Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат.науки.- 1999.- Т.4, вип.4.- С.74–78.

УДК 517.2

И. Г. Лободзинская
Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГИУ ПРИ РЕШЕНИИ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Побудовано фундаментальний розв'язок диференціального оператору високого порядку з змінними коефіцієнтами, шо надає змогу загальну граничну задачу для відповідного рівняння в обмеженій області звести до граничного інтегрального рівняння.

Построено фундаментальное решение дифференциального оператора высокого порядка с переменными коэффициентами, что дает возможность общую граничную задачу для соответствующего уравнения в ограниченной области свести к граничному интегральному уравнению.

The fundamental solution of the differential operator of high order with the variable coefficients is constructed. It gives opportunity to reduce the general boundary problem for the corresponding equation in the limited medium to the boundary integral equation.

Введение. Широкое применение в последнее десятилетие получил метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) для решения целого ряда задач весьма различных, особенно прикладного характера.

В работах Хермандера [1] доказывается, что для дифференциальных операторов порядка $2m$, представимых единственным образом в окрестности границы области Σ в виде $M = \sum_j M_j D_\nu^j$, где M_j – дифференциальные операторы порядка $2m-j$, действующие по направлениям, параллельным Σ_j (например, действующие по направлениям гауссовских кривизн), D_ν^j – степень дифференциального оператора по нормали $\bar{\nu}$ к поверхности Σ, справедлива формула, аналогичная формуле Грина для оператора Лапласа. Для того, чтобы применить метод ГИУ, очень важно эту формулу выписать в явном виде.

При рассмотрении довольно широкого класса граничных задач для эллиптических уравнений высшего порядка с переменными коэффициентами это удается получить. Для этого, прежде всего, в явном виде следует построить фундаментальное решение дифференциального оператора.

1. Рассмотрим сначала модельную задачу. Пусть D – ограниченная область в R_n, $\partial D \equiv \Sigma \in \Lambda_{2m+2}$. В D строится фундаментальная функция оператора

$$Mu(x;\lambda) \equiv \Delta^m u(x;\lambda) + L(x;u) + (-1)^m \lambda^{2m} c^{2m}(x) u(x;\lambda), \qquad (1)$$

где $L(x;u)$ – линейный дифференциальный оператор порядка не выше $2m-1$ с переменными коэффициентами; λ – комплексный параметр, который удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &|\lambda| \ge R_0, \\ &-\frac{\pi}{2m} + \frac{s\pi}{m} < \arg\lambda < \frac{\pi}{2m} + \frac{s\pi}{m}, s = \overline{0, m-1}, \\ &c(x) \ge \kappa > 0;\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \end{aligned} \qquad (2)$$

Рассмотрим в D вспомогательное уравнение

$$\Delta_x^m V(x,y;\lambda) + (-1)^m \lambda^{2m} c^{2m}(y) V(x,y;\lambda) = 0; \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D. \qquad (3)$$

Элементарными решениями (3) (терминология Адамара) будут следующие функции:

© И. Г. Лободзинская, 1999

$$F_j(x,y) = A_j r^{-\frac{n-2}{2}}(x,y)\cdot H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}[ik_j c(y) r(x,y)] +$$

$$+ B_j r^{-\frac{n-2}{2}}(x,y)\cdot H^{(2)}_{\frac{n-2}{2}}[ik_j c(y) r(x,y)],$$

$$j=\overline{1,m};\quad r(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2};\quad A_j, B_j - \text{const};$$

$c^j(y)$ – корни характеристического уравнения ($\cos\arg k_j \ge \delta > 0$).

Легко проверить, что, комбинируя $F_j(x,y)$, можно построить функцию

$$P_m(x,y;\lambda)=\begin{cases} c_{2m,n} r^{2m-n}(x,y)+\Phi_1(x,y;\lambda), \\ \text{если} \quad n=2n_1+1 \text{ или } n=2n_1>2m \\ b_{2m,n} r^{2m-n}(x,y)\ln r(x,y)+\Phi_2(x,y;\lambda), \\ \text{если} \quad n=2n_1\le 2m \end{cases}$$

Функции $\Phi_1(x,y;\lambda)$ и $\Phi_2(x,y;\lambda)$ – более регулярные в D функции. Следуя методу -Карлемана фундаментальную функцию (1) будем искать в виде:

$$P(x,y;\lambda)=P_m(x,y;\lambda)+\int_D P_m(x,\xi;\lambda)h(\xi,y;\lambda)d_\xi D,$$

е $h(\xi,y;\lambda)$ – искомая функция.

Плотность $h(\xi,y;\lambda)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$h(x,y;\lambda)=K(x,y;\lambda)+\int_D K(x,\xi;\lambda)h(\xi,y;\lambda)d_\xi D$$

$$K(x,y;\lambda)=-L(x;P_m)+(-1)^{m+1}\lambda^{2m}[c^{2m}(x)-c^{2m}(y)]P_m(x,y;\lambda). \tag{4}$$

ри условиях, налагаемых на комплексный параметр λ, доказывается, что (4) раз-о и решение его находится методом последовательных приближений

$$(x,y;\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}K_j(x,y;\lambda).$$

Легко видеть, что асимптотику $P(x,y;\lambda)$ при $r(x,y)\to 0$ определяет $P_m(x,y;\lambda)$.

Рассмотрим следующую граничную задачу: требуется определить функцию $u(x;\lambda)$, рая бы удовлетворяла следующим условиям:

$(x,y)\in C^{(2m-1)}(\bar D)\bigcap C^{(2m)}(D)$;

2) $\Delta^m u(x;\lambda)+L(x;u)+(-1)^m\lambda^{2m}c^{2m}(x)u(x;\lambda)=0$ в D

3) $u^{(h)}(y;\lambda)=f_h(y)$ *на* $\Sigma\equiv\partial D,\ h=\overline{1,m}$,

$$u^{(2j)}(y;\lambda)=\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta^{j-1}u(y;\lambda);\quad u^{(2j+1)}(y;\lambda)=\Delta^j u(y;\lambda)$$

Доказывается, что решение исходного уравнения представляется в виде интеграла границе области

$$u(x;\lambda)=\int_{\Sigma}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_y^k u(y;\lambda)T_{k1}[P(y,x;\lambda)]+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\Delta_y^k u(y;\lambda)T_{k0}[P(y,x;\lambda)]\right\}d_y\sigma, \tag{5}$$

T_{kj} – линейные дифференциальные операторы порядка $2m-2k-j$; $j=0,1$,

$T_{k0}[P(y,x;\lambda)]=O(r^{2k-1}(x,y))$, $T_{k1}[P(y,x;\lambda)]=O(r^{2k-1}(x,y))$.

Для применения метода ГИУ полученные интегральные операторы регуляризуются [3].

Используя граничные условия 3), получаем систему граничных интегральных уравнений относительно: $u^{(m+1)}(y;\lambda),\dots,u^{2m}(y;\lambda)$.

2. Рассмотрим линейный оператор более общего вида с переменными коэффициентами

$$Mu(x;\lambda)\equiv\prod_{j=1}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ikj}(x)\frac{\partial^2u(x;\lambda)}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(x)\frac{\partial u(x;\lambda)}{\partial x_i}+\right.$$
$$\left.+c_{j0}(x)u(x;\lambda)-\lambda_j^2c_j^2(x)u(x;\lambda)\right\} \tag{6}$$

Пусть D – ограниченная область в n-мерном пространстве. Будем считать, что

$a_{ijk}(x)\in C^2(\bar D), b_{ij}(x)\in C^1(D), c_{j0}(x)\in C(\bar D)$;

$c_j(x)\ge\kappa>0, c_j(x)\in C(\bar D), a_{ikj}(x)=a_{kij}(x)$

и квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ikj}(x)\eta_i\eta_k$ положительно определена для $\forall j$ при $x\in D$;

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_m)$. λ_j удовлетворяют условиям (2). Построим в D фундаментальное решение (6).

Введем такие операторы:

$$A_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ikj}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c_{j0}(x)-\lambda_j^2c_j^2(x)$$

Очевидно, $M=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_m$.

Построим фундаментальное решение $E_j(x,y;\lambda_j)$ оператора $A_j, j=\overline{1,m}$. Введем вспомогательные операторы

$$N_jV(x;\lambda_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ikj}(y)\frac{\partial^2V(x;\lambda_j)}{\partial x_i\partial x_k}-\lambda_j^2c_j(y)V(x;\lambda_j).$$

Пусть $B_{ikj}(x)$ – отношение алгебраического дополнения элемента $a_{ikj}(x)$ матрицы $\|a_{ikj}(x)\|$ и определителя матрицы,

$$\sigma_j(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{ikj}(y)(x_i-y_i)(x_k-y_k)}.$$

В силу равномерной эллиптичности A_j можно указать такие постоянные μ_{1j} и μ_{2j}, что $\mu_{1j}r(x,y)\le\sigma_j(x,y)\le\mu_{2j}r(x,y), j=\overline{1,m}$ [2].

Пусть $n=3$ (для определенности).

Введем функции

$$\psi_j(x,y;\lambda_j)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\det\|a_{ikj}(y)\|}}\frac{\exp\{-\lambda_jc_j(y)\sigma_j(x,y)\}}{\sigma_j(x,y)}. \tag{7}$$

Очевидно, $\psi_j(x,y;\lambda_j)$ удовлетворяет уравнению

$N_j\psi_j(x,y;\lambda_j)=0, \quad x\neq y$.

Главное элементарное решение уравнения $A_j u=0$ в области D будем искать в виде:

$$E_j(x,y;\lambda_j)=\psi_j(x,y;\lambda_j)+\int_D \psi_j(x,\xi;\lambda_j)h_j(\xi,y;\lambda_j)d_\xi D, \quad j=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Плотности $h_j(x,y;\lambda_j)$ должны удовлетворять интегральным уравнениям:

$$h_j(x,y;\lambda_j)=K_j(x,y;\lambda_j)+\int_D K_j(x,\xi;\lambda_j)h_j(\xi,y;\lambda_j)d_\xi D,$$

$$K_j(x,y;\lambda_j)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}[a_{ikj}(x)-a_{ikj}(y)]\frac{\partial^2\psi_j(x,y;\lambda_j)}{\partial x_i\partial x_k}+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}b_{ij}(x)\frac{\partial\psi_j(x,y;\lambda_j)}{\partial x_i}+c_{j0}(x)\psi_j(x,y;\lambda_j)$$

Уравнения (8) при выполнении условий (2) могут быть решены методом последовательных приближений.

Вводится функция:

$$P(x,y;\lambda)=\int_D \psi_m(x,\xi_1;\lambda_m)d_{\xi_1}D\cdot\int_D \psi_{m-1}(\xi_1,\xi_2;\lambda_{m-2})d_{\xi_2}D\cdot\ldots$$

$$\int_D \psi_2(\xi_{m-2},\xi_{m-1};\lambda_2)\psi_1(\xi_{m-1},y;\lambda_1)d_{\xi_{m-1}}D$$

В [3] была доказана следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция* $\rho(\xi)\in C^{(l)}(\overline{D})$. *Тогда интеграл вида*

$$I=\int_D \frac{\rho(\xi)}{r^{n-\alpha_1}(x,\xi)r^{n-\alpha_2}(\xi,y)}d_\xi D,(\alpha_1,\alpha_2>0), \text{ (n - размерность пространства)}$$

может быть представлен следующим образом:

$$I=\sum\frac{B_k}{r^{n-\alpha_1-\alpha_2-k}(x,y)}+F(x,y) \text{ где } F(x,y)\in C^{[l+\alpha_1+\alpha_2]-4}(\overline{D}).$$

На основании леммы и условия равномерной эллиптичности $P(x,y;\lambda)=\text{const}\, r^{2m-3}(x,y)+E(x,y;\lambda)$, где $E(x,y;\lambda)$ является более регулярной функцией $P(x,y;\lambda)$ и является фундаментальной функцией (6). Построение $P(x,y;\lambda)$ дает возможность свести основную краевую задачу для уравнения $Mu=0$ к системе ГИУ.

Если M^* – оператор формально сопряженный с M, то

$$\int_D\{Mu\cdot V-M^*V\cdot u\}d_xD=\int_\Sigma\sum_{k=0}^{2m-1}N_k u\cdot\frac{\partial^k V}{\partial\nu^k}d_yD, \tag{9}$$

дифференциальные операторы порядка $2m-1-k$.

Если оператор M^* имеет в R_n фундаментальное решение, то для любого решения уравнения $Mu=0$

$$u(x;\lambda)=-\sum_{k=0}^{2m-1}\int_\Sigma N_k u(y;\lambda)\frac{\partial^k P(y,x;\lambda)}{\partial\nu_y^k}d_y\sigma.$$

Используя граничные условия задачи, получаем систему граничных интегральных уравнений.

3. Рассмотрим краевые условия более общего вида.

Пусть на границе области $\Sigma\in\Lambda_{2m+2}$ искомая функция $u(x;\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$\sum_{k=1}^{m+j}\psi_{hk}(y)u^{(h)}(y;\lambda)=f_h(y),h=\overline{1,m},\ j\le m. \qquad (10)$$

Функции $\psi_{hk}(y)\in C^{(2m)}(\Sigma)$.

Будем считать, что ранг матрицы $\|\psi_{hk}(y)\|$ равен m и система граничных условий (10) не противоречива при любых функциях $f_n(y)$ [3]. Пусть $X(y)$ – определитель m порядка матрицы $\|\psi_{hk}(y)\|$, который в точке y не равен нулю.

В силу непрерывности $X(y)$ можно указать такую окрестность точки y, в которой $X(y)$ будет сохранять знак (Σ_y). Таким образом, вокруг каждой точки поверхности Σ можно построить свою окрестность. Из этого покрытия выделяется конечное покрытие поверхности $\Sigma:\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_s$.

При $y\in\Sigma_k$, $k=\overline{1,s}$ систему (10) можно разрешить относительно $u^{(h)}(y;\lambda)$ и на каждом из кусков Σ_k система граничных условий примет вид:

$$u^{(k_j)}(y;\lambda)=f_j^*(y),\ j=\overline{1,m}.$$

Пусть $\overline{\Sigma_k'}$ – замкнутое многообразие, Σ_k'' – открытое многообразие на границе, причем такие, что

$$\overline{\Sigma_k'}\subset\overline{\Sigma_k''}\subset\overline{\Sigma_k},(k=\overline{1,s});\ \mathrm{mes}\,\Sigma_k-\mathrm{mes}\,\Sigma_k'<\varepsilon.$$

Тогда существуют функции $h_k(y)\in C^\infty(\Sigma),k=1,s$, которые равны 1 на Σ_k' и 0 вне Σ_k. Обозначим $u_k(y;\lambda)=u(y;\lambda)h_k(y)$, (на Σ).

Пусть функция $u_k(x;\lambda)$ будет решением такой задачи: 1) в области D она удовлетворяет уравнению $Mu_k=0$; 2) на Σ – граничным условиям $u_k^{(k_j)}(y;\lambda)=f_j^*(y)h_k(y)$, $u_k^{(i)}(y;\lambda)=0$ при $y\in\Sigma\setminus\Sigma_k,\forall j$.

Решение исходной задачи можно приближенно считать равным сумме:

$$u(x;\lambda)\approx\sum_{k=1}^{s}u_k(x;\lambda)$$

Функции $u_k(x;\lambda)$ можно получить из системы граничных интегральных уравнений.

1. **Хермандер Л.** Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи.- 13 сб. "Псевдодифференциальные операторы".- М.:Мир. 1967.- 246 с.
2. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.- М.:Наука.1966. - 312 с.
3. **Лободзинская И.Г.** Применение метода потенциалов для решения краевых задач одного типа эллиптических уравнений высшего порядка в n-мерном пространстве // Дифференциальные уравнения. 1973.- Т.9,№11. С.2083-2088.
4. **Кебли Б., Лободзинская И.Г.** Построение в явном виде фундаментальных решений эллиптических уравнений.- Одесса. 1990.- 18 с.- Рус.- Деп. в УкрНИИНТИ 15.03.90, №773-90.