МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЕКОНОМІКИ ТА МЕХАНІКИ

Н. М. БАЛАНДІНА, С. В. ФЕДОРОВСЬКИЙ

МАТРИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні вказівки для студентів
першого курсу напряму підготовки 030102 «Психологія»

ОДЕСА
ОНУ
2015

УДК 519.177:378
ББК 22.143.2Я73
Б201

Рекомендовано до друку Вченою радою ІМЕМ
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 26 листопада 2013 р.

Рецензенти:

Г. М. Вартанян – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу ІМЕМ;

С. М. **Покась** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри геометрії та топології ІМЕМ.

Баландіна Н. М., Федоровський С. В.
Б201 МАТРИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ : Методичні вказівки для студентів першого курсу напряму підготовки 030102 «Психологія». / Н. М. Баландіна, С. В. Федоровський. – Одеса : «Одеський національний університет імені І. І. Мечникова», 2015. – 40 с.

Методичні вказівки допоможуть студентам самостійно оволодіти основними елементами вищої алгебри. Вони адаптовані для студентів першого курсу, сприйняття матеріалу методичних вказівок не потребує ніяких попередніх знань, що виходять за рамки знання основних математичних понять середньої школи.

УДК 519.177:378
ББК 22.143.2Я73

Зміст

<u>Вступ</u>

Курс «Матричне числення» вивчається студентами напряму підготовки 030102 «Психологія» протягом першого семестру. Студенти виконують контрольну роботу з цього курсу та здають залік. Елементи вищої алгебри традиційно викликають ускладнення в оволодінні ними, оскільки у студентів першого курсу немає для цього необхідної бази з середньої школи.

Методичні вказівки, що пропонуються, повинні допомогти студентам самостійно оволодіти основними поняттями з курсу та розв'язати задачі контрольної роботи. Вони адаптовані для студентів першого курсу, сприйняття матеріалу методичних вказівок не потребує ніяких попередніх знань, що виходять за рамки знання основних математичних понять середньої школи.

Пропоновані методичні вказівки будуть корисні як для студентів стаціонару, так і для студентів заочного відділення не тільки напряму підготовки 030102 «Психологія», а й інших напрямів.

1. <u>Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими</u>

Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має в загальному плані такий вигляд:

(1.1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = в_2, \end{cases}$$

Тут a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, $в_i$ – вільні члени, x_i – невідомі ($i,j = \overline{1,2}$).

Розв'язком системи (частковим) називається такий набір двох чисел (x_1^0, x_2^0)*, підстановка якого в кожне рівняння системи перетворює його в правильну числову рівність*. Розв'язати систему – значить знайти множину всіх її розв'язків.

Для знаходження розв'язків системи **(1.1)** виконаємо наступні дії. Помножимо перше рівняння на a_{22}, а друге на $(-a_{12})$ та додамо отримані добутки. Внаслідок цього маємо рівняння:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = в_1a_{22} - в_2a_{12}.$$

Аналогічно попередньому, помножимо перше рівняння на $(-a_{21})$, друге на a_{11}, складемо їх та отримаємо:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = в_2a_{11} - в_1a_{21}.$$

Якщо $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$, маємо розв'язок системи **(1.1)**:

(1.2)
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{в_1a_{22} - в_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \\ \\ x_2 = \dfrac{в_2a_{11} - в_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \end{cases}$$

Розглянемо квадратну таблицю чисел, яка складається з коефіцієнтів при невідомих системи **(1.1):**

(1.3)
$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Така таблиця називається квадратною матрицею другого порядку і має два рядки та два стовпці. Зрозуміло, що, за аналогією, можна розглядати матриці прямокутні з довільною кількістю рядків та стовпчиків. Числа a_{ij}, які утворюють матрицю, називаються її елементами, а індекси $\boldsymbol{i}$ та $\boldsymbol{j}$ вказують відповідно номери рядка та стовпця, в яких міститься елемент матриці. Елементи a_{11} та a_{22} утворюють головну діагональ матриці **(1.3)**, а a_{21} та a_{12} – допоміжну.

Вираз ($a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$), який стоїть у знаменнику формул **(1.2),** визначається елементами матриці **(1.3)** за таким правилом: треба від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів допоміжної діагоналі.

Одержаний таким чином *вираз ($a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$) називається* ***визначником*** *матриці другого порядку, або просто визначником другого порядку* і позначається:

$$\det A = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Таким чином, для підрахунку визначника другого порядку необхідно взяти добуток елементів головної діагоналі матриці та відняти від нього добуток елементів допоміжної діагоналі.

Для вихідної системи лінійних рівнянь цей визначник називається ***головним визначником системи***. Він складається з коефіцієнтів при невідомих системи.

<u>Приклад.</u> Обчислити визначник:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>Розв'язання</u>: $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 11.$

Повернемося до формул **(1.2)**, які визначають розв'язок системи **(1.1)**. Згідно з означенням визначника другого порядку, запишемо чисельники формул **(1.2)** у вигляді

$$в_1 a_{22} - в_2 a_{21} = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1,$$

$$в_2 a_{11} - в_1 a_{21} = a_{11} в_2 - a_{21} в_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix} = \Delta_2 .$$

Зрозуміло, що Δ_1 та Δ_2 одержують з визначника Δ заміною відповідних стовпчиків стовпчиком вільних членів вихідної системи рівнянь (першого для Δ_1 та другого для Δ_2). Для вихідної системи лінійних рівнянь ці визначники називаються ***допоміжними***.

Тоді формули **(1.2)** набувають вигляду

(1.4)
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

Отримані формули для розв'язку системи **(1.1)** лінійних рівнянь називають ***формулами Крамера*** (швейцарський математик, 1704-1752). Формули Крамера мають загальний характер і застосовуються до довільних систем лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих. Ними користуються, коли головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю. В цьому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера:

$x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1,n}$ (у нашому випадку $i = \overline{1.2}$), **n** – кількість невідомих системи.

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Перш за все обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-5) = -1 .$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, то можна застосувати формули Крамера для знаходження розв'язку системи. Для цього треба обчислити допоміжні визначники системи. Маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

За формулами **(1.4)** знаходимо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-1} = -5, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -5, \\ x_2 = -3. \end{cases}$

2. Системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

(2.1)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3. \end{cases}$$

Складемо з коефіцієнтів при невідомих системи таблицю чисел:

(2.2)
$$A = A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Така таблиця називається квадратною матрицею третього порядку (має три рядки та три стовпчики). Для системи **(2.1)** вона називається *матрицею коефіцієнтів при невідомих*, або просто матрицею системи.

Визначником матриці **(2.2)** називається число:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

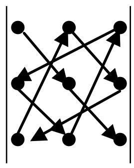
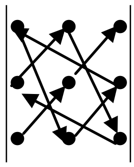
Це число позначається:

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, маємо рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Доданки вищенаведеної суми називаються членами визначника. Як бачимо, деякі члени визначника збігаються з добутками елементів матриці, а деякі мають знак, протилежний для відповідного добутку елементів матриці. Правило «знаків» при обчисленні членів визначника третього порядку зручно запам'ятати, якщо використати так зване «правило трикутника», схема якого наведена нижче:

(2.3) « + »  (вказані добутки елементів матриці входять в визначник зі своїм знаком), та **« - »**  (такі добутки елементів матриці входять у визначник з протилежним знаком).

<u>Приклад.</u> Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>Розв'язання:</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot(-2)\cdot(-3) - 4\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 1\cdot 1 - (-2)\cdot 2\cdot 2 =$$

$$= -2+8+6-12-1+8=7.$$

Відповідь: $\Delta = 7.$

Якщо визначник матриці коефіцієнтів при невідомих системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими (головний визначник системи) відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.4)}$$

де $\Delta -$ головний визначник системи, а $\Delta_i -$ допоміжні визначники ($\boldsymbol{i}=\overline{1,3}$), які отримують з головного визначника заміною відповідного ***i***-того стовпчика стовпцем вільних членів.

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо головний визначник системи, користуючись правилом трикутника **(2.3):**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Розв'язок системи можна знайти за правилом Крамера **(2.4)**. Маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 9 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 9 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

Тоді:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{2}{-2} = -1, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = \ \ 1, \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{4}{-2} = -2. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = \ 1, \\ x_3 = -2, \end{cases}$ або $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, -2)$.

2. Матриці. Загальний випадок

Означення. *Прямокутна таблиця чисел*

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею, а самі числа, що її заповнюють, – елементами матриці. Матриці, зазвичай, позначаються великими латинськими літерами A, B і т. п.

У матриці елементи розташовані в рядках та стовпчиках. Індекси елементів матриці визначають місце розташування цих елементів у матриці. Перший індекс означає номер рядка, в якому міститься елемент матриці, а другий – номер відповідного стовпчика.

Кількість рядків та стовпчиків матриці визначають її ***розмірність*** $(m \times n)$. Якщо $m=n$, то матриця називається ***квадратною матрицею*** n-го порядку. Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці n-го порядку утворюють ***головну діагональ*** цієї матриці.

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, тобто діагональна матриця n-го порядку має вигляд:

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця, в якій всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається ***E***. Таким чином:

$$E = E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то таку матрицю називають ***нульовою*** і позначають ***0***. Квадратну матрицю називають ***трикутною***, якщо всі її елементи, які розташовані нижче (верхня трикутна) або вище (нижня трикутна) головної діагоналі, дорівнюють нулю. Таким чином, матриці

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

є відповідно верхньою та нижньою трикутними матрицями. Дві матриці однієї й тієї ж розмірності вважаються ***рівними***, якщо в них елементи, які розташовані на однакових місцях в матрицях (мають однакові індекси), рівні між собою.

4. Основні операції над матрицями. Властивості операцій

4.1. Додавання матриць

Означення. *Сумою A+B двох прямокутних матриць A та B однакових розмірностей $m\times n$ називають матрицю C (C = A+B) тієї ж розмірності, всі елементи якої знаходять за формулою*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad \text{де } i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Приклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Властивості. Якщо A, B, C – будь-які матриці однієї розмірності, то:

1) A + B = B + A (комутативність додавання матриць),

2) A + (B + C) = (A + B) + C (асоціативність додавання матриць).

4.2. Множення матриці на число

Означення. *Добутком матриці A розмірності $m\times n$ на число λ називають матрицю D (D = λA) тієї ж розмірності, всі елементи якої знаходять за формулою*

$$d_{ij}=\lambda a_{ij},\ \text{де } i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Властивості. Якщо A, B – будь-які матриці однієї розмірності та $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, то:

1) (λμ)A = λ(μA) (асоціативність відносно добутку чисел),

2) λ(A + B) = λA + λB (дистрибутивність відносно суми матриць),

3) (λ + μ)A = λA + μA (дистрибутивність відносно суми чисел).

4.3. Множення матриць

Означення. *Добутком матриці A розмірності $m\times k$ на матрицю B розмірності $k\times n$ називають матрицю C (C = AB) розмірності $m\times n$, кожний елемент якої c_{ij} $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})$ дорівнює сумі добутків елементів i-того рядка матриці A на відповідні (з тими ж номерами) елементи j-того стовпчика матриці B, тобто*

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pj},\ (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}).$$

Зрозуміло, що добуток матриць існує тільки в тому випадку, коли кількість елементів у будь-якому рядку першої матриці збігається з кількістю елементів у будь-якому стовпчику другої матриці, тобто тільки тоді, коли кількість стовпчиків першої матриці збігається з кількістю рядків другої матриці.

Приклад:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot(-2)+2\cdot 1\\ (-2)\cdot(-1)+3\cdot 2+(-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 2+3\cdot(-2)+(-2)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 2 & -12\end{pmatrix}$$

4.4. Транспонування матриці

Означення. Матриця A^T називається транспонованою відносно матриці *A,* якщо A^T отримується з матриці *A* заміною всіх рядків матриці *A* на відповідні (з тими ж номерами) стовпчики цієї ж матриці. Таким чином, якщо

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

<u>Приклад</u>

Якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>4.5. Властивості операцій</u>

Якщо нижчеподані добутки матриць існують, то мають місце наступні властивості:

(4.5.1) У загальному випадку AB $\neq$ BA;

(4.5.2) A0 = 0A = 0;

(4.5.3) A(BC) =(AB)C = ABC;

(4.5.4) α(AB) =(αA)B =A(αB), α – константа;

(4.5.5) A(B+C) = AB+AC.

<u>5. Підстановки</u>

Підстановкою n-го степеня *називається взаємно однозначне відображення* ***σ*** *множини з* ***n*** *елементів на себе*. Якщо ***M*** – деяка скінчена множина з ***n*** елементів, то елементи даної множини можна занумерувати за допомогою перших ***n*** натуральних чисел ***1,2,…n*** і замість відображення елементів множини розглядати відображення номерів цих елементів:

$$\boldsymbol{\sigma}: \begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_n \\ \downarrow & \dots & \downarrow \\ a_{\alpha_1} & \dots & a_{\alpha_n} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}: \begin{array}{ccc} 1 & \dots & n \\ \downarrow & \dots & \downarrow \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{array}$$

Підстановку ***n***-го степеня домовились зображати в такому вигляді:

$$\textbf{(5.1)} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_i \in \{1,2,\ldots n\},\ i = \overline{1,n},\ \alpha_i \neq \alpha_j \text{ при } i \neq j.$$

Запис **(5.1)** називають ***нормальною формою підстановки***.

Пара (α_i, α_j) в підстановці **(5.1)** утворює ***інверсію,*** якщо i < j, а $\alpha_i > \alpha_j$. *Підстановка називається* ***парною****, якщо вона має парну кількість інверсій, і непарною, якщо кількість інверсій у ній непарна.* Кількість інверсій у підстановці ***σ*** позначається через ***ν(σ)***.

Приклад. Обчислимо кількість інверсій у підстановці:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Маємо:

- число 3 утворює 2 інверсії (з числами 1,2);
- число 5 утворює 3 інверсії (з числами 1,4,2);
- число 6 утворює 3 інверсії (з числами 1,4,2);
- число 1 утворює 0 інверсій ;
- число 4 утворює 1 інверсію (з числом 2);
- число 2 утворює 0 інверсій;

Таким чином, загальна кількість інверсій в підстановці ***σ*** дорівнює 2+3+3+0+1+0 = 9, тобто ***ν(σ)*** = 9, а тому підстановка ***σ*** є непарною.

Транспозицією *в підстановці називається заміна місцями двох довільних елементів нижнього рядка підстановки при умові, що всі інші елементи підстановки залишаються на своїх місцях*. Можна довести, що довільна транспозиція в підстановці змінює її парність на протилежну.

6. Визначники. Загальний випадок

6.1. Визначники n–го порядку

Визначники 2-го та 3-го порядків були розглянуті в зв’язку з побудовою розв’язків відповідних систем лінійних рівнянь.

Переходячи до розгляду систем лінійних рівнянь з довільним числом невідомих, введемо спочатку поняття визначника ***n***–го порядку, розглянемо його властивості, а потім застосуємо результати для побудови розв'язку системи лінійних рівнянь.

Розглянемо квадратну матрицю ***n***–го порядку

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Означення.</u> *Визначником матриці* ***A*** ***n****–го порядку (або просто визначником* $|A|$ ***n****–го порядку) називається алгебраїчна сума* ***n!*** (***n****–факторіал*) *його членів, кожний з яких є добутком* ***n*** *елементів матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного її стовпця та кожного рядка. Причому добуток входить в суму зі своїм знаком, якщо підстановка, складена з індексів елементів добутку (номерів рядків та номерів стовпців елементів), парна, і з протилежним знаком, якщо підстановка індексів непарна*.

Підстановка, яка відповідає даному члену визначника, будується таким чином: якщо елемент a_{ij} матриці входить в член визначника, то в підстановці число ***i*** (номер рядка елемента a_{ij}) переходить в число ***j*** (номер стовпця елемента a_{ij}). Таким чином, кожний член визначника $|A|$ ***n***–го порядку можна подати у вигляді

$$(-1)^{\nu(\sigma)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$$

(якщо ν(σ) = 0, то вважаємо, що $(-1)^{\nu(\sigma)} = 1$).
Тоді:

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} (-1)^{\nu(\sigma)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

де сума береться по всім без винятку підстановкам **n**-го степеня.

6.2. Основні властивості визначників

Можна довести наступні властивості визначників:

1. При транспонуванні матриці ***n****–го порядку її визначник не змінюється.*

Ця властивість визначників підкреслює, що при вивченні властивостей визначників його рядки та стовпці абсолютно рівноправні – всі властивості, які сформульовані в термінах рядків визначника, мають місце і для стовпців.

2. Визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.

3. Якщо визначник має рядок (стовпчик), всі елементи якого дорівнюють нулю, то він (визначник) дорівнює нулю.

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпчика), то він дорівнює
нулю.

5. Знак визначника зміниться на протилежний, якщо поміняти місцями два його довільні рядки (стовпця). При цьому абсолютна величина визначника не змінюється.

6. Спільний множник всіх елементів будь-якого рядка (стовпчика) визначника можна винести за знак визначника. Цю властивість визначника можна подати і так: *якщо довільний рядок (стовпчик) визначника помножити на деяке число, то весь визначник помножиться на це число.*

7. Визначник, у якого відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні (два рядки пропорційні), дорівнює нулю.

8. Якщо елементи деякого і-того рядка (стовпчика) визначника є сумами двох доданків, то цей визначник можна подати як суму двох визначників, що утворені з вихідного визначника заміною елементів і-того рядка (стовпчика) відповідно першими або другими доданками цих елементів.

9. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого його рядка (стовпчика) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на одне і те ж саме довільне число (до будь-якого рядка (стовпчика) додати довільний інший рядок (стовпчик) з довільним коефіцієнтом).

6.3. Знаходження визначника зведенням його до трикутного виду

Нехай нам задано довільний визначник трикутного типу (наприклад, верхній трикутний):

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Підрахуємо його, використовуючи означення визначника. Зауважимо, що всі члени визначника, які містять всі елементи першого стовпчика (за винятком тих членів, які містять елемент a_{11}), дорівнюють нулю, бо у відповідний добуток входить число 0. Аналогічно, серед тих членів визначника, які містять елемент a_{11} (його фіксування вилучає з подальшого розгляду елементи першого стовпчика та першого рядка), всі будуть дорівнювати нулю, крім тих, які містять елемент a_{22}. І так далі. Отримаємо, що можливим єдиним відмінним від нуля членом визначника є той, який визначається добутком діагональних елементів матриці, тобто добутком $a_{11}a_{22}...a_{nn}$. Цей добуток співпадає з членом визначника (береться зі своїм знаком), оскільки відповідна підстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

не містить інверсій, тобто є парною.

Таким чином, визначник верхнього трикутного виду дорівнює добутку елементів головної діагоналі матриці. Оскільки при транспонуванні верхня трикутна матриця перетворюється в нижню трикутну і визначник при транспонуванні не змінюється, то визначник нижнього трикутного виду теж дорівнює добутку елементів головної діагоналі матриці.

Нами доведена теорема:

Теорема. *Визначник трикутного виду дорівнює добутку елементів головної діагоналі матриці*:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

або

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\,.$$

На основі останньої теореми можна запропонувати наступну схему підрахунку визначника – звести вихідний визначник до трикутного виду, використовуючи властивості визначників, та застосувати теорему про визначник трикутного виду.

Приклад. Знайти визначник:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 20 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Підрахуємо визначник зведенням його до трикутного виду. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці визначника. Тоді на місце елемента a_{11} вийде одиниця («зручний» елемент для перетворення всіх інших елементів першого стовпчика в нулі). Така дія над рядками матриці визначника змінить знак вихідного визначника на протилежний (див. властивості визначників). Маємо:

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 20 & 27 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 27 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix}.$$

Далі скористаємося тим, що визначник не змінюється, якщо до будь-якого рядка додати довільний інший рядок, помножений на деяке число. Зафіксуємо перший рядок останнього визначника із «зручним» діагональним елементом, додамо його послідовно до інших рядків визначника, попередньо помноживши його на числа (-7) (при додаванні до другого рядка визначника), (-5) (при додаванні до третього рядка визначника) та (-3) (при додаванні до четвертого рядка визначника). В подальшому про такі перетворення визначника будемо говорити «перетворимо рядки визначника з допомогою першого рядка». Отримаємо:

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad -7 \quad -5 \quad -3 \end{array}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 14 & 20 & 27 \\ 5 & 10 & 16 & 19 \\ 3 & 5 & 6 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику поміняємо місцями другий та четвертий рядки визначника (знак визначника знову зміниться на протилежний). Отримаємо:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далі перетворимо останній рядок визначника з допомогою третього. Отримаємо трикутний визначник:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & 0 & -1 & -3 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 0 & -1 & -1 & \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Тепер до останнього визначника застосуємо теорему про визначник трикутного виду. Отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-2) = 2.$$

Відповідь: 2.

Зауваження. З попереднього прикладу зрозуміло, що в якості «зручних» елементів матриці визначника використовуються діагональні елементи матриці, на які діляться всі елементи стовпчика (що містить «зручний» елемент), розміщені в цьому стовпчику нижче. Не завжди матриця визначника містить «зручні» елементи. У такому випадку його завжди можна отримати, оперуючи рядками та стовпчиками вихідної матриці. Покажемо, як це можна зробити на конкретному прикладі.

Приклад. Знайти визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Переглядаючи стовпчики (або рядки) матриці бачимо, що матриця не містить «зручних» елементів (в матриці немає таких стовпчиків (або рядків), в яких можна було б зафіксувати такий елемент, на який ділилися б всі інші елементи цього стовпчика (або рядка)). Аналогічно попередньому прикладу, перетворення будемо позначати стрілочками. Маємо:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 \\ \\ -3 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 0 & -10 & 0 & -18 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & -6 & 0 & -10 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 0 & -18 \end{vmatrix} =$$

Для зручності з другого, третього, та четвертого рядків винесемо за знак визначника множники (-1) (або помножимо ці рядки на (-1)). Маємо далі:

$$-\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix}\begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$$

далі: Тепер з другого, третього та четвертого рядків винесемо множники (2). Маємо

$$8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -3 \\ \\ \\ \end{matrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = 16.$$

<u>Відповідь:</u> 16.

<u>6.4. Мінори та їх алгебраїчні доповнення</u>

Якщо у будь-якому визначнику ***n***-го порядку ($n \geq 2$) зафіксувати довільні ***k*** $(1 \leq k \leq n-1)$ рядків та стовпчиків, то визначник, який визначається перетином цих рядків та стовпчиків, називається *мінором **k**-того порядку* ***M***, що знаходиться у зафіксованих рядках та стовпчиках, а елементи матриці, які не належать вказаним рядкам та стовпчикам вихідного визначника, утворять *додатковий (для мінору **M**) мінор (**n-k**)-того порядку* D_M.

<u>Приклад</u>

Нехай нам задано визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Зафіксуємо в ньому довільні три рядки (наприклад, другий, третій та п'ятий) і довільні три стовпчики (наприклад, перший, третій та четвертий). Маємо:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Тоді мінор, який міститься на перетині виділених рядків та стовпчиків, та його додатковий мінор є відповідно:

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} \quad \text{та} \quad D_M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

Якщо до додаткового мінору прилаштувати знак, який визначається «координатами» основного мінору, а саме :

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k},$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – номери рядків, а $j_1, j_2, \ldots, j_k$ – номери стовпчиків визначника, в яких міститься *основний* мінор, то отримаємо ***алгебраїчне доповнення*** A_M цього мінору.
Таким чином,

$$A_M = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} D_M .$$

У вищенаведеному прикладі алгебраїчне доповнення вихідного мінору

$$A_M = (-1)^{2+3+5+1+3+4} D_M = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

збігається з додатковим мінором.

З допомогою мінорів та їх алгебраїчних доповнень можна сформулювати дуже ефективний метод підрахунку визначників великих порядків. Цей метод визначає теорема Лапласа.

Теорема Лапласа. *Якщо у визначнику **n**-го порядку ($n \geq 2$) зафіксувати довільні **k** ($1 \leq k \leq n-1$) рядків (або стовпчиків), то цей визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків **усіх** мінорів **k**-го порядку, які містяться у виділених рядках (або стовпчиках), на їх алгебраїчні доповнення.*

Практичне застосування теореми Лапласа ефективне тільки в тому випадку, коли більшість мінорів, які містяться у виділених рядках (або стовпчиках), дорівнюють нулю. У загальному випадку застосування теореми Лапласа теж має сенс, бо зводить підрахунок визначників великих порядків до підрахунку визначників значно менших порядків.
Приклад. Знайти визначник:

$$\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перетворимо визначник таким чином, щоб деякі його рядки (або стовпчики) мали якомога більше нулів на відповідних місцях, тобто розташованих в однакових стовпчиках (або рядках). Використовуючи властивості визначників, маємо:

$$\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \; 1 \; =$$

-3

-2

$$= \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

В останньому визначнику зафіксуємо третій та п’ятий стовпчики. Тоді, за теоремою Лапласа, визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків мінорів другого порядку, які містяться у виділених стовпчиках, на їх алгебраїчні доповнення. Зауважимо, що в зафіксованих стовпчиках тільки один мінор, можливо, відмінний від нуля, а саме мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

інші мінори другого порядку, які містяться у виділених стовпчиках, нульові (бо або мають нульовий рядок, або взагалі складаються з нулів). Таким чином, у зазначеній сумі всі доданки, крім одного, дорівнюють нулю. Отже:

$$\begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник третього порядку можна знайти за правилом трикутника, але його можна вирахувати і з застосуванням теореми Лапласа. Зафіксуємо в ньому третій рядок. Тоді цей визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків мінорів першого порядку (елементів рядка) на їх алгебраїчні доповнення. Знову ж таки, оскільки всі елементи цього рядка нульові за виключенням одного, ця сума буде мати єдиний доданок. Маємо:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\left(-1\right)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -36.$$

Таким чином:

$$\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -36.$$

<u>Відповідь:</u> -36.

Частковий випадок теореми Лапласа, коли фіксується один рядок (або стовпчик), дуже часто використовується в алгебрі і тому має місце самостійна

<u>Теорема (про розклад визначника за елементами рядка).</u>

*Якщо у визначнику **n**-го порядку ($n \geq 2$) зафіксувати довільний рядок (або стовпчик), то цей визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків **<u>усіх</u>** елементів, які містяться у виділеному рядку (або стовпчику), на їх алгебраїчні доповнення. Таким чином:*

$$\underset{i \in \overline{1,n}}{\forall i}: \quad \Delta = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in},$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} $(i, j \in \overline{1;n})$.

Крім того, має місце

<u>Теорема (про «чужі» доповнення).</u>

*Якщо у визначнику **n**-го порядку ($n \geq 2$) зафіксувати довільний рядок (або стовпчик), то сума добутків **<u>усіх</u>** елементів, які містяться у виділеному рядку (або стовпчику), на відповідні алгебраїчні допо-*

внення елементів іншого рядка (стовпчика), тобто на «чужі» доповнення, дорівнює нулю. Таким чином:

$$\forall_{\substack{i,j\in\overline{1,n}\\ i\neq j}} i, j: \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot A_{jk} = a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{jn} = 0,$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} $(i, j \in \overline{1;n})$.

7. Обернена матриця. Матричні рівняння

7.1. Обернена матриця

Означення. *Квадратна матриця називається* ***неособливою****, якщо її визначник не дорівнює нулю. В іншому разі матриця називається* ***особливою****.*

Означення. *Матриця* A^{-1} *називається оберненою для матриці A, якщо*

$$.\ A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Теорема *(критерій існування оберненої матриці).*

Матриця A має обернену тоді та тільки тоді, коли ця матриця A є неособливою.

Для знаходження матриці, оберненої до даної матриці, необхідно застосувати такий алгоритм:

а) Знайти визначник матриці $\Delta = |A|$. Якщо $|A|\neq 0$, продовжити кроки алгоритму;

б) Для кожного елемента матриці знайти його алгебраїчне доповнення та замістити всі елементи вихідної матриці на їх алгебраїчні доповнення;

в) Транспонувати матрицю, отриману на кроці б), алгоритму;

г) Поділити всі елементи матриці, отриманої на кроці в) алгоритму на визначник вихідної матриці.

Таким чином, якщо $|A|\neq 0$, то

при $A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, маємо $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо вона існує, для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будемо керуватись вищенаведеним алгоритмом. Знайдемо визначник матриці. Маємо |A| = -18 (перевірити!). Значить, матриця A^{-1} існує. Знайдемо для кожного елемента матриці його алгебраїчне доповнення. Маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18; \qquad A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=9; \qquad A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}=0; \qquad A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix}=0; \qquad A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=-6.$$

Тепер побудуємо матрицю, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів вихідної матриці:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-6 & 6 & -18 & 0\\ 9 & 0 & -9 & 0\\ -3 & -6 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

Транспонуємо отриману матрицю. Маємо:

$$\widetilde{A}^T=\begin{pmatrix}-6 & 9 & -3 & 0\\ 6 & 0 & -6 & 0\\ -18 & -9 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

Розділимо всі елементи останньої матриці на визначник вихідної матриці (на (-18)) та отримаємо матрицю, обернену для вихідної.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Побудувавши добутки $A^{-1}A$ та AA^{-1}, переконаємося, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, тобто матриця A^{-1} знайдена правильно (переконатися в цьому самостійно).

7.2. Матричні рівняння

Рівняння $\boldsymbol{AX = B}$ (або $\boldsymbol{XA = B}$), де $A = A_{m\times m}, B = B_{m\times k}$ деякі задані матриці, а $X = X_{m\times k}$ – невідома матриця, називається ***матричним рівнянням***.

Якщо матриця А квадратна та неособлива, то ма~~три~~чне рівняння $\boldsymbol{AX = B}$ можна розв'язати з допомогою матриці, оберненої для матриці $\boldsymbol{A}$.

Оскільки матриця A неособлива, то знайдемо матрицю A^{-1}, обернену для матриці A, та помножимо обидві частини рівняння $\boldsymbol{AX = B}$ зліва (для рівняння $\boldsymbol{XA = B}$ – справа) на матрицю A^{-1}. Отримаємо:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{(або } (XA)A^{-1} = BA^{-1}\text{)}.$$

Далі маємо:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad \text{(або } X(AA^{-1}) = BA^{-1}\text{)},$$

$$EX = A^{-1}B \qquad \text{(або } XE = BA^{-1}\text{)},$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{(або } X = BA^{-1}\text{)}.$$

8. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
Метод Гауса

8.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою $\boldsymbol{m}$ *лінійних алгебраїчних рівнянь з* $\boldsymbol{n}$ *невідомими називається система*

$$\textbf{(8.1.1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn} = b_m. \end{cases}$$

Набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ називається ***розв'язком (частковим) системи рівнянь*** (8.1.1), якщо при підстановці цих чисел у систему замість відповідних змінних кожне рівняння системи перетворюється у вірну числову рівність. Система (8.1.1), що має хоча б один розв'язок, називається ***сумісною*** (в противному разі система називається ***несумісною***). СЛАР, яка має ***єдиний*** розв'язок, називається ***визначеною***, а СЛАР, що має більше ніж один розв'язок – ***невизначеною***. Множину всіх без винятку розв'язків системи називають ***загальним розв'язком*** системи. Дві системи ***еквівалентні (рівносильні)***, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків (їх загальні розв'язки співпадають).

Нагадаємо відомі зі шкільного курсу елементарної математики перетворення рівнянь СЛАР, які приводять до систем, еквівалентних вихідній системі (***еквівалентні перетворення***):

- якщо обидві частини деякого рівняння СЛАР помножити на довільне число, яке не дорівнює нулю, то отримаємо систему, рівносильну вихідній;

- якщо в СЛАР поміняти місцями два довільні рівняння, то отримаємо систему, рівносильну вихідній;

- якщо до будь-якого рівняння СЛАР додати довільне інше рівняння цієї СЛАР, помножене на деяке число, то отримаємо систему, рівносильну вихідній.

У подальшому еквівалентні перетворення СЛАР будемо називати її ***елементарними перетвореннями***.

Матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{23} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають ***матрицею коефіцієнтів при невідомих*** системи *(8.1.1)* (або ***основною матрицею*** системи), а матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ ***розширеною матрицею*** СЛАР.

8.2. Метод Гауса розв'язування СЛАР

Одним з найбільш універсальних і найефективнішим обчислювальним методом розв'язування лінійних алгебраїчних систем є ***метод Гауса***, який полягає в послідовному вилученні невідомих (Карл Фрідріх Гаус (1777-1855) – німецький математик). Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою послідовних вилучень невідомих вихідна система перетворюється на ступінчасту (зокрема, в трикутну) систему, рівносильну даній.

Нехай задана система рівнянь (8.1.1). Процес розв'язування системи за методом Гауса складається з двох етапів. На першому етапі (прямий хід) система зводиться до ступінчастого (зокрема, трикутного) вигляду. Наведена нижче система має ступінчастий вигляд :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \quad 1 < k \le n, a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, k}.$$

Від ступінчатого виду системи треба перейти до такої системі, ліва частина якої буде трикутного виду. Для цього відповідні доданки треба перенести з лівої частини рівнянь системи в праву частину цих рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1k}x_k & = & -a_{1\,k+1}x_{k+1} & -a_{1k+2}x_{k+2} & \cdots & -a_{1n}x_n + b_1 \\ & a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2k}x_k & = & -a_{2\,k+1}x_{k+1} & -a_{2k+2}x_{k+2} & \cdots & -a_{2n}x_n + b_2 \\ & & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ & & & +a_{kk}x_k & = & -a_{k\,k+1}x_{k\,k+1} & -a_{kk+2}x_{k\,k+2} & \cdots & -a_{kn}x_n + b_k \end{cases}$$

На другому етапі (зворотній хід) йде послідовне знаходження невідомих з останньої трикутної системи (рухаючись у зворотному напрямі від останнього рівняння трикутної системи до першого її рівняння). Опишемо ***метод Гауса*** детальніше.

Прямий хід. Будемо вважати, що елемент $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то першим в системі запишемо рівняння, в якому коефіцієнт при $\boldsymbol{x}_1$ відмінний від нуля). Перетворимо систему (8.1.1) за допомогою першого рівняння, вилучивши невідому $\boldsymbol{x}_1$ у всіх рівняннях, окрім першого, з допомогою елементарних перетворень системи. Помножимо обидві частини першого рівняння на $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$, додамо його до другого рівняння системи і запишемо результат замість другого рівняння. Потім помножимо обидві частини першого рівняння на $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$, додамо його до третього рівняння системи і запишемо результат замість третього рівняння. І так далі. Інакше кажучи, користуючись першим рівнянням, вилучимо невідому $\boldsymbol{x_1}$ з інших рівнянь системи.

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}} \quad -\frac{a_{31}}{a_{11}} \ldots -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо систему, еквівалентну початковій

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases},$$

де $a_{ij}^{(1)}, b_i^{(1)},\ i,j = \overline{2,m}$ – нові значення коефіцієнтів при невідомих та вільних членів рівнянь, які виникають після першого кроку розв’язування СЛАР.

Аналогічним чином, вважаючи діагональний елемент $a_{22}^{(1)} \neq 0$, вилучимо невідому $\boldsymbol{x}_2$ з усіх рівнянь системи, що лежать нижче, користуючись другим рівнянням отриманої на попередньому кроці системи рівнянь. Продовжуємо цей процес, поки це можливо.

Якщо в процесі зведення системи (8.1.1) до ступінчастого вигляду з'являться нульові рівняння, тобто рівності вигляду 0 = 0, їх відкидають, оскільки вони виконуються тотожно і в цілому не впливають на множину розв’язків.

Якщо ж з'явиться рівняння вигляду $0 = b_i, b_i \neq 0$, то це свідчить про несумісність системи.

Другий етап (***зворотний хід***) полягає у розв’язанні відповідної трикутної системи. Вона, взагалі кажучи, має нескінчену множину розв’язків. З останнього рівняння цієї системи виражаємо першу невідому $\boldsymbol{x}_k$ через інші невідомі $x_{k+1},\ldots,x_n$. Потім підставляємо вираз для

$\boldsymbol{x}_k$ у передостаннє рівняння системи і виражаємо $\boldsymbol{x}_{k-1}$ через $x_{k+1},\dots,x_n$. Далі, аналогічним чином, виражаємо $\boldsymbol{x}_{k-2},\dots,\boldsymbol{x}_1$ через $x_{k+1},\dots,x_n$. Отримаємо загальний розв'язок, як вираз ***залежних змінних*** (що стоять зліва в рівняннях останньої системи) через ***незалежні або вільні змінні*** (що стоять в правих частинах рівнянь останньої системи):

$$\begin{cases} x_1 & = & c_{1\,k+1}x_{k+1} & +c_{1\,k+2}x_{k+2}+ & \cdots & +c_{1\,n}x_n & +b_1 \\ x_2 & = & c_{2\,k+1}x_{k+1} & +c_{2\,k+2}x_{k+2}+ & \cdots & +c_{2\,n}x_n & +b_2 \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ x_k & = & c_{k\,k+1}x_{k+1} & +c_{k\,k+2}x_{k+2}+ & \cdots & +c_{k\,n}x_n & +b_k \end{cases}$$

Конкретні розв'язки (часткові) отримуються із загального розв'язку приписуванням вільним змінним $x_{k+1},\dots,x_n$ довільних значень і підрахунком відповідних значень залежних змінних. Зрозуміло, що в цьому випадку отримаємо нескінчену множину (часткових) розв'язків системи.

<u>Зауваження:</u>

1. Якщо ступінчаста система виявляється трикутною, тобто $k = n$, то вихідна система має єдиний розв'язок. З останнього рівняння знаходимо x_n, з передостаннього рівняння x_{n-1}, далі, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі, тобто єдиний розв'язок $(x_1,\dots,x_n)$.

2. Зручно, щоб на кожному кроці перетворень вихідної системи провідний діагональний коефіцієнт a_{ii} дорівнював одиниці (рівняння переставити місцями або розділити обидві частини рівняння на $a_{ii} \neq 0$).

<u>Приклад.</u> Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Оскільки виконання алгоритму Гауса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь зводиться до виконання певних дій над коефіцієнтами системи, то виконання цього алгоритму зручно проводити, оперуючи розширеною матрицею системи. Як і при описанні самого алгоритму, перетворення рядків матриці (відповідних рівнянь системи) будемо позначати стрілками. Користуючись першим рівнянням системи (першим рядком матриці) та підбираючи відповідні коефіцієнти, вилучимо першу змінну системи (тобто x_1) з інших рівнянь системи (зробимо всі елементі першого стовпчика матриці нульовими, за виключенням першого діагонального елементу). Маємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad (-2) \quad (-1) \quad (-5) \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Другий та третій рядки матриці можна поділити на (–3), а четвертий – на (–6). Потім, використовуючи другий рядок матриці, зробимо нульовими елементи третього стовпчика в третьому та четвертому рядках матриці (вилучимо змінну x_3 з третього та четвертого рівнянь системи). Маємо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad (-1) \quad (-1) \quad \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає ступінчастій системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

а тому є невизначеною. При розв’язанні системи ступінчатого виду зручно спочатку звести її до трикутного виду, переносячи відповідні невідомі (змінні) в праву частину системи (в нашому випадку такими невідомими є x_2 та x_4, або x_2 та x_3). Маємо (якщо вільні змінні - x_2 та x_4) трикутний вид системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 + x_2 + x_4 \\ \qquad x_3 = x_4 \end{cases}.$$

Тепер, рухаючись від останнього рівняння системи до першого (знизу догори по системі), знаходимо загальний розв’язок системи:

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}.$

Така форма подання загального розв'язку є ***стандартною формою*** подання ***загального розв'язку*** системи. Нагадаємо, що при цьому змінні правої частини загального розв'язку системи в стандартній формі називаються ***вільними*** (або ***незалежними***) змінними системи, а змінні лівої частини – ***залежними*** змінними системи. Користуючись стандартною формою подання загального розв'язку системи, надаючи вільним змінним системи довільних значень та підраховуючи значення залежних змінних, отримаємо конкретні часткові розв'язки системи. Наприклад, якщо $x_2=1$ та $x_4=1$, то $x_1=2$ та $x_3=1$. Таким чином, (2, 1, 1, 1) – частковий розв'язок системи.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Обчислити визначники:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ ***Відповідь***: $\Delta = 1$;

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ***Відповідь***: $\Delta = 148$.

2. Розв'язати системи за методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$ ***Відповідь***: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, -1)$.

б) $\begin{cases} 5x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_3 = 16 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ ***Відповідь***: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 5)$.

3. Обчислити AB–BA, де:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}.\qquad \textbf{\textit{Відповідь}}:\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати матричні рівняння:

а) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$. ***Відповідь***: $X=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$. ***Відповідь***: $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

5. Розв'язати системи методом Гауса:

а) $\begin{cases}3x_1-7x_2+4x_3+5x_4=-11\\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=5\\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4=7\\ 7x_1+2x_2-x_3+11x_4=6\end{cases}$

Відповідь: Система несумісна.

б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_4=0\\ x_1+2x_2-x_3=0\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\end{cases}$

Відповідь: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,\frac{2}{7},\frac{4}{7},\frac{1}{7})$.

в) $\begin{cases}7x_1+3x_2-2x_3+4x_4=0\\ -6x_1-x_2-x_3+x_4=1\\ 9x_1+7x_2-8x_3+14x_4=2\\ x_1+x_2-3x_3+5x_4=1\end{cases}$.

Відповідь: Загальний розв'язок системи: $\begin{cases}x_1=-\frac{2}{19}-\frac{2}{19}x_4\\ x_2=0\\ x_3=-\frac{7}{19}+\frac{31}{19}x_4\end{cases}$.

Один з часткових розв'язків $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,-2,-1)$.

Список рекомендованої літератури

1. Боревич З. И. Определители и матрицы. М.: «Наука», 1988.

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: «Наука», 1971.

3. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. М.: «Просвещение», 1966.

Навчальне видання

Баландіна Наталія Миколаївна

Федоровський Сергій Васильович

МАТРИЧНЕ ЧИСЛЕННЯ

Методичні вказівки для студентів
першого курсу напряму підготовки 030102 «Психологія»

В авторській редакції

Підп. до друку 20.11.2015. Формат 60х84/16.
Умов.-друк. арк. 2,33. Тираж 25 пр.
Зам. № 1271.
Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua