765}{31} = 282,742 \text{ (тис. грош. од.)}.$$

Відповідь. В середньому залишок грошових коштів на розрахунковому рахунку підприємства в січні поточного року складав **282,742** тис. грош. од.

2. Якщо інформація про зміни рівня моментного ряду всередині розглянутого часового проміжку спостережень відсутня, то в цьому випадку середній рівень ряду визначається приблизно як зважене середнє арифметичне значення для парних суміжних середніх, тобто за тим же самим алгоритмом, що й середні значення інтервального ряду у випадку неоднакової довжини інтервалів ряду [11, 35].

Приклад 8.2. Товарні запаси на складі підприємства у вартісному поданні на **01.01** склали 600 тис. грош. од., на **01.04** – 750 тис. грош. од., на **01.08** – 500 тис. грош. од., на **01.11** – 620 тис. грош. од., на **01.01** наступного року – 800 тис. грош. од. Визначити вартість середньорічного товарного запасу на складі підприємства.

Розв'язання. З урахуванням того, що у нас відсутня інформація про рух товарних запасів протягом вказаних інтервалів часу, даний динамічний ряд можна розглядати як моментний неповний ряд з інформацією на початок періодів або як неповний інтервальний ряд (з неоднаковою довжиною

інтервалів). Для визначення вартості середньорічного товарного запасу на складі підприємства складемо розрахункову таблицю.

Дата обліку	Товарні запаси (y_i), тис. грош. од.	Парні суміжні середні ($\bar{y}_i$), тис. грош. од.	Період дії середніх (h_i), місяців	$\bar{y}_i h_i$
01.01	600			
01.04	750	$(600 + 750) : 2 = 675$	$4 - 1 = 3$	2025
01.08	500	$(750 + 500) : 2 = 625$	$8 - 4 = 4$	2500
01.11	620	$(500 + 620) : 2 = 560$	$11 - 8 = 3$	1680
01.01	800	$(620 + 800) : 2 = 710$	$12 - 11 + 1 = 2$	1420
Разом			12	7625

Весь проміжок часу спостережень склав 1 рік, тобто 12 місяців. Виходячи з даних наведеної таблиці, маємо наступне значення середнього рівня неповного моментного ряду:

$$\bar{y} = \frac{7625}{12} = 635,417 \text{ (тис. грош. од.)}.$$

Відповідь. Вартість середньорічного товарного запасу на складі підприємства склала **635,417** тис. грош. од.

3. Якщо інтервали часу між сусідніми датами обліку дорівнюють один одному, то розглянуте для попереднього випадку зважене середнє арифметичне значення перетворюється в тотожне йому середнє хронологічне значення [11, 37]:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n - 1}.$$

Приклад 8.3. Є поквартальні дані про вартісне подання обладнання, що знаходиться на балансі підприємства: на **01.01** – 800 тис. грош. од., на **01.04** – 1000 тис. грош. од., на **01.07** – 1600 тис. грош. од., на **01.11** – 1100 тис. грош. од., на **01.01** наступного року – 1400 тис. грош. од. Визначити середньорічну вартість обладнання, що знаходиться на балансі підприємства.

Розв'язання. В даному випадку всі інтервали мають однакову довжину – 3 місяця або 1 квартал. Таким чином, повний проміжок часу, за який ведуться спостереження, складає 4 квартали. Весь динамічний ряд при цьому складається із 5 рівнів (5 моментів фіксації значень показника). Таким чином, **$n = 5$** . Визначимо середні значення вартості обладнання для кожного кварталу (парні суміжні середні значення рівнів ряду):

$$\begin{aligned}\bar{y}_{\text{I кв}} &= \frac{800 + 1000}{2} = 900, \\ \bar{y}_{\text{II кв}} &= \frac{1000 + 1600}{2} = 1300, \\ \bar{y}_{\text{III кв}} &= \frac{1600 + 1100}{2} = 1350, \\ \bar{y}_{\text{IV кв}} &= \frac{1100 + 1400}{2} = 1250.\end{aligned}$$

Далі розраховуємо середньорічну вартість обладнання як середнє арифметичне значення для середніх квартальних:

$$\bar{y} = \frac{900 + 1300 + 1350 + 1250}{4} = \frac{4800}{4} = 1200 \text{ (тис. грош. од.)}.$$

Однак, з іншого боку, цей розрахунок можна провести в наступний спосіб:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\frac{800 + 1000}{2} + \frac{1000 + 1600}{2} + \frac{1600 + 1100}{2} + \frac{1100 + 1400}{2}}{4} = \\ &= \frac{\frac{800}{2} + 1000 + 1600 + 1100 + \frac{1400}{2}}{4} = \\ &= \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}}{4} = 1200 \text{ (тис. грош. од.)}.\end{aligned}$$

Таким чином, із наведених розрахунків можна побачити, що у випадку інтервалів однакової довжини формула середньої зваженої дійсно перетворюється в формулу середньої хронологічної.

Відповідь. Середньорічна вартість обладнання, що знаходиться на балансі підприємства, склала **1200** тис. грош. од.

4. Якщо відомі значення рівнів лише на початок та кінець досліджуваного проміжку часу, то середній рівень моментного ряду абсолютних величин обчислюється за формулою середнього арифметичного значення для цих двох рівнів [37]:

$$\bar{y} = \frac{y_0 + y_n}{2},$$

де y_0 – значення рівня на початок періоду часу, для якого треба здійснити розрахунки,

y_n – значення рівня на кінець періоду часу, для якого треба здійснити розрахунки.

Середній абсолютний приріст може визначатися в різні способи.

1. Як середнє арифметичне значення для ланцюгових абсолютних приростів:

$$\bar{\Delta}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^s,$$

де n – кількість ланцюгових абсолютних приростів (їх кількість на 1 менше, ніж кількість рівнів, тому що для базисного періоду t_0 ланцюгові показники не існують). Якщо для базисного періоду прийняте $i = 0$, то n – це номер останнього рівня.

2. В силу того, що абсолютний базисний приріст для останнього рівня збігається із сумою всіх ланцюгових абсолютних приростів, маємо:

$$\bar{\Delta}_y = \frac{\Delta_n^0}{n},$$

де Δ_n^0 – базисний абсолютний приріст для останнього рівня ряду.

3. В силу того, що базисний абсолютний приріст останнього рівня відображає накопичений приріст за весь проміжок часу, для якого здійснюються розрахунки, маємо:

$$\bar{\Delta}_y = \frac{y_n - y_0}{n},$$

де y_n – останній рівень динамічного ряду,

y_0 – рівень, прийнятий за базу зіставлення.

Середній темп зростання, поданий коефіцієнтом, показує, в скільки разів збільшилося значення рівня динамічного ряду порівняно з попереднім рівнем в середньому за одиницю часу (в середньому за день, за місяць, за рік тощо) [37]. Його також можна обчислювати в різні способи.

1. Як просте середнє геометричне значення для ланцюгових коефіцієнтів зростання [11]:

$$\bar{K} = \sqrt[n]{K_1^s \times K_2^s \times \dots \times K_n^s},$$

де K_i^s – ланцюгові коефіцієнти зростання, $i = \overline{1, n}$,

n – кількість ланцюгових коефіцієнтів зростання (їх кількість на 1 менша за кількість рівнів, тому що для базисного періоду t_0 ланцюгові показники не існують). Якщо для базисного періоду прийняте $i = 0$, то n – це номер останнього рівня.

2. З урахуванням зв'язку ланцюгових та базисних коефіцієнтів зростання, середній коефіцієнт зростання можна також обчислити за формулою [37]:

$$\bar{K} = \sqrt[n]{K_n^0},$$

де K_n^0 – базисний коефіцієнт зростання для останнього рівня динамічного ряду,

n – номер останнього рівня за умови, що для базисного рівня прийняте $i = 0$. В протилежному випадку n буде на одиницю меншим за кількість розглянутих рівнів динамічного ряду.

3. З урахуванням формули для базисних коефіцієнтів зростання, маємо [11]:

$$\bar{T} = 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}},$$

де y_n – останній рівень динамічного ряду,

y_0 – рівень, прийнятий за базу зіставлення.

Середній темп приросту, з урахуванням зв'язку між темпами зростання та темпами приросту, можна обчислити у відсотковому поданні

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} - 100,$$

або у вигляді коефіцієнту

$$\Delta \bar{K} = \bar{K} - 1.$$

Середній темп приросту, поданий у відсотках, показує, на скільки відсотків збільшилося або зменшилося значення рівня динамічного ряду порівняно з попереднім рівнем в середньому за одиницю часу (в середньому за день, за місяць, за рік тощо) [37].

Всі перелічені методи розрахунку середніх показників динамічного ряду дають один і той самий результат.

Розглянуті середні показники динаміки можуть бути використані як приблизний спосіб прогнозування. Якщо передбачається стабільний абсолютний приріст, тобто зростання за арифметичною прогресією, прогноз здійснюється за формулою [11]:

$$y_p = y_n + \bar{\Delta}_y \cdot L,$$

де y_p – прогнозований рівень ряду,

y_n – останній рівень ряду (або інший рівень, відносно якого робиться прогноз),

$\bar{\Delta}_y$ – середній абсолютний приріст,

L – період упередження, тобто на скільки інтервалів часу вперед робиться прогноз. Є очевидним, що $L = p - n$.

Якщо передбачаються стабільними темпи зростання, тобто геометрична прогресія рівнів, прогноз відбувається за формулою [11]:

$$y_p = y_n \times (\bar{K})^L,$$

де $\bar{K}$ – середній коефіцієнт зростання.

Приклад 8.4. В умовах прикладу 2.3 обчислити середні показники динаміки. Спрогнозувати ймовірний обсяг випуску продукції на рік t_6 , тобто на 2 роки вперед.

Розв'язання. Для наявних в прикладі 2.3. даних середній рівень ряду (повного моментного) буде дорівнювати

$$\bar{y} = \frac{20 + 25 + 35 + 40 + 50}{5} = \frac{170}{5} = 34 \text{ (тис. од.)}.$$

Розрахункову таблицю для обчислення показників зростання та приросту вже було складено при розв'язанні прикладу 2.3. Скористаємось цими результатами. Обчислимо середній абсолютний приріст випуску продукції всіма трьома способами:

$$\bar{\Delta}_y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Delta_i^s = \frac{5 + 10 + 5 + 10}{4} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ (тис. од.)},$$

$$\bar{\Delta}_y = \frac{\Delta_n^0}{n} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ (тис. од.)},$$

$$\bar{\Delta}_y = \frac{y_n - y_0}{n} = \frac{50 - 20}{4} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ (тис. од.)}.$$

Як показують наведені розрахунки, всі три способи обчислення середнього абсолютного приросту дають один і той самий результат.

Обчислимо тепер всіма запропонованими способами середній темп і коефіцієнт зростання випуску продукції:

$$\bar{K} = \sqrt[4]{K_1^s \times K_2^s \times \dots \times K_4^s} = \sqrt[4]{1,25 \times 1,40 \times 1,143 \times 1,25} = \sqrt[4]{2,50} = 1,257,$$

$$\bar{K} = \sqrt[4]{K_4^0} = \sqrt[4]{2,50} = 1,257,$$

$$\bar{T} = 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}} = 100 \cdot \sqrt[4]{\frac{50}{20}} = 100 \cdot \sqrt[4]{2,5} = 125,7.$$

Обчислимо тепер середній темп приросту випуску продукції:

$$\bar{\Delta K} = \bar{K} - 1 = 1,257 - 1 = 0,257,$$

$$\bar{\Delta T} = \bar{T} - 100 = 125,7 - 100 = 25,7.$$

Як показують наведені розрахунки, всі можливі способи обчислення середніх показників динамічного ряду дали один і той самий результат.

Припустимо, що на наступні два роки збережеться стабільний абсолютний приріст випуску продукції. Тоді можна очікувати, що в році t_6 випуск складе

$$y_6 = y_4 + \bar{\Delta}_y \cdot 2 = 50 + 7,5 \cdot 2 = 65 \text{ (тис. од.)}.$$

Якщо припустити, що стабільним буде темп зростання випуску продукції, то можна очікувати, що в році t_6 випуск складе

$$y_6 = y_4 \times (\bar{K})^2 = 50 \cdot (1,257)^2 = 79 \text{ (тис. од.)}.$$

Відповідь. За весь досліджуваний проміжок часу на підприємстві щорічно випускалося в середньому по $\bar{y} = 34$ тис. одиниць продукції. В середньому щорічно обсяг виробленої продукції зростав на $\bar{\Delta}_y = 7,5$ тис. одиниць продукції. Середньорічний темп зростання випуску продукції склав $\bar{T} = 125,7 \%$. В середньому щорічне збільшення обсягу випуску продукції порівняно з попереднім роком склало в розглянутому проміжку часу $\bar{\Delta T} = 25,7 \%$. За умови стабільності абсолютного приросту через 2 роки обсяг випуску продукції складе $y_6 = 65$ тис. одиниць продукції, а за умови стабільності темпів зростання виробництва через 2 роки обсяг випуску продукції складе $y_6 = 79$ тис. одиниць продукції.

При обчисленні середнього абсолютного приросту та середнього темпу зростання число n в загальному випадку визначається як різниця хронологічних дат [11]. Наприклад, якщо за базисний прийнятий початковий період 2002 року, а останній рівень відповідає 2018 року, то $n = 2018 - 2002 = 16$. При розв'язанні прикладу 8.4 цей принцип також зберігся, хоча й були використані умовні роки. При цьому за базисний був прийнятий рік t_0 , а останній рівень відповідав року t_4 . При цьому для обчислення середнього абсолютного приросту та середнього темпу зростання було використане число $n = 4 - 0 = 4$.

8.3. Основні складові динамічного ряду

Однією з основних задач аналізу динамічних рядів економічних явищ та процесів є встановлення складових (компонентів), на які можна розкласти динамічний ряд. Кожна із цих складових визначена певними чинниками. Зазвичай зазначається наявність п'яти складових в динамічному ряді:

- *тенденція, що виражена трендом;*
- *сезонні коливання;*
- *циклічні коливання;*
- *інші важливі для конкретного прогнозу чинники;*
- *випадкові коливання.*

Якщо в часовому ряді проявляється тривала **тенденція** розвитку економічного показника, то в цьому випадку говорять, що має місце **тренд**. Найчастіше використовується лінійний тренд. Це означає, що модель тренду легко побудувати, використовуючи для розрахунку параметрів прямої, яка найкращим чином апроксимує даний тренд, метод лінійної регресії. Потім дана модель може бути використана для прогнозування майбутніх значень тренду. В дійсності тренд в чистому вигляді або не існує взагалі (наприклад, при коливанні значень попиту навкруги деякої фіксованої величини), або в більшості випадків він є нелінійним [5]. В більшості випадків значення змінних характеризують не лише тренд. Часто вони схильні до циклічних коливань. Якщо період коливань не перевищує одного року, то їх називають **сезонними**, якщо період коливань більший за один рік – **циклічними** складовими. Тренд, сезонна та циклічна складові називаються **регулярними** або **систематичними** компонентами часового ряду. Також можуть враховуватися такі чинники як фаза життєвого циклу або інші чинники, що визначаються довгостроковою динамікою, а також ефект від маркетингових заходів. Урахування цієї складової є індивідуальним для кожного часового ряду.

Якщо із динамічного ряду вилучити ці складові, то залишиться коливальний ряд, який може являти собою або виключно випадкові коливання, або суміш випадкових коливань з деяким плавним коливальним рухом, що є довгоперіодичною складовою коливань. Такий підхід до розкладання

динамічного ряду передбачає, що він може бути поданий сумою відповідних складових, тобто детермінованої його частини, що виражає тенденцію розвитку, та випадкової складової, якщо в динамічному ряді відсутні періодичні коливання [6].

Якщо часовий ряд поданий сумою складових компонентів, то його модель називається *адитивною*

$$y_t = u_t + s_t + v_t + d_t + e_t ,$$

якщо у вигляді добутку, то *мультиплікативною*

$$y_t = u_t \times s_t \times v_t \times d_t \times e_t ,$$

якщо використовується як додавання, так і добуток компонент, то це модель *змішаного* типу [2]:

$$y_t = u_t \times s_t \times v_t \times d_t + e_t ,$$

де y_t – рівні часового ряду,

u_t – часовий тренд,

s_t – сезонна компонента,

v_t – циклічна компонента,

d_t – інші індивідуальні чинники,

e_t – випадкова складова.

При статистичному вивченні динаміки необхідно чітко розрізняти тенденцію та коливання, щоб дати кожній з цих складових кількісну характеристику за допомогою спеціальних показників. Тенденція динаміки пов'язана з дією довготривало існуючих причин та умов розвитку, хоча, звичайно, після якогось періоду ці причини та умови також можуть змінитися та створити вже іншу тенденцію розвитку досліджуваного об'єкта. Коливання ж, навпаки, пов'язані з дією короткострокових або циклічних чинників, що впливають на окремі рівні динамічного ряду та відхиляють рівні від тенденції то в одному, то в іншому напрямку. Змішування тенденції та коливань призводить до неправильних висновків про динаміку [7].

В окремих випадках кількість складових цих моделей може бути меншою. Наприклад, лише u_t і e_t , або навпаки, більшою, якщо виникає потреба виділити сезонні складові стосовно годин доби, днів тижня, місяців.

Аналіз динамічних рядів економічних явищ може бути здійснений за схемою, поданою на рис. 8.1 [6].

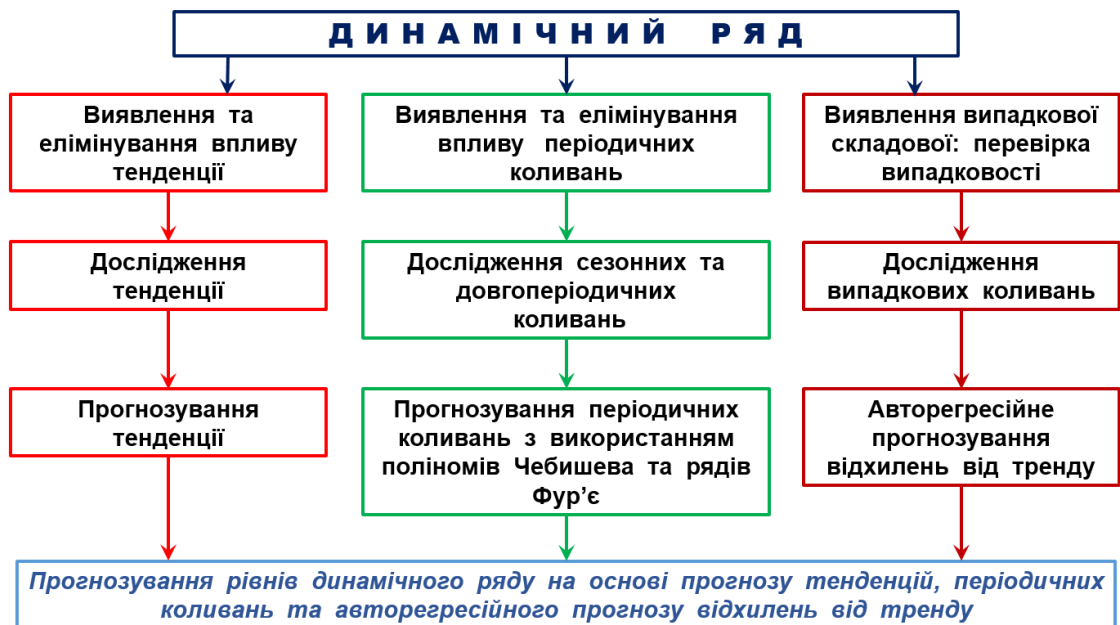


Рис. 8.1 – Схема статистичного вивчення динамічних рядів економічних явищ

8.4 Виявлення тенденції динамічного ряду

Вивчення динамічного ряду починається з виявлення тенденції розвитку. Методи розрахунку основної тенденції можна умовно поділити на дві групи. Перша група методів називається «механічним згладжуванням», тому що передбачає лише виявлення тенденції, не пов'язане з подальшим прогнозуванням. Ці методи є простими з точки зору розрахунків і достатньо наочно подають тенденцію розвитку досліджуваного явища, але на їх основі неможна здійснити прогнозування і, крім того, до їх недоліків слід віднести необґрунтованість вибору періоду згладжування. В основі другого типу методів виявлення тенденції динаміки лежить припущення, що ряд має певну закономірність розвитку, яка може бути виявленою та описаною тим чи іншим математичним виразом, тобто рівень динамічного ряду є функцією від часу $f(t)$. Це методи аналітичного вирівнювання, засновані на методі найменших квадратів. Основою для вибору тренду, який описує тенденцію зміни, є, перш за все, всебічний аналіз явища, що вивчається. Велику допомогу при виборі типу лінії може надати графічне зображення первинного динамічного ряду досліджуваного явища. Однак цей спосіб є суб'єктивним, особливо в тих динамічних рядах, де спостерігаються сильні коливання. Вибір лінії в значній мірі може залежати від масштабу графічного зображення [6].

Одним з найпростіших способів обробки ряду задля виявлення закономірності зміни його рівнів є **укрупнення інтервалів (періодів) часу**. Суть цього методу полягає в тому, що дані динамічного ряду об'єднують в групи за періодами, обчислюють середній показник за деякий період – три, п'ять років тощо. Таку обробку доцільно проводити для динамічного ряду з більш-менш систематичними коливаннями рівня, що дає можливість точніше з'ясувати загальну тенденцію розвитку явища [3]. Іншим важливим способом виявлення загальної тенденції ряду динаміки є **згладжування за допомогою ковзної середньої**. Тут також вдаються до укрупнення періодів, але шляхом послідовних зсувів на одну дату при збереженні постійного інтервалу періоду. Згладжування методом ковзної середньої можна здійснювати також і за парними кількостями членів ряду. Однак таке згладжування є дещо складнішим, тому що середню можна віднести лише до середини між двома датами, що лежать всередині інтервалу. Щоб знищити такий зсув, застосовують способи перетворення рівнів або центрування. При використанні *способу перетворення рівнів* рівень першого інтервалу ді-

лять навпіл, і його половина входить до суми, за допомогою якої обчислюють ковзну середню. Потім беруть всі наступні рівні в повному обсязі й до них додають половину рівня, який виходить за межі згладжування. Спосіб *центрування* полягає в тому, що із кожної пари згладжених ковзних середніх розраховують просте середнє арифметичне значення [3]. У випадку використання методу ковзної середньої важливим є вибір періоду, або інтервалу згладжування, який має відповідати періоду коливань в даному ряду динаміки. Якщо, наприклад, встановлена періодичність коливань складає 3 місяці, то беруть тричленну ковзну середню, якщо 6 місяців – шестичленну тощо. Однак найефективнішим є достатньо складний метод виявлення основної тенденції – *аналітичне згладжування*. В цьому випадку різні ряди динаміки розглядають як функцію часу, а задача згладжування зводиться до відшукування такого виду функції, ординати точок якої були б найбільш приближеними до фактичних значень динамічного ряду [3].

Прогнозування часових рядів доцільно починати з побудови графіку досліджуваного показника [2]. Однак в ньому не завжди прослідковується наявність тренду. Тому в цих випадках необхідно з'ясувати, чи існує тенденція в даному часовому ряді або вона взагалі відсутня. З цією метою розглянемо критерій «*висхідних та низхідних*» *серій*, згідно з яким тенденція визначається за наступним алгоритмом.

1. Для досліджуваного часового ряду визначається послідовність знаків, виходячи із умов

$$\delta_t = \begin{cases} +, & \text{якщо } y_t - y_{t-1} > 0; \\ -, & \text{якщо } y_t - y_{t-1} < 0. \end{cases}$$

При цьому якщо наступне спостереження дорівнює попередньому, то враховується лише одне спостереження.

2. Підраховується кількість серій $v(n)$. Під *серією* розуміють послідовність розташованих поспіль плюсів або мінусів, причому один плюс або один мінус вважається серією.

3. Визначається довжина самої довгої серії $l_{\max}(n)$.

4. За наступною таблицею знаходиться значення $l^{\text{кр}}(n)$.

Довжина ряду n	$n \leq 26$	$26 < n \leq 153$	$153 < n \leq 170$
Значення $l^{\text{кр}}(n)$	5	6	7

5. Якщо порушується хоча б одна із наступних нерівностей, то гіпотеза про відсутність тренду відкидається з довірчою ймовірністю 0,95:

$$\begin{cases} v(n) > \left\lfloor \frac{2n-1}{3} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right\rfloor, \\ l_{\max}(n) \leq l(n). \end{cases}$$

Квадратні дужки в цій системі нерівностей означають цілу частку числа.

Приклад 8.5. Заданий динамічний ряд щоквартального випуску продукції підприємства (в грош. од.).

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21

За допомогою критерію «висхідних та низхідних» серій зробити висновок про наявність або відсутність тренду. Довірчу ймовірність прийняти рівною 0,95.

Розв'язання. Визначимо послідовність знаків для відшукування довжини найдовшої серії.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y_t	10	14	7	16	15	17	16	20	17	7	15	16	20	14	19	21
δ_t		+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	+	+	-	+	+

Загальна кількість серій дорівнює $v(n) = 11$:

$$\begin{aligned}
 v_1(n) &= \{y_2\}, & l_1(n) &= 1; \\
 v_2(n) &= \{y_3\}, & l_2(n) &= 1; \\
 v_3(n) &= \{y_4\}, & l_3(n) &= 1; \\
 v_4(n) &= \{y_5\}, & l_4(n) &= 1; \\
 v_5(n) &= \{y_6\}, & l_5(n) &= 1; \\
 v_6(n) &= \{y_7\}, & l_6(n) &= 1; \\
 v_7(n) &= \{y_8\}, & l_7(n) &= 1; \\
 v_8(n) &= \{y_9, y_{10}\}, & l_8(n) &= 2; \\
 v_9(n) &= \{y_{11}, y_{12}, y_{13}\}, & l_9(n) &= 3; \\
 v_{10}(n) &= \{y_{14}\}, & l_{10}(n) &= 1; \\
 v_{11}(n) &= \{y_{15}, y_{16}\}, & l_{11}(n) &= 2.
 \end{aligned}$$

Наведені розрахунки показують, що довжина найбільш довгої серії дорівнює

$$l_{max}(n) = l_9(n) = 3.$$

Із таблиці критичних значень для $l_{max}(n) = 3$ знаходимо значення $l^{кр}(n) = 5$.

Перевіримо тепер виконання системи нерівностей для отриманих результатів:

$$\begin{cases} 11 > \left[\frac{2n-1}{3} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right] \\ 3 \leq 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 > 7, \\ 3 \leq 5. \end{cases}$$

Є очевидним, що обидві нерівності виконуються. Отже, тренд в динаміці випуску продукції підприємством відсутній з ймовірністю **0,95**.

Відповідь. З ймовірністю **95 %** в динаміці випуску продукції на розглянутому підприємстві тренд відсутній.

8.5. Типи тенденцій динаміки та їх застосування

Лінійна форма тренду використовується у випадках, коли абсолютні прирости є більш-менш сталими, тобто коли рівні динамічного ряду змінюються в арифметичній прогресії або наближаються до неї. Рівняння згладженої прямої динамічного ряду при цьому має вигляд:

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 t,$$

де $\hat{Y}_t$ – рівні, звільнені від коливань, вирівняні по прямій;

t – час;

a_0 – початковий рівень тренду в момент або період, прийнятий за початок відліку часу t ;

a_1 – середньорічний абсолютний приріст (середня зміна за одиницю часу), він є константою тренду.

Для відшукування параметрів a_0 і a_1 треба розв'язати методом найменших квадратів систему нормальних рівнянь [3]:

$$\begin{cases} \sum Y = na_0 + a_1 \sum t, \\ \sum Yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2, \end{cases}$$

де Y – фактичні рівні динамічного ряду;

n – кількість членів ряду динаміки.

Дану систему нормальних рівнянь можна легко спростити, якщо відлік часу брати з середини ряду в такий спосіб, щоб сума часу дорівнювала нулю: $\sum t = 0$.

При непарній кількості рівнів серединну точку приймають за нуль. Тоді попередні періоди позначаються відповідно $-1, -2, -3$ тощо, а наступні за серединним періодом – відповідно $+1, +2, +3$ тощо. При парній кількості рівнів динамічного ряду два серединних моменти часу позначають через -1 і $+1$, а решту – двома інтервалами, тобто періоди, що передують середині, – як $-3, -5, -7$ тощо, а наступні за серединою періоди – як $+3, +5, +7$ тощо. У випадку відліку часу від середини ряду, коли $\sum t = 0$, система рівнянь для відшукування параметрів a_0 і a_1 має вигляд:

$$\begin{cases} \sum Y = na_0, \\ \sum Yt = a_1 \sum t^2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sum Y}{n}, \\ a_1 = \frac{\sum Yt}{\sum t^2}. \end{cases}$$

Лінійний тренд добре відображає тенденцію змін при дії множини різноманітних чинників, що змінюються в різні способи за різними закономірностями. Рівнодіюча цих чинників при взаємному погашенні особливостей окремих чинників (прискорення, уповільнення, нелінійність) часто виражається в приблизно постійній абсолютній швидкості зміни, тобто в прямолінійному тренді [5].

Застосування **гіперболічної форми тренду** є доцільним у випадку, коли с плинном часу ряд динаміки зростає або падає до певної межі. Рівняння гіперболи відповідає формулі

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 \frac{1}{t}.$$

Для відшукування параметрів a_0 і a_1 в даному рівнянні методом найменших квадратів використовують систему нормальних рівнянь [4]:

$$\begin{cases} \sum Y = na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t}, \\ \sum \frac{1}{t} Y = a_0 \sum \frac{1}{t} + a_1 \sum \frac{1}{t^2}. \end{cases}$$

Якщо добитися, щоб $\sum t = 0$, тоді параметри a_0 і a_1 можна знайти із нової системи рівнянь:

$$\begin{cases} \sum Y = na_0, \\ \sum \frac{1}{t} Y = a_1 \sum \frac{1}{t^2}, \end{cases}$$

Перетворивши цю систему в логарифмічну, отримуємо:

$$\begin{cases} \sum \lg Y = n \lg a_0, \\ \sum t \lg Y = \lg a_1 \sum t^2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \lg a_0 = \frac{\sum \lg Y}{n}, \\ \lg a_1 = \frac{\sum t \lg Y}{\sum t^2}. \end{cases}$$

Параболічна форма тренду має вигляд

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

де a_2 – квадратичний параметр, що дорівнює половині прискорення; він є константою параболічного тренду.

Параметри a_0 , a_1 і a_2 визначають методом найменших квадратів, для чого складають та розв’язують систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum Y = n a_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2, \\ \sum Yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3, \\ \sum Yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

Якщо добитися, щоб $\sum t = 0$, тоді й $\sum t^3 = 0$. Таким чином, система спрощується:

$$\begin{cases} \sum Y = n a_0 + a_2 \sum t^2, \\ \sum Yt = a_1 \sum t^2, \\ \sum Yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

Із цієї системи випливає, що

$$a_1 = \frac{\sum Yt}{\sum t^2},$$

а параметри a_0 і a_2 визначають шляхом розв’язання системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \sum Y = n a_0 + a_2 \sum t^2, \\ \sum Yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

Параметри рівняння параболи другого порядку слід інтерпретувати наступним чином [3]:

a_0 – це величина, що відображає середні умови виникнення рівнів ряду;

a_1 – швидкість розвитку даних динамічного ряду;

a_2 – характеризує прискорення (уповільнення) цього розвитку.

Параболічна форма тренду виражає прискорену або уповільнену зміну рівнів ряду з постійним прискоренням. Такий характер розвитку можна очікувати за наявності важливих чинників прогресу.

сивного розвитку. Прискорене зростання може відбуватися в період після зняття якихось стримуючих розвиток перепон. Параболічна форма тренду з від'ємним прискоренням ($a_2 < 0$) призводить з часом не лише до припинення зростання рівня, але й до його зниження зі все більшою швидкістю [7].

Показову форму тренду застосовують у випадках, коли динамічний ряд розвивається за геометричною прогресією, тобто коли ланцюгові темпи зростання є більш-менш сталими. Показову функцію, яку використовують для згладжування динамічного ряду, описує рівняння

$$\hat{Y}_t = a_0 a_1^t.$$

Для відшукування параметрів a_0 і a_1 в даному рівнянні методом найменших квадратів попередньо логарифмують рівні, потім логарифми показової функції описують лінійною функцією [3]:

$$\lg \hat{Y}_t = \lg a_0 + t \lg a_1.$$

Система нормальних рівнянь в даному випадку має вигляд:

$$\begin{cases} \sum \lg Y = n \lg a_0 + \lg a_1 \sum t, \\ \sum t \lg Y = \lg a_0 \sum t + \lg a_1 \sum t^2. \end{cases}$$

Якщо $\sum t = 0$, тоді

$$\begin{cases} \sum \lg Y = n \lg a_0, \\ \sum t \lg Y = \lg a_1 \sum t^2, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \lg a_0 = \frac{\sum \lg Y}{n}, \\ \lg a_1 = \frac{\sum t \lg Y}{\sum t^2}. \end{cases}$$

Параметр a_1 є константою тренду і характеризує темп зміни в разях. Якщо $a_1 > 1$, то такий тренд виражає тенденцію прискореного і прискореного зі все більшою швидкістю зростання рівнів. Є очевидним, що зростання будь-якого об'єкту за показовим законом може тривати лише невеликий історичний проміжок часу, тому що ресурси для будь-якого процесу розвитку завжди мають обмеження. При $a_1 < 1$ показовий тренд означає тенденцію постійно все більш уповільненого зниження рівнів динамічного ряду [7].

Логістична форма тренду має вигляд:

$$\hat{Y}_t = \frac{y_{max} - y_{min}}{e^{a+br} + 1} + y_{min},$$

де e – основа натуральних логарифмів;

y_{min}, y_{max} – мінімальне та максимальне із можливих значень рівня;

a, b – параметри тренду.

Логістична крива має S-образну форму. Вона має два перегини: від зростання, що прискорюється, до рівномірного зростання (увігнутість) і від рівномірного зростання періоду до зростання, що уповільнюється (опуклість). Вона відповідає відображенню розвитку протягом тривалого періоду, що проходить всі фази, наприклад, процесу насичення споживача якимось новим товаром.

Ступенева форма тренду виражається кривою

$$\hat{Y}_t = at^b,$$

де b – константа тренду. При $b = 1$ маємо лінійний тренд, при $b = 2$ – параболічний тощо. Ступенева форма – гнучка, придатна для відображення змін з різною мірою пропорційності змін в часі. Жорсткою умовою є обов’язкове проходження через початок координат: при $t = 0$ також і $\hat{Y}_t = 0$. Можна ускладнити формулу тренду:

$$\hat{Y}_t = a + t^b$$

або

$$\hat{Y}_t = a + c t^b,$$

але ці рівняння неможна логарифмувати, складно обчислювати його параметри, і вони вкрай рідко застосовуються.

Згладжування рядів динаміки використовують також для виявлення членів ряду, про які немає даних. **Інтерполяцією** в статистиці називають відшукування показника всередині ряду динаміки, про який дані відсутні. Інтерполяція ґрунтується на припущенні, що за відомими даними можна визначити характер розвитку явища в цілому. **Екстраполяцією** в статистиці називають відшукування невідомих рівнів в кінці або на початку динамічного ряду. Цей прийом полягає в тому, що за знайденими математичними рівняннями передбачають попередній або майбутній розвиток явищ. Як інтерполяція, так і екстраполяція ґрунтуються на припущенні, що наявні величини повністю в достатній мірі визначають темп зростання досліджуваного явища і, як наслідок, його можна розповсюджувати на невідомі рівні динамічного ряду [3].

Прогнозні значення досліджуваного показника визначають шляхом підстановки в рівняння тренду часу t , що відповідає періоду упередження. Отриманий прогноз називається **точковим**. В доповнення до точкового прогнозу можна визначити границі можливої зміни показника, який прогнозується, тобто обчислити **інтервальний прогноз** [2].

8.6. Прості методи згладжування даних

Найважливіша передумова будь-якого методу згладжування полягає у використанні останніх даних ряду, тому що інформація має властивість застарівати, причому чим ближчими є дані до інтервалу прогнозу, тим їх вага (або значущість) для прогнозу має бути більшою.

8.6.1. Метод експоненціального згладжування з одним параметром

При використанні цього методу прогнозне значення y_{t+1}^* в момент часу $t+1$ є сумою фактичного значення показника y_t та прогнозного значення y_t^* в момент часу t . Іншими словами [8],

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + (1 - \alpha) y_t^*, \quad (8.1)$$

де α – параметр згладжування, що визначає значення ваги, яку має останнє спостереження при обчисленні прогнозу на один крок, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Визначення параметру згладжування має велике значення для функціонування моделі (8.1). Існують наступні **рекомендації щодо вибору цього параметру**:

- якщо в моделі найбільш значущим є саме останнє спостереження, то рекомендується призначити більше значення для α . У випадку $\alpha = 1$ прогнозне значення буде дорівнювати фактичному за попередній період;

- якщо існує практично повна довіра до всіх даних часового ряду та ігнорування значущості останнього спостереження, то α є близьким до нуля;
- якщо досліджуваний показник характеризується низьким рівнем випадкових впливів, але схильний до рідких та значних за величиною стрибків, то слід обирати відносно високе значення α ($\alpha \approx 0,5$).

Модель (8.1) називається **однопараметричною моделлю Брауна**, значення параметру α в якій має підбиратися шляхом послідовних приближень. Процедура підбору зводиться до пошуку такого значення α , що забезпечує найменшу похибку – середньоквадратичне відхилення [17]:

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-m} \sum_{t=2}^n (y_t - y_t^*)^2}, \quad (8.2)$$

де n – кількість періодів часу, які враховуються (можна прийняти як кількість даних вхідного ряду);

m – кількість параметрів показового згладжування (модель (8.1) є однопараметричною, тому $m = 1$).

Для прогнозування з використанням цієї моделі крім вибору параметру α важливо задати початкову умову (або початкове припущення). Існує декілька способів визначення початкової умови. По-перше, найчастіше передбачається, що початкова умова дорівнює фактичному значенню показника при $t = 1$. Цей спосіб доступний при кількості вхідних даних $N \geq 2$. По-друге, в якості початкової умови обирається середнє арифметичне значення, розраховане за всіма доступними на момент початку прогнозування даними. По-третє, при великому обсязі даних в якості початкової умови використовується середнє значення декількох спостережень (наприклад, першої третини наявних даних), які в подальшому не будуть брати участі в моделі прогнозування (8.1).

Слід мати на увазі, що експоненціальне згладжування не є вдалим методом прогнозування для монотонно зростаючих або убутних статистичних даних. В першому випадку модель (8.1) дає завжди занижений, а в другому – завищений прогноз. Метод можна скоригувати, додавши в нього напрямок зміни значень показника, що прогнозується. Такий метод називається **методом Хольта** або **експоненціальним згладжуванням з урахуванням тренду**. Модель (8.1) також не може дати задовільний прогноз, якщо вхідні дані схильні до сезонних змін. В цьому випадку потрібні спеціальні методи прогнозування [8].

Приклад 8.6. Задано два цикли реалізації наявних запасів. Для кожного циклу задано величину витрат за день та інтегральні характеристики.

1-й цикл			2-й цикл		
День t	Попит, од. (y_t)	Всього з початку циклу	День t	Попит, од. (y_t)	Всього з початку циклу
1	9	9	11	5	5
2	2	11	12	5	10
3	1	12	13	4	14
4	3	15	14	3	17
5	7	22	15	4	21
6	5	27	16	1	22
7	4	31	17	2	24
8	8	39	18	8	32
9	6	45	19	3	35
10	5	50	20	4	39

Методом експоненціального згладжування обчислити прогнозне значення реалізації продукції на 6-й день 1-го і на 6-й день 2-го циклів.

Розв'язання. Скористаємось значеннями попиту на продукцію за перші 5 днів 1-го циклу реалізації товарних запасів. В першому приближенні приймемо $\alpha = 0,4$. В якості початкової умови оберемо значення попиту в перший день $y_1^* = 9$ од. Виконаємо прогноз при $t = 1$, підставивши в формулу (8.1) потрібні значення показника та початкову умову:

$$y_{1+1}^* = y_2^* = 0,4 \cdot y_1 + (1 - 0,4) \cdot y_1^* = 0,4 \cdot 9 + (1 - 0,4) \cdot 9 = 9 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на другий період дорівнює початковій умові. Фактичне значення для другого періоду $y_2 = 2$. За формулою (8.1) визначимо значення експоненціальної середньої для $t = 2$:

$$y_{2+1}^* = y_3^* = 0,4 \cdot y_2 + (1 - 0,4) \cdot y_2^* = 0,4 \cdot 2 + (1 - 0,4) \cdot 9 = 6,2 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на третій день складає 6,2 одиниць продукції.

Експоненціальна середня при $t = 3$ дорівнює

$$y_{3+1}^* = y_4^* = 0,4 \cdot y_3 + (1 - 0,4) \cdot y_3^* = 0,4 \cdot 1 + (1 - 0,4) \cdot 6,2 = 4,12 \text{ (од.)} ,$$

тобто прогноз на четвертий день складає 4,12 одиниць продукції.

Експоненціальна середня при $t = 4$ дорівнює

$$y_{4+1}^* = y_5^* = 0,4 \cdot y_4 + (1 - 0,4) \cdot y_4^* = 0,4 \cdot 3 + (1 - 0,4) \cdot 4,12 = 3,67 \text{ (од.)} ,$$

тобто прогноз на п'ятий день складає 3,67 одиниць продукції.

Експоненціальна середня при $t = 5$ дорівнює

$$y_{5+1}^* = y_6^* = 0,4 \cdot y_5 + (1 - 0,4) \cdot y_5^* = 0,4 \cdot 7 + (1 - 0,4) \cdot 3,67 = 5,00 \text{ (од.)} .$$

тобто шуканий прогноз на шостий день складає 5,00 одиниць продукції.

Визначимо помилку прогнозу за формулою (8.2), тобто як середньоквадратичне відхилення:

$$s_y = \sqrt{\frac{(2 - 9)^2 + (1 - 6,2)^2 + (3 - 4,12)^2 + (7 - 3,67)^2}{5 - 1}} = 4,7 .$$

Знайдемо інтервальний прогноз за формулою

$$(y_n, y_v) = y_{t+1}^* \pm s \cdot t_{01} , \quad (8.3)$$

де y_{t+1}^* – відповідна експоненціальна середня,

s_y – середньоквадратичне відхилення (помилка прогнозу),

y_n, y_v – відповідно нижня та верхня границі прогнозу,

t_{10} – значення критерію Стюдента для рівня значимості 10 % та числа ступенів свободи $f = n - m$, визначене за таблицею 1.4 [38].

Нехай рівень значимості дорівнює 0,1, тобто 10 %. Тоді, згідно з формулою (8.3), маємо:

$$y_n = 5 - 4,7 \cdot 2,132 = -5,02 \text{ (од.)} ,$$

$$y_v = 5 + 4,7 \cdot 2,132 = 11,83 \approx 12 \text{ (од.)} .$$

Отримана нижня границя прогнозу $y_n < 0$, що не має економічного змісту. Тому приймемо нижню границю прогнозу за $y_n = 0$.

Таким чином, методом експоненціального згладжування отриманий прогноз на шостий день 1-го циклу реалізації товарних запасів: середнє значення попиту складає 5 од., помилка прогнозу 4,7 од., з ймовірністю 90 % очікується попит в інтервалі від 0 до 12 од.

Розглянемо тепер **2-й цикл** даних та знайдемо прогноз на шостий день цього циклу методом експоненціального згладжування при тому ж самому параметрі $\alpha = 0,4$ та початкових умовах, що дорівнюють попиту а перший день, тобто $y_{11}^* = 5$ одиниць продукції. Виконаємо прогноз на другий день 2-го циклу:

$$y_{11+1}^* = y_{12}^* = 0,4 \cdot y_{11} + (1 - 0,4) \cdot y_{11}^* = 0,4 \cdot 5 + (1 - 0,4) \cdot 5 = 5 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на другий день 2-го циклу дорівнює початковій умові. Фактичне значення для другого дня складає $y_{12} = 5$. Виконаємо прогноз на третій день цього циклу, обчисливши експоненціальну середню при $t = 2$:

$$y_{12+1}^* = y_{13}^* = 0,4 \cdot y_{12} + (1 - 0,4) \cdot y_{12}^* = 0,4 \cdot 5 + (1 - 0,4) \cdot 5 = 5 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на третій день 2-го циклу також дорівнює 5 одиниць продукції. Фактичне значення для третього дня складає $y_{13} = 4$. Виконаємо прогноз на четвертий день цього циклу, обчисливши експоненціальну середню при $t = 3$:

$$y_{13+1}^* = y_{14}^* = 0,4 \cdot y_{13} + (1 - 0,4) \cdot y_{13}^* = 0,4 \cdot 4 + (1 - 0,4) \cdot 5 = 4,6 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на четвертий день 2-го циклу дорівнює 4,6 одиниць продукції. Фактичне значення для четвертого дня складає $y_{14} = 3$. Виконаємо прогноз на п'ятий день цього циклу, обчисливши експоненціальну середню при $t = 4$:

$$y_{14+1}^* = y_{15}^* = 0,4 \cdot y_{14} + (1 - 0,4) \cdot y_{14}^* = 0,4 \cdot 3 + (1 - 0,4) \cdot 4,6 = 3,96 \text{ (од.)} .$$

Таким чином, прогноз на п'ятий день 2-го циклу дорівнює 3,96 одиниць продукції. Фактичне значення для п'ятого дня складає $y_{15} = 4$. Виконаємо прогноз на шостий день цього циклу, обчисливши експоненціальну середню при $t = 5$:

$$y_{15+1}^* = y_{16}^* = 0,4 \cdot y_{15} + (1 - 0,4) \cdot y_{15}^* = 0,4 \cdot 4 + (1 - 0,4) \cdot 3,96 = 3,976 \text{ (од.)} .$$

Результати прогнозування подано у наступній таблиці.

День t	Попит, од. (y_t)	Експоненціальна середня	Прогноз (y_t^*)	$(y_t - y_t^*)^2$
1 (21)	5	Початкова умова 5		
2 (22)	5	5	5	0
3 (23)	4	4,6	5	1
4 (24)	3	3,96	4,6	2,56
5 (25)	4	3,976	3,96	0,0016
6 (26)			3,976	—
Разом				3,5616

Отже, прогнозне значення попиту на шостий день очікується в середньому на рівні $3,976 \approx 4$ одиниці продукції. Розрахуємо помилку прогнозу як середньоквадратичне відхилення за формулою (8.2):

$$s_y = \sqrt{\frac{(5 - 5)^2 + (5 - 4)^2 + (4,6 - 3)^2 + (3,96 - 4)^2}{5 - 1}} = 0,94 .$$

Інтервальний прогноз для рівня значимості 0,1 (10 %) буде наступним:

$$y_H = 3,976 - 0,94 \cdot 2,132 = 1,97 \approx 2 \text{ (од.)} ,$$

$$y_B = 3,976 + 0,94 \cdot 2,132 = 5,98 \approx 6 \text{ (од.)}.$$

Таким чином, з ймовірністю **0,9** (90 %) прогнозне значення реалізації товарних запасів у шостий день 2-го циклу буде знаходитися в інтервалі від **2** до **6** одиниць продукції. Прогноз отриманий з невеликою помилкою та достатньо вузьким довірчим інтервалом.

Фактичний попит в шостий день 2-го циклу склав **1** одиницю продукції, тобто вийшов за межі прогнозу. Це відбулося через стохастичність попиту, яку не вдається точно передбачити. Обрана надійність прогнозу на рівні **0,9** означає, що ймовірність непопадання фактичного значення в розрахунковий інтервал прогнозу (рівень значимості) дорівнює **0,1**, тобто 10 %. Якщо необхідно збільшити надійність прогнозу, можна знайти інтервальний прогноз з ймовірністю **0,95** (95 %), тобто рівнем значимості **0,05** (5 %). За допомогою таблиці для критерію Стьюдента [38] відшукується його значення для рівня значимості **0,05** та числа ступенів свободи $f = 5 - 1 = 4$: $t_{05} = 2,776$. В цьому випадку інтервальний прогноз складе:

$$y_H = 3,976 - 0,94 \cdot 2,776 = 1,36 \approx 1 \text{ (од.)},$$

$$y_B = 3,976 + 0,94 \cdot 2,776 = 6,59 \approx 7 \text{ (од.)}.$$

Як можна побачити із отриманих розрахунків, при збільшенні надійності прогнозних оцінок ширина довірчого інтервалу також збільшується.

Відповідь. Методом експоненціального згладжування з одним параметром отриманий прогноз на шостий день 1-го циклу реалізації товарних запасів: середнє значення попиту складає 5 одиниць продукції, помилка прогнозу **4,7**, з ймовірністю 90 % очікується попит в інтервалі від **0** до **12** одиниць продукції. Методом експоненціального згладжування з одним параметром прогноз на шостий день 2-го циклу реалізації товарних запасів: середнє значення попиту складає 4 одиниці продукції, помилка прогнозу **0,94**, з ймовірністю 90 % очікується попит в інтервалі від **2** до **6** та з ймовірністю 95 % в інтервалі від **1** до **7** одиниць продукції.

8.6.2. Метод ковзної середньої за m вузлами

В цьому методі середнє значення фіксованої кількості m останніх спостережень використовується для оцінки наступного значення показника. Наприклад, якщо $m = 4$ та існує 12 фактичних значень, то прогноз на 13-й період буде визначений як [8]

$$y_{13}^* = \frac{y_{12} + y_{11} + y_{10} + y_9}{4}.$$

В загальному випадку формула ковзної середньої за m вузлами має вигляд:

$$y_{t+1}^* = \frac{y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-m+1}}{m}. \quad (8.4)$$

Недоліками методу простої ковзної середньої є наступне:

- при обчисленні середнього значення всі m значень мають однакову вагу, що дорівнює $\frac{1}{m}$, тобто останнє значення бере участь у прогнозі так само, як і попередні. Це суперечить інтуїтивному уявленню, що останні дані мають більший вплив на величину прогнозу;
- модель (8.4) не дає точного прогнозу, якщо дані монотонно зростають або убують. Цей метод краще придатний для ряду з невеликими випадковими відхиленнями даних від деякого постійного значення або від значення, яке змінюється повільно;

- метод передбачає велику кількість проміжних обчислень, що є проблемою, якщо потрібно виконати прогноз за великою кількістю найменувань продукції. Наприклад, при прогнозуванні на основі ковзної середньої за чотирма вузлами для 10 тисяч найменувань потрібно розрахувати та зберігати 40 тисяч значень даних.

8.6.3. Метод зваженої ковзної середньої

Цей метод усуває перший із перелічених недоліків. Із назви методу стає очевидним, що дані, які використовуються для розрахунків середнього значення, беруться з різними важелями. Наприклад, при $m = 4$ зважене середнє значення на 13-й період буде дорівнювати

$$y_{13}^* = a_0 y_{12} + a_1 y_{11} + a_2 y_{10} + a_3 y_9 ,$$

де a_0, a_1, a_2, a_3 – важелі (невід’ємні числа), що обираються виходячи із умов, що їхня сума дорівнює одиниці, а більш ранні дані мають меншу вагу ($a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3$).

Оскільки існує нескінченна кількість наборів значень важелів, що задовольняють вказаній умові, найкращим набором вагових коефіцієнтів слід вважати такий, який дає найменше середньоквадратичне відхилення прогнозних (розрахункових) даних від фактичних. Для розрахунку помилки прогнозу, виконаного методом ковзної середньої, можна використовувати формулу середньоквадратичного відхилення (8.2).

Приклад 8.7. В умовах прикладу 8.6 зробити прогноз реалізації товарних запасів на 6-й день 1-го циклу реалізації методом зваженої ковзної середньої.

Розв’язання. Враховуючи невелику кількість даних, встановимо розряд ковзної середньої $m = 3$. За формулою (8.4) визначимо прогноз на 6-й день:

$$y_6^* = \frac{1 + 3 + 7}{3} = 3,67 \approx 4 \text{ (од.)}.$$

Для визначення помилки прогнозу розраховуємо за формулою (8.4) проміжні значення. Для $t = 4$ і для $t = 5$:

$$y_4^* = \frac{9 + 2 + 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ (од.)} ,$$

$$y_5^* = \frac{2 + 1 + 3}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ (од.)} .$$

Далі помилку прогнозу визначаємо за формулою (8.2):

$$s_y = \sqrt{\frac{(3 - 4)^2 + (7 - 2)^2}{5 - 3}} = 3,61 .$$

Інтервальний прогноз при цьому для рівня значимості **0,1** (10 %) та числа ступенів свободи $f = n - m = 5 - 3 = 2$ буде наступним:

$$y_n = 3,67 - 3,61 \cdot 2,92 = -6,87 \text{ (од.)} ,$$

$$y_b = 3,67 + 3,61 \cdot 2,92 = 14,21 \approx 14 \text{ (од.)} .$$

Отримана нижня границя прогнозу $y_n < 0$, що з економічної точки зору не має сенсу. Тому приймемо нижню границю прогнозу за $y_n = 0$. Як можна побачити із результатів, прогнозна оцінка є дуже невизначеною.

Відповідь. Методом зваженої ковзної середньої отриманий прогноз на шостий день 1-го циклу реалізації товарних запасів: середнє значення попиту складає **4** одиниці продукції, помилка прогнозу **3,61**, з ймовірністю 90 % очікується попит в інтервалі від **0** до **14** одиниць продукції.

8.7. Метод екстраполяції тренду

Суть методу екстраполяції тренду [8] полягає в тому, що закономірність, що діє всередині аналізованого часового ряду, що виступає за базу для прогнозування, зберігається й на період прогнозу. Прогнозування в цьому випадку можна звести до підбору аналітично виражених моделей трендів типу $y = f(t)$ за даними періоду, що передує прогнозованому періоду, та екстраполяції отриманих трендів на інтервал прогнозу.

Розрахункова формула для отримання прогнозу може бути записана в адитивному та мультиплікативному вигляді. Розглянемо простий варіант, коли ці моделі містять лише складові u_t і e_t , тобто тренд та випадкові коливання. Процедuru прогнозування в цьому випадку можна подати у вигляді наступної послідовності.

Перший етап. Підбір залежності для описання рівняння тренду. Якщо модель тренду є лінійною, то розрахунок коефіцієнтів рівняння здійснюється за формулами наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\sum y_i \sum t_i^2 - \sum t_i \sum y_i t_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}, \\ a_1 = \frac{n \sum y_i t_i - \sum y_i \sum t_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Другий етап. Продовження отриманого тренду за інтервал значень, за якими будувалася залежність, або визначення точкового прогнозу. Для отримання значення прогнозу на t -й рік до рівняння тренду підставляють конкретні значення t . При цьому важливо пам'ятати про співвідношення довжини періоду, що передує прогнозу, та періоду безпосередньо прогнозу. Їх співвідношення має бути не меншим, ніж **3:1**.

Третій етап. Розрахунок помилки прогнозу. Тренд характеризує лише середній рівень ряду на кожний момент часу, в тому числі й на прогнозний період. Окремі спостереження в минулому (на інтервалі спостереження) відхиляються від лінії тренду. Це надає право припускати, що й в майбутньому слід очікувати таких відхилень. Це означає, що прогноз містить похибку, яка крім коливань значень від середнього рівня пояснюється ще й наявністю невизначеності при визначенні параметрів моделі тренду, тому що їх оцінювання здійснюється на основі обмеженої сукупності даних. Помилку прогнозу можна оцінити за середньоквадратичним відхиленням, обчисленим за формулою (8.2). При цьому число ступенів свободи $f = n - m$ визначається в залежності від кількості спостережень (n) та кількості оцінюваних параметрів (m); для лінійного тренду $m = 2$, для параболи другого ступеня $m = 3$ тощо.

Помилка прогнозу відображається у вигляді довірчого інтервалу, за допомогою якого точковий прогноз перетворюється в інтервальний.

Четвертий етап. Визначення інтервалу прогнозу. Довірчий інтервал прогнозу за невеликої кількості спостережень та за припущення про нормальний розподіл прогнозних оцінок визначається в наступний спосіб:

$$(y_n, y_v) = \bar{y}_t \pm t_\alpha s_y,$$

де t_α – табличне значення критерію Ст'юдента з f ступенями свободи та рівнем значимості α .

На рис. 8.2 показано довірчий інтервал прогнозу, розрахований за цією формулою, у вигляді двох паралельних прямих. Однак, помилка прогнозу зростає при збільшенні періоду упередження, тому що тренд виявлений на основі даних, охоплених періодом спостереження, і чим далі від цього періоду, тим більша ймовірність помилкового судження. На рис. 8.2 збільшення помилки прогнозу, і, як наслідок, довірчого інтервалу прогнозу, показано у вигляді розбіжних ліній [8].

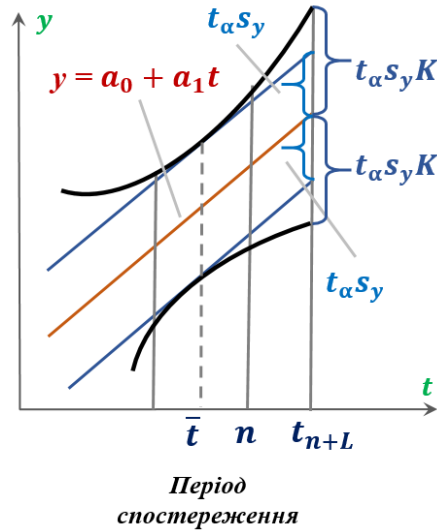


Рис. 8.2 – Довірчі інтервали прогнозу для лінійного тренду

При визначенні інтервального прогнозу середньоквадратичне відхилення, обчислене за формулою (8.2), помножують на коефіцієнт K :

$$K = \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2}}, \quad (8.6)$$

де t_L – час, для якого робиться екстраполяція, тобто $t_L = n + L$;

$\bar{t}$ – середнє значення порядкового номеру рівня, $\bar{t} = \frac{n+1}{2}$.

Оскільки величини, що характеризують різниці $(t - \bar{t})$, є членами ряду з рівновіддаленими елементами (наприклад, в ряді з непарною кількістю рівнів ці різниці дорівнюють ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...), сума квадратів цих відхилень розраховується за формулою:

$$\sum (t - \bar{t})^2 = \frac{n(n^2 - 1)}{2}. \quad (8.7)$$

Величина $(t - \bar{t})$ характеризує відстань від середини динамічного ряду до точки прогнозу. Отже,

$$t_L - \bar{t} = n + L - \frac{n+1}{2} = \frac{n+2L-1}{2}. \quad (8.8)$$

Підставляючи вирази (8.7) і (8.8) до виразу (8.6), отримуємо:

$$K = \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}.$$

Як можна побачити із цього виразу, K залежить від тривалості спостереження n та від періоду упередження L . Отже, формулу для визначення *довірчого інтервалу прогнозу* можна записати у вигляді

$$(y_n, y_b) = \bar{y}_t \pm t_{\alpha} s_y K.$$

Метод найменших квадратів є достатньо простим та легко реалізується програмно. До недоліків МНК можна віднести наступне. По-перше, модель тренду жорстко фіксується і за допомогою МНК можна отримати достовірний прогноз на невеликий період упередження. По-друге, МНК дуже просто реалізується лише для лінійних залежностей і нелінійних функцій, що приводяться до лінійного вигляду [8].

Приклад 8.8. Для 1-го циклу реалізації товарних запасів в умовах прикладу 8.6 розрахувати середній час витрати поточного запасу $\bar{t}$ та розмір страхового запасу y_c .

Розв'язання. Розглянемо трендову модель прогнозу, яка дозволяє дати прогноз як на один, так і на декілька кроків, якщо є потреба швидко реагувати та вносити зміни в систему постачань. Припустимо, що як і в попередніх прикладах, відомі витрати продукції зі складу за перші п'ять днів. Оберемо рівняння тренду у вигляді лінійної залежності

$$y_t^* = a_0 + a_1 t.$$

Розрахунок коефіцієнтів a_0 і a_1 здійснюється за формулами системи рівнянь (8.5). Для обчислення значення сум, вказаних в цій системі, складемо розрахункову таблицю.

День (t_i)	Залишок на складі, од. (y_i)	t_i^2	$y_i t_i$	Прогноз ($y_{t_i}^*$)	$(y_{t_i}^* - y_i)^2$
1	50 - 9 = 41	1	41	45,2 - 3·1 = 42,2	1,44
2	41 - 2 = 39	4	78	45,2 - 3·2 = 39,2	0,04
3	39 - 1 = 38	9	114	45,2 - 3·3 = 36,2	3,24
4	38 - 3 = 35	16	140	45,2 - 3·4 = 33,2	3,24
5	35 - 7 = 28	25	140	45,2 - 3·5 = 30,2	4,84
$\sum t_i = 15$	$\sum y_i = 181$	$\sum t_i^2 = 55$	$\sum y_i t_i = 513$		$\sum (y_{t_i}^* - y_i)^2 = 12,8$

Перші чотири стовпці цієї таблиці дозволяють обчислити коефіцієнти a_0 і a_1 для $n = 5$:

$$a_0 = \frac{181 \cdot 55 - 15 \cdot 513}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{2260}{50} = 45,2;$$

$$a_1 = \frac{5 \cdot 513 - 181 \cdot 15}{5 \cdot 55 - 15^2} = \frac{-150}{50} = -3.$$

Таким чином, рівняння прогнозу набуває вигляду:

$$y_t^* = 45,2 - 3t.$$

За допомогою цього рівняння заповнюються решта стовпці розрахункової таблиці, які дозволяють обчислити середньоквадратичне відхилення за формулою (8.2):

$$s_y = \sqrt{\frac{12,8}{5 - 2}} = 2,066 \approx 2.$$

Розрахунок прогнозної величини середнього часу витрати здійснюється, виходячи із отриманого значення прогнозу. Приймавши $y_t^* = 0$, отримуємо:

$$\bar{t} = \frac{-a_0}{a_1} = \frac{-45,2}{-3} = 15,07 \approx 15 \text{ (дн.)}.$$

Для розрахунку страхового запасу використовується формула [8]

$$y_c = s_y d_\beta,$$

де d_β – параметр нормального закону розподілу, що відповідає довірчій ймовірності β (таблиця 1.2).

Параметр d_β визначає для нормального закону розподілу кількість середньоквадратичних відхилень, які треба відкласти від центру розсіювання (вліво та вправо) для того, щоб ймовірність попадання в отриману ділянку дорівнювала β . В розглянутому прикладі довірчі інтервали відкладаються вгору та вниз (рис. 8.2) від середнього значення y_t . В розглянутому прикладі для довірчої ймовірності $\beta = 0,9$ (90%) за таблицею 1.2 значень d_β знаходимо $d_\beta = 1,645$. Отже, страховий запас продукції на складі буде дорівнювати

$$y_c = 2 \cdot 1,645 = 2,9 \approx 3 \text{ (од.)}.$$

Однак розраховане значення страхового запасу відповідає лише одному дню настання дефіциту, а саме, згідно з прогнозом, $t = 15$. Для урахування можливих порушень термінів поставок необхідно при розрахунку страхового запасу також оцінити вплив затримки, пов'язаної з виконанням заказу (зокрема, з транспортуванням). На жаль, лише за однією реалізацією неможливо оцінити ймовірнісний характер тривалості функціональних циклів поставок. Однак можна припустити, що виявлена лінійна тенденція витрат запасів збережеться. В цьому випадку для оцінки величини страхового запасу можна скористатися формулою [8]

$$y_c^* = |a_1| h + s_y d_\beta,$$

де h – параметр, що характеризує кількість днів затримки поставок заказу.

Використовуючи цю формулу, можна обчислити величину страхового запасу за умови затримки на один день порівняно з прогнозою оцінкою $t = 15$, тобто на 16-й день:

$$y_c^{15+1} = y_c^1 = |-3| \cdot 1 + 2 \cdot 1,645 = 6,29 \approx 6 \text{ (од.)}.$$

Аналогічно можна обчислити величину страхового запасу при дводенній затримці, тобто на 17-й день:

$$y_c^{15+2} = y_c^2 = |-3| \cdot 2 + 2 \cdot 1,645 = 9,29 \approx 9 \text{ (од.)}.$$

Відповідь. Середній час витрати поточного запасу складає $\bar{t} = 15$ днів, розмір страхового запасу складає $y_c = 3$ одиниці продукції. За умови затримки поставок на один день страховий запас має складати $y_c^1 = 6$ одиниць продукції, а при затримці поставок на два дні – $y_c^2 = 9$ одиниць продукції.

Таким чином, екстраполяція ґрунтується на певних припущеннях [6]:

- тренд має достатньо надійно характеризувати реально існуючі тенденції розвитку економічного явища;
- тенденція розвитку економічного явища в минулому не має змінитися в майбутньому.

При прогнозуванні економічних явищ за допомогою екстраполяції значний інтерес представляє не сама екстраполяція, в результаті якої отримують точкове значення прогнозу, яке має занадто малу ймовірність здійснення, а визначення довірчих інтервалів прогнозу. В загальному випадку такі

інтервали мають враховувати не лише помилку тренду, але й можливість відхилення від обраного тренду [6].

8.8. Верифікація результатів прогнозування

8.8.1 Поняття верифікації та параметри якості прогнозу

В сучасній практиці прогнозування поняття верифікації розуміється як оцінка ймовірності та точності або обґрунтованості прогнозу. Відомі методи верифікації в більшій мірі спрямовані на оцінку методу прогнозування, з використанням якого був отриманий той чи інший прогнозний результат, ніж на оцінку якості самого прогнозного результату. Однак і ця проблема в методах верифікації не враховується в повній мірі, тому що якість роботи методу можна оцінити лише відносно якості використаної інформації через те, що один і той самий метод може давати однаково ймовірні достовірний та недостовірний результати в залежності від якості використаної для отримання прогнозу інформації. Що ж стосується оцінки ймовірності та надійності самого прогнозу, то збіг прогнозних результатів, отриманих різними методами, із різних джерел тощо, ще не свідчить про надійність та якість прогнозу, тому що якість прогнозу залежить від того, яке рішення було прийняте на основі розробленого прогнозу. В зв'язку з цим виникають дві проблеми: як оцінити якість прогнозу до його реалізації та чи можна вважати достовірним прогноз, який не здійснився. На ці питання відповісти однозначно неможливо. Прогноз має допомагати приймати раціональні рішення. Якщо розробник прогнозу не контролює явища, які прогнозує, то прогноз є достовірним лише тоді, коли він збігається з очікуваннями свого розробника. В реальній практиці, особливо в області науково-технічного прогнозування, ЛПР в значній мірі контролює ситуацію, для якої складається прогноз. В цьому випадку існує взаємозв'язок між ймовірністю прогнозу та його корисністю, яка залежить від ступеню управління ситуацією фахівцем, що приймає прогнозне рішення. При цьому є можливими наступні ситуації [1]:

1. ЛПР зовсім не управляє розвитком процесу, тобто не має ніяких можливостей впливати на нього. В цьому випадку ЛПР має пристосовуватися до результату, намагаючись максимізувати отримання переваг від успішного результату події, або мінімізувати збитки від несприятливого результату. Якщо такий прогноз виявиться недостовірним, то він не буде корисним для даного фахівця.
2. ЛПР повністю управляє розвитком подій. В цьому випадку прогноз для ЛПР непотрібний, тому що результат події відомий та визначається самим фахівцем.
3. ЛПР частково може контролювати результат події. В даному випадку прогноз є необхідним. При цьому прогноз може виявитися корисним, навіть якщо він не здійсниться. Наприклад, отримавши прогноз подій, який передбачає небажаний напрямок перспективного розвитку, ЛПР може вжити запобіжних заходів, щоб цей прогноз не виправдався. Такий прогноз називають **самодеструктивним**. Він є правильним за умови, що ЛПР вважає його правильним, але раціонально йому протидіє, використовуючи більш впливову інформацію. Якщо, навпаки, прогноз передбачав розвиток подій, який влаштовує ЛПР, то ЛПР може використовувати свої можливості для збільшення ймовірності сприятливого прогнозу. Такий прогноз називається **самореалізованим**. Таким чином, показником цінності прогнозу є не лише його ймовірність (правильність), але й корисність для фахівця, який приймає прогнозне рішення. Така точка зору відкриває можливість для оцінки якості прогнозу в період його розробки (тобто для реалізації прогнозу). Мова йде про оцінку прогнозу на основі його корисності для затвердження рішення в залежності від обґрунтованості використаної при прогнозуванні логічної структури,

за допомогою якої в прогнозі минуле поєднується з майбутнім, та ступеню використання наявної інформації. На основі цього критерію розроблений метод оцінки, відомий як «опитувальна модель».

Існуючі на теперішній час методи верифікації у своїй більшості оперують чисто статистичними процедурами, що зводяться до оцінки довірчих інтервалів для розглянутих прогнозних значень. При цьому передбачається два види помилок: помилки, обумовлені інформацією або описом об'єкта, та помилки безпосередньо методу прогнозування. Помилки першого виду достатньо легко формалізуються та можуть бути розраховані статистичними методами. Аналіз вхідної інформації припускає виявлення сукупності статистичних характеристик, в тому числі визначення виду розподілу. Слід зазначити, що статистичні розрахунки та критерії правомірні лише для нормального закону розподілу. В протилежному випадку оцінки виявляються неефективними та зсуваються. Іншими статистичними характеристиками є: виявлення аномальних спостережень, виділення неперіодичних складових, визначення стрибкоподібних змін в тенденції досліджуваного процесу, визначення варіацій досліджуваного показника, його періодичності. Таких окремих характеристик може бути достатньо багато в залежності від ступеню деталізації дослідження. Разом з тим, найважливішим параметром, що визначає якість прогнозних розрахунків, є об'єм вибірки. Багато статистичних характеристик можуть бути відкориговані за допомогою спеціальних процедур. В той же час, об'єм вибірки – це кількість інформації, а відсутність інформації може бути відкоригованою лише в надходженням інформації. Інформаційні помилки є основними при отриманні прогнозних результатів. Але при цьому існують помилки, породжені самими методами прогнозування. Існує щільна взаємодія між інформацією та методом прогнозування. Таким чином, для інформації, що має певну специфіку, слід використовувати саме той метод прогнозування, який враховує дану специфіку. Іншими словами, при здійсненні прогнозних розрахунків завжди слід оцінювати та знаходити оптимальну відповідність між інформацією та методом прогнозування на основі цієї інформації.

Верифікація – це сукупність критеріїв, способів та процедур, що дозволяють на основі всебічного аналізу оцінити якість отриманого прогнозу [1]. **Якість прогнозу** – це сукупність таких характеристик прогнозу, що сумісно дозволяють збільшити його ефективність, зробити його корисним при прийнятті управлінських рішень, а також забезпечують отримання достовірного опису об'єкта на певну перспективу та можливість достовірного використання прогнозних результатів для процедури управління.

8.8.2. Комбінована оцінка прогнозу

Кожний із методів прогнозування має переваги порівняно з іншими методами, але в той же час вони мають і недоліки. Отримати абсолютно однакові прогнози за допомогою різних методів на практиці дуже складно. Тому, якщо прогнозні значення, отримані двома різними методами, не збігаються, то можна говорити про можливість або необхідність проведення комбінованого прогнозу. Для отримання комбінованої оцінки прогнозу треба вирішити дві задачі [6]:

- встановити область, всередині якої прогнозні результати, отримані різними методами, можуть вважатися узгодженими;
- встановити таке співвідношення між результатами прогнозів, яке найбільш адекватно відобразило б їх зв'язок з найбільш ймовірним результатом прогнозування.

В комбінованій оцінці можуть брати участь декілька прогнозів, отриманих різними методами, якщо ці прогнози не суперечать один одному. В протилежному випадку необхідно провести аналіз

причин, що призвели до суперечливих результатів, а також вилучити деякі варіанти прогнозу, змінити математичні моделі прогнозування, провести повторне прогнозування та аналіз і перевірку вхідних даних.

Для отримання комбінованого прогнозу спочатку формується база вхідних даних для такого прогнозу. Такими даними є прогнозні значення, отримані різними методами. Вхідні дані мають бути подані в однаковому вигляді. Наприклад, нехай в комбінованій оцінці беруть участь два прогнози. При цьому результати першого подані у вигляді точкової оцінки та помилки прогнозу. Це означає, що результати другого прогнозу також необхідно привести до точкової оцінки та визначити помилку. Якщо математичний прогноз поданий у вигляді функції розподілу, то необхідно отримати ймовірнісну оцінку значень величини, яка прогнозується, отриманих евристичним методом. Часто в якості закону розподілу точкових оцінок групи експертів приймають нормальний закон. Однак, якщо в процесі експертного оцінювання отримані лише можливі границі величини, яка прогнозується, то можна використовувати і рівномірний розподіл.

Потім оцінюються значення, які сильно відрізняються від інших середніх оцінок прогнозованого показника, отриманих різними методами. На цьому етапі деякі варіанти прогнозів можуть бути вилучені із комбінованої оцінки. Наступним кроком є оцінка суперечливості прогнозів. Для розв'язання цієї задачі необхідно порівняти точкові та інтервальні прогнози. Є очевидним, що точкові прогнози можуть не збігатися. **При порівнянні інтервальних прогнозів можливі наступні випадки** [6].

1. Довірчі інтервали не мають спільної області:

$$\Delta_n = 0.$$

В цьому випадку проводиться логічний аналіз причин суперечливості прогнозів, коригуються вхідні дані та проводиться повторна перевірка узгодженості відкоригованих прогнозів.

2. Довірчий інтервал одного прогнозу Δ_1 повністю охоплює довірчий інтервал другого прогнозу Δ_2 . При цьому спільна частина двох інтервалів збігається з меншим із двох довірчих інтервалів:

$$\Delta_n = \Delta_2.$$

3. Довірчі інтервали частково перекриваються. В якості правила визначення суперечливості або несуперечливості прогнозів може бути прийняте наступне: результати прогнозів не суперечать один одному, якщо точкові прогнози належать спільній області:

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_N \in \Delta_n,$$

де Y_i – значення точкової оцінки i -го прогнозу,

N – кількість прогнозів, що беруть участь в комбінованій оцінці.

В якості додаткової умови несуперечливості прогнозів може бути прийняте наступне: величина спільної області довірчих інтервалів прогнозів має задовольняти нерівності

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{min}} \geq \varepsilon,$$

де ε – критерій оцінки несуперечливості прогнозів, $0 < \varepsilon < 1$.

Величина критерію ε визначається розробником прогнозу на основі власного досвіду. Якщо ця нерівність не виконується і при цьому $\Delta_n \neq 0$, то при комбінованій оцінці більше, ніж двох прогнозів, можливе вилучення суперечливого варіанта прогнозу або його коригування, а потім повторна перевірка суперечливості прогнозів. Якщо ж ця нерівність виконується, то прогнози є несуперечливими і є можливою їх сумісна обробка для отримання комбінованої оцінки прогнозу [6].

Сумісна обробка прогнозів полягає у визначенні середньозваженого результату прогнозів, отриманих різними методами, з урахуванням їх точності. Чим точнішим є результат, тим вищий його важіль в остаточному прогнозі. Вагові коефіцієнти розраховуються за формулою [6]:

$$\mu_i = \left(s_i^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} \right)^{-1}, \quad (8.9)$$

де s_i^2 – дисперсія i -го прогнозу.

Після перетворення формули (8.9) для двох прогнозів отримані наступні залежності для розрахунку вагових коефіцієнтів прогнозу:

$$\mu_1 = \frac{s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} \quad \text{і} \quad \mu_2 = \frac{s_1^2}{s_1^2 + s_2^2}.$$

Середнє значення комбінованого прогнозу визначається за формулою

$$\bar{Y}_{\text{комб}} = \sum_{i=1}^N \mu_i Y_i.$$

Дисперсія комбінованого прогнозу розраховується за формулою

$$s_{\text{комб}}^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i s_i^2.$$

Визначення щільності розподілу комбінованого прогнозу можна провести в наступній послідовності [6].

- Після визначення кількісної оцінки прогнозу методом екстраполяції тренду отриманий інтервальний прогноз розбивають на k розрядів на основі функції розподілу. В такий спосіб отримують k значень прогнозованого показника $Y_j, j = \overline{1, k}$.
- Проводиться експертне опитування, в ході якого експерти оцінюють значущість кожного Y_j з використанням бальної оцінки. Таким чином, експертне опитування може бути проведене методом простого ранжування, коли експерти найбільш значущий варіант прогнозу (розряд) оцінюють як 1 , а найменш значущому варіанту відповідає бал, що дорівнює k .
- Проводиться статистична обробка експертних оцінок. Кожному Y_j надається новий номер в такий спосіб, що розряду з найменшою сумою балів надається номер 1 тощо.
- Припускаємо, що Y_1 відповідає найбільш правдоподібній гіпотезі H_1 , Y_2 – гіпотезі H_2 тощо. Ймовірності гіпотез визначаються за формулою

$$P_i = \frac{2(k-i+1)}{k(k+1)}, \quad i = \overline{1, k}.$$

- Для «експертної» щільності розподілу обчислюються середнє значення та дисперсія.
- Прогнози перевіряють на суперечливість.
- Визначаються вагові коефіцієнти для кожного із прогнозів за формулою (8.9).
- Визначається для кожного розряду ймовірності комбінованого прогнозу і, за потреби, значення функції розподілу.

Контрольні запитання

1. За якими ознаками класифікуються рівні динамічного ряду?
2. Назвіть основні складові динамічного ряду.
3. Дайте означення тренду.
4. Які складові часового ряду є регулярними?
5. Наведіть формулу адитивної моделі динамічного ряду.
6. Наведіть формулу мультиплікативної моделі динамічного ряду.
7. Наведіть формулу змішаної моделі динамічного ряду.
8. В які способи можна виявити тенденцію динамічного ряду?
9. В чому полягає метод укрупнення інтервалів?
10. В чому полягає метод згладжування за допомогою ковзної середньої?
11. В чому полягає метод перетворення рівнів?
12. В чому полягає спосіб центрування?
13. Опишіть алгоритм виявлення тенденції за критерієм «висхідних та низхідних серій».
14. Охарактеризуйте лінійну форму тренду.
15. Охарактеризуйте гіперболічну форму тренду.
16. Охарактеризуйте параболічну форму тренду.
17. Охарактеризуйте показову форму тренду.
18. Охарактеризуйте логістичну форму тренду.
19. Охарактеризуйте ступеневу форму тренду.
20. Дайте означення інтерполяції.
21. Дайте означення екстраполяції.
22. Опишіть метод експоненціального згладжування з одним параметром.
23. Опишіть метод ковзної середньої по декільком вузлам.
24. Опишіть метод зваженої ковзної середньої.
25. Опишіть метод екстраполяції тренду.
26. Якими методами можна обчислити середній абсолютний приріст?
27. Якими методами можна обчислити середній темп і середній коефіцієнт зростання?
28. Якими методами можна обчислити середній темп приросту?
29. Якими методами можна обчислити середній рівень ряду?
30. Що є необхідною умовою порівнянності результатів економічної діяльності?
31. В який спосіб розробляється комбінований прогноз?
32. Що таке верифікація прогнозу?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Глівенко С. В., Соколов М. О., Теліженко О. М. Економічне прогнозування: навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 207 с.
2. Коркавий В. К., Ярова В. В. Математична статистика: навчальний посібник. – Київ: ВД «Професіонал», 2004. – 378 с.
3. Вашків П. Г., Пастер П. І., Сторожук В. П., Ткач Є. І. Теорія статистики/ Навчальний посібник. – К.: Либідь, 2004. – 320 с.
4. Шумська С. С. Макроекономічне прогнозування: Навчальний посібник. Частина 1. – Київ: Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2015. – 176 с.
5. Герич М. С., Синявська О. О. Математична статистика: навчальний посібник. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2021. – 146с.. – М: ГУ-ВШЭ, 2000. – 688 с.
6. Ямненко Р. Є. Математична статистика. – Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2020. – 85 с.
7. Суцук-Слюсаренко В. І., Гадиняк Р. А. Математична статистика: навчальний посібник. – Київ: КПП ім. Ігоря Сикорського, 2019. – 60 с.
8. Рогальський Ф. Б., Цокуренко О. О. Математичні методи аналізу економічних систем. Книга 2. Методи та алгоритми розв'язання задач, що важко формалізуються. – Київ: Наукова думка, 2001. – 424 с.
9. Бідюк П. І., Ткач Б. П., Харрінгтон Т. Математична статистика: навчальний посібник – Київ: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2018. – 348 с.
10. Вігоднер І. В., Білоусова Т. П., Ляхович Т. П. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Одеса: «Олді+», 2019. – 336 с.
11. Ярема О. Р. Моделювання економіки. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 254 с.
12. Горбатенко В., Петренко І. Метод «Делфі» та специфіка його застосування у прогнозних розробках.// Політичний менеджмент. № 6, 2008. – С. 174 – 182.
13. Котлер Ф. Десять смертних гріхів маркетингу. – Харків: КСД, 2018. – 160 с.
14. Гвоздинський А. М., Якімова Н. А., Губін В. О. Методи оптимізації в системах прийняття рішень / Навчальний посібник. – Харків. – 2006.
15. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 2. Булеві функції: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 126 с.
16. Якімова Н. А. Елементи теорії множин: навчально-методичний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2023. – 102 с.
17. Варбанець П. Д., Якімова Н. А. Лінгвостатистика: навчальний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2021. – 182 с.
18. https://lubbook.org/book_251_glava_11_5.3._Metod_kolektivno%D1%97_genera.html
19. <http://iqholding.com.ua/articles/mozkovii-shturm-abo-mozkova-ataka-yak-rozpovsyudzhennii-priiom-generuvannya-novikh-idei>
20. Гвоздинський А. М., Губін В. О., Шергін В. Л. Методи оптимізації в організаційному управлінні. – Харків: ХНУРЕ. – 2014. – 396 с.
21. Joseph J. Moder, Salah E. Elmaghraby. Handbook of Operation Research. Foundation and Fundamentals. – Ney York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisco, London, Toronto, Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 712 p.
22. Joseph J. Moder, Salah E. Elmaghraby. Handbook of Operation Research. Models and Applications. – Ney York, Cincinnati, Atlanta, Dallas, San Francisco, London, Toronto, Melbourne: Van Nostrand Reinhold Company, 1978. – 712 p.

23. T. H. Lee, G. E. Adams, W. M. Gaines. Computer Process Control: Modeling and Optimization. – Ney York – London – Sydney: John Wiley & Sons, 1972. – 312 p.
24. Intriligator M. Mathematical Optimization and Economic Theory. – Ney York: Prentice-Hall, 1980. – 607 p.
25. Hamdy A. Taha. Operations Research: an Introduction: seventh edition. – Ney Jersey: Upper Saddle River, 2003. – 912 p.
26. Joseph C. Giarratano, Gary D. Riley. Expert System. Principles and Programming: fourth edition. – Houston: Course Technology, 2005. – 1152 p.
27. W. Ronald Lane, J. Thomas Russel. Advertising: a Framework. – Ney Jersey: Upper Saddle River, 2001. – 537 p.
28. Paul Heyne. The Economic Way of Thinking. – Chicago, Henley-on-Thames, Sydney, Toronto: Science Research Associates, 1991. – 704 p.
29. Michael H. Mescon, Michael Albert, Franklin Khedouri. Management. – Ney York: Harper&Row Publishers, 1988. – 800 p.
30. Campbell R. McConnell, Stanley L. Brue. Economics: Principles, Problems and Policies. T. 1 – Mc Graw-Hill Publishing Company, 1990. – 399 p.
31. Campbell R. McConnell, Stanley L. Brue. Economics: Principles, Problems and Policies. T. 2 – Mc Graw-Hill Publishing Company, 1990. – 400p.
32. Herve Moulin. Theorie des jeux pour l'economie et la poltique. – Paris: Hermann, 1985. – 200 p.
33. Л. М. Бандоріна, Л. І. Лозовська, Л. М. Савчук. Моделювання економіки. – Дніпро: ННІ ІПБТ УДУНТ, 2022. – 32 с.
34. <https://uk.economy-pedia.com/11040164-gossen-laws>
35. Воропай Н. Л., Герасименко Т. В., Кирилова Л. О. та ін. (за заг. редакцією Мацкул В. М.) Економіко-математичні методи та моделі: Навчальний посібник. – Одеса: ОНЕУ, 2018. – 404 с.
36. Бондаренко М. Ф., Гвоздинський А. М. Оптимізаційні задачі в системах прийняття рішень. – Харків: ХТУРЕ, 1998. – 216 с.
37. Гончарук А. Г. Основи статистики. – Київ: Центр навчальної літератури, 2004. – 125 с.
38. Шарай Н. В, Білозерова М. О. Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірностей: навчально-методичний посібник. – Одеса: ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2023. – 122 с.
39. <https://diploms.com.ua/kogda-primenyaetsya-kriterij-pirsona-i-kriterij-styudenta/>

Навчальне видання

Якімова Наталія Анатоліївна

Круглов Віктор Євгенович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ ТА БІЗНЕСІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти
спеціальностей 111 «Математика»,
113 «Прикладна математика»,
292 «Міжнародні економічні відносини»

Електронне видання мережевого використання

В авторській редакції

Затвердж. авт. 31.08.2024. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 6,2 МБ. Зам. № 2870.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Університетська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua