Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача теплопровідності для прямокутної пластини з тріщиною»

«Thermal conductivity problem for a rectangular plate with a crack»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма “Прикладна математика”

Жирко Микола Віталійович

Керівник: канд. фіз-мат. наук, доц. Журавльова З.Ю.
Рецензент: канд. фіз-мат. наук, доц. Фесенко Г.О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від _____________2023 р.

Завідувач кафедри

_________- ____________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №_______
протокол № ____ від ________ 2023 р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

___________ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

У рамках даної дипломної роботи буде розглянута задача теплопровідності для прямокутної пластини з тріщиною. Дослідження буде включати теоретичну частину та чисельні розрахунки.

У теоретичній частині будуть проаналізовані послідовні кроки зведення задачі до одновимірної форми і її розв'язання. Особлива увага буде приділена оберненню інтегрального перетворення для отримання виразів для температури.

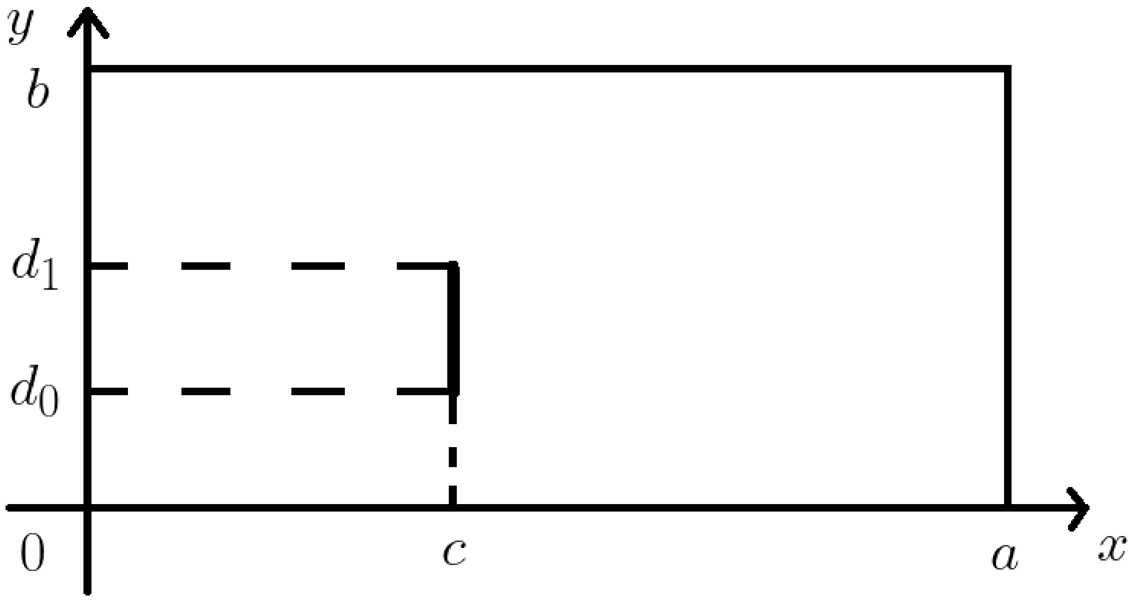
У чисельних розрахунках будуть розв’язані задачі у просторі трансформант, здійснене обернення інтегрального перетворення та записане сингулярне інтегральне рівняння.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА І ЧИСЕЛЬНІ РОЗРАХУНКИ

1.1 Постановка задачі

Розглянемо пластину з тріщиною



(Рис. 1)

Рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b$$

Крайові умови на сторонах пластини

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = 0, 0 < y < b$$

Крайові умови на верхній і нижніх гранях пластини

$$u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = p(x), 0 < x < a$$

Умови на тріщині

$$< u(c,y) >= u(c-0,y) - u(c+0,y) = X(y), d_0 < y < d_1$$

$$< \frac{\partial u}{\partial x}(c,y) >= \frac{\partial u}{\partial x}(c-0,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(c+0,y) = 0, d_0 < y < d_1$$

1.2 Зведення задачі до одновимірної

Відповідно до загальної схеми, інтегральне перетворення по змінній x шукаємо у вигляді

$$u_\alpha(y) = \int_0^a u(x, y) K(x, \alpha) dx$$

де $K(x, \alpha)$ - поки що невідоме ядро інтегрального перетворення

Для того, щоб вихідна крайова задача трансформувалась до одновимірної крайової задачі відносно $u_\alpha(y)$ необхідно, щоб ядро $K(x, \alpha)$ інтегрального перетворення було розв'язком наступної задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \frac{d^2K}{dx^2} + \alpha K = 0, 0 < x < a \\ K(0, \alpha) = 0, K(a, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Враховуючи крайові умови, даній задачі відповідає скінченне перетворення Фур'є

$$u_\alpha(y) = \int_0^a u(x, y) \cos \alpha x dx, \alpha = \frac{\pi k}{a}, k = 0, 1, 2...$$

Формула оберненого інтегрального перетворення має наступний вигляд

$$u(x, y) = \frac{1}{a}[u_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty} u_{\alpha_k} \cos \alpha_k y]$$

Застосуємо інтегральне перетворення до крайових умов вихідної задачі за змінною y. Помножимо обидві частини на ядро інтегрального перетворення та проінтегруємо по змінній x у межах від 0 до a:

$$\int_0^a u''_{xx}\cos\alpha_k x dx = (u'_x\cos\alpha_k x)|_{x=0}^{x=c-0} + (u'_x\cos\alpha_k x)|_{x=c+a}^{x=a} +$$
$$+\alpha_k\left(\int_0^{c-0}+\int_{c+0}^{a}\right)u'_x\sin\alpha_k x dx = [u'_x(c-0,y)-u'_x(c+0,y)]\cos\alpha_k c+$$
$$+\alpha_k\left\{\begin{array}{c} u_x\cos\alpha_k x|_{x=0}^{x=c-0} + u_x\cos\alpha_k x|_{x=c+a}^{x=a} \\ -\alpha_k(\int_0^{c-0}+\int_{c+0}^{a})u_x\cos\alpha_k x dx\end{array}\right\} =$$
$$=< u'_x(c,y) > \cos\alpha_k x dx + \alpha_k[u(c-0,y)-u(c+0,y)]\sin\alpha_k x dx -$$
$$-\alpha_k^2\int_0^a u_x\cos\alpha_k x dx = \alpha_k < u_x(c,y) > \sin\alpha_k c - \alpha_k^2 u_{\alpha_k}(y)$$

Підставляючи параметри до початкового інтегралу, отримаємо вигляд диференціального рівняння вихідної задачі у просторі трансформант

$$u''_\alpha(y) - \alpha^2 u_\alpha(y) = f(y)$$

Де

$$f(y) = \begin{cases} -\alpha_k\chi(y)\sin\alpha_k c, d_0 < y < d_1 \\ 0, y \notin (d_0, d_1)\end{cases}$$

Застосуємо до умов за змінною y

$$u(x,0) = 0, u(x,b) = p(x)$$

$$\int_0^a u|_{y=b}\cos\alpha_k x dx = \rho_k, \rho_k = \int_0^a p(x)\cos\alpha_k x dx$$

$$\int_0^a u|_{y=0}\cos\alpha_k x dx = 0$$

1.3 Розв’язання задачі у просторі трансформант

В результаті приходимо до наступної одновимірної крайової задачі у просторі трансформант:

$$\begin{cases} u_k''(y) - \alpha_k^2 u_k(y) = f(y), 0 < y < b \\ u(0) = 0, u(b) = \rho_k \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу

Одновимірна крайова задача є неоднорідною крайовою задачею, тому її розв’язок можна побудувати за формулою

$$u_k(y) = \int_0^\infty f(\eta) G(y,\eta) d\eta + \rho_k \psi_1(y)$$

Функцію Гріна побудуємо за наступною формулою

$$G(y,\eta) = \phi(y,\eta) - \psi_0(y) U_0[\phi(y,\eta)] - \psi_1(y) U_1[\phi(y,\eta)]$$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв’язків

$$\begin{cases} \psi_0'' - \alpha^2 \psi_0 = 0 \\ \psi_0(0) = 1, \psi_0(b) = 0 \end{cases}, \begin{cases} \psi_1'' - \alpha^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_1(0) = 0, \psi_1(b) = 1 \end{cases}$$

Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції ψ_0, ψ_1 такі,

що

$$\begin{cases} \psi_0'' - \alpha^2\psi_0 = 0, \\ \psi_0(0) = 1, \psi_0(b) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi_1'' - \alpha^2\psi_1 = 0, \\ \psi_1(0) = 0, \psi_1(b) = 1 \end{cases}$$

$$\psi_0(y) = C_{00} sh\alpha(b-y) + C_{01} ch\alpha(b-y), \quad \psi_1(y) = C_{10} sh\alpha y + C_{11} ch\alpha y$$

$$\psi_0(b) = 0 => C_{01} = 0, \quad \psi_1(0) = 0 => C_{11} = 0$$

$$\psi_0(0) = 1 => C_{00} sh\alpha b = 1, \quad \psi_1(b) = 1 => C_{10} sh\alpha b = 1$$

$$C_{00} = \frac{1}{sh\alpha b}, \quad C_{10} = \frac{1}{sh\alpha b}$$

$$\psi_0(y) = \frac{sh\alpha(b-y)}{sh\alpha b}, \quad \psi_1(y) = \frac{sh\alpha y}{sh\alpha b}$$

$$\psi_0(y) = \frac{e^{-\alpha y} - e^{-\alpha(2b-y)}}{1 - e^{-2\alpha b}}, \quad \psi_1(y) = \frac{e^{-\alpha(b-y)} - e^{-\alpha(y+b)}}{1 - e^{-2\alpha b}}$$

Далі знаходимо фундаментальну функцію, що відповідає даному рівнянню

Фундаментальна функція, що відповідає даному рівнянню має наступний вигляд

$$\phi(y,\eta) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|y-\eta|}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{sign(y-\eta)}{2} e^{-\alpha|y-\eta|}$$

Підставляємо фундаментальну функцію у крайові функціонали задача і отримуємо функцію Гріна для загального випадку $k \neq 0$

$$U_0[\phi(y-\eta)] = \phi(0,\eta) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\eta}$$

$$U_1[\phi(y-\eta)] = \phi(b,\eta) = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(b-\eta)}$$

Тоді функція Гріна для загального випадку матиме вигляд

$$\begin{aligned} G(y,\eta) = &-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|y-\eta|} + \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\eta} \frac{e^{-\alpha y} - e^{-\alpha(2b-y)}}{1 - e^{-2\alpha b}} \\ &+ \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha(b-\eta)} \frac{e^{-\alpha(b-y)} - e^{-\alpha(y+b)}}{1 - e^{-2\alpha b}} \\ &= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|y-\eta|} \\ &+ \frac{e^{-\alpha(y+\eta)} - e^{-\alpha(2b-y+\eta)} + e^{-\alpha(2b-y-\eta)} - e^{-\alpha(2b+y-\eta)}}{2\alpha(1 - e^{-2\alpha b})} \end{aligned}$$

Розв’язок крайової задачі можна записати через функцію Гріна

$$u_a(y) = \int_0^b \frac{1}{2\alpha}[-\alpha_k \chi(y) \sin \alpha_k c][-e^{\alpha|y-\eta|} + \frac{e^{-\alpha(y+\eta)} - e^{-\alpha(2b-y+\eta)} + e^{-\alpha(2b-y-\eta)} - e^{-\alpha(2b+y-\eta)}}{1-e^{-2\alpha b)}}]d\eta +$$
$$+ (\rho k)(\frac{e^{-\alpha(b-y)} - e^{-\alpha(b+y)}}{1-e^{-2\alpha b}})$$

Потрібно також виконати минулі дії для випадку $k = 0$

Побудуємо фундаментальну базисну систему розв’язків. Відповідно визначенню, ФБСР крайової задачі складають функції ψ_0, ψ_1 такі, що

$$\begin{cases} \psi_0'' = 0 \\ \psi_0(0) = 1, \psi_0(b) = 0 \end{cases}, \begin{cases} \psi_1'' = 0 \\ \psi_1(0) = 0, \psi_1(b) = 1 \end{cases}$$
$$\psi_0(y) = Ay + B, \quad \psi_0(0) = B = 1, \quad \psi_0(b) = Ab + 1 = 0$$
$$\psi_1(y) = Ay + B, \quad \psi_1(0) = B = 0, \quad \psi_1(b) = Cb = 1$$
$$\psi_0(y) = 1 - \frac{y}{b}, \quad \psi_1(y) = \frac{y}{b}$$

Фундаментальна функція, що відповідає даному рівнянню має наступний вигляд

$$\phi(y, \eta) = \frac{|y-\eta|}{2}$$

Підставимо фундаментальну функцію у крайові функціонали задачі

$$U_0[\phi(y-\eta)] = \phi(0, \eta) = \frac{\eta}{2}$$
$$U_1[\phi(y-\eta)] = \phi(b, \eta) = \frac{b-\eta}{2}$$

Тоді функція Гріна має наступний вигляд

$$G(y, \eta) = \frac{|y-\eta|}{2} - (1 - \frac{y}{b})(\frac{\eta}{2}) - (\frac{y}{b})(\frac{b-\eta}{2})$$

$$G(y,\eta) = \frac{|y-\eta|}{2} - \frac{y^2}{2b} + \frac{\eta}{2}$$

Після, отримані результати підставляємо у функцію Гріна і отримуємо розв'язок крайової задачі

$$u(y) = \int_0^b f(\eta)G(y,\eta)d\eta + A\psi_0(y) + B\psi_1(y)$$

$$u_\alpha(y) = \int_0^b (-\alpha_k\chi(\eta)\sin\alpha_k c)(\frac{|y-\eta|}{2} - \frac{y^2}{2b} + \frac{\eta}{2}) + (\rho_k)(\frac{y}{b})$$

Для окремого випадку - $u_0(y)$

$$u_0(y) = (\rho_k)(\frac{y}{b})$$

1.4 Обернення інтегрального перетворення

Застосовуючи формулу інтегрального перетворення до отриманого розв'язку у просторі трансформант, підставивши вирази для трансформант, отримуємо

$$u(x,y)=\frac{1}{a}[\int_0^b(-\alpha_k\chi(\eta)\sin\alpha_k c)(\frac{|y-\eta|}{2}-\frac{y^2}{2b}+\frac{\eta}{2})+(\rho_0)(\frac{y}{b})+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^b\left\{\frac{1}{2\alpha}[-\alpha_k\chi(\eta)\sin\alpha_k c][-e^{\alpha|y-\eta|}+\frac{e^{-\alpha(y+\eta)}-e^{-\alpha(2b-y+\eta)}+e^{-\alpha(2b-y-\eta)}-e^{-\alpha(2b+y-\eta)}}{1-e^{-2\alpha b)}}]d\eta+\right.$$

$$\left.+(\rho_k)(\frac{e^{-\alpha(b-y)}-e^{-\alpha(b+y)}}{1-e^{-2\alpha b}})\right\}\cos\alpha x$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{a}\cdot 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^b\left\{\frac{1}{2\alpha}[-\alpha_k\chi(\eta)\sin\alpha_k c][-e^{\alpha|y-\eta|}+\right.$$

$$+\frac{e^{-\alpha(y+\eta)}-e^{-\alpha(2b-y+\eta)}+e^{-\alpha(2b-y-\eta)}-e^{-\alpha(2b+y-\eta)}}{1-e^{-2\alpha b)}}]d\eta+$$

$$\left.+(\rho_k)\left(\frac{e^{-\alpha(b-y)}-e^{-\alpha(b+y)}}{1-e^{-2\alpha b}}\right)\right\}\cos\alpha x$$

1.5 Сингулярне інтегральне рівняння

Сингулярне інтегральне рівняння для відшукання невідомої функції $\chi(\eta)$ може бути знайдено з умови відсутності теплового потоку на берегах тріщини:

$$\frac{du}{dx}(c-0,y)=0$$

$$\frac{du}{dx}(c-0,y)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^b\left\{\frac{1}{2\alpha}[-\alpha_k\chi(\eta)\sin\alpha_k c][-e^{\alpha|y-\eta|}+\right.$$

$$+\frac{e^{-\alpha(y+\eta)}-e^{-\alpha(2b-y+\eta)}+e^{-\alpha(2b-y-\eta)}-e^{-\alpha(2b+y-\eta)}}{1-e^{-2\alpha b)}}]d\eta+$$

$$\left.+(\rho_k)\left(\frac{e^{-\alpha(b-y)}-e^{-\alpha(b+y)}}{1-e^{-2\alpha b}}\right)\right\}\cos\alpha c=0$$

РОЗДІЛ 2
ГРАФІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2.1 Графіки

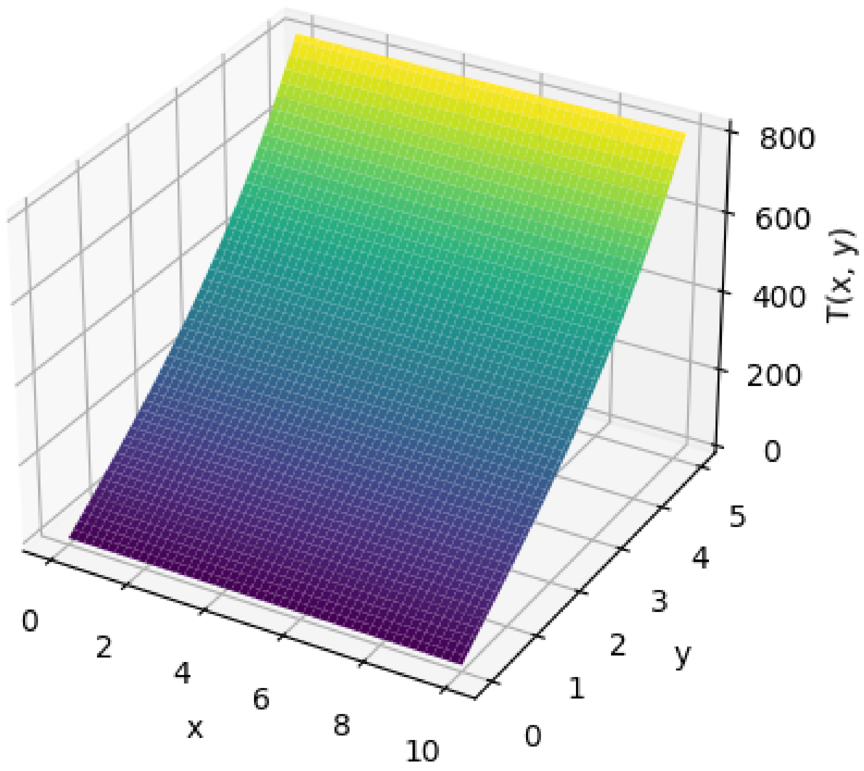


Рис. 2.1.$u_T(x) = -2x$

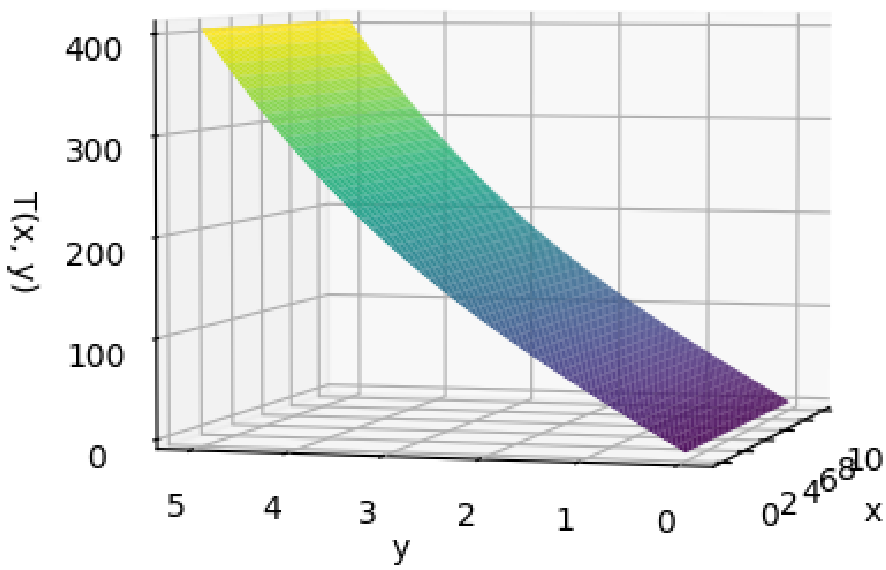


Рис. 2.2. $u_T(x) = -x$

РОЗДІЛ 3
ДОДАТКИ

3.1 Додаток 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Визначте функцію для побудови графіка
def u_T(t):
    return -2 * t


def T(x, y, a, b):
    mu_k = np.pi / a
    integral_1 = (1 / (a * b)) * np.trapz(u_T(np.linspace(0, a, 100)), np.linspace(0, a, 100))
    series_sum = 0
    for n in range(1, 101):  # За потреби відрегулюйте діапазон для досягнення бажаної точності
        mu_k_b = mu_k * b
        mu_k_integral = np.trapz(u_T(np.linspace(0, a, 100)) * np.cos(mu_k * np.linspace(0, a, 100)), np.linspace(0, a, 100))
        series_sum += (np.sinh(mu_k * y) / np.sinh(mu_k_b)) * mu_k_integral

    return integral_1 + (2 / a) * series_sum


# Визначте діапазон значень x і y
x_vals = np.linspace(0, 10, 100)
y_vals = np.linspace(0, 5, 100)

# Створіть сітку значень x і y
x_grid, y_grid = np.meshgrid(x_vals, y_vals)
```

```
# Обчисліть відповідні значення U(x, y) для кожної точки сітки
a = 10  # Налаштуйте значення a і b за потреби
b = 5
T_vals = T(x_grid, y_grid, a, b)
u_T_func = "-2x"

# Побудуємо 3Д графік з потрібними налаштуваннями
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(x_grid, y_grid, T_vals, cmap='viridis')

# Встановіть назву та вісі
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('T(x, y)')
ax.set_title('u_T(x) = ' + u_T_func)

# Відобразимо графік
plt.show()
```

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі було розглянуто задачу теплопровідності для прямокутної пластини, що послаблена тріщиною.

Вихідну задачу було зведено до одновимірної за допомогою апарату інтегрального перетворення. Розв’язок одновимірної крайової задачі побудовано з використанням функції Гріна.

Отримано вирази для температури та теплового потоку, що містять невідому функцію стрибка, записано сингулярне інтегральне рівняння для її відшукання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новацький В. Теорія упругості / Новацький В. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги / Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. — Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с.
3. Савельєв І. В. Курс загальної фізики. Т. 1. Механіка / Савельєв І. В. — Київ: Вища школа, 1989. — 607 с.
4. Соммерс Д. Х., Джойнер Д. В. Теплопередача: Теорія та практика / Соммерс Д. Х., Джойнер Д. В. — Київ: Вища школа, 2002. — 640 с.
5. Дмитрієв Є. І. Теплопровідність: Загальний курс / Дмитрієв Є. І. — Київ: Либідь, 2008. — 392 с.
6. Соломака О. О. Механічний аналіз тріщинних пластин і оболонок / Соломака О. О. — Київ: Вища школа, 2012. — 256 с.
7. Петров М. К., Колосов В. А., Чудинова Л. А. Інженерна теплофізика / Петров М. К., Колосов В. А., Чудинова Л. А. — Київ: Вища школа, 2016. — 672 с.
8. Шабат Б. В., Грищенко В. А. Математичний аналіз: Підручник / Шабат Б. В., Грищенко В. А. — Київ: Вища школа, 2017. — 720 с.
9. Попов Г.Я, Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень" / Попов Г.Я, Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. — Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2005. 23 с. – 27 с.