

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ю. С. Процеров

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів

факультету математики, фізики та інформаційних технологій
спеціальностей 113 Прикладна математика та 111 Математика

ОДЕСА
ОНУ
2023

**УДК 519.21(076)
П845**

Автор:

Ю. С. Процеров, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

А. О. Кореновський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу ОНУ імені І. І. Мечникова;

А. В. Усов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та моделювання систем Національного університету «Одеська політехніка».

Відповідальний редактор:

Н. Д. Вайсфельд, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувачка кафедри методів математичної фізики ОНУ імені І. І. Мечникова.

*Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 1 від 23 березня 2023 року.*

Процеров Ю. С.

П845 Теорія ймовірностей : навч.-метод. посіб. для студ. ф-ту математики, фізики та інформаційних технологій спец. 113 Прикладна математика та 111 Математика / Ю. С. Процеров. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2023. – 186 с.

ISBN 978-617-689-490-2

Розглянуті основні теми теорії ймовірностей: випадкові події та їх ймовірності, випадкові величини та функції розподілу, числові характеристики випадкових величин, послідовності незалежних випадкових величин та граничні теореми. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується численними прикладами. Крім того, є велика кількість завдань для самостійної роботи студентів, які супроводжені вказівками і відповідями.

Для студентів вищих навчальних закладів, зокрема для студентів, які вивчаються за спеціальністю 113 Прикладна математика та 111 Математика.

УДК 519.21(076)

ЗМІСТ

Вступ	5
Глава 1. Випадкові події	8
§ 1. Дискретний простір елементарних подій. Операції над подіями	8
§ 2. Ймовірність події. Властивості ймовірності	10
§ 3. Необхідні відомості з комбінаторики	16
§ 4. Урнові схеми	20
§ 5. Довільний простір елементарних подій. Побудова ймовірнісних моделей для експериментів з незчисленим числом подій	24
§ 6. Властивості ймовірності для довільного простору елементарних подій	28
§ 7. Геометрична ймовірність	30
§ 8. Умовні ймовірності, незалежні випадкові події	36
§ 9. Незалежні випробування, що повторюються. Формула Бернуллі	47
§ 10. Формули повної ймовірності	50
§ 11. Формули Байеса	53
Глава 2. Випадкові величини та функції розподілу	61
§ 12. Функція розподілу випадкової величини	61
§ 13. Властивості функцій розподілу	64
§ 14. Дискретні випадкові величини. Приклади	66
§ 15. Абсолютно неперервні випадкові величини. Приклади	71
§ 16. Три типи функцій розподілу. Теорема Лебега	81
§ 17. Багатовимірні випадкові величини (випадкові вектори)	84
§ 18. Функції від випадкових величин	88
Глава 3. Числові характеристики випадкових величин	95
§ 19. Інтеграл Стільтьеса	95
§ 20. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості ...	100
§ 21. Дисперсія випадкової величини та її властивості	107
§ 22. Моменти випадкових величин	115
§ 23. Нормовані випадкові величини. Коефіцієнт кореляції	117
§ 24. Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії	120

Глава 4. Послідовності незалежних випробувань	122
§ 25. Нерівності Чебишева	122
§ 26. Закон великих чисел	126
§ 27. Локальна теорема Муавра – Лапласа	130
§ 28. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа	135
§ 29. Теорема Пуассона	141
§ 30. Характеристичні функції	143
§ 31. Генератриси	153
§ 32. Розподіли Пірсона та Стюдента	156
§ 33. Збіжність випадкових величин та функцій розподілу	159
§ 34. Центральна гранична теорема	162
Таблиця 1 значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	169
Таблиця 2 значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	172
Відповіді	175
Література	183

Вступ

Теорія ймовірностей це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ. Серед математичних наук теорія ймовірностей посідає деякою мірою своєрідне місце: з одного боку, такі поняття, як випадковість, причинність, імовірність приводять до того, що теорія ймовірностей не може розглядатися лише як галузь чистої математики; з іншого боку, не існує спеціальної області явищ реального світу, які б вона виключно вивчала. Випадкові явища, що допускають оцінку їхньої ймовірності, трапляються як в області фізичних, хімічних або механічних явищ, так і в області біологічних, економічних і навіть соціальних явищ. Ця обставина ставить цілу низку вимог при вивчанні теорії ймовірностей. Насамперед, неможливо вивчати теорію ймовірностей, не розв'язуючи систематично задач, особливо на перших порах. Далі необхідно мати перед очима які-небудь явища реального світу, що можуть вивчатися методами теорії ймовірностей.

Зрозуміло, що це не означає, що теорія ймовірностей є лише допоміжним засобом для розв'язання тих або інших практичних задач. Ні в якому разі.

У деякому розумінні слова теорію ймовірностей можна вважати чисто математичною дисципліною. Це досягається з допомогою аксіоматичної побудови теорії ймовірностей. Із цієї позиції теорія ймовірностей може розглядатися як розділ метричної теорії функцій.

За час свого розвитку теорія ймовірностей перетворилася на струнку математичну науку із власним проблемами і методами досліджень. У той же час з'ясувалося, що найбільш важливі результати теорії ймовірностей служать розв'язанню кардинальних проблем природознавства. Теоретико-ймовірнісні методи лежать в основі таких дисциплін, як теорія випадкових процесів, теорія масового обслуговування, теорія інформації та багатьох інших.

Теорія ймовірностей виникла ще у середині XVII століття. Установлення елементарних понять і елементарних теорем теорії

ймовірностей пов'язано з іменами Б. Паскаля (1623 – 1662), П. Ферма (1601 – 1665), Х. Гюйгенса (1629 – 1695) і особливо Якова Бернуллі (1654 – 1705). Складні природничо-наукові проблеми ще не розглядалися вченими, які створювали початки теорії ймовірностей. Конкретний матеріал вони брали з азартних ігор, що давало можливість розробити прості і прозорі моделі випадкових явищ, а можливість необмежено повторювати одне й те саме випробування забезпечувало експериментальну перевірку цих законів.

Серйозні вимоги з боку природознавства (теорії похибок, задачі теорії стрільби, проблеми статистики, у першу чергу демографії та страхування) привели до необхідності серйозного розвитку теорії ймовірностей з залученням більш розвиненого математичного апарату. Особливу роль у розвитку аналітичних методів теорії ймовірностей відіграли А. Муавр (1667 – 1754), П. Лаплас (1749 – 1829), К. Гаусс (1777 – 1855), С. Пуассон (1781 – 1840).

Із другої половини ХІХ століття розвиток теорії ймовірностей пов'язаний з іменами В.Я. Буняковського (1804 – 1889), П.Л. Чебишева (1821 – 1894), А.А. Маркова (1856 – 1922), О.М. Ляпунова (1857 – 1918). У ХХ столітті великий внесок у розвиток теорії ймовірностей внесли С.Н. Бернштейн (1880 – 1968), О.Я. Хінчин (1894 – 1959), А.М. Колмогоров (1903 – 1987), Б.В. Гнеденко (1912 – 1995).

Зрозуміло, що у природі немає ні одного фізичного явища, у якому не були б присутні у той або іншій степені елементи випадковості. Проте у деяких практичних задачах цими випадковим явищами можна знехтувати, розглядаючи замість реального явища його спрощену модель та припускаючи, що це явище проходить цілком визначеним образом. Наприклад, закон о залежності тиску газу від його температури є насправді результатом ймовірнісного характеру числа ударів частинок з стінками сосуду та їх швидкостей. Просто у області звичайних температур та тиску випадкові відхилення, які тут мають місце, з великою ймовірністю дуже мали і не реєструються вимірювальними приборами. Інакша справа при вивченні більш

рідкісних потоків частинок, наприклад космічного випромінювання, хоча якісної різниці між цими двома явищами немає. Існують також явища, в основі яких лежить випадковість. Наприклад, час життя радіоактивної частинки випадкова по суті і ця випадковість збільшенням наших знань усунена бути не може.

Майже в усіх областях людської діяльності існують ситуації, коли ми не можемо дати однозначної відповіді на поставлене питання, оскільки процеси, з якими вони пов'язані, по самій їх істоті позбавлені повної визначеності. Наприклад, ми не можемо заздалегідь сказати скільки дорожніх подій станеться завтра у місті або скільки викликів поступить на станцію швидкої допомоги, оскільки ці події залежать від величезного числа чинників, які не можливо заздалегідь передбачити. У цих випадках прийнято говорити, що подія, яка цікавить нас, є випадковою. Теорія ймовірностей якраз і займається вивченням випадкових подій, але при цьому розглядаються не будь-які події, які в життєвій практиці ми називаємо випадковими, а тільки ті з них, які мають певні властивості.

Перед усім, теорія ймовірностей обмежується вивченням лише тих подій, які в принципі можуть бути здійснені необмежене число разів, при тому в незмінних умовах. Наприклад, монета може бути підкинута в одних і тих же умовах стільки разів, скільки ми захочемо.

Далі, вивчаються лише такі випадкові події, відносно яких має сенс не лише переконання про їх випадковість, але можлива об'єктивна оцінка випадків їх появи. Тому теорія ймовірностей не займається вивченням унікальних подій, які не допускають повторення, хоча і носять невизначений характер. Так, висловлення «У кінці цього року настане кінець світу» носить унікальний характер і відповідь на нього ми отримаємо на початку наступного року.

Крім того теорія ймовірностей займається лише тими подіями, які мають так звану статистичну стійкість. Що це таке? Припустимо, що проводиться послідовність випробувань, в кожному з яких може статися, а може і не статися деяка подія А. Ці випробування

проводяться в однакових умовах і результати одних не оказують впливу на результати інших. Нехай у n випробуваннях подія A відбулася m разів. Тоді частота $\frac{m}{n}$ події A при великих n для статистично стійких подій близька до деякої сталої, яка мало змінюється від однієї серії випробувань до іншої. Так, у XVIII столітті Ж. Бюффон провів 4040 підкидань монети і отримав частоту випадань герба 0,507. Пізніше К. Пірсон провів 24000 підкидань монети і отримав частоту випадань герба 0,5005. Таким чином, частота випадання герба є величиною, близькою до 0,5.

Глава 1. Випадкові події

§ 1. Дискретний простір елементарних подій. Операції над подіями

Початковими поняттями теорії ймовірностей є поняття стохастичного (ймовірнісного) експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події.

Стохастичним або ймовірнісним експериментом зветься експеримент, результати якого неможливо передбачити наперед. Наприклад, підкидання монети або грального кубика і так далі. Кожному експерименту, який розглядається, ставиться у відповідність деяка множина Ω можливих результатів цього експерименту. Елементи цієї множини $\omega_1, \omega_2, \dots$ зветься елементарними подіями, а сама множина Ω - простором елементарних подій. Простір елементарних подій може бути як скінченим, так і нескінченим.

Приклади.

Один раз підкидаємо монету $\Omega = \{Г, Ц\}$.

Два рази підкидаємо монету $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$.

Підкидаємо монету доки не випаде герб $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \dots\}$.

Говорячи про експеримент у теорії ймовірностей, ми не цікавимося його технічною стороною, а тільки тим, які події можуть

спостерігатися, і що в результаті проведеного експерименту дійсно спостерігалось.

Нехай A довільна спостережувана в цьому експерименті подія. У множині елементарних подій Ω йому відповідає деяка підмножина елементарних подій, яку також будемо позначати через A : $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots\}$. Якщо результат експерименту описується елементарною подією $\omega_k \in \Omega$ і $\omega_k \in A$, то говорять, що у даному експерименті відбулося подія A , якщо ж $\omega_k \notin A$, то подія A не відбулася. При цьому елементарні події ω_{k_i} з множини A називають елементарними подіями, які сприяють події A .

Приклад. Один раз підкидаємо гральний кубик. В цьому випадку $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Подія A число очок, яке випало, кратне трьом: $A = \{3, 6\}$. Подія B - число очок парне: $B = \{2, 4, 6\}$.

Таким чином, події інтерпретуються як підмножини деякої множини Ω . Це дозволяє нам ввести відношення порядку і операції над подіями виходячи з відповідних понять у теорії множин.

1) Множина Ω розглядається як подія, яка в результаті випробування відбудеться завжди (вона містить усі можливі результати експериментів). Тому її називають достовірною або вірогідною подією.

2) Порожня множина $\emptyset$ не містить жодної точки з Ω . Якщо її ототожнювати з подією, то вона у експерименті не відбувається. Тому множину $\emptyset$ називають неможливою подією.

3) Якщо A і B дві події і $A \subset B$, то це означає, що якщо подія A відбувається, то і подія B також відбувається. В цьому випадку говорять, що з події A слідує подія B .

4) Сумою або об'єднанням двох подій A і B називають подію $A \cup B$, яка відбувається тоді і тільки тоді коли відбувається принаймні одна з цих двох подій.

При цьому для будь якої події A : $A \cup \emptyset = A$ і $A \cup \Omega = \Omega$.

- 5) Добутком або перерізом двох подій A і B називають подію $A \cap B$, яка відбувається тоді і тільки тоді коли відбуваються обидві ці події.
- 6) Різницею двох подій A і B називається подія $A \setminus B$, яка відбувається тоді і тільки тоді коли відбувається подія A , але не відбувається подія B .
- 7) Подія $\bar{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною події A . Вона відбувається тоді і тільки тоді коли подія A не відбувається.

При цьому для будь якої події A : $A \cup \bar{A} = \Omega$ і $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Наприклад, для подій A і B з останнього приклада маємо:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}; A \cap B = \{6\}; A \setminus B = \{3\}; \bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Означення. Дві події A і B називаються несумісними, якщо одночасна їх поява неможлива, тобто $A \cap B = \emptyset$.

§ 2. Ймовірність події. Властивості ймовірності

Розглянемо деякий стохастичний експеримент та подію A , яка може відбуватися у цьому експерименті. Повторимо цей експеримент n разів і нехай m число експериментів, у яких відбулася подія A .

Відношення $\nu_n(A) = \frac{m}{n}$ зветься частотою події A у проведеної серії з n експериментів. Частота $\nu_n(A)$ має очевидні властивості

$$1) 0 \leq \nu_n(A) \leq 1.$$

$$2) \nu_n(\Omega) = 1.$$

3) Якщо A і B дві несумісні події, які спостерігаються у цій серії експериментів, то $\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$.

Дійсно, так як $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, то

$$\nu_n(A \cup B) = \frac{m(A) + m(B)}{n} = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Частота події може бути обчислена тільки після проведення серії експериментів і, взагалі говорячи, вона може змінитися, якщо ми

проведемо іншу серію з n експериментів або змінимо n . Проте для статистично стійких подій, які ми розглядаємо, частота $\nu_n(A)$ мало відрізняється від деякого фіксованого значення p . При цьому відхилення спостерігаються тим рідше, чим більше n . Це значення p і приймається за ймовірність при статистичному або емпіричному визначенні ймовірності.

Проте це статистичне визначення ймовірності події по-перше не дозволяє знаходити ймовірності без проведення багатьох чисельних експериментів, а по-друге, і це головніше, не дозволяє побудувати строгу математичну модель теорії ймовірностей. Для побудови такої моделі, як і в багатьох інших розділах математики, скористаємося аксіоматичним методом. Для цього слід визначити поняття ймовірності аксіоматично і тоді довільну систему величин, що задовольняють цим аксіомам, ми можемо називати ймовірністю події.

Розглянемо стохастичний експеримент з скінченим або зчисленим числом елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$. Припустимо, що кожній елементарній події ω_k ставиться у відповідність деяке число p_k , яке зветься ймовірністю елементарної події ω_k , і таке, що справедливі аксіоми

$$\text{I. } p_k \geq 0.$$

$$\text{II. } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Нехай A довільна випадкова подія, яка відбулася у експерименті, тобто A є підмножина простору Ω .

Означення. Ймовірністю $P(A)$ події A називають суму ймовірностей елементарних подій, які складають подію A :
$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

Введена таким чином ймовірність має слідуєчі властивості:

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1, \text{ так як } 0 \leq P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

$$2) P(\Omega) = 1, \text{ так як } P(\Omega) = \sum_{\omega_k \in \Omega} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

$$3) \text{ Якщо } A \text{ і } B \text{ несумісні події: } A \cap B = \emptyset, \text{ то } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$$\text{Дійсно, } P(A \cup B) = \sum_{\omega_k \in A \cup B} p_k = \sum_{\omega_k \in A} p_k + \sum_{\omega_k \in B} p_k = P(A) + P(B).$$

$$4) P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

$$\text{Так як події } A \text{ та } \bar{A} \text{ несумісні і } A \cup \bar{A} = \Omega, \text{ то } P(A) + P(\bar{A}) = 1 \text{ і } P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

$$5) P(\emptyset) = 0.$$

$$\text{Так як } \emptyset = \bar{\Omega}, \text{ то } P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

$$6) \text{ Якщо } B \subset A, \text{ то } P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

$$\text{Так як події } B \text{ та } A \setminus B \text{ несумісні і } B \cup (A \setminus B) = A, \text{ то } P(A) = P(B) + P(A \setminus B), \text{ звідки } P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

$$7) \text{ Для довільних подій } A \text{ і } B \text{ } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Дійсно

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega_k \in A \cup B} p_k = \sum_{\omega_k \in A} p_k + \sum_{\omega_k \in B} p_k - \sum_{\omega_k \in A \cap B} p_k = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Будемо говорити, що для даного експерименту побудована ймовірнісна модель $\langle \Omega, P \rangle$, якщо

- указано простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$;
- кожному ω_k з Ω поставлена у відповідність ймовірність $p_k \geq 0$

$$\text{така, що } \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Розглянемо приклади побудови ймовірнісних моделей.

1. Нехай розглядається експеримент з скінченим числом n однаково можливих елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. В цьому випадку доцільно кожній елементарній події ω_k поставити у відповідність однакову ймовірність $p_k = \frac{1}{n}$. Якщо A деяка подія, якій сприяє m елементарних подій, то покладемо $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{m}{n}$.

Таке означення ймовірності прийнято називати класичним означенням ймовірності.

Наприклад, кидають два гральних кубика. В цьому випадку простір елементарних подій складається з 36 однаково можливих подій $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\}$, тобто $p_k = \frac{1}{36}$. Нехай A подія, яка полягає у тому, що сума очок на кубиках дорівнює 5. Тоді $A = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$, тобто $m = 4$ і $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2. Нехай розглядається експеримент, у якому кидають монету до першої появи герба. В цьому випадку простір елементарних подій $\Omega = \{Г, ЦГ, ЦЦГ, \dots\}$, тобто $\omega_k = \underbrace{Ц \dots Ц}_{k-1} Г$. Припишемо події ω_k

ймовірність $p_k = \frac{1}{2^k} > 0$. При цьому $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. Таким

чином виконуються аксіоми і побудована ймовірнісна модель.

Нехай A подія, що буде проведено не більш трьох кидань монети до першої появи герба. Тоді $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Розглянемо ще декілька прикладів на знаходження ймовірностей подій.

Приклади.

1) Кидають два гральних кубика. Знайти ймовірності наступних подій:

A - сума чисел на кубиках дорівнює семи; B - сума чисел на кубиках дорівнює восьми, а модуль різниці дорівнює чотирьом.

Маємо $n = 36$ однаково можливих подій.

Сприяють події $A: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, тобто $m = 6$ і

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Сприяють події $B: (2,6), (6,2)$, тобто $m = 2$ і $p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

2) Кидають три монети. Знайти ймовірності наступних подій:

A - на першій монеті випав герб; B - випало рівно два герба;

C - випало не більше двох гербів.

У даному випадку

$\Omega = \{ ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ \}$, тобто $n = 8$.

Тоді $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(C) = \frac{7}{8}$ або $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

3) N осіб випадковим чином розсаджуються за круглим столом. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи A і B будуть сидіти поруч.

Нехай A сидить де завгодно. Тоді для B залишається $n = N - 1$ місць, з яких $m = 2$ сприяють події (місця зліва та справа від A).

Отже, $p = \frac{2}{N-1}$.

4) У послідовності натуральних чисел $1, 2, \dots, n$ відзначено число k . Знайти ймовірність того, що серед двох навмання вибраних чисел з цієї послідовності, одне буде менше k , а друге буде більше k .

Ймовірність того, що одне з цих вибраних чисел менше k дорівнює $\frac{k-1}{n-1}$, а ймовірність того, що друге більше k дорівнює $\frac{n-k}{n-1}$. Маючи

на увазі, що ці числа можливо поміняти місцями, отримуємо

$$p = 2 \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{n-k}{n-1} = 2 \frac{(k-1)(n-k)}{(n-1)^2}.$$

5) Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на тисячу кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що витягнутий навмання кубик має пофарбованих граней: A - три; B - дві; C - одну.

Три пофарбованих грані мають кубики, які були розташовані у вершинах куба, їх 8. Дві пофарбованих грані мають кубики, які були розташовані на ребрах куба, їх $12 \times 8 = 96$. Одну пофарбовану грань мають кубики, які були розташовані на гранях куба, їх $6 \times 8 \times 8 = 384$. Таким чином

$$P(A) = 0,008; P(B) = 0,096; P(C) = 0,384.$$

Завдання.

1. Дві різні кулі розкладають у дві урни. Описати простір елементарних подій. Вважаючи, що всі елементарні події однаково можливі, обчислити ймовірність того, що є урна, в якій немає жодної кулі.

2. Підкидають два гральних кубики. Нехай A - подія, яка полягає в тому, що сума очок непарна; B - подія, яка полягає в тому, що принаймні на одному з кубиків випаде одно очко. Описати подію $A \cap B$ та знайти її ймовірність, вважаючи, що всі елементарні події однаково можливі.

3. Нехай підкидають гральний кубик, в якому маси розподілено так, що ймовірність появи певної грані пропорційна числу очок на неї. Описати простір елементарних подій та знайти ймовірність кожної з неї.

4. Монету підкидають доти, поки вона не випаде підряд двічі тією самою стороною. Описати простір елементарних подій та знайти ймовірність події A - експеримент закінчиться до шостого підкидання.

5. Два гравця A і B по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого раніше випаде герб. Першим починає гру гравець A . Знайти ймовірність виграшу кожним із гравців.

§ 3. Необхідні відомості з комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчаються розташування об'єктів у відповідності з заданими вимогами та методи підрахунку числа усіх можливих способів, якими ці розташування можуть бути зроблені.

Комбінаторика широко використовується при розв'язанні задач теорії ймовірностей, а тому розглянемо тут її основні поняття.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати n різними способами, а деякий другий об'єкт B можна вибрати m різними способами, то вибір A або B можна здійснити $n + m$ способами.

Правило добутку. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати n різними способами, а деякий другий об'єкт B можна вибрати m різними способами, то вибір A і B можна здійснити $n \cdot m$ способами.

Наприклад, у змаганні бере участь 15 команд. Скількома способами можуть бути розподілені 1 та 2 місця?

Перше місце може зайняти одна з 15 команд. Після того, як перше місце зайнято, друге місце може зайняти одна з 14 команд, що залишилося. Таким чином, згідно з правилом добутку загальне число способів є $15 \cdot 14 = 210$.

Правило добутку може бути застосовано і для більшого числа об'єктів.

Приклад. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4,5, якщо:

а) цифри не повторяються: так як цифра нуль не може стояти на першому місці, то $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ способів;

б) цифри можуть повторятися: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$ способів;

с) числа мають бути непарними і цифри не повторяються: так як цифра нуль не може стояти на першому місці, а на останньому місці мусить стояти одна з трьох непарних цифр, то $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144$ способи;

д) числа мають бути непарними, але цифри можуть повторятися: $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ способів.

Впорядковані множини. Перестановки.

Множина з n елементів називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.

Очевидно, що будь-яка множина, що містить більше за один елемент, можна впорядкувати не єдиним чином. Різні впорядковані множини, які відрізняються між собою тільки порядком елементів, називаються перестановками даної множини. Число перестановок множини з n елементів дорівнює $P_n = n!$.

Дійсно, на перше місце можна поставити будь-який з n елементів, на друге місце – будь-який з $n-1$ елементу, що залишилися і так далі. За правилом добутку $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Приклад. Нехай $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$. Скількома способами можна впорядкувати цю множину так, щоб парні числа мали парний номер, а непарні – непарний?

П'ять парних чисел можна розставити на п'яти місцях с парними номерами $P_5 = 5! = 120$ способами. П'ять непарних чисел, що залишилися, можна розставити на п'яти місцях також $P_5 = 120$ способами. Таким чином, маємо $(P_5)^2 = 120^2 = 14400$ способами.

Сполучення (комбінації) з n елементів по k елементів.

Нехай Ω множина з n елементів. Сполученням (комбінацією) з n елементів по k ($k \leq n$) елементів називається будь-яка підмножина з k елементів множини Ω . Дві такі підмножини вважаються різними,

якщо вони відрізняються своїми елементами. Число таких підмножин позначають

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

При обчисленні комбінацій корисні формули $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Приклади.

1) Скількома способами можна вибрати 3 студента з 8 студентів?

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

2) Скількома способами колоду карт (36 карт) можна поділити навпіл так, щоб у кожній половині було по два тузи?

Треба 4 туза розділити порівну і 32 карти, що залишилися, також розділити порівну, тобто $C_4^2 \cdot C_{32}^{16}$ способів.

3) На одній з двох паралельних прямих взято n точок, а на іншій m точок. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

Кожний з трикутників має одну вершину на одній прямій та дві вершини на іншій і навпаки. Тому маємо

$$nC_m^2 + mC_n^2 = n \frac{m(m-1)}{2} + m \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nm}{2}(m+n-2) \text{ трикутників.}$$

4) Скількома способами можна поділити множину з 12 елементів на одну підмножину з 4 елементів, дві підмножини з 3 елементів і одну множину з 2 елементів?

Маємо $C_{12}^4 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$ способів.

Розміщення з n елементів по k елементів.

Нехай Ω множина з n елементів. Розміщенням з n елементів по k ($k \leq n$) елементів називається будь-яка впорядкована підмножина з k елементів множини Ω . Дві такі підмножини вважаються різними, якщо вони відрізняються своїми елементами або їх порядком. Число таких підмножин позначають A_n^k . Так як множина з n елементів має

C_n^k підмножин з k елементів і кожну таку підмножину можна упорядкувати $k!$ способами, то

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Приклади.

1) Студентові треба скласти три екзамени за 7 днів. Скількома способами можна скласти розклад екзаменів?

Так як порядок екзаменів важливий, то $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способів.

2) Чемпіонат, в якому беруть участь 16 команд, проводиться у два круги. Визначати, яка кількість зустрічей має бути проведена.

Кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд, тому буде $A_{16}^2 = 16 \cdot 15 = 240$ зустрічей.

3) Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 3,5,7,11,13,17,19,23?

Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику, можна скласти A_8^2 штук, але лише половина з них правильні. Отже, маємо $\frac{1}{2} A_8^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$ дробів.

4) Ліфт, в якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинитися на 10 поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він вже був?

Розподілити 9 пасажирів по вказаних групах можна $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4$ способами. Кожна з трьох груп може вийти на одному з 10 поверхів A_{10}^3 способами. За правилом добутку всього можливо $C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 \cdot A_{10}^3 = \frac{9 \cdot 8}{2!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 907200$ способів.

Завдання.

1. Скільки різних трицифрових чисел можна записати в десятковій системі числення, якщо у кожному числі ні одна цифра не повторюється?

2. Скільки п'ятицифрових можна скласти з семі цифр 1,2,4,6,7,8,9, якщо цифри не повторюється? Скільки серед них буде парних? Непарних?

3. Маємо 4 підручника з математики, 3 підручника з фізики та 2 підручника з програмування. Скількома способами їх можна розмістити на книжковій полиці так, щоби підручники з однієї дисципліни стояли поруч?

4. Скількома способами можна розселити дев'ять студентів в двомісній, тримісній і чотиримісній кімнатах?

5. Скільки діагоналей має випуклий n - кутник?

6. Скількома способами можна виготовити триколовий прапор з вертикальними полосами, маючи матеріал семі різних кольорів?

7. Автомобільний номер складається з чотирьох цифр та трьох букв латинського алфавіту (28 букв). Яке найбільше число таких номерів можна утворити?

8. У місті N тисяча мешканців. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

§ 4. Урнові схеми

При розв'язанні багатьох задач теорії ймовірностей використовуються так звані урнові схеми. Нехай маємо деяку множину об'єктів $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, яку будемо називати генеральною сукупністю (наприклад, кулі в урні). З цієї генеральної сукупності ми вибираємо k ($k < n$) об'єктів $\{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}\}$, яка зветься вибіркою об'єму k . Розглядається два виду вибірок.

Вибірка без повернення. Спочатку з генеральної сукупності навмання відбирають об'єкт a_{j_1} , потім з $n-1$ об'єктів, що залишилися, відбирають об'єкт a_{j_2} і так далі. Число таких вибірок обсягу k дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Наприклад, нехай в урні знаходиться 10 куль з номерами від 1 до 10. З урни навмання без повернення дістають п'ять куль. Яка ймовірність, що серед них будуть кулі з номерами 1 та 2?

Загальне число вибірок буде A_{10}^5 . Серед них сприятливих умові задачі буде A_8^3 , тобто є кулі з номерами 1 та 2 і три будь-яких куль з іншими

номерами. Таким чином, $p = \frac{A_8^3}{A_{10}^5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{90}$.

Вибірка з поверненням. З генеральної сукупності навмання відбирають об'єкт a_{j_1} , запам'ятовують його та повертають назад у генеральну сукупність. Потім навмання відбирають другий об'єкт a_{j_2} , запам'ятовують його та повертають назад і так далі. Таким чином, об'єкти у вибірці можуть повторятися і кожним разом ми відбираємо з n об'єктів. Число таких вибірок обсягу k дорівнює $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$.
k разів

Наприклад, знайдемо ймовірність того, що у вибірці з поверненням всі об'єкти різні. Вибірок з об'єктами, які не повторюються, буде стільки ж, скільки вибірок без повернення, тобто A_n^k . Таким чином, шукана ймовірність дорівнює $p = \frac{A_n^k}{n^k}$.

Розглянемо ще один тип задач, якій розв'язується згідно з урнвоюю схемою.

Нехай в урні знаходиться n куль: t білих та $n - t$ чорних. З урни без повернення навмання відбирають k куль. Яка ймовірність того, що серед них буде t білих куль?

Всього вибірок з n куль по k куль буде C_n^k . З t білих куль можна відібрати t білих куль C_m^t способами, а з $n - t$ чорних куль відібрати $k - t$ чорних куль C_{n-m}^{k-t} способами. Таким чином, число сприятливих подій дорівнює $C_m^t \cdot C_{n-m}^{k-t}$, а шукана ймовірність дорівнює

$$p = \frac{C_m^t \cdot C_{n-m}^{k-t}}{C_n^k}.$$

Приклади.

1) У групі 12 студентів, з яких 8 відмінників. За списком навмання відібрано 9 студентів. Яка ймовірність того, що серед відібраних студентів є 5 відмінників?

Всього вибірок C_{12}^9 , серед них сприятливих подій $C_8^5 \cdot C_4^4$. За властивістю біноміальних коефіцієнтів $C_8^5 = C_8^3$, $C_4^4 = 1$. Тоді

$$p = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3!}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3!} = \frac{14}{55}.$$

2) Нехай у коробці лежать вісім деталей, з яких три бракованих. З коробки навмання достали чотири деталі. Яка ймовірність того, що серед відібраних деталей буде: A - одна бракована; B - дві бракованих; C - три бракованих; D - хоч одна бракована?

Згідно з отриманою вище формулою:

$$P(A) = \frac{C_3^1 \cdot C_5^3}{C_8^4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4!}{1! \cdot 3! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{7}; P(B) = \frac{C_3^2 \cdot C_5^2}{C_8^4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4!}{2! \cdot 2! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{7};$$

$$P(C) = \frac{C_3^3 \cdot C_5^1}{C_8^4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{14};$$

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

Ймовірність події D можна знайти по іншому, якщо розглянути протилежну подію $\bar{D}$ - серед відібраних деталей немає бракованих, та

знайти її ймовірність $P(\bar{D}) = \frac{C_5^4}{C_8^4} = \frac{C_5^1}{C_8^4} = \frac{5 \cdot 4!}{1! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{14}$, тоді

$$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

3) На книжній полиці у випадковому порядку стоять 40 книжок, серед яких знаходиться тритомник М.В. Гоголя. Знайти ймовірність того, що усі три томи стоять у порядку зростання зліва направо, але не обов'язково поруч.

Три томи можна розставити $P_3 = 3! = 6$ способами. Як стоять інші 37 книжок, ніякої ролі не грає, тому $p = \frac{1}{6}$.

4) Дев'ять пасажирів випадковим чином розсаджуються по трьох вагонах. Знайти ймовірність того, що: A - у кожній вагон сяде по три пасажирів;

B - в один з вагонів сяде чотири пасажирів, в другий – три пасажирів, а в третій – два пасажирів.

Всього варіантів розсадження пасажирів буде 3^9 . Тоді

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9}; P(B) = \frac{C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2}{3^9}.$$

5) Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

Загальне число подій $n = 12^{12}$, а число сприятливих подій $m = 12!$.

Тому $p = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,0005$.

6) У ліфті 7 пасажирів, ліфт зупиняється на 10 поверхах. Яка ймовірність того, що усі пасажирів вийдуть на різних поверхах?

Очевидно, що загальне число подій $n = 10^7$, а число сприятливих

подій $m = A_{10}^7$. Тому $p = \frac{A_{10}^7}{10^7} \approx 0,06$.

Завдання.

1. У коробці знаходиться 10 однакових деталей, які помічені номерами від 1 до 10. З коробки навмання дістали 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед відібраних деталей буде: A - деталь з номером 10; B - деталі з номерами 8, 9 та 10.

2. У ящику знаходиться 15 деталей, серед яких 10 фарбованих. Навмання дістали 3 деталі. Знайти ймовірність того, що відібрані деталі: A - усі фарбовані; B - усі нефарбовані.

3. З повної колоди карт (52 карти) навмання дістали три карти. Яка ймовірність того, що ними будуть трійка, сімка та туз?

4. Чотири кульки випадковим чином можуть опинитися в одній з чотирьох лунок с однаковою ймовірністю та незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що в одній лунці будуть три кульки, в другій - одна, а в двох інших лунках кульок не буде.

5. Кидають n гральних кубиків. Яка ймовірність того, що випаде n_1 одиниць, n_2 двійок, ..., n_6 шестірок ($n_1 + n_2 + \dots + n_6 = n$)?

§ 5. Довільний простір елементарних подій. Побудова ймовірнісних моделей для експериментів з незчисленим числом подій

Ми розглянули ймовірнісні моделі стохастичних експериментів, у яких простір елементарних подій скінчений або зчислений. Проте існують задачі, у яких простір елементарних подій незчислений, і розглянутий нами підхід не застосовний.

Наприклад, розглянемо експеримент, що полягає в киданні навімання точки на відрізок $[0;1)$. Припустимо, що усі мислимі положення точки на цьому відрізку однаково можливі. Простір елементарних подій для цього експерименту є відрізок $[0;1)$, звідки кількість цих подій незчисленна. Для цієї задачі вже неможливо побудувати ймовірнісну модель експерименту, приписав ймовірність лише окремим елементарним подіям, як ми це робили для випадку скінченого або зчисленого числа елементарних подій. Дійсно, якщо по аналогії з дискретним випадком кожної елементарної події ω задамо ймовірність $p(\omega)$, то оскільки усі події однаково можливі, мусимо прийняти $p(\omega) = p \neq 0$, але тоді не буде виконуватися умова $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Якщо ж прийняти $p(\omega) = 0$, то $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 0$, що також не годиться.

Вихід з цієї ситуації полягає в тому, щоби приписувати ймовірності лише деяким множинам елементарних подій. При цьому завдання ймовірностей повинно задовольняти певним вимогам. Наприклад, природно вважати, що ймовірності попадання на відрізки

$\left[0; \frac{1}{2}\right)$ і $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ мають бути однаковими, отже кожна з них дорівнює $\frac{1}{2}$. Далі, ймовірність попадання на відрізок $\left[0; \frac{1}{2}\right)$ повинна бути більшою, чим ймовірність попадання на відрізок $\left[0; \frac{1}{3}\right)$ і так далі.

При цьому клас тих множин, яким приписуються ймовірності, мусить бути замкнутим відносно операцій об'єднання, перерізу, переходу до доповнення, отже якщо множинам A і B приписані ймовірності, то і множинам $A \cup B, A \cap B, \bar{A}$ також повинні бути приписані ймовірності.

Для побудови такої ймовірнісної моделі нам потрібні деякі відомості з теорії множин. Розглянемо деяку фіксовану множину Ω і підмножину A цієї множини.

Означення. Система підмножин F множини Ω називається алгеброю множин, якщо:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) якщо $A \in F$, то $\bar{A} \in F$;
- 3) якщо $A \in F$ і $B \in F$, то $A \cup B \in F$.

Зауважимо, що $\emptyset \in F$ так як $\emptyset = \bar{\Omega}$ і $A \cap B \in F$ так як $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.

Приклади.

1. Якщо A деяка підмножина множини Ω , то система множин

$$F = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\} \text{ утворює алгебру множин.}$$

2. Якщо $\Omega = [0; 1)$ і F є системою підмножин з Ω , кожна з яких є скінченна сума відрізків виду $[a; b)$, що не перетинаються, то F є алгеброю множин.

Означення. Система підмножин F множини Ω називаються σ -алгеброю множин, якщо:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) якщо $A \in F$, то $\bar{A} \in F$;

3) якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

Таким чином, алгебра є класом множин, який замкнутий відносно скінченної кількості операцій об'єднання, перерізу та переходу до доповнення, а σ -алгебра є класом множин, замкнутий відносно зчисленого числа цих операцій. Прикладом σ -алгебри множин є множина усіх підмножин множини Ω .

Нехай K деякий клас множин з Ω . Ми його можемо доповнити до σ -алгебри різними засобами і таким чином отримати цілий набір $\{F_\alpha\}$ σ -алгебр. Якщо тепер розглянути переріз усіх цих σ -алгебр $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$, то ми отримаємо найменшу σ -алгебру, яка містить клас K .

Як приклад розглянемо множину $\Omega = (-\infty; \infty)$ і клас K усіх проміжків виду $[a; b)$. Найменша σ -алгебра, яка містить клас K зветься σ -алгеброю борелівських множин на $(-\infty; \infty)$. Борелівська множина – це множина, яка отримується при об'єднанні, перерізу та переходу до доповнення будь-якого зчисленого числа множин з класу K .

Борелівськими множинами є вся множина Ω і пуста множина $\emptyset$. Множина $\{a\}$, яка містить одну точку, також є борелівською так як

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a; a + \frac{1}{n} \right). \quad \text{Звідки борелівськими множинами є інтервал}$$

$(a; b) = [a; b) \setminus \{a\}$ і сегмент $[a; b] = [a; b) \cup \{b\}$. Далі, так як кожна відкрита множина з $\Omega = (-\infty; \infty)$ є сума скінченного або зчисленого числа інтервалів, то відкрита множина також є борелівською множиною. Кожна замкнута множина також є борелівською, як доповнення до відкритої множини.

Використовуючи введені поняття, визначимо аксіоматично ймовірнісну модель для експериментів з будь-яким число елементарних подій.

Нехай Ω є простором елементарних подій (скінченим, зчисленим або незчисленим). Задамо на Ω σ -алгебру множин F . Множини з F і тільки їх будемо вважати випадковими подіями (якщо множина не належить F , то вона подією не вважається).

Кожній випадковій події $A \in F$ поставимо у відповідність число $P(A)$, яке називають ймовірністю події A або ймовірнісною мірою на F , та яке задовольняє наступним аксіомам:

- 1) $P(A) \geq 0$ для будь якої події $A \in F$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ послідовність випадкових подій з F така,

$$\text{що } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \text{ то } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Трійку $\langle \Omega, F, P \rangle$ називають ймовірнісним простором. Будемо вважати, що побудована ймовірнісна модель експерименту, якщо побудовано ймовірнісний простір $\langle \Omega, F, P \rangle$, тобто зазначень простір елементарних подій Ω , σ -алгебра F елементарних подій та визначена ймовірнісна міра P на F .

Приклади.

1. Розглянемо стохастичний експеримент з скінченим числом однаково можливих елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Як F

візьмемо σ -алгебру усіх підмножин з Ω . Покладемо $P(A) = \frac{m}{n}$,

де m число елементарних подій, які входять у A . Очевидно, що аксіоми ймовірності виконуються і таким чином побудована ймовірнісна модель $\langle \Omega, F, P \rangle$ розглянутого експерименту.

2. Повернемося до експерименту про кидання навмання точки на відрізок $[0;1)$. Тут $\Omega = [0;1)$, а у якості F візьмемо σ -алгебру борелівських множин відрізка $[0;1)$. Приймемо, що ймовірність попадання точки на відрізок $[a;b) \subset [0;1)$ дорівнює $b - a$. Об'єднанню

будь якого числа відрізків, які не перетинаються, $\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i) \subset [0; 1)$

припишемо ймовірність $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$. Зрозуміло, що аксіоми

ймовірності будуть виконуватися і, таким чином, побудована ймовірнісна модель даного експерименту.

§ 6. Властивості ймовірності для довільного простору елементарних подій

Використовуючи введені аксіоми ймовірності, отримаємо властивості ймовірності.

- 1) Ймовірність події $\bar{A}$, протилежній події A , дорівнює $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Так як події A і $\bar{A}$ несумісні і $A \cup \bar{A} = \Omega$, то за третьою аксіомою $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$. За другою аксіомою $P(\Omega) = 1$, тоді $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- 2) Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\emptyset) = 0$.

Так як $\emptyset = \bar{\Omega}$, то за першою властивістю $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

- 3) Нехай A і B випадкові події такі, що $B \subset A$. Тоді $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

Так як події B і $A \setminus B$ несумісні і $A = B \cup (A \setminus B)$, то за третьою аксіомою $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$, звідки $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

- 4) Якщо $B \subset A$, то $P(B) \leq P(A)$.

Дійсно, за попередньою властивістю та за першою аксіомою $P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \geq 0$, тоді $P(B) \leq P(A)$.

- 5) Для кожної випадкової події A : $P(A) \leq 1$.

Так як кожна випадкова подія $A \subset \Omega$, то $P(A) \leq P(\Omega) = 1$, тобто $P(A) \leq 1$.

6) Якщо A і B дві випадкові події, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Так як події A і $B \setminus (A \cap B)$ несумісні і $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, то за третьою аксіомою і третьою властивістю

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Отриману формулу ще називають теоремою складання ймовірностей. Так як $P(A \cap B) \geq 0$, то з неї випливає, що $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

7) Неперервність ймовірності.

Якщо $\{A_n\}$ монотонно не спадна послідовність подій

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$.

Якщо $\{A_n\}$ монотонно не зростаюча послідовність подій

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ і $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$.

Доведення. Нехай $\{A_n\}$ монотонно не спадна послідовність подій.

Покладемо $A_0 = \emptyset$ та позначимо $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Події B_k попарно не перетинаються і $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$. При цьому $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Розглянемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = P(A).$$

Нехай тепер $\{A_n\}$ монотонно не зростаюча послідовність подій.

Розглянемо події $B_1 = A_1 \setminus A_2, B_2 = A_2 \setminus A_3, \dots$. Події B_k попарно не перетинаються і $A_1 = A \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)$, а $A_n = A \cup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right)$. Тоді

$$P(A_1) = P(A) + \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k).$$
 Так як ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k)$ є збіжним, то його

решта $\sum_{k=n}^{\infty} P(B_k)$ прямує до нуля коли $n \rightarrow \infty$. Отже

$$P(A_n) = P(A) + \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) = P(A).$$

Зауважимо, що при доведенні перших шести властивостей ймовірностей, ми використовували третю аксіому лише для скінченного числа випадкових подій. Тому ці властивості справедливі і тоді, коли в якості F береться алгебра множин. Для справедливості останній сьомій властивості вже важливо, що F є σ -алгеброю множин.

§ 7. Геометрична ймовірність

При розгляді експерименту про кидання навімання точки на відрізок $\Omega = [0; 1)$ ми отримали, що ймовірність попадання точки на відрізок $A = [a; b) \subset \Omega$ дорівнює довжині цього відрізка. Якщо при цьому врахувати, що довжина відрізка Ω дорівнює одиниці, то ми отримаємо, що ймовірність $P(A)$ є відношення довжини відрізка A до довжини відрізка Ω . Цей результат можна узагальнити таким чином.

Припустимо, що розглядається експеримент, простір елементарних подій якого є область Ω у n -мірному евклідовому просторі R^n . Припустимо також, що область Ω має міру $m(\Omega)$ (довжина при $n=1$, площа при $n=2$, об'єм при $n=3$). Розглянемо σ -алгебру F усіх вимірних підмножин з Ω . Якщо усі точки з Ω однаково можливі, то покладемо для кожної події $A \in F$

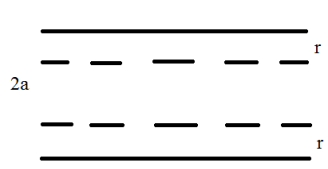
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Тоді $\langle \Omega, F, P \rangle$ є ймовірнісна модель стохастичного експерименту, який розглядається. Цю ймовірнісну модель прийнято називати геометричною ймовірністю. Вона часто використовується при розв'язуванні різноманітного типу задач.

Приклади.

1) На площині проведені паралельні прямі, відстань між якими $2a$. На площину навмання кидають монету радіусу r ($r < a$). Яка ймовірність того, що монета не перетне жодну з прямих?

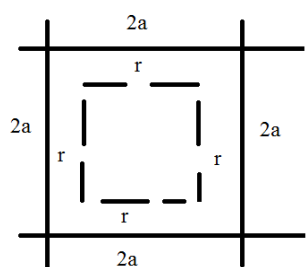
Простір елементарних подій $\Omega = \{x: 0 \leq x \leq 2a\}$. Монета не перетне жодну з прямих, якщо її центр знаходиться на відстані більше r від



цих прямих $A = \{x: r < x < 2a - r\}$ (у полосі між пунктирними прямими). Тоді

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2a - 2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

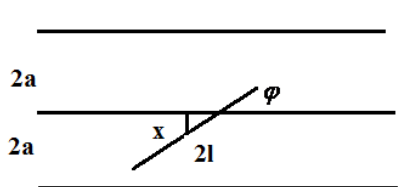
2) На площину, на якій нанесена квадратна сітка зі стороною $2a$, навмання кинута монета радіусу r ($r < a$). Яка ймовірність того, що монета не перетне жодну з сторін квадрату?



Так саме $\Omega = \{x, y: 0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2a\}$,
 $A = \{x, y: r \leq x \leq 2a - r, r \leq y \leq 2a - r\}$. Тоді

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{(2a - 2r)^2}{4a^2} = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2.$$

3) *Задача Бюфона.* На площині проведено паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На цю площину кидають навмання голку (відрізок) довжини $2l$ ($l < a$). Яка ймовірність того, що голка перетне якусь з паралельних прямих?



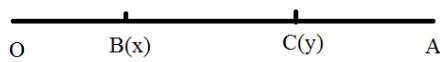
Позначимо через x відстань від середини голки до найближчої паралельної прямої, а через φ кут між голкою і цією прямою.

Розташування голки повністю визначається значеннями $x \in [0; a]$ і $\varphi \in [0; \pi]$. Таким чином, простір елементарних подій є прямокутник $\Omega = \{x, \varphi: 0 \leq x \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$. Голка перетне найближчу пряму, якщо буде виконана умова $x \leq l \sin \varphi$, отже $A = \{x, \varphi \in \Omega: x \leq l \sin \varphi\}$. Обчислимо

$$m(\Omega) = \pi a \text{ і } m(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

$$\text{Тоді } P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}.$$

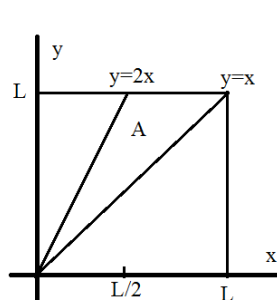
4) На відрізку OA довжини L числової осі навмання взято дві точки: $B(x)$ і $C(y)$, при цьому $y \geq x$. Яка ймовірність того, що довжина відрізка BC менша за довжину відрізка OB ? Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розміщення на числовій осі.



Простір елементарних подій

$$\Omega = \{x, y : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, y \geq x\}.$$

Умова $BC < OB$ нам дає $y - x < x$, тобто $y < 2x$ і



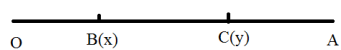
$A = \{x, y \in \Omega : x < y < 2x\}$. Знайдемо

$$m(\Omega) = \frac{1}{2} L^2; m(A) = \frac{1}{2} L^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot L = \frac{1}{4} L^2.$$

$$\text{Тоді } p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

5) На відрізку OA довжини L числової осі навмання взято дві точки: $B(x)$ і $C(y)$. Знайти ймовірність того, що з трьох отриманих відрізків можна утворити трикутник.

Простір елементарних подій $\Omega = \{x, y : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$.

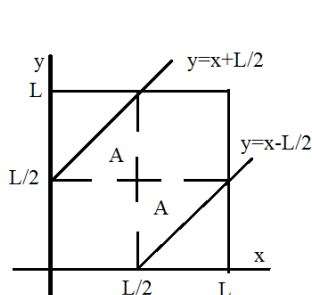


Розглянемо спочатку випадок коли $x < y$. Для того, щоб з трьох отриманих відрізків можна

утворити трикутник, кожен з них повинен бути менше суми двох

$$\text{інших } OB < BC + CA : x < L - x, x < \frac{L}{2}$$

$$BC < OB + CA : y - x < x + L - y, y < x + \frac{L}{2}$$



$$CA < OB + BC : L - y < y, y > \frac{L}{2}$$

Таким чином, $A = \left\{ x, y : x < \frac{L}{2}, \frac{L}{2} < y < x + \frac{L}{2} \right\}$.

Помінявши місцями точки $B(x)$ та $C(y)$, тобто вважаючи, що $x > y$ аналогічно отримаємо другу часть цієї області

$$A = \left\{ x, y : x > \frac{L}{2}, x - \frac{L}{2} < y < \frac{L}{2} \right\}. \text{ Знайдемо}$$

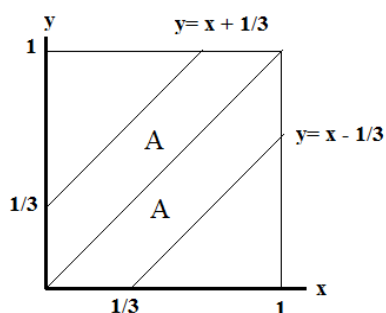
$$m(\Omega) = L^2 \text{ та } m(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{4} L^2. \text{ Тоді } p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

6) *Задача про зустріч.* Дві особи N і M домовилися зустрітися в певному місці між 10 і 11 годинами ранку. Той, хто приходить першим, чекає на другого протягом 20 хвилин і якщо не дочекається, іде. Чому дорівнює ймовірність зустрічі цих осіб, якщо прихід кожного з них протягом указаної години може відбутися навмання і моменти приходу незалежні.

Позначимо момент приходу особи N через x , а момент приходу особи M через y . Тоді простір елементарних подій

$$\Omega = \{x, y : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}. \text{ Зустріч відбудеться, якщо } |x - y| \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{тобто } A = \left\{ x, y \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{3} \right\}.$$



Нерівність $|x - y| \leq \frac{1}{3}$ рівносильна системі

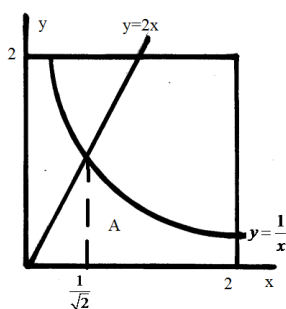
$$\begin{cases} y \geq x - \frac{1}{3} \\ y \leq x + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Тепер знаходимо } m(\Omega) = 1 \text{ і } m(A) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9},$$

$$\text{отже } P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{5}{9}.$$

7) Навмання взяти два додатні числа x і y , кожне з яких не перевершує двох. Знайти ймовірність того, що їх добуток xy буде не більше одиниці, а частка $\frac{y}{x}$ буде не більше двох.

Для даної задачі $\Omega = \{x, y: 0 < x \leq 2, 0 < y \leq 2\}$. З умов задачі слідує, що $xy \leq 1, \frac{y}{x} \leq 2$, тобто $y \leq \frac{1}{x}, y \leq 2x$ і $A = \left\{x, y \in \Omega: y \leq \frac{1}{x}, y \leq 2x\right\}$.



Знайдемо точку перетину цих ліній

$$2x = \frac{1}{x}, x^2 = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Обчислимо} \quad m(\Omega) = 4$$

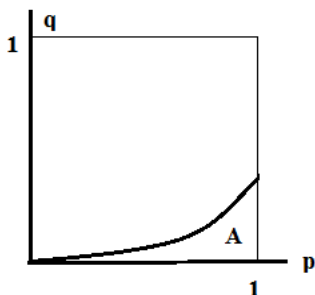
$$m(A) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 \frac{dx}{x} = x^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \ln x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (1 + 3 \ln 2) \text{ і } p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{8} (1 + 3 \ln 2).$$

8) Коефіцієнти квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ вибираються навмання з проміжку $[0;1]$. Яка ймовірність того, що це рівняння має дійсні корені?

Простір елементарних подій $\Omega = \{p, q: 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1\}$. Корені рівняння будуть дійсними, якщо $D = p^2 - 4q \geq 0$, тобто $q \leq \frac{p^2}{4}$. Таким

$$\text{чином, } A = \left\{p, q \in \Omega: q \leq \frac{p^2}{4}\right\}.$$



Знайдемо

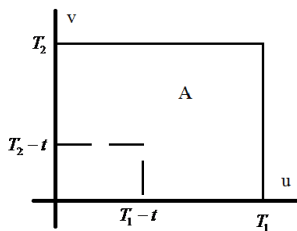
$$m(\Omega) = 1$$

та

$$m(A) = \int_0^1 \frac{p^2}{4} dp = \frac{p^3}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Звідки } P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{12}.$$

9) Пасажир може скористатися трамваями двох маршрутів які прямують з інтервалами T_1 і T_2 . Момент приходу пасажир на зупинку визначає на відрізках $[0; T_1]$ і $[0; T_2]$ числа u і v , які дорівнюють часу, який залишився до приходу трамвая відповідного маршруту. Припускаючи, що точка $(u; v)$ рівномірно розподілена на $\Omega = \{u, v : 0 \leq u \leq T_1, 0 \leq v \leq T_2\}$, знайти ймовірність того, що пасажир, котрий прийшов на зупинку, буде очікувати трамвая не довше t часу ($0 < t < \min\{T_1, T_2\}$).



У даному випадку $m(\Omega) = T_1 T_2$,

а $m(A) = T_1 T_2 - (T_1 - t)(T_2 - t)$. Тоді

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{T_1 T_2 - (T_1 - t)(T_2 - t)}{T_1 T_2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T_1}\right) \left(1 - \frac{t}{T_2}\right)$$

Завдання.

1. У круг радіуса R навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що точка виявиться усередині вписаного в круг: А) квадрата; В) правильного трикутника?

2. На відрізок OA довжини L числової осі навмання взято дві точки: $B(x)$ і $C(y)$. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC менша за відстань від точки O до найближчої до неї точки. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розміщення на числовій осі.

3. На відрізок OA довжини L числової осі навмання взято дві точки: $B(x)$ і $C(y)$. Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC виявиться меншою чим $\frac{L}{2}$.

4. Навмання взяти два додатні числа x і y , кожне з яких не перевершує одиниці. Знайти ймовірність того, що їх сума $x + y$ не перевершує одиниці, а добуток xy не менше ніж $0,09$.

5. Два судна повинні підійти до одного і того ж причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівно можливі з 10 до 18 годин. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві години.

6. В інтервалі часу $[0; T]$ у випадковий момент u з'являється сигнал тривалістю Δ . Приймач включається у випадковий момент часу $v \in [0; T]$ на час t . Припускаючи, що точка (u, v) рівномірно розподілена у квадраті $[0; T] \times [0; T]$, знайти ймовірність виявлення сигналу.

7. По радіоканалу впродовж проміжку часу $(0; 1)$ передається два сигнали тривалістю $\tau < \frac{1}{2}$, кожен з них з однаковою ймовірністю починається у будь-який момент інтервалу $(0; 1 - \tau)$. Якщо сигнали перекривають один одного хоч би частково, то обоє спотворюються і прийняти бути не можуть. Знайти ймовірність того, що сигнали будуть прийняти без спотворення.

§ 8. Умовні ймовірності, незалежні випадкові події

В багатьох задачах приходить знаходити ймовірність однієї випадкової події A при умові що відбулася певна подія B . Такі ймовірності називають умовними та позначають символом $P(A/B)$.

Наприклад, нехай двічі кинуть гральний кубик. Подія A - при першому кидку випала одиниця, а подія B - при двох кидках сума очок менша чотирьох. Простір Ω елементарних подій складається з 36 випадків. Події A і B це наступні підмножини з Ω :
 $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$; $B = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$.

Розглянемо умовну ймовірність $P(A/B)$. Так як подія B вже відбулася, то множина B грає роль простору елементарних подій, а множина $A \cap B = \{(1,1), (1,2)\}$ - роль сприятливих подій. Оскільки

$$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \text{ а } P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Тому } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{1/12} = \frac{2}{3}.$$

Означення . Нехай $\langle \Omega, F, P \rangle$ ймовірнісний простір, подія $B \in F$ і

$P(B) > 0$. Умовною ймовірністю події $A \in F$ при умові, що подія B вже відбулася, називають ймовірність

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Аналогічно, якщо $P(A) > 0$, то можна розглянути умовну ймовірність події B при умові, що відбулася подія A :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

З цих двох формул слідує формула $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$, яку ще називають формулою множення ймовірностей.

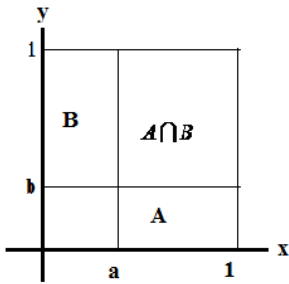
Приклад. У лотереї з 100 білетів є 5 виграшних. Навмання вибрано 3 білета. Яка ймовірність, що усі вони виграшні?

Позначимо через A_k подію, що k -ий вибраний білет є виграшним.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) = \\ &= \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} \approx 0,00006. \end{aligned}$$

Означення. Нехай $\langle \Omega, F, P \rangle$ ймовірнісний простір. Випадкові події A і B з F називають незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Приклад. Нехай у квадрат $\Omega = \{x, y: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ навмання кидається точка. Нехай A подія, яка полягає у тому, що абсциса кинутої точки не менша a : $A = \{x, y \in \Omega: a \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$, а подія B



полягає у тому, що ордината кинутої точки не менша b : $B = \{x, y \in \Omega: 0 \leq x \leq 1; b \leq y \leq 1\}$. Стасуємо, чи будуть ці події незалежними.

Сформульована задача легко розв'язується за допомогою поняття геометричної ймовірності.

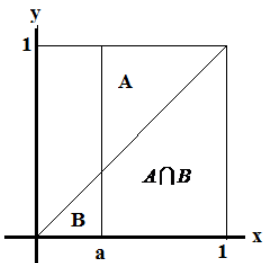
Маємо

$$m(\Omega) = 1, m(A) = 1 - a, m(B) = 1 - b, m(A \cap B) = (1 - a)(1 - b)$$

$$P(A) = 1 - a, P(B) = 1 - b, P(A \cap B) = (1 - a)(1 - b).$$

Таким чином, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ і ці дві події незалежні.

Змінимо тепер умови задачі. Нехай подія A остається той самою, а подія B полягає у тому, що ордината кинутої точки не більша абсциси: $B = \{x, y \in \Omega: 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x\}$.



В цьому випадку

$$m(A) = 1 - a, m(B) = \frac{1}{2}, m(A) = 1 - a, m(B) = \frac{1}{2}$$

$$m(A \cap B) = \frac{1 + a}{2}(1 - a) = \frac{1}{2}(1 - a^2)$$

$$P(A) = 1 - a, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{2}(1 - a^2).$$

Тоді $P(A \cap B) = \frac{1}{2}(1 - a^2) \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2}(1 - a)$, тобто події A і B вже не є незалежними. Ясно, що це пов'язано з тим як так обидві події мають обмеження на абсцису точки.

Властивості незалежних подій.

1. Нехай $P(B) > 0$. Випадкові події A і B незалежні тоді і тільки тоді коли $P(A/B) = P(A)$.

Дійсно, якщо події A і B незалежні, то

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Навпаки, якщо $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, то $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ і події A і B незалежні.

2. Якщо події A і B незалежні, то також незалежні і події A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B , $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Наприклад, доведемо незалежність подій A і $\bar{B}$. Так як $A \cap \bar{B} \subset A$ і $A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$, то за третьою властивістю ймовірності $P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$
 $= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$,

тобто подій A і $\bar{B}$ незалежні.

3. Нехай події A і B_1 незалежні та також незалежні події A і B_2 , при цьому події B_1 і B_2 несумісні: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Тоді події A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

Дійсно,

$$P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) =$$

$$= P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) = P(A)(P(B_1) + P(B_2)) = P(A)P(B_1 \cup B_2),$$

тобто події A і $B_1 \cup B_2$ незалежні.

Означення. Говорять, що події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні у сукупності, якщо для будь якого k ($1 \leq k \leq n$) та будь якого набору індексів $i_1, i_2, \dots, i_k$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) виконується рівність

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

З того, що події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні у сукупності, слідує їх попарна незалежність $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j$. Протилежне,

взагалі говорячи, невірно – з попарної незалежності подій не випливає їх незалежність у сукупності. Це демонструє наступний приклад.

Приклад (Бернштейна). Розглянемо тетраедр (правильну трикутну піраміду, у якій усі грані рівні). Нехай одна його грань пофарбована у червоний колір, друга – у чорний колір, третя – у зелений колір, а на четвертій є усі три кольори. Розглянемо події: при киданні тетраедра на площину випала грань, на який є червоний колір (подія A), чорний колір (подія B), зелений колір (подія C).

Так як кожен з трьох кольорів нанесено лише на дві грані, то $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ймовірність перетину любых двох кольорів дорівнює $\frac{1}{4}$, так як будь яка пара кольорів є лише на одній грані. Отже,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Так саме $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.

Таким чином, усі три події попарно незалежні. Але ці три події не є незалежними у сукупності, так як

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Нехай події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні у сукупності та мають ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$. Розглянемо подію A - відбудеться принаймні одна з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ та знайдемо її ймовірність. Для цього краще розглянути протилежну подію $\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$ - не відбулося жодної з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ та знайти

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n).$$

Наприклад, для запобігання аварії є три незалежно працюючих прилади, з ймовірностями, що вони спрацюють,

$p_1 = 0,9; p_2 = 0,95; p_3 = 0,85$. Знайдемо ймовірність, що при аварії спрацює принаймні один з цих приладів

$$P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,015 = \\ = 1 - 0,00075 = 0,99925,$$

що значно вище ймовірності спрацювання кожного з приладів.

Приклади.

1) Ймовірності появи кожного з двох незалежних подій A_1 і A_2 відповідно дорівнюють p_1 і p_2 . Знайти ймовірність появи тільки однієї з цих подій.

Шукана подія $A = A_1 \overline{A_2} \cup \overline{A_1} A_2$. Враховуючи незалежність цих подій та формули додавання і множення ймовірностей, отримуємо

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = p_1(1 - p_2) + p_2(1 - p_1).$$

2) Кинуто три гральних кубика. Знайти ймовірності наступних подій:

а) на кожній грані буде п'ять очок; б) на усіх гранях буде однакове число очок.

Враховуючи незалежність подій, отримуємо

$$\text{а) } p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}; \text{ б) } p = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

3) Ймовірність влучання у мішень стрілкою при одному пострілі дорівнює 0,8. Скільки пострілів повинен виконати стрілок, щоб з ймовірністю, меншою 0,4, можна було чекати, що не буде жодного промаху?

Ймовірність, що при n пострілах не буде жодного промаху дорівнює $p = (0,8)^n < 0,4$, звідки знаходимо $n > \frac{\ln 0,4}{\ln 0,8} \approx 4,11$,

тобто $n \geq 5$.

4) Студент знає 20 з 25 питань програми екзамену. Яка ймовірність того, що він знає усі три питання, запропонованих йому екзаменатором?

За формулою множення ймовірностей $p = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}$.

5) Відрізок розділено на три рівні частини. На цій відрізок навмання кидані три точки. Знайти ймовірність того, що на кожній з трьох частин відрізка опиниться по одній точці.

Ймовірність попадання точки на кожну з частин відрізка дорівнює $\frac{1}{3}$. Кількість перестановок точок між частинами дорівнює $3!$, отже

шукана ймовірність дорівнює $p = 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}$.

6) Два гральних кубика кидають до появи шести очок принаймні на одному з них. Знайти ймовірність того, що вперше шість очок з'явиться при k -том киданні.

Ймовірність того, що шість очок не з'явиться при одному киданні двох кубиків дорівнює $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, тоді ймовірність появи шести очок

принаймні на одному кубіку є $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Отже, ймовірність того,

що вперше шість очок з'явиться при k -том киданні дорівнює

$$p = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \cdot \frac{11}{36}.$$

7) У круг радіусу R вписано правильний трикутник. Всередину круга навмання кинуто чотири точки. Знайти ймовірності наступних подій: а) усі чотири точки потраплять всередину трикутника; б) одна точка потрапить всередину трикутника і по одній точці потраплять у кожний з трьох сегментів. Передбачається, що ймовірність попадання точки у фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розміщення всередині круга.

Знайдемо з початку площі: круга $m(\Omega) = \pi R^2$, правильного трикутника зі стороною $a = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}$, $m(A) = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$

та одного сегменту $m(B) = \frac{1}{3}(m(\Omega) - m(A)) = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$. Тоді шукані ймовірності

$$\text{а) } p = \left(\frac{m(A)}{m(\Omega)} \right)^4 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^4;$$

$$\text{б) } p = 4! \cdot \frac{m(A)}{m(\Omega)} \cdot \left(\frac{m(B)}{m(\Omega)} \right)^3 = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi} \right)^3.$$

8) В урні знаходиться $n + m$ куль: n білих та m чорних. Робиться підряд без повернення k виймань по дві кулі ($k < \min\{n, m\}$). Знайти ймовірність того, що кожен раз витягаються кулі різного кольору.

Враховуючи незалежність подій та формулу множення ймовірностей, маємо

$$p = \frac{C_n^1 \cdot C_m^1}{C_{n+m}^2} \cdot \frac{C_{n-1}^1 \cdot C_{m-1}^1}{C_{n+m-2}^2} \cdot \frac{C_{n-2}^1 \cdot C_{m-2}^1}{C_{n+m-4}^2} \cdot \dots \cdot \frac{C_{n-k+1}^1 \cdot C_{m-k+1}^1}{C_{n+m-2k+2}^2}.$$

9) При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що стежить за космічним об'єктом, об'єкт буде виявлено з ймовірністю p . Виявлення об'єкту в кожному циклі відбувається незалежно від інших. Проведено n циклів огляду. Яка ймовірність того, що об'єкт буде виявлено?

Ймовірність того, що об'єкт не буде виявлено за n циклів огляду дорівнює $(1 - p)^n$. Тоді ймовірність того, що об'єкт буде виявлено принаймні один раз дорівнює $P = 1 - (1 - p)^n$.

10) Знайти ймовірність того, що навмання вибране натуральне число не ділиться: а) ні на два, ні на три; б) на два або на три.

Нехай подія A - натуральне число не ділиться на два: $P(A) = \frac{1}{2}$,

подія B - число не ділиться на три: $P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Тоді:

$$a) P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$б) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

11) Поява події A рівноможлива у будь який момент проміжку часу T . Ймовірність того, що подія відбудеться за цей проміжок часу, дорівнює p . Відомо, що за час $t < T$ подія A не відбулася. Яка ймовірність того, що подія A відбудеться за проміжок часу, що залишився?

Позначимо через P умовну ймовірність того, що подія A відбудеться за проміжок часу $(t; T)$, при умові, що вона не відбулася за проміжок часу $(0; t)$. Тоді ймовірність p того, що подія A відбудеться за час T , дорівнює суми ймовірності $\frac{t}{T} p$ появи події A за час t та добутку ймовірності $1 - \frac{t}{T} p$ того, що за час t подія A не відбулася, на умовну ймовірність P :

$$p = \frac{t}{T} p + \left(1 - \frac{t}{T} p\right) \cdot P, \text{ звідки } P = \frac{p \left(1 - \frac{t}{T}\right)}{1 - \frac{t}{T} p} = \frac{p(T-t)}{T-tp}.$$

12) Ймовірності того, деталь опиниться бракованою у результаті механічної та термічної обробки, дорівнюють відповідно p_1 і p_2 . Ймовірності того, що брак є неусувним для кожного з видів обробки, дорівнюють відповідно q_1 і q_2 . Знайти ймовірність того, що принаймні одна з трьох деталей буде мати неусувний брак після проходження механічної, а потім термічної обробки.

Ймовірність того, що брак є неусувним після механічної обробки дорівнює $p_1 q_1$, а після термічної – $p_2 q_2$. Отже ймовірність того, що брак усувний, відповідно дорівнюють $1 - p_1 q_1$ і $1 - p_2 q_2$. Для трьох деталей брак буде усувним після двох видів обробки з ймовірністю

$(1 - p_1 q_1)^3 (1 - p_2 q_2)^3$. Таким чином, шукана ймовірність є $P = 1 - (1 - p_1 q_1)^3 (1 - p_2 q_2)^3$.

Завдання.

1. Два стрілки стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого стрілка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпу в мішень влучить: а) тільки один стрілок; б) обидва стрільці.

2. На книжній полиці у випадковому порядку розташовано 15 книжок, з яких п'ять у твердому переплеті. Навмання з полиці взято три книжки. Знайти ймовірність того, що принаймні одна з них у твердому переплеті.

3. Два станка виробляють однакові деталі. Ймовірність того, що деталь вищого сорту для першого станка дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. На першому станку виготовили дві деталі, а на другому три деталі. Яка ймовірність того, що усі вони вищого сорту?

4. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два стандартні.

5. Скільки потрібно взяти цілих чисел з таблиці випадкових чисел, щоби з ймовірністю не менше 0,9 бути упевненим, що серед них є принаймні одне парне число?

6. В лотереї n білетів, з яких m виграшних. Яка ймовірність виграти, придбав k білетів?

7. Серед 25 екзаменаційних білетів є 5 «щасливих». Студенти підходять за білетами один за другим по черзі. У кого більша ймовірність витягнути «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

8. Підкидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шестірка, якщо відомо, що сума очок дорівнює восьми?

9. *Задача шевальє де Мере*. Сучасник математика Б. Паскаля азартний гравець шевальє де Мере пропонував партнерам гру за наступними правилами: він буде кидати два гральних кубика 24 рази і виграє, якщо хоч один раз з'явиться дві шістки (А). Його суперник кидає один раз чотири гральних кубика і виграє, якщо з'явиться хоч одна шістка (В). Здається, що шевальє де Мере вибрав себе більш сприятливі умови, але граючи багато раз, він більше програвав, ніж вигравав. Чому?

10. Підкинуто три гральних кубика. Знайти ймовірність наступних подій:

а) на двох гранях випаде по 6 очок, а на третій грані – інше число очок; б) на двох гранях випаде однакове число очок, а на третій грані – інше число очок; в) на усіх трьох гранях впаде різне число очок.

11. В урні знаходиться п'ять куль з номерами від одного до п'яти. Навмання достають послідовно без повернення три кулі. Знайти ймовірність наступних подій: а) послідовно з'являться кулі з номерами 1,3,5; б) витягнуті кулі мають номери 1,3,5 незалежно від того, у якій послідовності вони з'явилася.

12. В двох урнах знаходяться кулі. В першій – 5 білих, 11 чорних та 8 червоних, в другій – 10 білих, 8 чорних та 6 червоних. З обох урн навмання достають по одній кулі. Яка ймовірність, що обидві кулі одного кольору?

13. Є m радіолокаційних станцій, кожна з яких за один цикл огляду виявляє об'єкт з ймовірністю p (незалежно від інших циклів і від інших станцій). За час T кожна станція встигає зробити n циклів. Знайти ймовірність таких подій: А - за час T об'єкт буде виявлено принаймні однією з станцій; В - за час T об'єкт буде виявлено кожною із станцій.

14. Знайти ймовірність того, що серед n навмання вибраних цифр: а) немає цифри 0; б) немає цифри 1; в) немає цифр 0 і 1; г) немає цифри 0 або немає цифри 1.

15. Система контролю якості виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k -ої перевірки ($k=1,2$) виріб, що

задовольняє стандарту, відбраковується з ймовірністю α_k , а бракований виріб приймається з ймовірністю β_k . Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірності наступних подій: A - бракований виріб буде прийнятий; B - виріб, який задовольняє стандарту, буде відбраковане.

§ 9. Незалежні випробування, що повторюються. Формула Бернуллі

Припустимо, що робиться серія з n незалежних випробувань. У кожному випробуванні деяка подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Знайдемо ймовірність того, що в цій серії з n випробувань подія A відбудеться рівно k разів, при цьому байдуже в якій послідовності.

Всього існує C_n^k комбінацій, які складаються з k подій A і $n - k$ протилежних подій $\bar{A}$. Ймовірність кожної такої комбінації дорівнює $p^k (1 - p)^{n-k} = p^k q^{n-k}$. Таким чином, ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k разів в серії з n незалежних випробувань дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Ця формула носить назву формули Бернуллі. З її допомогою легко обчислити таких ймовірностей як:

- подія A відбулася менше k разів: $\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{n-i}$;
- подія A відбулася не менше k разів: $\sum_{i=k}^n C_n^i p^i q^{n-i}$.

Приклади.

1) Відрізок AB розділено точкою C у відношенні 2:1. На цій відрізок навмання кинуто чотири точки. Знайти ймовірність того, що дві з них окажуться лівіше точки C , а дві правіше неї. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна його довжині та не залежить від його розташування.

Ясно, що ймовірність попадання точки на відрізок AC дорівнює $\frac{2}{3}$,

а на відрізок CB дорівнює $\frac{1}{3}$. За формулою Бернуллі маємо

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

2) Двоє рівносильних спортсменів грають між собою у теніс. Що більш ймовірно: виграти дві партії з чотирьох чи три партії з шести? (Нічий у тенісі не буває.)

Так як спортсмені рівносильні, то $p = q = \frac{1}{2}$. Через те що в усіх партіях ймовірність виграти стала і не важливо у якій послідовності будуть виграні партії, то застосовна формула Бернуллі:

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{64} = \frac{5}{16}$$

Отже $P_4(2) > P_6(3)$, тобто більш ймовірно виграти дві партії з чотирьох.

3) Проводиться чотири незалежних випробування, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю $0,3$. Подія B відбувається з ймовірністю 1 , якщо подія A відбулася не менш чим три рази; відбувається з ймовірністю $0,5$, якщо подія A відбулася два рази та не може відбутися, якщо подія A відбулася менше двох разів. Знайти ймовірність появи події B .

За формулою Бернуллі маємо

$$P(B) = P_4(4) + P_4(3) + 0,5P_4(2) = C_4^4 (0,3)^4 + C_4^3 (0,3)^3 \cdot 0,7 + 0,5C_4^2 (0,3)^2 (0,7)^2 = 0,0081 + 4 \cdot 0,027 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 6 \cdot 0,09 \cdot 0,49 = 0,216.$$

4) *Задача Банаха*. Деяка особа носить з собою дві коробки сірників. Кожен раз, коли йому потрібен сірник, він навмання бере одну з коробок. Колись наступить такий момент, що витягнута

коробка виявиться порожньою. Знайдіть ймовірність того, що в цей момент друга коробка містить k сірників, припускаючи, що спочатку кожна коробка містила по n сірників.

Ймовірність витягнути ту або іншу коробку однакова, тобто $p = q = \frac{1}{2}$. Розглянемо випадок коли одна з коробок порожня, а у другій залишилося k сірників, тобто він використав $2n - k$ сірників.

Тоді за формулою Бернуллі $p = C_{2n-k}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}}$.

5) Телефонна станція обслуговує N абонентів, кожен з яких користується телефоном однаково часто і на протязі однієї години роблять k розмов з середньою тривалістю t години кожна. Знайти ймовірність одночасної розмови рівно m абонентів.

Ймовірність того, що у даний момент часу розмовляє по телефону будь який абонент дорівнює $p = \frac{kt}{N}$. Тоді за формулою Бернуллі маємо

$$P_N(m) = C_N^m \left(\frac{kt}{N}\right)^m \left(1 - \frac{kt}{N}\right)^{N-m}.$$

Завдання.

1. Монету підкидають п'ять разів. Знайти ймовірності того, що герб випаде: а) менше двох разів; б) не менше двох разів.

2. На відрізок AB довжини a кинута навмання п'ять точок. Знайти ймовірність того, що дві точки будуть знаходитися від точки A на відстані, яке менше x , а решта на відстані більше x . Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна його довжині та не залежить від його розташування.

3. Відрізок розділено на чотири рівні частини. На відрізок кинута навмання вісім точок. Знайти ймовірність того, що на кожну з чотирьох частин відрізка попаде по дві точки. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна його довжині та не залежить від його розташування.

4. З ящика, в якому знаходиться 20 білих та 2 чорних кулі, n разів достають кулі по одній і кожен раз повертають назад. Знайти найменше число n витягань, при якому ймовірність витягти принаймні один раз чорну кулю буде більше половини.

5. Випробування полягає у киданні трьох гральних кубиків. Знайти ймовірність того, що у п'яти незалежних випробувань рівно два рази випаде по три одиниці.

6. При роздачі колоди з 36 карт чотирьом гравцям, один з них три рази підряд не отримував тузів. Чи є у нього основа скаржитися на невдачу?

7. Телефонна станція обслуговує N абонентів, кожному з яких може бути надана для розмови будь яка з m ліній зв'язку ($m < N$), якщо вона вільна. Усі абоненти користуються телефоном однаково часто і на протязі однієї години роблять k розмов з середньою тривалістю t години кожна. Один з абонентів хоче подзвонити. Яка ймовірність, що він зможе подзвонити?

§ 10. Формули повної ймовірності

Означення. Нехай маємо n випадкових подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які належать

σ -алгебрі F . Будемо говорити, що ці події утворюють повну групу гіпотез, якщо

$$1. \bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$$

$$2. H_k \cap H_j = \emptyset \text{ при } k \neq j.$$

Теорема. Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ повна група гіпотез і $P(H_k) > 0$, то для будь якої випадкової події $A \in F$ виконується формула повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) P(A / H_k).$$

Дійсно, так як $A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n H_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (A \cap H_k)$ та події $A \cap H_k$ попарно несумісні, то $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)$.

Приклади.

- 1) В I урні знаходиться 3 білих і 2 чорних кулі, а в II урні – 2 білих і 1 чорна кулі. З I урни навмання достають дві кулі та перекладають їх в II урну. Знайти ймовірність достати білу кулю з поповненої II урни.

Розглянемо наступні гіпотези:

H_1 : з I урни в II урну переклали дві білих кулі;

H_2 : з I урни в II урну переклали одну білу та одну чорну кулі;

H_3 : з I урни в II урну переклали дві чорних кулі.

Знайдемо ймовірності цих гіпотез:

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2!}{5 \cdot 4 \cdot 2!} = \frac{3}{10}, P(H_2) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2!}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5},$$

$$P(H_3) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1 \cdot 2!}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$$

Нехай подія A - з II поповненої урни достали білу кулю. Знайдемо умовні ймовірності при кожній гіпотезі:

$$P(A/H_1) = \frac{4}{5} \text{ - в II урні стане 4 білих та 1 чорна куль;}$$

$$P(A/H_2) = \frac{3}{5} \text{ - в II урні стане 3 білих та 2 чорних куль;}$$

$$P(A/H_3) = \frac{2}{5} \text{ - в II урні стане 2 білих та 3 чорних куль.}$$

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)P(A/H_k) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{25} = 0,64.$$

- 2) В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю, після чого з урни навмання достають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля

буде білою, якщо однаково можливі усі припущення про початкову кількість білих куль в урні.

Розглянемо гіпотези H_k - в урні на початку було k білих куль ($0 \leq k \leq n$) та подію A - витягнута біля куля. Так як усі гіпотези мають однакову можливість, то $P(H_k) = \frac{1}{n+1}$. Умовні ймовірності події A при кожній гіпотезі дорівнюють $P(A/H_0) = \frac{1}{n+1}, P(A/H_1) = \frac{2}{n+1}, \dots, P(A/H_n) = \frac{n+1}{n+1}$.

За формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{k=0}^n P(H_k)P(A/H_k) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{n+1}{n+1} \right) = \frac{1+2+\dots+(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1+n+1}{2} \cdot (n+1) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

3) В I урні знаходиться n_1 білих та m_1 чорних куль, в II урні – n_2 білих та m_2 чорних куль. З кожної урни навмання беруть по одній кулі. Після чого з цих двох куль навмання вибирають одну. Яка ймовірність того, що це біла куля?

Розглянемо гіпотези H_k - куля взята з k -ої урни ($k=1,2$). Так як обидві гіпотези однаково можливі, то $P(H_k) = \frac{1}{2}$. Розглянемо подію A - з двох витягнутих куль обрана біла куля. Відповідні умовні ймовірності дорівнюють $P(A/H_1) = \frac{n_1}{n_1+m_1}$ та $P(A/H_2) = \frac{n_2}{n_2+m_2}$.

$$\text{Отже } P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{n_1}{n_1+m_1} + \frac{n_2}{n_2+m_2} \right).$$

Завдання.

1. На складі знаходиться 12 деталей, які були виготовлені на заводі № 1, 20 деталей, виготовлених на заводі № 2 та 18 деталей – на заводі № 3. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена на заводі № 1 є відмінної якості дорівнює 0,9; для деталей, виготовлених на заводах

№ 2 та № 3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що навпаки взята зі складу деталь, буде відмінної якості.

2. В I урні знаходиться 10 куль, з них 8 білих, в II урні знаходиться 20 куль, з яких 4 білих. З кожної урни навмання дістали по одній кулі, а далі з цих двох куль навмання вибрали одну. Яка ймовірність, що вона буде білою?

3. У коробці лежить 20 тенісних м'ячів, з яких 12 нових і 8 м'ячів, якими вже грали. З коробки навмання беруть для гри два м'яча і по закінченню гри повертають назад. Після цього з коробки навмання беруть два м'яча для наступної гри. Яка ймовірність того, що ці обидва м'ячі будуть новими?

4. В I урні знаходиться 1 біла та 9 чорних куль, а в II урні – 1 чорна та 5 білих куль. З кожної урни навмання дістали по одній кулі, а решту куль переклали у III урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання вибрана з III урни, буде білою.

5. З урни, де знаходиться 2 білі та 3 чорні кулі, навмання достають дві кулі і кладуть в урну одну білу кулю. Знайти ймовірність того, що після цього навмання вийнята куля буде чорною.

§ 11. Формули Байеса

Розглянемо повну групу гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ і деяку подію A . Нехай далі відомі ймовірності цих гіпотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ (їх прийнято називати апріорними ймовірностями), а також умовні ймовірності події A при кожній з цих гіпотез $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$. Припустимо, що проведено деякий експеримент, у результаті якого відбулася подія A . Це дає нам можливість зробити переоцінку ймовірності гіпотез, тобто знайти апостеріорні ймовірності за допомогою формул Байеса

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Приклади.

1) Три стрільця одночасно зробили по одному пострілу у мішень, у результаті чого відбулося два попадання. Перший стрілок влучає у мішень з ймовірністю $p_1 = 0,6$, другий – с ймовірністю $p_2 = 0,8$, а третій – с ймовірністю $p_3 = 0,9$. Знайти ймовірність того, що у мішень не влучив другий стрілок.

Нехай подія A_k – у мішень попав k -тий стрілок ($k = 1, 2, 3$). Так як було два попадання у мішень, то достатньо розглянути тільки наступні гіпотези:

$H_1 = \overline{A_1}A_2A_3$ з ймовірністю $P(H_1) = 0,4 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,288$;

$H_2 = A_1\overline{A_2}A_3$ з ймовірністю $P(H_2) = 0,6 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,108$;

$H_3 = A_1A_2\overline{A_3}$ з ймовірністю $P(H_3) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,048$.

Нехай подія B – у мішень було два попадання. Для розглянутих гіпотез це достовірна подія, отже $P(B/H_k) = 1, k = 1, 2, 3$. Відмітимо відразу, що розглядати інші гіпотези (усі три стрілка попали у мішень, тільки один попав у мішень і так далі) не має сенсу, так як при них подія B неможлива, а тому відповідні умовні ймовірності дорівнюють нулю.

За формулою повної ймовірності знайдемо

$$P(B) = \sum_{k=1}^3 P(H_k)P(B/H_k) = 1 \cdot (0,288 + 0,108 + 0,048) = 0,444.$$

Тоді за формулою Байеса отримаємо шукану ймовірність

$$P(H_2/B) = \frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)} = \frac{0,108 \cdot 1}{0,444} \approx 0,243.$$

У даному випадку апостеріорна ймовірність вдвічі більше за відповідну апріорну ймовірність $P(H_2)$.

2) Маємо три партії деталей по 20 деталей у кожній. Кількість стандартних деталей в першій, другий та третій партіях відповідно дорівнює 20, 15 і 10. З навмання вибраної партії навмання витягнули одну деталь, яка виявилась стандартною. Деталь була повернена у ту же партію і повторно з цієї партії витягнули навмання ще одну

деталь, яка також опинилася стандартною. Знайти ймовірність того, що ці деталі були витягнуті з третьої партії.

Розглянемо гіпотези H_k – деталь витягнута з k -тої партії ($k=1,2,3$). Так як деталі були витягнуті з навмання вибраної партії, то $P(H_k) = \frac{1}{3}$.

Позначимо через A подію, що в кожному з двох витягувань (з поверненням) була витягнута стандартна деталь, та знайдемо умовні ймовірності

$$P(A/H_1) = 1; P(A/H_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{9}{16}; P(A/H_3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}.$$

За формулою повної ймовірності $P(A) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \right) = \frac{29}{48}$,

$$\text{а за формулою Байеса } P(H_3/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{29}{48}} = \frac{4}{29}.$$

3) Вироби перевіряє на стандартність один з двох контролерів. Ймовірність того, що виріб попаде до першого з них, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде признано стандартним першим контролером, дорівнює 0,9, а другим – 0,95. Стандартний виріб при перевірці був признано стандартним. Яка ймовірність того, що його перевіряв другий контролер?

Розглянемо гіпотези H_k – виріб перевіряв k -тий контролер ($k=1,2$). Їх ймовірності $P(H_1) = 0,55$ та $P(H_2) = 0,45$. Нехай подія A – виріб признано стандартним. Відповідні умовні ймовірності $P(A/H_1) = 0,9$ і $P(A/H_2) = 0,95$. За формулою повної ймовірності знайдемо $P(A) = 0,55 \cdot 0,9 + 0,45 \cdot 0,95 = 0,495 + 0,4275 = 0,9225$.

За формулою Байеса знаходимо шукану ймовірність

$$P(H_2/A) = \frac{0,45 \cdot 0,95}{0,9225} = \frac{0,4275}{0,9225} \approx 0,4634.$$

4) Батарея з трьох гармат зробила залп, при цьому два снаряди влучили в ціль. Знайти ймовірність того, що перша гармата влучила в ціль, якщо ймовірності влучити в ціль для першої, другої та третьої гармати дорівнюють відповідно $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$.

Позначимо через A подію, що два снаряди влучили в ціль, та розглянемо дві гіпотези: H_1 - перша гармата влучила в ціль і H_2 - перша гармата не влучила в ціль. Розглядати інші гіпотези немає сенсу, так як для них подія A неможлива і відповідні умовні ймовірності дорівнюють нулю.

За умовою $P(H_1) = 0,4$, отже $P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Знайдемо умовну ймовірність $P(A/H_1)$, тобто ймовірність того, що в ціль влучили два снаряди і один з них послано першою гарматою. Тоді або друга гармата влучила, а третя не влучила, або навпаки. Ці дві події несумісні, тому

$$P(A/H_1) = p_2(1 - p_3) + p_3(1 - p_2) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,5.$$

Умовна ймовірність $P(A/H_2)$ є ймовірність події, що в ціль влучили два снаряди і при цьому перша гармата не влучила, тобто влучили друга і третя гармати, одже $P(A/H_2) = p_2 p_3 = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$.

За формулою Байеса отримуємо

$$P(H_1/A) = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,15} = \frac{20}{29} \approx 0,69.$$

5) В урні знаходиться одна куля, про яку відомо, що вона або біла або чорна. В урну поклали білу кулю, ретельно перемішали та дістали навмання одну кулю, яка також опинилася білою. Яка ймовірність того, що після цього з урни витягнуть білу кулю?

Розглянемо гіпотези: H_1 - в урні була біла куля; H_2 - в урні була чорна куля та подію A - з урни на другий раз також витягнуть білу кулю. Зрозуміло, що $P(H_1) = P(H_2) = 0,5$, а умовні гіпотези

$$P(A/H_1) = 1, P(A/H_2) = 0,5. \text{ Тоді } P(H_1/A) = \frac{0,5 \cdot 1}{0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{2}{3}.$$

6) Відомо, що 96% виробів, що випускаються, відповідають стандарту. Існуюча схема контролю визнає придатним стандартні вироби з ймовірністю 0,98 і нестандартні – з ймовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який пройшов контроль, відповідає стандарту.

Розглянемо гіпотези: H_1 – виріб відповідає стандарту; H_2 – виріб не відповідає стандарту та подію A – виріб пройшов контроль. З умов задачі випливає що

$$P(H_1) = 0,96; P(H_2) = 0,04 \text{ і } P(A/H_1) = 0,98; P(A/H_2) = 0,05.$$

За формулою Байеса

$$P(H_1/A) = \frac{0,96 \cdot 0,98}{0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,05} = \frac{0,9408}{0,9428} = 0,9979.$$

7) Повідомлення, яке передається, складається з сигналів «точка» і «тире». Статистично встановлено, що спотворюється в середньому $\frac{2}{5}$ сигналів «точка» і $\frac{1}{3}$ сигналів «тире». Відомо що серед переданих сигналів «точка» і «тире» зустрічаються у відношенні 5:3. Знайти ймовірність що переданий сигнал прийнятий вірно, якщо: а) прийнято сигнал «точка»; б) прийнято сигнал «тире».

Позначимо події: A – прийнято сигнал «точка»; B – прийнято сигнал «тире» та розглянемо гіпотези: H_1 – передано сигнал «точка»; H_2 – передано сигнал «тире». З умов задачі випливає, що

$$P(H_1) = \frac{5}{8}; P(H_2) = \frac{3}{8}; P(A/H_1) = \frac{3}{5}; P(A/H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(B/H_1) = \frac{2}{5}; P(B/H_2) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Знайдемо ймовірності } P(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тоді а) } P(H_1/A) = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}; \text{ б) } P(H_2/B) = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

8) Є дві партії однакових виробів. Відомо, що у одній партії усі вироби доброякісні, а у другий партії 75% доброякісних виробів. Виріб, який був взятий з навмання вибраної партії, виявився доброякісним. Знайти ймовірність того, що другий виріб, взятий з цієї ж партії, буде недоброякісним, якщо перший виріб був повернутий в цю партію.

Розглянемо гіпотези: H_1 – виріб взято з партії з тільки доброякісними виробами та H_2 – виріб взято з партії, яка містить недоброякісні вироби. Ясно, що $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Розглянемо події: A – перший взятий виріб є доброякісним та B – другий взятий виріб є недоброякісним. Знайдемо ймовірності $P(A/H_1) = 1; P(A/H_2) = \frac{3}{4}$. За формулою повної ймовірності

$P(A) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{8}$. Після випробування ймовірності гіпотез зміняться та будуть наступними

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7}; P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Враховуючи тепер, що $P(B/H_1) = 0; P(B/H_2) = \frac{1}{4}$ та взяв нові отримані ймовірності гіпотез $P(H_1) = \frac{4}{7}; P(H_2) = \frac{3}{7}$ за формулою повної ймовірності знаходимо $P(B) = \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$.

9) На курсі вчаться n студентів, з яких n_1 студентів вчаться перший рік на цьому курсі, n_2 студентів вчаться другий рік на цьому курсі та n_3 студентів вчаться третій рік на цьому курсі ($n_1 + n_2 + n_3 = n$). Серед двох навмання вибраних студентів виявилось, що перший з них вчиться на цьому курсі довше другого. Яка ймовірність того, що цей студент вчиться третій рік на цьому курсі?

Розглянемо гіпотези: H_2 – перший студент навчається другий рік (тоді другий студент навчається перший рік) та H_3 – перший студент навчається третій рік (тоді другий студент навчається перший або другий рік). Ймовірності цих гіпотез $P(H_2) = \frac{n_2}{n}$; $P(H_3) = \frac{n_3}{n}$. Нехай подія A – перший студент вчиться на цьому курсі довше другого. Обчислимо умовні ймовірності $P(A/H_2) = \frac{n_1}{n}$; $P(A/H_3) = \frac{n_1 + n_2}{n}$.

Тоді за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \frac{n_1 n_2}{n^2} + \frac{n_3 (n_1 + n_2)}{n^2} = \frac{n_1 n_2 + n_3 (n_1 + n_2)}{n^2}$$

і за формулою Байеса $P(H_3/A) = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2 + n_3 (n_1 + n_2)}$.

Завдання.

1. Два верстата виробляють однакові деталі, які поступають на склад. Продуктивність першого верстата вдвічі більша ніж другого. Перший верстат виробляє у середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята зі складу деталь виявилась відмінної якості. Яка ймовірність того, що ця деталь вироблена на другому верстаті?

2. Кількість вантажних машин, які проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до кількості легкових машин, які проїжджають по тому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машина ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки для заправки під'їхала машина. Що ймовірніше: ця машина вантажна або легкова?

3. У спеціалізовану лікарню надходять у середньому 50% хворих з захворюванням A , 30% – з захворюванням B і 20% – з захворюванням C . Ймовірність повного одужання для захворювання A дорівнює 0,7; для захворювання B дорівнює 0,8 та для захворювання C – 0,9. Хворий, який поступив до лікарні, одужав

повністю. Знайти ймовірність того, що він страждав на захворювання B .

4. Три стрілки одночасно зробили по одному пострілу в мішень, у результаті чого відбулося два попадання. Перший стрілок влучає в мішень з ймовірністю $p_1 = 0,2$, другий – з ймовірністю $p_2 = 0,4$, а третій – з ймовірністю $p_3 = 0,3$. Знайти ймовірність того, що третій стрілок влучив у мішень.

5. Два з трьох незалежно працюючих елемента деякого приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірності відмови першого, другого та третього елементів відповідно дорівнюють $0,2$; $0,1$ та $0,3$.

6. З двох близнюків перший хлопчик. Яка ймовірність того, що другий також хлопчик, якщо серед близнюків ймовірність народження двох хлопців дорівнює a , двох дівчаток дорівнює b , а для близнюків різної статі ймовірність народитися першим однакова для обох статей.

7. В I урні знаходиться 2 білих та 3 чорних кулі, в II урні знаходиться 4 білих та 3 чорних кулі, а в III урні – 6 білих та 2 чорних кулі. Припускаючи, що витягання кулі з будь якої з трьох урн однаково можливо, знайти ймовірність того, куля була витягнута з першої урни, якщо: A - витягнута куля опинилася білою;

B - витягнута куля опинилася чорною.

8. Відомо, що 5% усіх чоловіків і $0,25\%$ усіх жінок є дальтоніками. Навмання вибрана особа опинилась дальтоніком. Яка ймовірність, що це жінка? (Вважати, однаковою кількість чоловіків та жінок.)

9. В I урні знаходиться 2 білих, 3 червоних та 10 чорних куль, в II урні знаходиться 8 білих, 5 червоних та 2 чорних куль. Після витягування кулі спочатку з одної, а потім з іншої урни витягнутими опинились спочатку чорна, а потім біла куля. Знайти ймовірність того, що витягання куль проводилося спочатку з першої, а потім з другої урни, припускаючи, що обидві послідовності витягувань мають однакову ймовірність.

10. В урні знаходиться три кулі, які можуть бути білим або чорними. Усі припущення о первинному складі урни мають однакову ймовірність. Проведено чотири експерименти, які полягають у вийманні кожного разу по одній кулі з подальшим поверненням її в урну. З'явилися кулі: чорна, біла, біла, біла. Знайти ймовірності різних складів урни після проведення експерименту.

11. Маємо п'ять урн. В 1-ий, 2-ий та 3-ій урнах знаходиться по 2 білих і 3 чорних кулі; в 4-ий та 5-ий урнах знаходиться по 1 білій і 1 чорній кулі. Навмання вибирається урна і з неї навмання достають одну кулю, яка опинилася білою. Яка ймовірність того, що була вибрана 4-та або 5-та урна?

Глава 2. Випадкові величини та функції розподілу

§ 12. Функція розподілу випадкової величини

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Випадкова величина це величина, яка приймає одні або інші значення в залежності від випадку. Наприклад, випадковими величинами є: число очок, яке випало при киданні грального кубика; число влучень в ціль при n пострілах; час безвідмовної роботи приладу і так далі.

Випадкова величина ξ є число, яке ставиться у відповідність кожному можливому результату експерименту. Оскільки результати експерименту описуються елементарними подіями, випадкову величину можна розглядувати як числову функцію $\xi = \xi(\omega)$ на просторі елементарних подій Ω .

Приклади.

1. Нехай двічі підкидають монету. Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ\}$. Нехай ξ число появ герба. Тоді випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$ задається таблицею

ω	ЦЦ	ЦГ	ГЦ	ГГ
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

2. Нехай кинуто гральний кубик. В цьому випадку простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ де ω_k означає, що випало k очок. Нехай випадкова величина ξ є число очок, яке випало, отже $\xi(\omega_k) = k$.

При вивченні випадкових величин нас цікавитиме не лише яких значень приймає та або інша випадкова величина, але і ймовірності, з якими вона приймає ці значення. Тоді множини, на яких визначена випадкова величина, повинна належати σ - алгебрі F випадкових подій. Для цього достатньо, щоб для кожного дійсного x множина $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in F$. Звідси також слідуватиме, що для будь-якої борелівської множини B на числовій вісі $\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in F$. Тепер ми можемо дати чітке означення випадкової величини.

Означення. Нехай $\langle \Omega, F, P \rangle$ ймовірнісний простір. Будь-яка дійсна функція $\xi = \xi(\omega)$ на Ω така, що для кожного дійсного x $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in F$, називається випадковою величиною.

Основною характеристикою випадкової величини є функція розподілу випадкової величини.

Означення. Функція $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ називається функцією розподілу випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$.

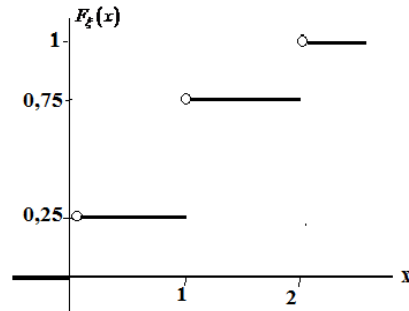
Приклади.

1. Повернемося до прикладу про підкидання двічі монети, де $\xi(\omega)$ число появ герба. У даному випадку σ - алгебра F простору Ω є множина усіх його підмножин. Для кожного дійсного x множини

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq 0 \\ \{ЦЦ\}, & 0 < x \leq 1 \\ \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ\}, & 1 < x \leq 2 \\ \Omega = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ, ГГ\}, & x > 2 \end{cases}$$

належать σ - алгебрі F , отже $\xi(\omega)$ є випадковою величиною. Її функція розподілу має вигляд та наступний графік

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



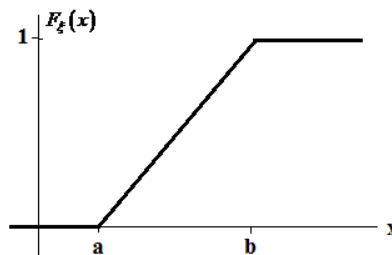
2. Нехай на відрізок $[a; b]$ числової вісі навмання кидається точка, при цьому передбачається, що усі положення точки на відрізку однаково можливі. У даному стохастичному експерименті $\Omega = [a; b]$, а F є σ - алгебра борелівських множин на $[a; b]$ та $P([\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$, якщо $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$.

Визначимо випадкову величину наступним чином: $\xi(\omega) = \omega$, якщо $\omega \in [a; b]$ тобто ξ є координатою отриманої точки. Тоді для кожного дійсного x множини

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq a \\ [a; x), & a < x \leq b \\ \Omega, & x > b \end{cases}$$

належать σ - алгебрі F , отже $\xi(\omega)$ є випадковою величиною. Її функція розподілу має вигляд та наступний графік

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Такий розподіл прийнято назвати рівномірним розподілом на проміжку $[a; b]$

§ 13. Властивості функцій розподілу

Функції розподілу випадкових величин мають наступні властивості:

1. $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$.

Дійсно, функція розподілу є ймовірність деякої множини подій, отже її значення належать проміжку $[0;1]$.

2. Якщо $a < b$, то $P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)$.

Дійсно, розглянемо множини подій $A = \{\omega: \xi(\omega) < a\}$ та $B = \{\omega: \xi(\omega) < b\}$. Так як $A \subset B$ і $\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = B \setminus A$, то за третьою властивістю ймовірності

$$\begin{aligned} P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} &= P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = \\ &= P\{\omega: \xi(\omega) < b\} - P\{\omega: \xi(\omega) < a\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a). \end{aligned}$$

3. Функція розподілу $F_{\xi}(x)$ є не спадною функцією.

Дійсно, якщо $x_1 < x_2$, то $F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = P\{\omega: x_1 \leq \xi(\omega) < x_2\} \geq 0$, звідки $F_{\xi}(x_1) \leq F_{\xi}(x_2)$, тобто функція розподілу не спадає.

4. Функція розподілу $F_{\xi}(x)$ неперервна зліва.

Нехай $\{x_n\}$ довільна зростаюча послідовність, яка збігається до точки x зліва: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Розглянемо послідовність множин $A_n = \{\omega: \xi(\omega) < x_n\}$ та множину $A = \{\omega: \xi(\omega) < x\}$.

Так як $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то за властивістю неперервності ймовірності $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$. Враховуючи, що $P(A_n) = F_{\xi}(x_n)$ і $P(A) = F_{\xi}(x)$, отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_n) = F_{\xi}(x)$, тобто функція розподілу неперервна зліва.

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

Нехай $\{x_n\}$ довільна спадна послідовність, яка збігається до мінус нескінченності: $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Розглянемо

множини $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Вони мають властивості

$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. За властивістю неперервності

ймовірності $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\emptyset) = 0$. Враховуючи, що $P(A_n) = F_{\xi}(x_n)$,

отримаємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_n) = 0$, тобто $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$.

Нехай тепер $\{x_n\}$ довільна зростаюча послідовність, яка збігається до плюс нескінченності: $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Розглянемо

множини $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$. Вони мають властивості

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. За властивістю неперервності

ймовірності $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1$.

Враховуючи, що $P(A_n) = F_{\xi}(x_n)$, отримаємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(x_n) = 1$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

Таким чином, кожна функція розподілу є не спадною на $(-\infty; +\infty)$, неперервною зліва та задовольняє умовам $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$ і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

Вірно і зворотне твердження: кожна функція, яка задовольняє перерахованим вище умовам, може розглядатися як функція розподілу деякої випадкової величини. Якщо звернутися до прикладів з попереднього параграфу, то побудовані там функції розподілу якраз ілюструють приведені властивості.

§ 14. Дискретні випадкові величини. Приклади

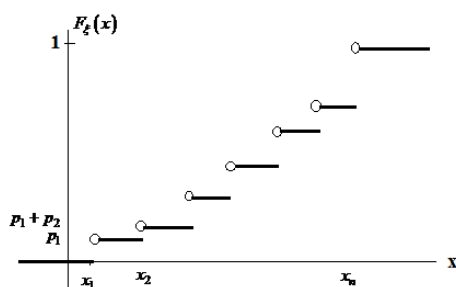
Означення. Випадкова величина $\xi = \xi(\omega)$, яка визначена на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, зветься дискретною випадковою величиною, якщо вона приймає скінченно або зчислене число значень.

Якщо $\xi = \xi(\omega)$ дискретна випадкова величина, яка приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то для кожного x_n визначена ймовірність $p_n = P\{\omega: \xi(\omega) = x_n\}$, при цьому $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Набор цих значень ймовірностей називають законом розподілу дискретної випадкової величини та звичайно задають у вигляді таблиці

$\xi(\omega)$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Припускаючи, що дискретна випадкова величина приймає скінчене число значень та $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, запишемо функцію розподілу цієї

випадкової величини
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, & x > x_n \end{cases}$$



Графіком цієї функції розподілу є кускова-стала крива з стрибками p_k у точках $x = x_k$. Якщо число значень x_k зчислене, то кількість «сходинок» на графіку також зчислена і вони зростаючи наближуються до одиниці.

Розглянемо деякі конкретні закони розподілу дискретних випадкових величин.

1) Біноміальний розподіл.

Припустимо, що проводиться серія з n незалежних випробувань. У кожному з них деяка подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q=1-p$. Нехай випадкова величина ξ дорівнює числу появ події A у даній серії з n незалежних випробувань. За формулою Бернуллі

$$P\{\omega: \xi(\omega) = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

При цьому за формулою бінома Ньютона

$$\sum_{k=0}^n P_n(k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Про таку випадкову величину говорять, що вона має біноміальний закон розподілу

ξ	0	1	2	...	n
p	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Назва цього закону пов'язана з тим, що кожна ймовірність є доданком в розкладанні бінома Ньютона.

2) Геометричний розподіл.

Припустимо, що проводяться незалежні випробування, у кожному з них деяка подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q=1-p$. Нехай випробування проводяться до першої появи події A і випадкова величина ξ є номером випробування, у якому вперше відбулася події A . В цьому випадку простір елементарних подій $\Omega = \{A, \bar{A}A, \bar{A}\bar{A}A, \dots\}$ та ймовірність

$$P\{\omega: \xi(\omega) = n\} = P\left(\underbrace{\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-1} A\right) = q^{n-1} p, n = 1, 2, \dots$$

При цьому за формулою суми членів нескінченної геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

Про таку випадкову величину говорять, що вона має геометричний закон розподілу

ξ	1	2	3	...
p	p	qp	$q^2 p$	...

Назва цього закону пов'язана з тим, що кожна ймовірність є членом геометричної прогресії.

3) Гіпергеометричний розподіл.

Припустимо, що в урні знаходиться n куль, серед яких m білих та $n-m$ чорних. З урни навмання достають k куль без повернення. Нехай випадкова величина ξ дорівнює числу білих куль серед дістаних. Як ми знаємо

$$P\{\omega: \xi(\omega) = t\} = \frac{C_m^t C_{n-m}^{k-t}}{C_n^k}, 0 \leq t \leq \min\{m, k\}.$$

Про таку випадкову величину прийнято говорити, що вона має гіпергеометричний закон розподілу.

4) Розподіл Пуассону.

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана випадкова величина ξ , яка приймає значення $0, 1, 2, \dots$ з ймовірностями

$$P\{\omega: \xi(\omega) = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \text{ де параметр } \lambda > 0.$$

При цьому
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Про таку випадкову величину прийнято говорити, що вона має розподіл Пуассону.

Приклади.

1) Прилад складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірності відмови кожного елемента у одному експерименті дорівнює $0,1$. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу елементів, які відмовили у одному експерименті.

Відмови елементів незалежні один від іншого, ймовірності відмови кожного елемента рівні між собою, тому випадкова величина ξ має біноміальний розподіл. За формулою Бернуллі знаходимо

$$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729; P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Таким чином, закон розподілу має вигляд

ξ	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

2) В партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання взяти дві деталі. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу стандартних деталей серед відібраних.

Для цієї задачі випадкова величина ξ має гіпергеометричний закон розподілу та може приймати значення 0, 1 або 2 з ймовірностями

$$P(\xi = 0) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{1}{45}; P(\xi = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 2}{10 \cdot 9} = \frac{16}{45};$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{28}{45}.$$

Таким чином, закон розподілу має вигляд

ξ	0	1	2
p	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

3) На шляху руху автомобіля є чотири світлофори. Кожен з них з ймовірністю $p = 0,5$ або дозволяє або забороняє рух. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу світлофорів, пройдених автомобілем без зупинки.

Випадкова величина $\xi = 0$ якщо автомобіль зупиниться на першому світлофорі, $\xi = 1$ якщо він пройде без зупинки перший світлофор та зупиниться на другому і так далі. Таким чином, закон розподілу буде наступним

ξ	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

4) З двох гармат по черзі ведеться стрільба по цілі до першого попадання одною з них. Ймовірності попадань в ціль першою та другою гарматами відповідно дорівнює p_1 та p_2 . Починає стрільбу перша гармата. Скласти закони розподілу дискретних випадкових величин ξ і η – числа витрачених снарядів першою та другою гарматами відповідно.

Нехай події A і B – влучення в ціль першою та другою гарматами відповідно при одному пострілі. Знайдемо спочатку закон розподілу випадкової величини ξ . Перша гармата витратить один снаряд, якщо вона влучить в ціль при першому пострілі або вона не влучить в ціль при першому пострілі, але друга гармата влучить в ціль при першому пострілі

$$P(\xi = 1) = P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B) = p_1 + q_1p_2,$$

де $q_k = 1 - p_k, k = 1, 2$.

Перша гармата витратить два снаряди, якщо обидві гармати не влучать в ціль при першому пострілі, а при другому пострілі перша гармата влучить в ціль, або якщо вона не влучить при другому пострілі, а друга гармата влучить в ціль при другому пострілі

$$P(\xi = 2) = P(\bar{A}\bar{B}A \cup \bar{A}\bar{B}\bar{A}B) = q_1q_2p_1 + q_1^2q_2p_2 = q_1q_2(p_1 + q_1p_2).$$

Продовжує ці міркування, отримуємо $P(\xi = n) = q_1^{n-1}q_2^{n-1}(p_1 + q_1p_2)$.

Аналогічно отримуємо закон розподілу випадкової величини η

$$P(\eta = 0) = P(A) = p_1; P(\eta = 1) = P(\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}A) = q_1(p_2 + q_2p_1);$$

$$P(\eta = 2) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B}A) = q_1^2q_2(p_2 + q_2p_1).$$

У загальному випадку $P(\eta = n) = q_1^n q_2^{n-1} (p_2 + q_2 p_1)$.

Завдання.

1. У партії виробів 10% нестандартних виробів. Навмання відібрано чотири вироби. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу нестандартних виробів серед відібраних.

2. У партії з шести деталей знаходься чотири стандартних. Навмання відібрано три деталі. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу стандартних деталей серед відібраних. Записати функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

3. На іспиті екзаменатор задає студенту питання до тих пір, доти студент не зможе відповісти на чергове питання. Ймовірність того, що студент відповість на задане екзаменатором питання, дорівнює $p = 0,9$. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу питань, яке екзаменатор задасть студенту.

4. Два баскетболіста по черзі закидають м'яч в корзину до першого попадання одним з них. Ймовірності попадання в корзину для першого та другого баскетболістів відповідно дорівнюють p_1 та p_2 . Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числу кидків, зроблених обома баскетболістами.

5. Розподіл дискретної випадкової величини ξ має вигляд

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)}, k = 1, 2, \dots. \text{ Знайти сталу } C \text{ та ймовірність}$$

$$P\{\xi \geq 3\}.$$

§ 15. Абсолютно неперервні випадкові величини. Приклади

Означення. Нехай випадкова величина ξ задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ та має функцію розподілу $F_\xi(x)$. Будемо говорити, що випадкова величина ξ має абсолютне неперервний розподіл, якщо існує така інтегрована функція $p_\xi(x)$, що

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt.$$

Функцію $p_{\xi}(x)$ називають щільністю функції розподілу випадкової величини ξ . За властивістю інтеграла з змінною верхньою межею функцію розподілу $F_{\xi}(x)$ буде неперервною функцією. Якщо ж щільність $p_{\xi}(x)$ неперервна, то функція розподілу $F_{\xi}(x)$ буде диференційованою та $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$.

Далі, так як функція розподілу не спадна, то її похідна $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x) \geq 0$, тобто щільність $p_{\xi}(x)$ є невід'ємною функцією. Крім того, так як $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$, то існує невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = 1.$$

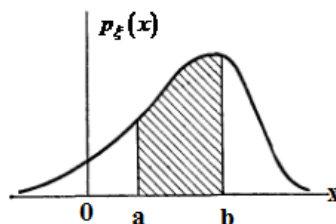
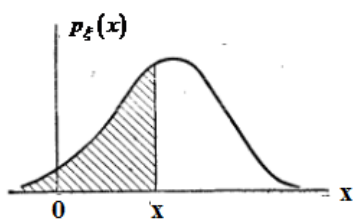
Таким чином, щільність функції розподілу випадкової величини є невід'ємною функцією, яка задовольняє умові $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$.

Навпаки, кожна невід'ємна функція $p_{\xi}(x)$, яка задовольняє умові $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$, є щільність функції розподілу деякої випадкової величини.

З другої властивості функції розподілу слідує, що

$$P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_{-\infty}^b p_{\xi}(x) dx - \int_{-\infty}^a p_{\xi}(x) dx = \int_a^b p_{\xi}(x) dx$$

Ця властивість має просту геометричну інтерпретацію. На наступних малюнках заштриховані області, площі яких відповідно дорівнюють ймовірностям $P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ та $P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\}$:



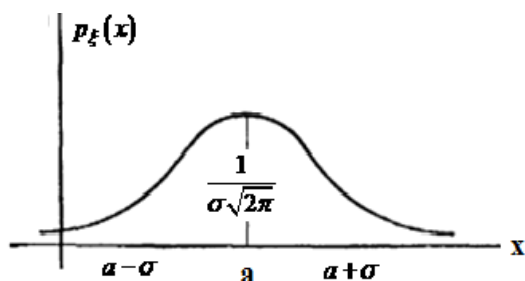
Розглянемо деякі конкретні закони розподілу абсолютно неперервних випадкових величин.

1) Нормальний розподіл або розподіл Гауса.

Виключно важливу роль у теорії ймовірності та в її застосуваннях грає нормальний розподіл, який ще називають розподілом Гауса.

Нормальним розподілом $N(a, \sigma^2)$ з параметрами a та σ називають розподіл з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



Графік щільності нормального розподілу має наступний вигляд

Точки $\left(a \pm \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}\right)$ є точками перегину цієї кривої.

Покажемо, що приведена функція $p_{\xi}(x)$ дійсно є щільністю. По-перше вона невід'ємна, а по друге

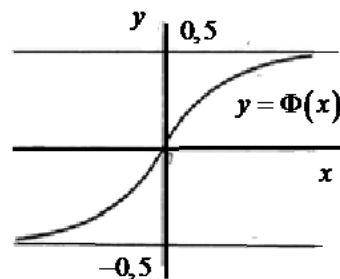
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} z = \frac{x-a}{\sigma} \\ dx = \sigma dz \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1 \end{aligned}$$

Тут враховано значення відомого інтегралу Пуассону

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1.$$

Введемо функцію Лаплас $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

. Вона непарна $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ та її графік має вигляд. Існує детальна таблиця значень цієї



функції (приведена в кінці посібника), при цьому $\Phi(x) = 0,5$ коли $x \geq 5$.

Запишемо за допомогою функції Лапласа функцію нормального розподілу

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[\begin{array}{l} z = \frac{t-a}{\sigma} \\ dt = \sigma dz \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

так як $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2}.$

Графік функції розподілу $F_{\xi}(x)$ можна отримати з графіка функції Лапласа шляхом переносу останнього на 0,5 одиниць вгору вздовж вісі ординат та на a одиниць вздовж вісі абсцис.

Існує також детальна таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, яка використовуються для знаходження значень щільності нормального розподілу $p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ (приведена також в кінці посібника).

Відмітимо ще, що для нормального розподілу

$$P\{\omega: \alpha \leq \xi(\omega) < \beta\} = F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

2) Рівномірний розподіл на проміжку $[a; b]$.

Повернемося до задачі про кидання намання точки на проміжок $[a; b]$. Для неї ми раніше побудували функцію розподілу

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

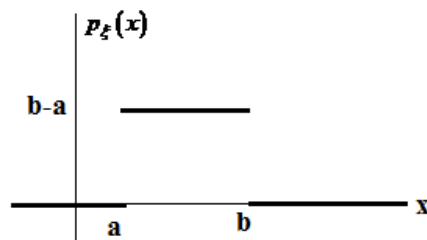
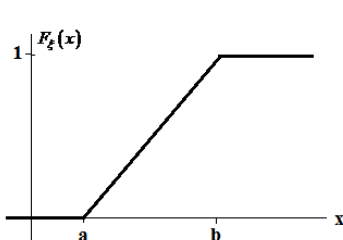
Щільність цієї функції розподілу має вигляд

$$p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$$

Дійсно, для перевірки обчислимо

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0, & x \leq a \\ \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ \int_a^b \frac{dt}{b-a} = 1, & x > b \end{cases}$$

Графіки функції розподілення та її щільності у даному випадку мають вигляд



3) Показниковий розподіл.

Показниковим розподілом з параметром $\lambda > 0$ називають розподіл з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Знайдемо для нього функцію розподілу. Якщо $x \leq 0$, то $F_{\xi}(x) = 0$.

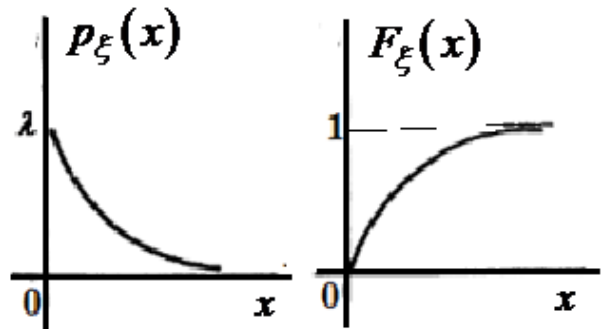
При $x > 0$ маємо $F_{\xi}(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$. Таким

чином,

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Графіки функції розподілення та її щільності мають вигляд

Показниковий розподіл використовують, наприклад, в задачах, в яких випадкова величина ξ є тривалість



безвідмовної роботи деякого приладу, тоді

$$P\{\xi \geq t\} = 1 - P\{\xi < t\} = 1 - F_{\xi}(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

є ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу t .

4) Гамма розподіл.

Гамма розподілом з параметрами $\alpha > 0, \beta > 0$ називають розподіл з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

де $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ є гамма функція. Перевіримо що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x) dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \left[\begin{array}{l} z = \beta x, x = \frac{z}{\beta} \\ dx = \frac{dz}{\beta} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-z} \frac{dz}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(\alpha) = 1$$

Коли $\alpha = 1$ і $\beta = \lambda$, то гамма розподіл співпадає з показниковим розподілом.

Приклади.

1. Дана функція розподілу випадкової величини

$$F_\xi(x) = a + b \operatorname{arctg} x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти сталі a і b та щільність цієї функції розподілу.

Використаємо наступні властивості функції розподілу $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$. У результаті прийдемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} a - b \frac{\pi}{2} = 0 \\ a + b \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}, \text{ з якої находимо } a = \frac{1}{2} \text{ та } b = \frac{1}{\pi}.$$

Таким чином, $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$. Диференціюючи знайдемо

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Розподіл з такою щільністю функції розподілу має назву розподіл Коші.

2. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у чотирьох незалежних випробувань випадкова величина ξ рівно три рази прийме значення на інтервалі $(0, 25; 0, 75)$.

Знайдемо спочатку

$$P\{0, 25 < \xi < 0, 75\} = F_\xi(0, 75) - F_\xi(0, 25) = 0, 5625 - 0, 0625 = 0, 5.$$

Тепер за формулою Бернуллі знаходимо

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5 = 3 \cdot 0,125 \cdot 0,5 = 0,1875.$$

3. Випадкова величина ξ задана щільністю функції розподілу

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sin 3x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \\ 0, & x \notin \left(0; \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ прийме значення з інтервалу $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Обчислимо

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right\} &= \frac{3}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = -\frac{1}{2} \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

4. Ціна ділення шкали вимірювального приладу дорівнює 0,1. Показання приладу округляють до найближчого цілого ділення. Знайти ймовірність того, що при знятті показників буде зроблена помилка, яка перебільшує 0,02.

Помилку округлення при знятті показників можна вважати випадковою величиною, яка розподілена рівномірно між двома сусідніми цілими діленнями. Щільність цього розподілу дорівнює

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{0,1-0} = 10, & x \in (0; 0,1) \\ 0, & x \notin (0; 0,1) \end{cases}$$

Ясно, що помилка зняття показників буде перебільшувати 0,02, якщо вона буде належить інтервалу $(0,02; 0,08)$. Тоді

$$P\{0,02 < \xi < 0,08\} = \int_{0,02}^{0,08} 10 dx = 0,6.$$

5. Випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами $a=10; \sigma=2$. Знайти ймовірність того, що у результаті випробування ξ прийме значення, яке належить інтервалу $(12;14)$.

Використаємо формулу

$$P\{\omega: \alpha \leq \xi(\omega) < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ функція Лапласа. За допомогою таблиці значень функції Лапласа знаходимо

$$\begin{aligned} P\{12 < \xi < 14\} &= \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = \\ &= 0,4772 - 0,3413 = 0,1359 \end{aligned}$$

6. Випадкова величина ξ розподілена по показниковому закону з параметром $\lambda=0,2$. Знайти ймовірність того, що у результаті випробування ξ прийме значення, яке належить інтервалу $(0;2)$

Показниковий розподіл має функцію розподілу

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Тоді $P\{0 < \xi < 2\} = F_{\xi}(2) - F_{\xi}(0) = 1 - e^{-0,4} = 1 - 0,6703 = 0,3297$.

7. Щільність функції розподілу випадкової величини ξ задана рівністю

$$p_{\xi}(x) = \frac{C}{e^x + e^{-x}}.$$

Знайти сталу C і функцію розподілу випадкової величини ξ .

З умови $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$ отримаємо $C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 1$. Обчислимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \left[\begin{matrix} z = e^x \\ dz = e^x dx \end{matrix} \right] = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \arctg z \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Тоді $C = \frac{2}{\pi}$, $p_{\xi}(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ і

$$F_{\xi}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{e^x} \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^x$$

Завдання.

1. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, & -2 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у результаті випробування ξ прийме значення, яке належить інтервалу $(-1; 1)$.

2. Задана функція розподілу випадкової величини ξ

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Знайти її щільність $p_{\xi}(x)$.

3. Випадкова величина ξ задана щільністю функції розподілу

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у трьох незалежних випробувань випадкова величина ξ рівно два рази прийме значення, яке належить інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Випадкова величина ξ задана щільністю функції розподілу

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2. \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

5. Щільність функції розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} Cx^2 e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Знайти сталу C , функцію розподілу та ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $(0;1)$.

6. Автобуси деякого маршруту йдуть строго з розкладом з інтервалом руху 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку, буде очікувати черговий автобус менше трьох хвилин.

7. Випадкові помилки вимірювання підпорядковані нормальному закону розподілу з параметрами $\mu = 0$ та $\sigma = 20$ мм. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань помилка хоч б одного з них не перевершить за абсолютною величиною 4 мм.

§ 16. Три типу функцій розподілу. Теорема Лебега

Ми детально розглянули два типу випадкових величин – дискретні та абсолютно неперервні. Є також випадкові величини, які на одних проміжках ведуть себе як дискретні, а на інших як абсолютно неперервні. Але є ще один тип випадкових величин, які не являються ні в одному проміжку ні дискретними, ні абсолютно неперервними. Для їх опису введемо наступні поняття.

Означення. Точка x зветься точкою зростання функції розподілу $F_{\xi}(x)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

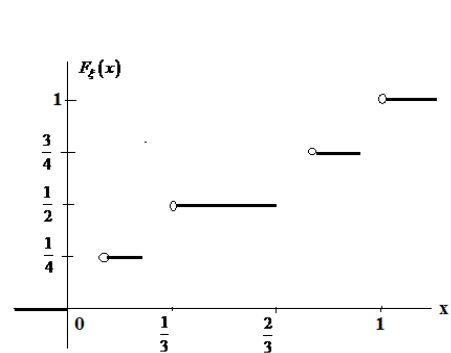
$$F_{\xi}(x + \varepsilon) - F_{\xi}(x - \varepsilon) > 0.$$

Наприклад, дискретний розподіл має скінчене або зчислене число точок зростання x_k , де функція розподілу має стрибки. Розглянутий раніше рівномірний на $[a; b]$ розподіл має в якості точок зростання увесь проміжок $[a; b]$.

Означення. Розподіл випадкової величини називається сингулярним, якщо функція розподілу $F_{\xi}(x)$ неперервна, але множина її точок зростання має нульову міру.

Прикладом сингулярної випадкової величини є величина, яка має в якості функції розподілу так звану криву Кантора. Побудуємо цю криву.

Покладемо $F_{\xi}(x) = 0$ при $x \leq 0$ та $F_{\xi}(x) = 1$ при $x > 1$. Проміжок $(0; 1]$, що залишився, розділимо на три рівні частини. Покладемо



$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2}$ на середній частині $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$, а

кожну з частин $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ та $\left(\frac{2}{3}; 1\right]$, що

залишилися, знов розділимо на три рівні частини. Покладемо в отриманих середніх

частинах $F_{\xi}(x) = \frac{1}{4}$ на $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right]$ і $F_{\xi}(x) = \frac{3}{4}$ на $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right]$ і так далі. Таким

чином, функція $F_{\xi}(x)$ визначена на зчисленій множині проміжків з загальною довжиною

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Тоді множина точок, що залишились і де $F_{\xi}(x)$ зростає, має нульову міру. Визначимо на цій множині функцію $F_{\xi}(x)$ по неперервності.

Побудована нами функція розподілу $F_{\xi}(x)$ буде неперервною, отже не може бути функцією розподілу дискретної випадкової величини. З іншого боку вона не може бути функцією розподілу абсолютно неперервної випадкової величини, так як немає щільності. Дійсно, її похідна $F'_{\xi}(x) = 0$ майже всюди, отже функція розподілу не буде інтегралом від своєї похідної.

Таким чином, ми побудували функцію розподілу сингулярної випадкової величини.

В загальному випадку має місце наступна теорема, яку ми приводимо без доведення.

Теорема Лебега. Кожна функція розподілу $F_{\xi}(x)$ може бути єдиним чином представлена у виді суми трьох не спадних функцій

$$F_{\xi}(x) = F_d(x) + F_n(x) + F_s(x), \text{ де}$$

$F_d(x)$ дискретна компонента, яка має вигляд

$$F_d(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i), \quad p(x_i) \geq 0, \quad \sum_i p(x_i) \leq 1;$$

$F_n(x)$ абсолютно неперервна компонента, яка має вигляд

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt, \quad p(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt \leq 1;$$

$F_s(x)$ сингулярна компонента, яка є неперервною функцією, у якої множина її точок зростання має нульову міру.

§ 17. Багатовимірні випадкові величини (випадкові вектори)

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задано n випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Назвемо систему з цих n величин n -вимірною випадковою величиною або випадковим вектором $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Функцію

$$F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\}$$

називають функцією розподілу n -вимірної випадкової величини.

Подібно до того, як ми це робили в одновимірному випадку, для багатовимірних функцій розподілу можна встановити наступні властивості:

1. $0 \leq F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$;
2. є не спадна функція кожного свого аргументу x_k ;
3. неперервна зліва за кожним своїм аргументом x_k ;
4. для любого x_k задовольняє співвідношенням

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ та}$$

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1 \dots \xi_{k-1} \xi_{k+1} \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

за довільних значень інших аргументів, а також

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ \dots \dots \dots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$$

Подібно до одновимірного випадку, віднесемо розподіл випадкового вектора $\vec{\xi}$ до дискретного типу, якщо він приймає

скінчене або зчислене число значень $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots$. Закон розподілу такого вектора задається за допомогою набору чисел

$$P\{\vec{\xi} = \vec{x}^{(k)}\} = \vec{p}^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}), \quad \text{при цьому} \quad \sum_k \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} = 1.$$

Наприклад, двовимірну дискретну випадкову величину (ξ_1, ξ_2) зручно задати у вигляді таблиці

$\xi_2 \setminus \xi_1$	1	3	5
2	0,14	0,2	0,25
4	0,16	0,1	0,15

Розподіл випадкового вектора $\vec{\xi}$ віднесемо до абсолютно неперервного типу, якщо існує така функція $p_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що

$$F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1 \dots \xi_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

Функцію $p_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають щільністю функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$. Легко бачити, що щільність невід'ємна та,

якщо вона неперервна, то $\frac{\partial^n F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Якщо D деяка область у n -вимірному просторі, то ймовірність потрапити випадковому вектору $\vec{\xi}$ у цю область дорівнює

$$P\{\vec{\xi} \in D\} = \int_D \dots \int p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Разом зі спільною функцією розподілу $F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ випадкового вектору $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ розглядають функції розподілу $F_{\xi_k}(x_k)$ його компонент ξ_k .

Означення. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються незалежними, якщо їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу цих випадкових величин

$$F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Звідки для дискретних випадкових величин отримуємо

$$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot P\{\xi_2 = x_2\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n = x_n\},$$

а для абсолютно неперервних величин маємо

$$p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{dF_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} \cdot \dots \cdot \frac{dF_{\xi_n}(x_n)}{dx_n} =$$

$$= p_{\xi_1}(x_1) \dots p_{\xi_n}(x_n)$$

тобто спільна щільність розподілу дорівнює добутку щільності усіх компонент випадкового вектору.

Розглянемо тепер питання про знаходження законів розподілу компонент багатовимірної випадкової величини. Для скорочення запису обмежимося випадком двовимірних випадкових величин.

Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ дискретна випадкова величина, закон розподілу якої задано у вигляді таблиці. Для знаходження законів розподілу компонент ξ_1 і ξ_2 за формулою повної ймовірності достатньо підсумувати ймовірності по стовбцям і по строкам. Наприклад, розглянемо таблицю

$\xi_2 \setminus \xi_1$	3	5	7
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

підсумовуючи по стовбцям, знайдемо закон розподілу компоненти ξ_1

ξ_1	3	5	7
p	0,27	0,43	0,30

підсумовуючи по строкам, знаходимо закон розподілу компоненти ξ_2

ξ_2	4	5
p	0,55	0,45

Розглянемо питання, чи будуть ці випадкові величини незалежними чи ні. Для їх незалежності мусять виконуватися умови

$P\{\xi_1 = x_1; \xi_2 = x_2\} = P\{\xi_1 = x_1\} \cdot P\{\xi_2 = x_2\}$. У даному випадку,

наприклад, $P\{\xi_1 = 3; \xi_2 = 4\} = 0,17$, а

$P\{\xi_1 = 3\} \cdot P\{\xi_2 = 4\} = 0,27 \cdot 0,55 = 0,1485$, отже вони залежні.

Можна також знаходити умовний закон розподілу одної з компонент при фіксованому значенні другої компоненти, тобто

$$P\{\xi_1 = x_i / \xi_2 = y_k\}, i=1,2,\dots \text{ або } P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_j\}, i=1,2,\dots$$

Умовні ймовірності компонент знаходяться по відомим формулам обчислення умовних ймовірностей подій

$$P\{\xi_1 = x_i / \xi_2 = y_k\} = \frac{P\{\xi_1 = x_i; \xi_2 = y_k\}}{P\{\xi_2 = y_k\}}$$

$$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_j\} = \frac{P\{\xi_1 = x_j; \xi_2 = y_i\}}{P\{\xi_1 = x_j\}}$$

Наприклад, для розглянутого вище приклада умовний закон розподілу ξ_1

ξ_1	3	5	7
$P\{\xi_1 / \xi_2 = 4\}$	$17/55$	$13/55$	$25/55$

а умовний закон розподілу ξ_2 має вигляд

ξ_2	4	5
$P\{\xi_2 / \xi_1 = 5\}$	$13/43$	$30/43$

Нехай тепер $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ абсолютно неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}$. Для знаходження функції розподілу $F_{\xi_1}(x_1) = P\{\xi_1 < x_1\}$ компоненти ξ_1 достатньо врахувати, що виконання нерівності $\xi_1 < x_1$ рівносильне спільному виконанні цієї нерівності та достовірної нерівності $\xi_2 < \infty$. Тому $F_{\xi_1}(x_1) = P\{\xi_1 < x_1\} = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < \infty\}$, тобто $F_{\xi_1}(x_1) = F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, \infty)$

Запишемо отриману формулу у вигляді

$$F_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} dt \int_{-\infty}^{\infty} p(t, y) dy = \int_{-\infty}^{x_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(t, y) dy \right] dt,$$

звідки отримуємо вираз для щільності компоненти ξ_1

$$p_{\xi_1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, y) dy.$$

Так саме отримуємо, що $p_{\xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y, t) dy$.

Отримані формули можна також трактувати як формули повної ймовірності в інтегральній формі.

Визначимо тепер умовну ймовірність щільності розподілу компоненти ξ_1 двовимірної випадкової величини $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ при фіксованому значенні компоненти $\xi_2 = y$ як відношення спільної щільності розподілу до щільності компоненти ξ_2

$$p_{\xi_1}(x_1 / \xi_2 = y) = \frac{p_{\xi_1 \xi_2}(x_1, y)}{p_{\xi_2}(y)}, \text{ де } p_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, y) dt.$$

Так саме визначається умовна ймовірність щільності розподілу компоненти ξ_2 двовимірної випадкової величини $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ при фіксованому значенні компоненти $\xi_1 = x$

$$p_{\xi_2}(x_2 / \xi_1 = x) = \frac{p_{\xi_1 \xi_2}(x, x_2)}{p_{\xi_1}(x)}, \text{ де } p_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) dt.$$

§ 18. Функції від випадкових величин

Розглянемо тепер наступну задачу. Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана випадкова величина ξ і нехай η інша випадкова величина, яка пов'язана з ξ функціональною залежністю $\eta = f(\xi)$. Знайдемо закон розподілу випадкової величини η , знаючи закон розподілу випадкової величини ξ .

Нехай ξ дискретна випадкова величина, закон розподілу якої задано у вигляді таблиці її значень з відповідними їх ймовірностями. Випадкова величина η також буде дискретною та її значення

отримуємо з залежності $\eta = f(\xi)$, а відповідні ймовірності з таблиці для випадкової величини ξ .

Наприклад, нехай випадкова величина ξ має наступний закон розподілу

ξ	-1	0	1	2
p	0,3	0,4	0,2	0,1

і $\eta = \xi^2 - 1$. Тоді випадкова величина η приймає значення 0, -1, 0 і 3 з відповідними ймовірностями 0,3; 0,4; 0,2 та 0,1. Отже закон розподілу випадкової величини η буде мати вигляд

η	-1	0	3
p	0,4	0,5	0,1

Нехай тепер ξ абсолютно неперервна випадкова величина, а $\eta = f(\xi)$ монотонно зростаюча функція, яка має похідну. Тоді ця функція має обернену функцію $\xi = f^{-1}(\eta)$, яка також є монотонно зростаючою та має похідну $(f^{-1}(\eta))' = \frac{1}{f'(\eta)}$. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини η , якщо відома функція розподілу випадкової величини ξ

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\{f(\xi) < x\} = P\{\xi < f^{-1}(x)\} = F_{\xi}(f^{-1}(x)).$$

Диференціюючи, отримуємо щільність функції розподілу величини η

$$p_{\eta}(x) = \frac{d}{dx} F_{\eta}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi}(f^{-1}(x)) = p_{\xi}(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{f'(x)}.$$

Якщо функція $\eta = f(\xi)$ монотонно спадає, то функція розподілу випадкової величини η знаходиться таким чином

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta < x\} = P\{f(\xi) < x\} = P\{\xi > f^{-1}(x)\} = \\ &= 1 - P\{\xi < f^{-1}(x)\} = 1 - F_{\xi}(f^{-1}(x)), \end{aligned}$$

а її щільність дорівнює

$$p_{\eta}(x) = \frac{d}{dx} F_{\eta}(x) = \frac{d}{dx} [1 - F_{\xi}(f^{-1}(x))] = -p_{\xi}(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{f'(x)}.$$

Приклади.

1. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$. Знайти щільність функції розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

Розглянемо $F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = P\{\xi^2 < x\}$. Якщо $x \leq 0$, то $F_\eta(x) = 0$.

$$\text{Якщо } x > 0, \text{ то } F_\eta(x) = P\{\xi^2 < x\} = P\{|\xi| < \sqrt{x}\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = \\ = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})$$

$$\text{Отже } F_\eta(x) = \begin{cases} F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Знайдемо щільність коли $x > 0$

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} [F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x})] = p_\xi(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} + p_\xi(-\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Тобто } p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} [p_\xi(\sqrt{x}) + p_\xi(-\sqrt{x})], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

За умовою $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, тоді $p_\xi(\pm\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}$ і

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Запишемо для $x > 0$ результат так

$$p_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad \text{де враховано, що}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Отже, випадкова величина η має гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{1}{2}$ та $\beta = \frac{1}{2}$.

2. Задана щільність випадкової величини ξ . Знайти щільність функції розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Випадкова величина η приймає значення, які належать проміжку $(0;1]$. Отже $F_\eta(x) = 0$ коли $x \leq 0$ і $F_\eta(x) = 1$ коли $x > 1$. Для інших значень

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P\{\eta < x\} = P\left\{\frac{1}{1+\xi^2} < x\right\} = P\left\{\xi^2 > \frac{1}{x} - 1\right\} = P\left\{|\xi| > \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right\} = \\ &= P\left\{\xi > \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right\} + P\left\{\xi < -\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right\} = 1 - F_\xi\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right) + F_\xi\left(-\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right). \end{aligned}$$

Так як коли $x \in (0;1)$ $\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{1-x}}$, то

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x\sqrt{1-x}} \left[p_\xi\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right) + p_\xi\left(-\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right) \right], & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}.$$

3. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на $(0;1)$. Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$.

Якщо $\xi \in (0;1)$, то $\eta = \ln \frac{1}{\xi} > 0$. Тоді $F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = 0$ коли $x \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Нехай } x > 0, \text{ тоді } F_\eta(x) &= P\{\eta < x\} = P\left\{\ln \frac{1}{\xi} < x\right\} = P\{\xi > e^{-x}\} = \\ &= 1 - P\{\xi < e^{-x}\} = 1 - F_\xi(e^{-x}). \end{aligned}$$

Так як випадкова величина ξ розподілена рівномірно на $(0;1)$, то

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad \text{отже} \quad 1 - F_{\xi}(e^{-x}) = 1 - e^{-x} \quad \text{коли} \quad x > 0 \quad \text{і}$$

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ тобто випадкова величина } \eta \text{ має показниковий}$$

розподіл з параметром $\lambda = 1$.

4. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Знайти щільність функції розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi}$.

Так як значення $\eta = \sqrt{\xi} \geq 0$, $F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = 0$ коли $x \leq 0$.

Якщо $x > 0$, то $F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = P\{\sqrt{\xi} < x\} = P\{\xi < x^2\} = F_{\xi}(x^2)$.

За умовою $F_{\xi}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ коли $x > 0$. Таким чином,

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Тоді } p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Розглянемо тепер таку задачу. Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задано випадкові величини ξ і η . Знайдемо функцію розподілу суми цих випадкових величин $\zeta = \xi + \eta$.

Нехай ξ та η дискретні випадкові величини, які приймають значення $x_1, x_2, \dots$ і $y_1, y_2, \dots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots$ та $p'_1, p'_2, \dots$ відповідно. Тоді випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ буде приймати значення $x_k + y_j$ з ймовірностями $p_{kj} = P\{\xi = x_k / \eta = y_j\}$. Таким чином, ми отримаємо закон розподілу величини ζ . Зокрема, якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то $p_{kj} = p_k p'_j$.

Наприклад, нехай незалежні випадкові величини ξ і η задано розподілами

ξ	1	3
p	0,3	0,7

η	2	4
p'	0,6	0,4

Знайдемо розподіл їх суми $\zeta = \xi + \eta$. Можливі значення ζ є сума кожного можливого значення ξ з усіма можливими значеннями η :

$$\zeta_1 = 1 + 2 = 3; \zeta_2 = 1 + 4 = 5; \zeta_3 = 3 + 2 = 5; \zeta_4 = 3 + 4 = 7.$$

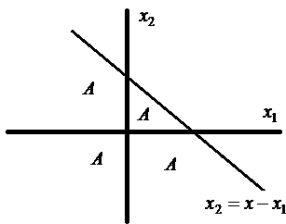
Враховуючи незалежність випадкових величин ξ та η , ймовірності отриманих значень обчислюються з використанням теорем множення та складання ймовірностей

$$P\{\zeta = 3\} = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18; P\{\zeta = 5\} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54;$$

$$P\{\zeta = 7\} = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

Таким чином, закон розподілу випадкової величини ζ має вигляд

ζ	3	5	7
p	0,18	0,54	0,28



Нехай тепер ξ та η абсолютно неперервні випадкові величини, які мають щільності $p_\xi(x)$ та $p_\eta(x)$ відповідно. Нехай $p(x_1, x_2)$ спільна щільність функції розподілу випадкового вектору $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$. Знайдемо функцію розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$. Шукана функція дорівнює ймовірності попадання точки (ξ, η) в півплощину $A = \{x_1, x_2 : x_1 + x_2 < x\}$, отже

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) &= \iint_{x_1+x_2 < x} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{x-x_1} p(x_1, x_2) dx_2 = \left[\begin{matrix} x_2 = z - x_1 \\ dx_2 = dz \end{matrix} \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^x p(x_1, z - x_1) dz = \int_{-\infty}^x dz \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, z - x_1) dx_1 = [z \leftrightarrow x_1] = \\ &= \int_{-\infty}^x dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x_1 - z) dz. \end{aligned}$$

Звідки щільність розподілу суми $p_{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x-z) dz$.

Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то $p(x_1, x_2) = p(x_1)p(x_2)$

$$\text{і } p_{\zeta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x-z)p_{\eta}(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(z)p_{\eta}(x-z)dz.$$

Приклад. Нехай випадкові величини ξ та η незалежні та розподілені нормально с параметрами $a=0$ та $\sigma=1$. Знайдемо закон розподілу їх суми $\zeta = \xi + \eta$.

За умовою $p_{\xi}(x) = p_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тоді за отриманою формулою

$$p_{\zeta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-z)^2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xz+2z^2)} dz.$$

Розглянемо

$$2z^2 - 2xz + x^2 = \left(z\sqrt{2}\right)^2 - 2z\sqrt{2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \left(z\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } p_{\zeta}(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(z\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dz = \left[t = z\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}; dz = \frac{dt}{\sqrt{2}}\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}x^2}. \end{aligned}$$

Ми отримали, що сума $\zeta = \xi + \eta$ також має нормальний закон розподілу, але вже з параметрами $a=0$ та $\sigma = \sqrt{2}$.

Завдання.

1) Задана щільність функції розподілу випадкової величини ξ .

Знайти щільності функцій розподілу випадкових величин:

а) $\eta = e^{-\xi}$; б) $\eta = \ln \xi$; в) $\eta = \arctg \xi$; г) $\eta = \sqrt{1+\xi^2}$.

2) Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність функції розподілу випадкової

величини $\eta = \sin \xi$.

- 3) Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 0$ та $\sigma = 1$. Знайти щільність функції розподілу випадкової величини $\eta = e^{-|\xi|}$.
- 4) Незалежні випадкові величини ξ та η розподілені за показниковим законом з параметрами $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ відповідно. Знайти щільність закону розподілу їх суми $\zeta = \xi + \eta$

Глава 3. Числові характеристики випадкових величин

Найбільш повну характеристику випадкової величини дає її функція розподілу, але у теорії ймовірності та її застосуваннях велику роль відіграють деякі сталі числа, які дістаємо за певними правилами із законів розподілу випадкових величин. Серед цих сталих, які служать для числової характеристики випадкових величин, особливо важливі математичне сподівання, дисперсія та моменти різних порядків. Проте, перш ніж перейти до їх вивчення, відмітне наступне. Основні типи законів розподілу, з якими ми будемо працювати, відносяться до двох типів – дискретні та абсолютно неперервні. Функції розподілу для них являють собою або кусково-сталу ступінчасту криву, або неперервну криву. У зв'язку з цим необхідно мати математичний апарат, який може працювати з обома типами розподілу. Таким апаратом є поняття інтеграла Стільтєса, який певною мірою є узагальненням інтеграла Рімана. Приведемо далі визначення та основні властивості інтеграла Стільтєса, не зупиняючись при цьому на доведеннях.

§ 19. Інтеграл Стільтєса

Введемо спочатку клас функцій з обмеженою варіацією, який грає велику роль при визначенні інтегралу Стільтєса. Припустимо, що функція $f(x)$ визначена на скінченному проміжку $[a; b]$, $a < b$. Поділимо цей проміжок точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на скінчену

кількість частинних інтервалів (x_i, x_{i+1}) та утворюємо суму

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

Якщо при всьлякому розбитті проміжку $[a; b]$ множина $\{v\}$ буде обмежена зверху, то говорять, що функція $f(x)$ має на проміжку $[a; b]$ обмежену варіацію. При цьому точну верхню грань цих сум називають повною варіацією функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ та позначають $V_a^b f(x) = \sup \{v\}$. Можна також розглянути питання про обмежену варіацію функції $f(x)$ на нескінченному проміжку, наприклад на $[a; \infty)$. Будемо говорити, що функція $f(x)$ має на проміжку $[a; \infty)$ обмежену варіацію, якщо вона є функцією з обмеженою варіацією на будь який його скінченній частині $[a; A]$, $A > a$ та повні варіації $V_a^A f(x)$ обмежені у сукупності

$$V_a^\infty f(x) = \sup_{A > a} \left\{ V_a^A f(x) \right\}.$$

Зауважимо, що в означенні функцій з обмеженими варіаціями ніякої ролі не грає питання неперервності цих функцій.

Наприклад, функціями з обмеженими варіаціями є:

1) Будь яка обмежена та монотонна функція.

Дійсно, так як у сумі $v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ всі різниці $f(x_{i+1}) - f(x_i)$

будуть одного знаку, то

$$v = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = |f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots \\ \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f(b) - f(a)|,$$

тобто $V_a^b f(x) = |f(b) - f(a)|$.

2) Якщо функція $f(x)$ є абсолютно неперервною на $[a;b]$, тобто її можна записати у вигляді інтегралу з змінною верхньою межею

$$f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \text{ де } C \text{ стала, а функція } \varphi(t) \text{ абсолютно}$$

інтегрована на $[a;b]$ (існує та скінчений інтеграл $\int_a^b |\varphi(t)| dt$), то функція $f(x)$ є функцією з обмеженою варіацією на $[a;b]$.

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } v &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| C + \int_a^{x_{i+1}} \varphi(t) dt - C - \int_a^{x_i} \varphi(t) dt \right| = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt, \text{ тобто } V_a^b f(x) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Зауважимо, що розглянуті нами функції розподілу є функціями з обмеженою варіацією.

Перейдемо тепер до означення інтеграла Стільтєса. Нехай на проміжку $[a;b]$ задані обмежена функція $f(x)$ та функція $F(x)$ з обмеженою варіацією. Поділимо цей проміжок точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на скінчену кількість частинних проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ та позначимо $\Delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$. На кожному частинному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_i та складемо інтегральну суму Стільтєса

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

Якщо існує скінчена границя інтегральних сум σ коли $\Delta \rightarrow 0$, яка не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a;b]$ на частинні проміжки, ні від вибору точок ξ_i на останніх, то функція $f(x)$ зветься інтегрованою за Стільтєсом за функцією $F(x)$. Сама ж

границя зветься інтегралом Стільєса від функції $f(x)$ за функцією $F(x)$ та позначається $\int_a^b f(x)dF(x)$.

З приведенного означення зрозуміло, що інтеграл Рімана є окремим випадком інтеграла Стільєса коли $F(x) = x$.

Укажемо основні властивості інтеграла Стільєса, доведення яких можна отримати з визначення інтеграла Стільєса та користуючись міркуваннями, які використовувались в теорії інтеграла Рімана:

1. $\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a)$
2. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dF(x) = \int_a^b f_1(x) dF(x) \pm \int_a^b f_2(x) dF(x)$
3. $\int_a^b f(x) d[F_1(x) \pm F_2(x)] = \int_a^b f(x) dF_1(x) \pm \int_a^b f(x) dF_2(x)$
4. $\int_a^b kf(x)mdF(x) = km \int_a^b f(x)dF(x)$
5. $\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^c f(x)dF(x) + \int_c^b f(x)dF(x), a < c < b$

У випадку нескінченного проміжку інтегрування $[a; \infty)$ невластний інтеграл Стільєса визначається таким чином

$$\int_a^\infty f(x)dF(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dF(x).$$

Розглянемо тепер питання про обчислення інтеграла Стільєса. При цьому обмежимося випадками, які мають інтерес з точки зору застосування у теорії ймовірностей:

1) Якщо функція $f(x)$ інтегрована за Ріманом на $[a; b]$, а функція

$F(x)$ абсолютно неперервна, тобто $F(x) = C + \int_a^x \varphi(t)dt$, то інтеграл

Стільєса існує та справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

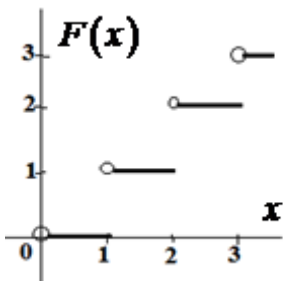
2) Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, а функція $F(x)$ має на цьому проміжку абсолютно інтегровану похідну $F'(x)$ всюди, крім скінченного числа точок $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$, де вона має розриви 1-го роду, то інтеграл Стільтєса існує та справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx + \sum_{k=1}^m f(c_k) [F(c_k + 0) - F(c_k - 0)].$$

Зокрема, якщо функція $F(x)$ кусково-стала на $[a; b]$ та неперервна зліва у точках розриву $F(c_k - 0) = F(c_k)$, то отримуємо

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \sum_{k=1}^m f(c_k) [F(c_k + 0) - F(c_k)].$$

Остання формула дозволяє записувати числові ряди у вигляді інтеграла Стільтєса. Наприклад, розглянемо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.



Визначимо функцію $f(x)$ так, що $f(k) = a_k$, а у якості $F(x)$ візьмемо кусково-сталу функцію, яка має стрибки у точках $x = 1, 2, \dots$, величина яких дорівнює одиниці, наприклад, $F(x) = [x]$ – ціла частина числа x , $x > 0$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) [F(k + 0) - F(k)] = \int_1^{\infty} f(x) dF(x).$$

В отриманій формулі ряд збігається одночасно з інтегралом та навпаки.

§ 20. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана випадкова величина ξ , яка має функцію розподілу $F_\xi(x)$.

Означення. Математичним сподіванням випадкової величини ξ зветься число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x),$$

якщо цей інтеграл Стілтєса збігається абсолютно.

Якщо ξ дискретна випадкова величина, яка задана законом розподілу

ξ	x_1	x_2	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$

то її функція розподілу $F_\xi(x)$ є кусково-стала функція з стрибками $F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k) = p_k$ у точках x_k . Тоді за формулою обчислення інтегралу Стілтєса отримуємо

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k [F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k)] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

якщо цей ряд збігається абсолютно.

Очевидно, якщо дискретна випадкова величина приймає тільки скінчене число значень, то її математичне сподівання існує завжди.

Якщо ξ є абсолютно неперервною випадковою величиною з щільністю $p_\xi(x)$, тобто $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$, то за відповідною формулою обчислення інтеграла Стілтєса отримуємо

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx,$$

якщо цей невластний інтеграл збігається абсолютно.

Для прояснення сенсу математичного сподівання розглянемо наступний приклад. Нехай у деякій лотереї є n білетів. З них n_1 білетів з виграшем a_1 ,

n_2 білетів з виграшем $a_2, \dots, n_k$ білетів з виграшем a_k . Розглянемо випадкову величину ξ – розмір виграшу на один білет. Це дискретна випадкова величина, яка приймає значення $a_1, a_2, \dots, a_k$ з

ймовірностями $p_1 = \frac{n_1}{n}, p_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, p_k = \frac{n_k}{n}$. Математичне сподівання

цієї випадкової величин дорівнює $M\xi = \sum_{i=1}^k a_i p_i$.

З іншої сторони загальна сума виграшу у лотереї складає $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k$ і на один білет приходить у середньому виграш

$$a = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k}{n} = a_1 \frac{n_1}{n} + a_2 \frac{n_2}{n} + \dots + a_k \frac{n_k}{n} = \sum_{i=1}^k a_i p_i.$$

Таким чином, математичне сподівання $M\xi$ дорівнює середньому виграшу a на один білет лотереї.

З наведеного прикладу видно, що математичне сподівання $M\xi$ є деякою характеристикою середнього значення випадкової величини ξ .

Теорема. Нехай ξ випадкова величина, яка задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ та має функцію розподілу $F_\xi(x)$. Якщо $f(x)$ неперервна функція, то

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x).$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\eta = f(\xi)$ та знайдемо її функцію розподілу. Якщо $f(x)$ монотонно зростаюча функція, то ми раніше отримали, що $F_\eta(x) = F_\xi(f^{-1}(x))$, але тоді

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(f^{-1}(x)) = \left[\begin{array}{l} z = f^{-1}(x) \\ x = f(z) \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_{\xi}(z).$$

Якщо функція $f(x)$ монотонно спадає, то $F_{\eta}(x) = 1 - F_{\xi}(f^{-1}(x))$ і

$$\begin{aligned} Mf(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d[1 - F_{\xi}(f^{-1}(x))] = - \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(f^{-1}(x)) = \\ &= \left[\begin{array}{l} z = f^{-1}(x) \\ x = f(z) \end{array} \right] = - \int_{\infty}^{-\infty} f(z) dF_{\xi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_{\xi}(z). \end{aligned}$$

У загальному випадку проміжок $(-\infty; \infty)$ треба розбити на частини, де функція $f(x)$ монотонна та для кожної такої частини провести подібні міркування.

Доведена теорема важна тим, що дозволяє знаходити математичне сподівання $Mf(\xi)$ не знаходячи закон розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$.

Розглянемо тепер властивості математичного сподівання.

1) Якщо $\xi = C$ – стала, то $MC = C$.

Дійсно, $P\{\omega: \xi(\omega) = C\} = 1$ та для цієї дискретної випадкової величини $M\xi = C \cdot 1 = C$.

2) Якщо випадкова величина ξ має математичне сподівання $M\xi$, то і випадкова величина $C\xi$, де C стала, також має математичне сподівання та $M(C\xi) = C \cdot M\xi$, тобто постійний множник можна виносити з під знака математичного сподівання.

$$\text{Дійсно, } M(C\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} Cx dF_{\xi}(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = C \cdot M\xi.$$

3) Якщо випадкові величини ξ і η , які задані на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ та мають математичні сподівання $M\xi$ і $M\eta$, то і випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ має математичне сподівання $M\zeta = M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, тобто математичне сподівання суми

двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань.

Доведення. Проведемо доведення у два етапі – спочатку для дискретних випадкових величин, а потім для абсолютно неперервних. Нехай ξ і η дискретні випадкові величини, які приймають значення $x_1, x_2, \dots$ та $y_1, y_2, \dots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots$ та $p'_1, p'_2, \dots$ відповідно. Випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ буде приймати значення $x_k + y_j$ з ймовірностями $p_{kj} = P\{\xi = x_k / \eta = y_j\}$. Її математичне сподівання

$$M\zeta = \sum_{k,j=1}^{\infty} (x_k + y_j) p_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{k=1}^{\infty} p_{kj}.$$

За формулою повної ймовірності $\sum_{j=1}^{\infty} p_{kj} = p_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} p_{kj} = p'_j$. Тоді

$$M\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k + \sum_{j=1}^{\infty} y_j p'_j = M\xi + M\eta.$$

Нехай тепер ξ і η абсолютно неперервні випадкові величини, які мають щільності $p_\xi(x)$ і $p_\eta(x)$ відповідно, а $p(x_1, x_2)$ їх спільна щільність розподілу. В §18 була знайдена щільність розподілу суми $\zeta = \xi + \eta$

$$p_\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x-z) dz.$$

Знайдемо математичне сподівання

$$\begin{aligned} M\zeta &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_\zeta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} p(z, x-z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(z, x-z) dz dx = \\ &= \left[\begin{matrix} y = x - z \\ dy = dx \end{matrix} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z + y) p(z, y) dz dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z dz \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y) dz. \end{aligned}$$

В §17 були знайдені щільності компонент двовимірної випадкової величини

$$p_{\xi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y) dy \text{ та } p_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, y) dz.$$

$$\text{Таким чином, } M\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} zp_{\xi}(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} yp_{\eta}(y) dy = M\xi + M\eta.$$

4) Якщо випадкові величини ξ і η , які задані на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, незалежні та мають математичні сподівання $M\xi$ і $M\eta$, то і випадкова величина $\zeta = \xi \cdot \eta$ має математичне сподівання і $M\zeta = M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$, тобто математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Доведення. Розглянемо спершу випадок, коли ξ та η незалежні дискретні випадкові величини, які приймають значення $x_1, x_2, \dots$ та $y_1, y_2, \dots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots$ та $p'_1, p'_2, \dots$ відповідно. Випадкова величина $\zeta = \xi \cdot \eta$ буде приймати значення $x_k y_j$ з ймовірностями $p_k p_j$ та її математичне сподівання

$$M\zeta = \sum_{k,j=1}^{\infty} x_k y_j p_k p'_j = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \sum_{j=1}^{\infty} y_j p'_j = M\xi \cdot M\eta.$$

Нехай тепер ξ і η незалежні абсолютно неперервні випадкові величини, які мають щільності $p_{\xi}(x)$ і $p_{\eta}(x)$ відповідно. Нехай далі $p(x, y)$ щільність двовимірної випадкової величини $\zeta = \xi \cdot \eta$. Так як її компоненти незалежні, то $p(x, y) = p_{\xi}(x) p_{\eta}(y)$ та її математичне сподівання

$$M\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} yp_{\eta}(y) dy = M\xi \cdot M\eta.$$

Приклади.

1. Нехай ξ дискретна випадкова величина, яка розподілена за

$$\text{законом Пуассона } P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

Знайдемо її математичне сподівання

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda,$$

де враховано розклад за формулою Маклорена $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Таким чином параметр λ у розподілі Пуассона має сенс математичного сподівання відповідної випадкової величини.

2. Нехай тепер ξ абсолютно неперервна випадкова величина, яка має нормальний закон розподілу, тобто її щільність дорівнює

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайдемо її математичне сподівання

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma t + a; dx = \sigma dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = a. \end{aligned}$$

Ми врахували, що в останній сумі перший інтеграл дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції у симетричних межах, а другий інтеграл є інтегралом Пуассона та дорівнює $\sqrt{2\pi}$.

Таким чином параметр a у нормальному розподілі має сенс математичного сподівання відповідної випадкової величини.

3. З урни, яка містить n білих та m чорних куль, навмання витягають по одній кулі і кожен раз повертають назад, доки не буде витягнуто білу кулю. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ – числа витягнутих чорних куль.

Дискретна випадкова величина ξ приймає значення $0, 1, 2, \dots$ з ймовірностями

$$P\{\xi = 0\} = \frac{n}{n+m}; P\{\xi = 1\} = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m}; P\{\xi = 2\} = \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 \frac{n}{n+m}; \dots$$

Тоді

$$M\xi = 0 \cdot \frac{n}{n+m} + 1 \cdot \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m} + 2 \cdot \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+m} + \\ + 3 \cdot \left(\frac{m}{n+m}\right)^3 \cdot \frac{n}{n+m} + \dots = \frac{n}{n+m} \left[\frac{m}{n+m} + 2 \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 + 3 \left(\frac{m}{n+m}\right)^3 + \dots \right].$$

Позначимо $q = \frac{m}{n+m} < 1$ та знайдемо суму ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = q \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = q \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = q \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} = q \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}. \text{ Отже}$$

$$M\xi = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{\frac{m}{n+m}}{\left(1 - \frac{m}{n+m}\right)^2} = \frac{nm}{(n+m)^2 \left(1 - \frac{m}{n+m}\right)^2} = \frac{nm}{(n+m-m)^2} = \frac{m}{n}.$$

Завдання.

- 1) Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta = 2^\xi$.

- 2) Випадкова величина ξ розподілена рівномірно на проміжку $(0;1)$. Знайти математичне сподівання $M \sin^2 \pi \xi$.
- 3) З урни, яка містить n білих та m чорних куль, навмання витягають по одній кулі без повернення доки не буде витягнуто білу кулю. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ – числа витягнутих чорних куль.

§ 21. Дисперсія випадкової величини та її властивості.

Нехай випадкова величина ξ задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ та має математичне сподівання $M\xi$.

Означення. Дисперсією випадкової величини ξ називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрату відхилення випадкової величини ξ від свого математичного сподівання $M\xi$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2,$$

якщо це математичне сподівання існує.

На основі теореми з § 20 маємо $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF_{\xi}(x)$, звідки

для дискретних випадкових величин отримуємо формулу

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k,$$

для абсолютно неперервних випадкових величин маємо формулу

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_{\xi}(x) dx.$$

Величину $\sigma = \sqrt{D\xi}$ називають середньоквадратичним відхиленням випадкової величини ξ від її математичного сподівання $M\xi$.

Дисперсія випадкової величини є мірою розсіювання її значень відносно її середнього значення – математичного сподівання.

Отримуємо ще одну зручну формулу для обчислення дисперсії

$$\begin{aligned} D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = \\ &= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2, \end{aligned}$$

тобто дисперсія дорівнює різниці математичного сподівання від квадрату випадкової величини та квадрату її математичного сподівання.

Розглянемо властивості дисперсії:

1) Якщо $\xi = C$ – стала, то $DC = 0$.

Дійсно, так як $MC = C$, то $DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = 0$.

2) Якщо випадкова величина ξ має дисперсію $D\xi$, то випадкова величина $C\xi$, де C стала, також має дисперсію та $D(C\xi) = C^2 D\xi$.

Дійсно,

$$\begin{aligned} D(C\xi) &= M(C\xi - M(C\xi))^2 = M(C\xi - C \cdot M\xi)^2 = M(C^2(\xi - M\xi)^2) = \\ &= C^2 \cdot M(\xi - M\xi)^2 = C^2 \cdot D\xi. \end{aligned}$$

3) Якщо випадкові величини ξ та η , які задані на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, незалежні та мають дисперсії $D\xi$ та $D\eta$, то їх сума $\xi + \eta$ також має дисперсію, котра дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (M\xi + M\eta)^2 = \\ &= M\xi^2 + 2M\xi \cdot M\eta + M\eta^2 - (M\xi)^2 - 2M\xi \cdot M\eta - (M\eta)^2 = \\ &= M\xi^2 - (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 = D\xi + D\eta. \end{aligned}$$

Приклади.

Знайдемо спочатку математичні сподівання та дисперсії для розглянутих нами законів розподілу.

1. Нехай ξ дискретна випадкова величина, яка розподілена за

законом Пуассона $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $\lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ Ми раніше

обчислили її математичне сподівання $M\xi = \lambda$. Знайдемо тепер її дисперсію. Спочатку обчислимо

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \lambda^k = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{(k-1)!} \lambda^k = \\ &= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Тоді $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Таким чином, для розподілу Пуассона і математичне сподівання і дисперсія дорівнюють параметру λ .

2. Нехай ξ абсолютно неперервна випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \text{ Ми раніше отримали, що } M\xi = a.$$

Знайдемо тепер її дисперсію.

$$\begin{aligned} D\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{x-a}{\sigma} \\ x-a = \sigma t; dx = \sigma dt \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = t; du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}}; v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2. \end{aligned}$$

Таким чином, для нормального розподілу $D\xi = \sigma^2$, а параметр σ є середньоквадратичне відхилення випадкової величини.

3. Нехай дискретна випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, тобто ξ є число появ деякої події A в серії з n незалежних випробувань. За формулою Бернуллі $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Запишемо випадкову величину ξ як суму n незалежних випадкових величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, де ξ_k результат k -го випробування

ξ_k	1	0
p_k	p	q

$$\text{Знайдемо } M\xi_k = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p; M\xi_k^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$$

$$D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

За властивостями математичного сподівання та дисперсії для суми n незалежних величин, отримуємо

$$M\xi = \sum_{k=1}^n M\xi_k = np; D\xi = \sum_{k=1}^n D\xi_k = npq.$$

4. Нехай дискретна випадкова величина ξ має геометричний розподіл, тобто ξ є номер незалежного випробування, у якому вперше відбулася подія A . Як ми вже знаємо $P\{\xi = k\} = q^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію для цієї випадкової величини.

$$\text{Знайдемо спочатку } M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Для обчислення сум рядів такого типу, розглянемо степеневий ряд (геометричну прогресію) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, який збігається рівномірно

коли $0 < q < 1$. За властивістю степеневих рядів його можемо диференціювати за членами в проміжку збіжності. Взяв першу та

другу похідну, отримаємо $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ та

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

$$\text{Тоді } M\xi = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Знайдемо тепер

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1) + k] q^{k-1} = p \left[q \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right] = \\ &= p \left[q \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} \right] = p \left(\frac{2q}{p^3} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{2q - q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Таким чином, $M\xi = \frac{1}{p}$; $D\xi = \frac{q}{p^2}$.

5. Нехай випадкова величина ξ розподілена рівномірно на проміжку $[a; b]$. Знайдемо її математичне сподівання та дисперсію.

Щільність розподілу цієї випадкової величини є

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a; b) \\ 0, & x \notin (a; b) \end{cases}.$$

$$\text{Знайдемо } M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2},$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x)dx = \int_a^b \frac{x^2 dx}{b-a} = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{12}(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2) = \frac{1}{12}(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким чином, } M\xi = \frac{b+a}{2}; D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6. Нехай випадкова величина ξ має показниковий закон розподілу

$$\text{з щільністю } p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0. \quad \text{Знайдемо її}$$

математичне сподівання та дисперсію.

$$\text{Обчислимо } M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx; v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right] =$$

$$= \lambda \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2; du = 2x dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx; v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right] =$$

$$= \lambda \left(-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \right) = 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \left[\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \right] = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\text{Тоді } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\text{Таким чином, } M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

7. Нехай випадкова величина ξ має гамма розподіл з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \alpha > 0, \beta > 0. \text{ Знайдемо її математичне}$$

сподівання та дисперсію.

Обчислимо

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha}}{\beta^{\alpha}} e^{-z} \frac{dz}{\beta} = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} z^{\alpha} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx = \left[\begin{array}{l} z = \beta x, x = \frac{z}{\beta} \\ dx = \frac{dz}{\beta} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha+1}}{\beta^{\alpha+1}} e^{-z} \frac{dz}{\beta} = \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} z^{\alpha+1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

$$\text{Тоді } D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

$$\text{Таким чином, } M\xi = \frac{\alpha}{\beta}; D\xi = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

8. В партії з 8 деталей міститься три нестандартні деталі. Навмання відібрано дві деталі. Знайти математичне сподівання та дисперсію дискретної випадкової величини ξ – числа нестандартних деталей серед відібраних.

Випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл та може приймати значення 0, 1 та 2 з ймовірностями

$$P\{\xi = 0\} = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{5}{14}; P\{\xi = 1\} = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28};$$

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{3}{28}. \text{ Тоді } M\xi = 0 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{15}{28} + 2 \cdot \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

$$M\xi^2 = 0 \cdot \frac{5}{14} + 1 \cdot \frac{15}{28} + 2^2 \cdot \frac{3}{28} = \frac{27}{28}, \text{ отже}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{27}{28} - \frac{9}{16} = \frac{108 - 63}{112} = \frac{45}{112}.$$

9. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ – числа таких кидків п'яти гральних кубиків, в кожному з яких на двох кубиках випаде по шість очок, якщо загальне число кидків кубиків дорівнює двадцяти.

Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, отже $M\xi = 20p$, де p є ймовірність випадання двох шісток при киданні п'яти кубиків.

За формулою Бернуллі знаходимо

$$p = P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5^3}{1 \cdot 2 \cdot 6^3} = \frac{625}{3888}.$$

$$\text{Отже } M\xi = 20 \cdot \frac{625}{3888} \approx 3.$$

10. Випадкова величина ξ задана щільністю функції

$$\text{розподілу } p_\xi(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0; 2) \\ 0, & x \notin (0; 2) \end{cases}. \text{ Знайти коефіцієнт } a,$$

математичне сподівання $M\xi$ та дисперсію $D\xi$, а також ймовірність того, що абсолютна величина відхилення

випадкової величини ξ від її математичного сподівання $M\xi$ не перевищує 0,5.

Коефіцієнт a знайдемо з умови $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = 1$. Маємо

$$a \int_0^2 x dx = a \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2a = 1, \text{ звідки } a = \frac{1}{2}.$$

Обчислимо $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$ та

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = 2.$$

Тоді $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$.

$$\begin{aligned} \text{Далі } P\{|\xi - M\xi| < 0,5\} &= P\left\{-\frac{1}{2} < \xi - \frac{4}{3} < \frac{1}{2}\right\} = P\left\{\frac{5}{6} < \xi < \frac{11}{6}\right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{5/6}^{11/6} x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{5/6}^{11/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{121}{36} - \frac{25}{36} \right) = \frac{96}{4 \cdot 36} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Завдання.

- 1) Монету кидають до першої появи герба. Знайти середнє число кидків.
- 2) Випадкова величина ξ приймає значення $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ з ймовірностями p_1, p_2, p_3 відповідно. Знайти ці ймовірності, якщо $M\xi = 0,1$, а $D\xi = 0,9$.
- 3) Кидають n гральних кубиків. Знайти математичне сподівання та дисперсію суми числа очок, які випадають на усіх кубиках.
- 4) Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб є стандартним, дорівнює 0,9. У кожній партії міститься п'ять виробів. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ – числа партій, в кожній з яких опиниться рівно чотири стандартних виробу, якщо перевіряється 50 партій виробів.

5) Випадкова величина ξ є число появ події A в серії з n незалежних випробувань. Ймовірність появи події A у k -тому випробуванню дорівнює p_k . Знайти математичне сподівання $M\xi$ та дисперсію $D\xi$.

6) Випадкова величина ξ задана щільністю функції розподілу

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1;1) \\ 0, & x \notin (-1;1) \end{cases}. \text{ Знайти математичне сподівання та}$$

дисперсію цієї випадкової величини.

7) Дискретна випадкова величина задана таблицею

ξ	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Знайти $M|\xi|$ та $D|\xi|$.

8) Випадкова величина ξ задана щільністю функції розподілу

$$p_{\xi}(x) = ae^{-\lambda|x|}, \lambda > 0. \text{ Знайти коефіцієнт } a, \text{ математичне сподівання } M\xi \text{ та дисперсію } D\xi.$$

§ 22. Моменти випадкових величин

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана випадкова величина ξ .

Означення. Початковим моментом m -го порядку випадкової величини ξ називають число

$$\nu_m = M\xi^m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF_{\xi}(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Означення. Центральним моментом m -го порядку випадкової величини ξ називають число

$$\mu_m = M(\xi - M\xi)^m = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^m dF_{\xi}(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

Легко бачити, що початковий момент першого порядку є не що інше, як математичне сподівання випадкової величини, а центральний

момент другого порядку є дисперсією цієї випадкової величини:
 $\nu_1 = M\xi, \mu_2 = D\xi$.

Моменти випадкових величин відіграють важливу роль у математичній статистиці. Наприклад, коли на основі отриманих статистичних даних будується ймовірнісна модель деякого явища і треба визначити параметри підходящого розподілу.

Абсолютними початковим і центральним моментом m -го порядку випадкової величини ξ називають числа $\nu_m^* = M|\xi|^m$ та $\mu_m^* = M|\xi - M\xi|^m$.

Центральний момент третього порядку μ_3 використається у якості характеристики асиметрії розподілу. Справа у тому, якщо розподіл випадкової величини симетричний відносно математичного сподівання $M\xi$, то момент $\mu_3 = 0$. Дійсно, для дискретних розподілів

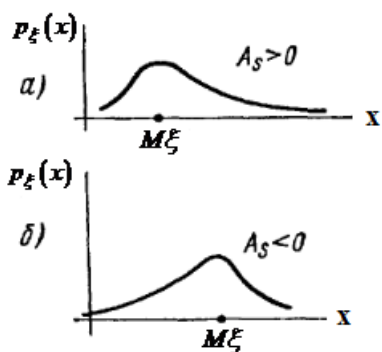
$$\mu_3 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^3 p_k = 0, \text{ так як в цієї сумі кожному додатному}$$

доданку відповідає рівний йому по абсолютній величині від'ємний доданок. У випадку абсолютно неперервного розподілу

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^3 p_{\xi}(x) dx = 0 \text{ як інтеграл від непарної функції в}$$

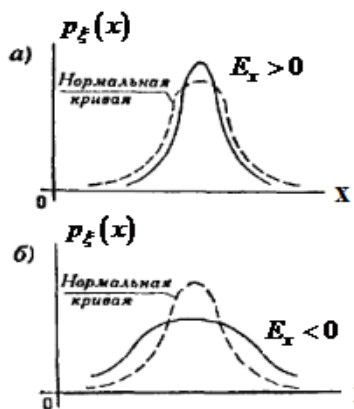
симетричних межах. Тому у якості характеристики асиметрії беруть третій центральний момент. Він має розмірність кубу випадкової величини, а тому для отримання безрозмірної характеристики його ділять на куб середньоквадратичного відхилення $\sigma = \sqrt{D\xi}$ та

розглядають так званий коефіцієнт асиметрії



$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Асиметрія додатна, якщо «довга частка» кривої розташована справа від математичного сподівання (мал. а), асиметрія від'ємна, якщо «довга частка» кривої розташована зліва від математичного сподівання (мал. б).

Центральний момент четвертого порядку μ_4 використовується у якості характеристики «крутості» розподілу, тобто більшого або меншого підйому кривої у порівнянні з кривою нормального розподілу. Ця властивість описується за допомогою так званого ексцесу. Ексцесом випадкової величини ξ називають величину



$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Для нормального розподілу

$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, отже для нього ексцес дорівнює нулю.

Тому, якщо для деякого розподілу ексцес відмінено від нуля, то крива цього розподілу відрізняється від кривої нормального розподілу: якщо ексцес додатній, то крива має

більш високу та «гостру» вершину у порівнянні з нормальним розподілом, якщо ж ексцес від'ємний, то крива має більш низку та «плоску» вершину ніж у нормального розподілу.

§ 23. Нормовані випадкові величини. Коефіцієнт кореляції

Нехай ξ випадкова величина, яка задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ та має математичне сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$.

Означення. Випадкова величина ξ називається нормованою, якщо у неї $M\xi = 0$, а $D\xi = 1$.

Будь яку випадкову величину з дисперсією $D\xi \neq 0$ можна звести до нормованої за допомогою лінійного перетворення $\xi_n = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$.

Дійсно, обчислимо $M\xi_n = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D\xi}}(M\xi - M\xi) = 0$ та

$$D\xi_n = D\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{1}{D\xi}(D\xi + D(M\xi)) = \frac{1}{D\xi}D\xi = 1.$$

Наприклад, нормована нормально розподілена випадкова величина має параметри $a=0$ та $\sigma=1$, тому її щільність має вигляд

$$p_{\xi}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{а функція розподілу є}$$

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задані дві випадкові величини ξ та η .

Означення. Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ та η

$$\text{називають число } \rho(\xi, \eta) = M(\xi_{\eta} \cdot \eta_{\eta}) = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \cdot \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right).$$

Розглянемо властивості коефіцієнта кореляції.

- 1) Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, то коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Дійсно, так як випадкові величини ξ та η незалежні, то і після їх нормування випадкові величини ξ_{η} та η_{η} також будуть незалежними. Тоді

$$\rho(\xi, \eta) = M(\xi_{\eta} \cdot \eta_{\eta}) = M\xi_{\eta} \cdot M\eta_{\eta} = 0 \cdot 0 = 0.$$

- 2) Коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевершує одиниці $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, розглянемо } D(\xi_{\eta} \pm \eta_{\eta}) &= M(\xi_{\eta} \pm \eta_{\eta})^2 - (M(\xi_{\eta} \pm \eta_{\eta}))^2 = \\ &= M(\xi_{\eta}^2 \pm 2\xi_{\eta}\eta_{\eta} + \eta_{\eta}^2) - (M\xi_{\eta} \pm M\eta_{\eta})^2 = M\xi_{\eta}^2 \pm 2M(\xi_{\eta} \cdot \eta_{\eta}) + M\eta_{\eta}^2 = \\ &= D\xi_{\eta} \pm 2\rho(\xi, \eta) + D\eta_{\eta} = 2 \pm 2\rho(\xi, \eta) \geq 0, \end{aligned}$$

де враховано, що $M\xi_{\eta} = M\eta_{\eta} = 0, D\xi_{\eta} = M\xi_{\eta}^2 = 1, D\eta_{\eta} = M\eta_{\eta}^2 = 1$.

Отже $1 \pm \rho(\xi, \eta) \geq 0$, звідки випливає, що $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$.

- 3) Якщо ξ та η мають між собою лінійну залежність $\eta = a\xi + b, a \neq 0$, то коефіцієнт кореляції максимальний за модулем $|\rho(\xi, \eta)| = 1$.

Дійсно, знайдемо $M\eta = aM\xi + b$ та $D\eta = a^2 D\xi$. Тоді

$$\eta_n = \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = \frac{a\xi + b - aM\xi - b}{\sqrt{a^2 D\xi}} = \frac{a(\xi - M\xi)}{|a|\sqrt{D\xi}} = \frac{a}{|a|} \xi_n \text{ і}$$

$$\rho(\xi, \eta) = M(\xi_n \cdot \eta_n) = M\left(\frac{a}{|a|} \xi_n^2\right) = \frac{a}{|a|} M\xi_n^2 = \frac{a}{|a|} D\xi_n = \frac{a}{|a|},$$

але тоді $|\rho(\xi, \eta)| = \frac{|a|}{|a|} = 1$.

Означення. Випадкові величини ξ і η називаються корельовані, якщо їх коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta) \neq 0$.

Коефіцієнт кореляції є деякою числовою характеристикою міри залежності між випадковими величинами ξ та η . Як ми вже знаємо, якщо ξ та η незалежні, то коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, тобто ці випадкові величини некорельовані. Протилежне твердження, взагалі говорячи, не вірно – з некорельованості випадкових величин не випливає їх незалежність. Умова незалежності випадкових величин є більш жорсткою, ніж умова некорельованості. Проте для випадкових величин, які мають нормальний розподіл, з їх некорельованості випливає їх незалежність. С іншого боку з корельованості двох випадкових величин ξ та η випливає їх залежність, так як, припустив, що вони незалежні, ми б отримали що $\rho(\xi, \eta) = 0$, а це суперечить корельованості випадкових величин ξ та η . Крім того, коефіцієнт кореляції більш характеризує ступень лінійної залежності між випадковими величинами, так як він максимальний при лінійній залежності.

Ще одною числовою характеристикою випадкових величин є коваріація двох випадкових величин

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta),$$

яка лише сталим множником $(\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta})^{-1}$ відрізняється від коефіцієнта кореляції. Звідки випливає, що для незалежних випадкових величин коваріація дорівнює нулю, а якщо коваріація

відмінна від нуля, то ці випадкові величини є корельованими. Для обчислення коваріації має місце наступна формула

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi, \eta) &= M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta - \xi M\eta - \eta M\xi + M\xi M\eta) = \\ &= M(\xi\eta) - M\xi M\eta - M\eta M\xi + M\xi M\eta = M(\xi\eta) - M\xi M\eta. \end{aligned}$$

§ 24. Лінійна регресія. Прями лінії середньоквадратичної регресії

Нехай дві випадкові величини ξ та η корельовані, тобто $\rho(\xi, \eta) \neq 0$. Це дозволяє нам припустити, що між ними є деяка залежність. Вид цієї залежності в багатьох випадках нам невідомий, але можна спробувати знайти наближене значення цієї залежності $\eta = g(\xi)$. Функцію $g(\xi)$ називають функцією регресії η на ξ .

Розглянемо детальніше випадок лінійної регресії коли $\eta \approx g(\xi) = \alpha\xi + \beta$, де α та β невідомі коефіцієнти. Для їх знаходження використаємо метод найменших квадратів. Будемо шукати їх з умови мінімуму математичного сподівання $M(\eta - g(\xi))^2 = M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2$. Найдену з цієї умови функцію $g(\xi)$ називають середньоквадратичною регресією η на ξ .

Розглянемо функцію

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= M(\eta - \alpha\xi - \beta)^2 = M(\eta - M\eta - \alpha(\xi - M\xi) + M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 = \\ &= M((\eta - M\eta)^2 + \alpha^2(\xi - M\xi)^2 + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 - \\ &\quad - 2\alpha(\eta - M\eta)(\xi - M\xi) - 2\alpha(\xi - M\xi)(M\eta - \alpha M\xi - \beta) + \\ &\quad + 2(\eta - M\eta)(M\eta - \alpha M\xi - \beta)) = M(\eta - M\eta)^2 + \alpha^2 M(\xi - M\xi)^2 + \\ &\quad + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 - 2\alpha M((\eta - M\eta)(\xi - M\xi)) - \\ &\quad - 2\alpha M(\xi - M\xi)(M\eta - \alpha M\xi - \beta) + 2M(\eta - M\eta)(M\eta - \alpha M\xi - \beta). \end{aligned}$$

Врахуємо,

що

$$M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0, M(\eta - M\eta) = M\eta - M\eta = 0,$$

$$M(\xi - M\xi)^2 = D\xi, M(\eta - M\eta)^2 = D\eta, M((\eta - M\eta)(\xi - M\xi)) =$$

$$= M \left(\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} \cdot \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \right) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi} = \rho(\xi, \eta) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi}.$$

$$\text{Тоді } F(\alpha, \beta) = D\eta + \alpha^2 D\xi + (M\eta - \alpha M\xi - \beta)^2 - 2\alpha \rho(\xi, \eta) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi}.$$

Для знаходження мінімуму обчислимо частинні похідні

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 2\alpha D\xi + 2(M\eta - \alpha M\xi - \beta)(-M\xi) - 2\rho(\xi, \eta) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = 2(M\eta - \alpha M\xi - \beta)(-1) = 0 \end{cases},$$

$$\text{звідки } \begin{cases} M\eta - \alpha M\xi - \beta = 0 \\ 2\alpha D\xi - 2\rho(\xi, \eta) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi} = 0 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \alpha = \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} \\ \beta = M\eta - \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} M\xi \end{cases}$$

Достатню умову мінімуму можна не перевіряти, так як функція $F(\alpha, \beta)$ невід'ємна, квадратична і може мати тільки мінімум. Отже

$$\begin{aligned} \eta &= \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} \xi + M\eta - \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} M\xi = \\ &= \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} (\xi - M\xi) + M\eta. \end{aligned}$$

Коефіцієнт $\alpha = \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}$ називають коефіцієнтом регресії η на ξ ,

а саму отриману пряму $\eta = \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} (\xi - M\xi) + M\eta$ прямою лінією середньоквадратичної регресії η на ξ .

Підставмо знайдені значення коефіцієнтів α та β в функцію $F(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= D\eta + \rho^2(\xi, \eta) \frac{D\eta}{D\xi} D\xi + \left(M\eta - \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} M\xi - M\eta + \right. \\ &\left. + \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} M\xi \right)^2 - 2\rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} \rho(\xi, \eta) \sqrt{D\eta} \sqrt{D\xi} = \end{aligned}$$

$$= D\eta + \rho^2(\xi, \eta) D\eta - 2\rho^2(\xi, \eta) D\eta = (1 - \rho^2(\xi, \eta)) D\eta.$$

Отриману величину називають залишковою дисперсією випадкової величини η відносно випадкової величини ξ . Вона характеризує величину похибки, яку ми зробили коли замінили η на лінійну функцію $g(\xi) = \alpha\xi + \beta$. Якщо η та ξ дійсно пов'язані лінійною залежністю, то $\rho^2(\xi, \eta) = 1$ і залишкова дисперсія дорівнює нулю.

Так саме знаходиться пряма лінія середньоквадратичної регресії ξ на η

$$\xi = \rho(\xi, \eta) \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}} (\eta - M\eta) + M\xi.$$

Аналогічним чином знаходяться регресії більш високих порядків – квадратична $\eta = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$ і так далі, а також для випадків не двох, а більшого числа випадкових величин, наприклад, $\zeta = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma$.

Глава 4. Послідовності незалежних випробувань

§ 25. Нерівності Чебишева

Нехай випадкова величина ξ задана на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$, приймає тільки невід'ємні значення $\xi \geq 0$ та має математичне сподівання $M\xi$. Тоді для будь якого $\varepsilon > 0$ виконується перша нерівність Чебишева

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Для доведення розглянемо

$$M\xi = \int_0^{\infty} x dF_{\xi}(x) \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} dF_{\xi}(x) = \varepsilon P\{\xi \geq \varepsilon\},$$

$$\text{звідки } P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Першу нерівність Чебишева можна також записати у вигляді

$$P\{\xi < \varepsilon\} = 1 - P\{\xi \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{M\xi}{\varepsilon}.$$

Нехай тепер випадкова величина ξ має не тільки математичне сподівання $M\xi$, але і дисперсію $D\xi$. Тоді для будь якого $\varepsilon > 0$ виконується друга нерівність Чебишева

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{Дійсно, } P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = P\{(\xi - M\xi)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Другу нерівність Чебишева можна також записати у вигляді

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Нерівності Чебишева використовуються як при оцінки ймовірностей конкретних подій, так і при теоретичних міркуваннях.

Приклади.

1. Середнє споживання води у населеному пункті складає 50 000 л в день. Оцінити ймовірність того, що у даному населеному пункті у даний день споживання води не перебільшує 150 000 л.

Випадкова величина ξ є споживання води в день, за умовою має $M\xi = 50000$. Тоді за першою нерівністю Чебишева

$$P\{\xi < 150000\} \geq 1 - \frac{50000}{150000} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Прилад складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,05. З використанням нерівності Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, які відмовили, та середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час T буде: а) менше двох;
б) не менше двох.

Дискретна випадкова величина ξ – число відмов за час T має біноміальний розподіл. В цьому випадку $M\xi = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5$; $D\xi = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475$. Тоді

$$\text{а) } P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = P\{|\xi - 0,5| < 2\} \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88.$$

$$б) P\{|\xi - 0,5| \geq 2\} \leq 1 - P\{|\xi - 0,5| < 2\} = 1 - 0,88 = 0,12.$$

3. *Правило трьох сигма.* Оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ відхилиться по абсолютній величині від свого математичного сподівання $M\xi$ менше ніж на три середньоквадратичних відхилення $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

$$\text{Маємо } P\{|\xi - M\xi| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}, \text{ тобто майже } 90\%$$

значень випадкової величини ξ належить проміжку $(M\xi - 3\sigma; M\xi + 3\sigma)$.

4. З використанням нерівності Чебишева, знайти ймовірність того, що частота появ герба при 100 кидків монети відхилиться від його ймовірності по абсолютній величині не більш як на 0,1.

Нехай $\xi = k$ число появ герба у даній серії з 100 незалежних випробувань. Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, тому $M\xi = np = 100 \cdot 0,5 = 50$; $D\xi = npq = 100 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 25$. Тоді

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= P\{|k - np| < \varepsilon n\} = P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon n\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = \\ &= 1 - \frac{25}{(0,1 \cdot 100)^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

5. В умовах задачі 4 знайти найменше число випробувань n таке, щоб з ймовірністю не менше ніж 0,9 частота появ герба відхилилась по абсолютній величині від його ймовірності не більш як на 0,05.

Використовуючи міркування, приведені в задачі 4, знайдемо n з рівняння

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,05^2 n} \geq 0,9,$$

$$\text{звідки } \frac{0,25}{0,0025n} \leq 0,1 \text{ і } n \geq 1000, \text{ тобто } n = 1000.$$

6. В умовах задачі 4 знайти границю ε абсолютної величини відхилення частоти появ герба від його ймовірності, яку можна очікувати з ймовірністю не менш ніж 0,8, якщо проведено 500 випробувань.

Так саме отримуємо рівняння

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{500\varepsilon^2} \geq 0,8,$$

$$\text{звідки } \frac{0,25}{500\varepsilon^2} \leq 0,2, \quad \varepsilon^2 \geq \frac{1}{400}; \quad \varepsilon = \frac{1}{20} = 0,05.$$

Завдання.

- 1) Для даної місцевості кількість сонячних днів на протязі року є випадковою величиною з математичним сподіванням, яке дорівнює 75 дням. Оцініть ймовірність того що на протязі року у даної місцевості буде не менш ніж 200 сонячних днів.
- 2) У освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена, дорівнює 0,8. Використовуючи нерівність Чебишева, оцініть ймовірність того що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) включених ламп за час T буде а) менше трьох; б) не менше п'яти.
- 3) Ймовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює 0,5. За допомогою нерівності Чебишева оцініть ймовірність того, що число ξ появ події A знаходиться в межах від 40 до 60, якщо проведено 100 незалежних випробувань.
- 4) Ймовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює $p = \frac{1}{3}$. За допомогою нерівності Чебишева оцініть ймовірність того, що частота появ цієї події відхилиться від його ймовірності за абсолютною величиною не більш чім на 0,05, якщо буде проведено $n = 1800$ незалежних випробувань.
- 5) В умовах задачі 4 знайти найменше число випробувань n таке, щоб з ймовірністю не менше за 0,9, частота появ події A

відхилилась за абсолютною величиною від її ймовірності не більш ніж 0,01.

- б) В умовах задачі 4 знайти границю ε абсолютної величини відхилення частоти появ події A від її ймовірності, яку можна очікувати з ймовірністю не менш ніж 0,95, якщо проведено $n = 10000$ випробувань.

§ 26. Закон великих чисел

Математичні закони теорії ймовірностей отримані абстрагуванням реальних статистичних закономірностей, які притаманні масовим випадковим явищам. Наявність цих закономірностей пов'язана саме з масовістю явищ, тобто з великим числом виконаних однорідних експериментів або з великим числом випадкових подій, що складаються та породжують у своїй сукупності випадкову величину, підпорядковану цілком певному закону. Властивість стійкості масових випадкових явищ відома людству з давніх часів. В якій би галузі вона не проявлялася, її суть зводиться до наступного: конкретні особливості кожного окремого випадкового явища майже не позначаються на середньому результаті маси таких явищ. Випадкові відхилення від середнього, неминучі в кожному окремому явищі, в масі взаємно погашаються, нівелюються, вирівнюються. Саме ця стійкість середніх і є фізичним змістом закону великих чисел, що розуміється в широкому сенсі слова: при дуже великому числі випадкових явищ середній їх результат перестає бути випадковим і може бути передбачений з великою мірою визначеності. В узькому сенсі слова під законом великих чисел в теорії ймовірностей розуміється ряд математичних теорем, в кожній з яких при тих або інших умовах встановлюється факт наближення середніх характеристик великого числа експериментів до деяких певних сталих.

Закон великих чисел грає значну роль у застосуванні теорії ймовірності до практики. Властивість випадкових величин при певних умовах поводитися практично як не випадкові дозволяє упевнено

оперувати з цими величинами, передбачати результати масових випадкових явищ майже з повною визначеністю.

Означення. Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задані послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ та випадкова величина ξ . Будемо говорити, що послідовність $\{\xi_n\}$ збігається по ймовірності до випадкової величини ξ , якщо для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0, \text{ або, що теж саме } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} = 1.$$

Збіжність за ймовірністю будемо позначати так $\overset{P}{\xi_n} \rightarrow \xi$.

Почнемо з самого простого варіанту закону великих чисел. Нехай проводиться серія незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може статися з ймовірністю p або не статися з ймовірністю $q = 1 - p$. Розглянемо випадкову величину ξ – скільки разів сталася подія A в серії з n незалежних випробувань. Як ми знаємо, вона має біноміальний розподіл з математичним сподіванням $M\xi = np$ та дисперсією $D\xi = npq$.

Теорема Бернуллі. Для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

де k – число здійснень події A в серії з n незалежних випробувань.

Доведення. Використаємо другу нерівність Чебишева

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\{|k - np| \geq \varepsilon n\} = P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon n\} \leq \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = \\ &= \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{pq}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0 \text{ коли } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Так як ймовірність не може бути від'ємною, то ми отримали твердження теореми.

Принципове значення теореми Бернуллі полягає в тому, що відносна частота події A збігається за ймовірністю до ймовірності p

цієї події $\frac{k}{n} \xrightarrow{P} p$. Ґрунтуючись на цьому у 1 главі було введено поняття про статистичну ймовірність. Як правило, на практиці ймовірність тієї чи іншої події доводиться визначати як статистичну ймовірність. Саме тому була проведена велика кількість експериментів для перевірки того, як теорема Бернуллі узгоджується з досвідом, і всі вони дали прекрасні результати.

Запишемо тепер твердження теореми Бернуллі у іншій формі, більш притаманній для формулювання закону великих чисел. Для цього представимо випадкову величину ξ у вигляді суми n випадкових величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, де ξ_i є результатом i -го випробування

ξ_i	1	0
p_i	p	q

Тоді, якщо $\xi = k$, то $\frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ є середнє арифметичне значення суми

n випадкових величин, а $p = \frac{1}{n} \cdot np = \frac{1}{n} M\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i$ є середнє

арифметичне значення суми математичних сподівань цих випадкових

величин. Таким чином, замість $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{k}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$ ми можемо

записати $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$.

Узагальненням теореми Бернуллі, де усі ξ_i були розподілені однаково (за біноміальним законом) є наступна теорема

Теорема Чебишева. Якщо $\{\xi_n\}$ послідовність незалежних випадкових величин, які мають математичні сподівання $M\xi_n$ та дисперсії $D\xi_n$, обмежені у сукупності $D\xi_n \leq C$ яке не було б n , то для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i \right| \geq \varepsilon \right\} = 0, \text{ тобто } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i.$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$. Вона має

математичне сподівання $M\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i$ та дисперсію

$$D\xi = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i \leq \frac{1}{n^2} \cdot nC = \frac{C}{n}.$$

За другою нерівністю Чебишева

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i\right| \geq \varepsilon\right\} = P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

коли $n \rightarrow \infty$.

Якщо випадкові величини ξ_n незалежні та однаково розподілені $M\xi_n = a$, то можна відмовитись від умови обмеженості у сукупності дисперсій та довести наступну теорему.

Теорема Хінчина. Для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} = 0, \text{ тобто } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} a.$$

Ця теорема дає обґрунтування правила середнього арифметичного, яке зазвичай вживається, коли за допомогою деяких вимірів невідомої величини хочуть мати якомога точніше уявлення про її значення. Припустимо, що проводяться виміри деякої величини a . Якщо виміри не мають систематичної похибки (іншими словами, якщо математичне сподівання результатів вимірів дорівнюють величині, яка вимірюється) і виміри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ виконані з однаковою

точністю, то середнє арифметичне результатів вимірів $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ при

достатньо великому n дає значення, наближене до величини a з ймовірністю як угодно близької до одиниці. При цьому, очевидно, не можна отримати результат краще чим точність вимірювального приладу.

§ 27. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Повернемося тепер знов до схеми Бернуллі, тобто до послідовності незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Нехай випадкова величина ξ є число появ події A у серії з n незалежних випробувань. Вона має біноміальний розподіл і за формулою Бернуллі $P\{\xi = k\} = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Цю формулу зручно використати при малих значень n та k , а при достатньо великих значеннях безпосередньо її використання викликає значні обчислювальні труднощі. Тому виникає задача знайти прості наближені формули для ймовірностей $P_n(k)$, а також

для сум вигляду $\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$. Для цього розглянемо поведінку

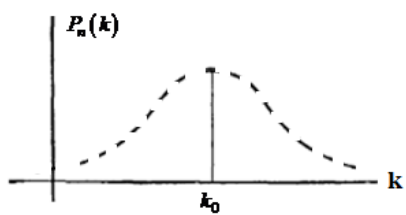
ймовірностей $P_n(k)$ в залежності від k при сталих n .

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{n!k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

Ймовірності $P_n(k)$ зростають, якщо $P_n(k+1) > P_n(k)$, тобто коли

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} > 1, \text{ звідки } np - kp > kq + q, k(p+q) < np - q \text{ і } k < np - q.$$

Відповідно ймовірності $P_n(k)$ спадають коли $k > np - q$.



Таким чином, ймовірність $P_n(k)$ зі збільшенням k спочатку зростає, потім досягає максимуму при деякому k_0 та при дальшому зростанні k зменшується. Число k_0

називають найімовірнішим числом випробувань. Воно знаходиться з подвійної нерівності $np - q \leq k_0 < np + p$.

Приклади.

1. Два стрілка одночасно стріляють в мішень. Ймовірності не влучити в мішень для першого стрілка дорівнює 0,1, а для

другого – 0,2. Знайти найімовірніше число залпів, при яких вони обидва влучать в мішень, якщо стрілки здійснять 20 залпів.

Ймовірність того, що обидва стрілка влучать в мішень при одним залпі дорівнює $p = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72$. Тоді $q = 0,28$ і найімовірніше число k_0 знаходимо з нерівності

$$20 \cdot 0,72 - 0,28 \leq k_0 < 20 \cdot 0,72 + 0,72; 14,12 \leq k_0 < 15,12, \text{ звідки } k_0 = 15.$$

2. Скільки треба провести незалежних випробувань з ймовірністю появи події A у кожному випробуванні, яка дорівнює 0,4, щоб найімовірніше число випробувань дорівнювалось 25?

Розглянемо подвійну нерівність $0,4n - 0,6 \leq 25 < 0,4n + 0,4$, звідки

$$\begin{cases} 0,4n \leq 25,6 \\ 0,4n > 24,6 \end{cases}; \begin{cases} n \leq 64 \\ n > 61,5 \end{cases}, \text{ тобто } 62 \leq n \leq 64.$$

Завдання.

- 1) Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 виробів. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,2. Знайти найімовірніше число бракованих виробів та ймовірність цього найімовірнішого числа бракованих виробів.
- 2) Чому дорівнює ймовірність p появи події у кожному з 49 незалежних випробувань, якщо найімовірніше число появ подій в цих випробуваннях дорівнює 30?
- 3) Батарея зробила шість пострілів по цілі. Ймовірність влучання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти: а) найімовірніше число влучень; б) ймовірність найімовірнішого числа влучень; в) ймовірність того, що ціль буде зруйнована, якщо для цього достатньо не менше двох влучань.

Отримана поведінка ймовірностей $P_n(k)$ схожа на графік щільності нормального розподілу. Це привело до думки, що при достатньо великих n біноміальний розподіл можна наблизити нормальним розподілом. Так були отримані перші граничні теореми – теореми Муавра – Лапласа.

Локальна теорема Муавра – Лапласа. Якщо ймовірність появи деякої події A в n незалежних випробуваннях стала і дорівнює p ($0 < p < 1$), то ймовірність $P_n(k)$ того, що в цих випробуваннях подія A здійсниться рівно k разів коли $n \rightarrow \infty$, задовольняє співвідношенню

$$\sqrt{npq} \cdot P_n(k) \rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

рівномірно для всіх k , для яких $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ обмежені у сукупності.

Доведення. Розглянемо

$$\sqrt{npq} \cdot P_n(k) = \sqrt{npq} C_n^k p^k q^{n-k} = \sqrt{npq} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

та використаємо формулу Стірлінга для приближеного обчислення факторіала $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$. Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{npq} P_n(k) &\approx \sqrt{npq} \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k} \cdot k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} \cdot (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} = \\ &= \sqrt{\frac{n^2 pq}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \left(\frac{np}{k}\right)^k. \end{aligned}$$

Спочатку розглянемо вираз під знаком кореня, враховуючи, що за теоремою Бернуллі при достатньо великих n можемо прийняти

$$\frac{k}{n} \approx p \text{ та } 1 - \frac{k}{n} \approx 1 - p = q.$$

$$\text{Отже } \frac{n^2 pq}{2\pi k(n-k)} = \frac{pq}{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \approx \frac{pq}{2\pi pq} = \frac{1}{2\pi}.$$

$$\text{Тоді } \sqrt{npq} P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Так як $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, то $k = np + x\sqrt{npq}$ і

$$n - k = n - np - x\sqrt{npq} = nq - x\sqrt{npq}.$$

Розглянемо тепер вираз

$$\begin{aligned} H_n &= \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = \left(\frac{np}{np + x\sqrt{npq}}\right)^{np+x\sqrt{npq}} \left(\frac{nq}{nq - x\sqrt{npq}}\right)^{nq-x\sqrt{npq}} = \\ &= \left(1 + x\frac{\sqrt{npq}}{np}\right)^{-np-x\sqrt{npq}} \left(1 - x\frac{\sqrt{npq}}{nq}\right)^{-nq+x\sqrt{npq}} = \\ &= \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-np-x\sqrt{npq}} \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^{-nq+x\sqrt{npq}} \end{aligned}$$

Знайдемо логарифм від отриманого виразу

$$\ln H_n = (-np - x\sqrt{npq}) \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (-nq + x\sqrt{npq}) \ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Так як за умовами теореми величини $\sqrt{\frac{q}{np}}$ і $\sqrt{\frac{p}{nq}}$ є малими, то

використаємо розклад у ряд Маклорена функції $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \dots$

$$\begin{aligned} \ln H_n &= (-np - x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + \dots \right) + \\ &+ (-nq + x\sqrt{npq}) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq} + \dots \right) = -x\sqrt{\frac{q}{np}}np + \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np}np - \\ &- x^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{q}{np}} + x\sqrt{\frac{p}{nq}}nq + \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq}nq - x^2\sqrt{npq}\sqrt{\frac{p}{nq}} + \dots = \\ &= -x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2q - x^2q + x\sqrt{npq} + \frac{1}{2}x^2p - x^2p + \dots = \\ &= -\frac{1}{2}x^2(p+q) + \dots = -\frac{1}{2}x^2 + \dots \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо, що $H_n \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$ коли $n \rightarrow \infty$. Звідки випливає, що

$$\sqrt{npq}P_n(k) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Доведена теорема дає формулу для приближеного обчислення ймовірностей $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а таблиця значень функції $\varphi(x)$ наведена у кінці посібника.

Для біноміальне розподіленої випадкової величини $\xi = k$ випадкова величина $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ є відповідна нормована випадкова величина. Отже біноміальний розподіл можна апроксимувати нормальним розподілом відносно нормованої випадкової величини.

Приклади.

1. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно 70 разів в 243 незалежних випробувань, якщо поява цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

За умовою $n = 243; k = 70; p = 0,25; q = 0,75$. Знайдемо

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 1,37. \text{ За таблицею } \varphi(1,37) = 0,1561.$$

Тоді

$$P_{243}(70) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = \frac{0,1561}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = 0,0231.$$

2. На факультеті вчиться 730 студентів. Ймовірність народження студента у будь який день року дорівнює $\frac{1}{365}$. Знайти найімовірніше число студентів, які народилися 1 січня, та ймовірність того, що найдуться три студента, які народились 1 січня.

У даному випадку $n = 730$; $p = \frac{1}{365}$; $q = \frac{364}{365}$, тобто $np = 2$ та

$$2 - \frac{364}{365} \leq k_0 < 2 + \frac{1}{365}. \quad \text{Отже} \quad k_0 = 2. \quad \text{Знайдемо}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{3 - 2}{\sqrt{2 \cdot \frac{364}{365}}} = 0,71.$$

Далі $\varphi(0,71) = 0,31$ і $P_{730}(2) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) = 0,71 \cdot 0,31 = 0,22$.

Завдання.

- 4) Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах буде рівно 75 влучень в мішень.
- 5) В камері схову ручного багажу 80% від всього багажу складають валізи, які упереміж з іншими речами лежать на стелажах. Через вікно видачі були отримані всі речі з одного зі стелажів у кількості 50 місць. Яка ймовірність, що серед отриманих речей було 38 валіз.

§ 28. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Локальна теорема Муавра – Лапласа використається при обчисленні ймовірностей $P_n(k)$. Якщо ж треба обчислити ймовірність

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P_n(i), \quad \text{то використають інтегральну теорему}$$

Муавра – Лапласа.

Інтегральна теорема Муавра – Лапласа. Якщо ймовірність появи деякої події A в n незалежних випробуваннях стала і дорівнює p ($0 < p < 1$), то ймовірність того, що в цих n випробуваннях подія A здійсниться не менш ніж k_1 разів і не більш ніж k_2 разів, задовольняє коли $n \rightarrow \infty$ співвідношенню

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt; a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; b = \frac{k_2 - p}{\sqrt{npq}},$$

рівномірно відносно a і b ($-\infty \leq a < b \leq \infty$).

Доведення. Розглянемо

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = P\{a \leq x \leq b\},$$

$$\text{де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

З іншого боку $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} P_n(i) \approx \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{\varphi(x_i)}{\sqrt{npq}}$ за локальною теоремою Муавра – Лапласа, де $x_i = \frac{i - np}{\sqrt{npq}}$.

Врахуємо, що $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{i+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$, тоді

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P\{a \leq x \leq b\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} \varphi(x_i) \Delta x_i \text{ є інтегральна сума для}$$

функції $\varphi(x)$ на проміжку $[a; b]$. Так як функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

інтегрована, то границя її інтегральних сум існує коли $n \rightarrow \infty$ та дорівнює інтегралу

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Таким чином доведено, що

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \text{тобто розподіл}$$

випадкової величини $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ збігається к нормованому

нормальному розподілу.

Розглянемо одне застосування доведеної теореми, яке часто зустрічається у задачах. Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може відбутися з ймовірністю p або не відбутися з ймовірністю $q=1-p$. Нехай у даній серії випробувань подія A відбулася k разів. Знайдемо ймовірність того, що відносна частота $\frac{k}{n}$ появ події A відхилиться від ймовірності p появ цієї події за абсолютною величиною не більш як на $\varepsilon > 0$ (згадаємо, що за теоремою Бернуллі $\frac{k}{n} \xrightarrow{P} p$).

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} &= P\{|k - np| \leq \varepsilon n\} = P\{-\varepsilon n \leq k - np \leq \varepsilon n\} = \\ &= P\left\{-\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right\} = P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = \\ &= \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Приклади.

1. Ймовірність появи події A у кожному з 100 незалежних випробувань стала та дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться не менш ніж 75 разів.

Маємо $n=100$; $p=0,8$; $q=0,2$; $k_1=75$; $k_2=100$. Знайдемо

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{5}{4} = -1,25; b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 80}{4} = 5.$$

За таблицею функції $\Phi(x)$ знаходимо

$$P_{100}(75 \leq k \leq 100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

2. Ймовірність появи події A у кожному з незалежних випробувань стала та дорівнює 0,7. Скільки треба провести випробувань, щоби з ймовірністю 0,95 можна було очікувати, що подія A відбудеться не менш ніж 100 разів?

За умовою $p = 0,7; q = 0,3$ і

$$P_n(100 \leq k \leq n) = \Phi\left(\frac{n - 0,7n}{\sqrt{n \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) - \Phi\left(\frac{100 - 0,7n}{\sqrt{n \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) = 0,95,$$

$$\text{тобто } \Phi(0,655\sqrt{n}) - \Phi\left(\frac{100 - 0,7n}{0,458\sqrt{n}}\right) = 0,95.$$

Так як число випробувань $n > 100$, то $0,655\sqrt{n} > 6,55$ і через те що $\Phi(x) = 0,5$ коли $x \geq 5$, можна прийняти $\Phi(0,655\sqrt{n}) = 0,5$. Тоді отримуємо, що $\Phi\left(\frac{100 - 0,7n}{0,458\sqrt{n}}\right) = -0,45$. За таблицею функції $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(1,65) = 0,45$. Враховуючи, що функція Лапласа непарна, отримуємо рівняння $\frac{100 - 0,7n}{0,458\sqrt{n}} = -1,65$, звідки маємо квадратне рівняння відносно $\sqrt{n}$: $0,7n - 0,756\sqrt{n} - 100 = 0$, розв'язком якого є $\sqrt{n} = 12,5$. Звідки $n = 157$.

3. Проведено $n = 500$ кидків грального кубика. Знайти ймовірність того, що відносна частота випадіння шести очок відхилиться від ймовірності цієї події за абсолютною величиною не більш ніж $0,01$.

$$\text{Маємо } n = 500; p = \frac{1}{6}; q = \frac{5}{6}; \varepsilon = 0,01, \text{ звідки } \sqrt{\frac{n}{pq}} = \sqrt{\frac{500 \cdot 36}{5}} = 60.$$

Використаємо формулу $P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$. Тоді

$$P\left\{\left|\frac{k}{500} - \frac{1}{6}\right| \leq 0,01\right\} = 2\Phi(0,01 \cdot 60) = 2\Phi(0,6) = 2 \cdot 0,2257 = 0,4514.$$

4. Ймовірність появи події A у кожному з незалежних випробувань дорівнює $0,5$. Знайти число випробувань n при якому з ймовірністю $0,8$ можна очікувати, що відносна частота появи події A відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на $0,02$.

За умовою $p = q = 0,5; \varepsilon = 0,02$ і $P\left\{\left|\frac{k}{n} - 0,5\right| \leq 0,02\right\} = 0,8$. Тоді

$$2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,8, \quad \text{тобто} \quad \Phi(0,04\sqrt{n}) = 0,4. \quad \text{За таблицею}$$

знаходимо

$$0,04\sqrt{n} = 1,28; \sqrt{n} = 32 \text{ і } n = 1024.$$

5. Ймовірність появи події A у кожному з 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,99 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події A від її ймовірності була не більше ніж ε .

За умовою $n = 400; p = 0,8; q = 0,2$. Отже

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 0,99; \Phi(50\varepsilon) = 0,495. \quad \text{За таблицею знаходимо}$$

$$50\varepsilon = 2,57 \text{ і } \varepsilon = 0,05.$$

6. Відділ технічного контролю перевіряє стандартність 900 виробів. Ймовірність того, що виріб є стандартним, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,95 межі, у яких буде знаходитися число k стандартних виробів серед перевірених.

У даному випадку $n = 900; p = 0,9; q = 0,1$. Отже

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,95 \text{ або } \Phi(100\varepsilon) = 0,475. \quad \text{За таблицею знаходимо}$$

$$100\varepsilon = 1,96 \text{ і } \varepsilon = 0,02.$$

Таким чином, з ймовірністю 0,95 виконується нерівність

$$\left|\frac{k}{900} - 0,9\right| \leq 0,02,$$

з якої знаходимо $0,88 \leq \frac{k}{900} \leq 0,92$ і $792 \leq k \leq 828$.

7. У страховій компанії застраховано 10 000 осіб приблизно одного віку та однієї соціальної групи. Ймовірність настання страхового випадку на протязі року для кожної такої особи дорівнює 0,008. Кожна застрахована особа платить 100 гривень

страхових внесків у рік і у випадку настання страхового випадку отримає від страхової компанії 10 000 гривень. Знайти ймовірність того, що на протязі року страхова компанія: а) потерпить збитки; б) отримає прибуток не меншу ніж 300 000.

За умовою $n=10000$; $p=0,008$; $q=0,992$. Тоді $np=80$ та $\sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot 0,992} = 8,91$. За рік компанія отримує 1 000 000 гривень страхових внесків. Компанія потерпить збитки, якщо вона зробить не менше 100 страхових виплат і отримає прибуток не менш ніж 300 000, якщо вона зробить не більше 70 страхових виплат. Тому

$$\begin{aligned} \text{а) } P_n(100 \leq k \leq n) &= \Phi\left(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{100-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{9920}{8,91}\right) - \Phi\left(\frac{20}{8,91}\right) = \\ &= \Phi(1113,4) - \Phi(2,24) = 0,5 - 0,4874 = 0,0126. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P_n(0 \leq k \leq 70) &= \Phi\left(\frac{70-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{8,91}\right) - \Phi\left(-\frac{80}{8,91}\right) = \\ &= \Phi(-1,12) - \Phi(-8,98) = -0,3686 + 0,5 = 0,1314. \end{aligned}$$

Завдання.

- 1) Ймовірність появи події у кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться не менш ніж 1470 і не більш ніж 1500 разів.
- 2) Ймовірність появи події у кожному з 60 незалежних випробувань дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що ця подія відбудеться у більшості випробувань?
- 3) Лінія зв'язку, яка має 120 каналів зв'язку, пов'язує пункт А з пунктом В, де мешкають 1000 абонентів. Кожний з абонентів використає телефон у середньому 6 хвилин за годину. Знайти ймовірність безвідмовного обслуговування абонента.
- 4) Ймовірність появи додатного результату в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,9. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менш ніж 150 випробувань дадуть додатний результат?

- 5) Ймовірність появи події у кожному з 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,02.
- 6) Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб ймовірність нерівності $\left| \frac{k}{n} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01$ була не менша ніж ймовірність протилежної нерівності, де k є число появ одного очка при n підкиданнях грального кубика?
- 7) В урні знаходяться білі та чорні кулі у відношенні 4:1. Після дістання кулі реєструється її колір і куля повертається до урни. Чому дорівнює найменше число n виймань куль, при якому з ймовірністю 0,95 можна було очікувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появ білої кулі від її ймовірності буде не більш ніж 0,01?
- 8) Ймовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти таке додатне число ε , щоб з ймовірністю 0,77 абсолютна величина відхилення відносної частоти появ події від її ймовірності не перебільшувала ε .
- 9) Гральний кубик кидають 80 разів. Знайти з ймовірністю 0,99 межі, в яких буде знаходитися число k появи шести очок.

§ 29. Теорема Пуассона

Теореми Муавра – Лапласа дають задовільні результати коли p дуже мале або p дуже близьке до одиниці (тобто $q = 1 - p$ дуже мале) тільки тоді, коли кількість випробувань n буде дуже великою. Таким чином, виникає потреба мати наближену формулу спеціально пристосованих для випадків малих p або q . Така формула була знайдена Пуассоном.

Теорема Пуассона. Якщо $p \rightarrow 0$, а $n \rightarrow \infty$ так, що $np \rightarrow \lambda$, то для будь якого фіксованого k має місце співвідношення

$$P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доведення. Розглянемо

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{k!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (1-p)^{n-k}.$$

Коли $n \rightarrow \infty$, то $np \rightarrow \lambda$; $1 - \frac{i}{n} \rightarrow 1, i = 1, 2, \dots, k-1$. Далі

$$(1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} = \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \rightarrow e^{-\lambda}$$

Таким чином, $P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Теорему Пуассона ще називають законом рідкісних подій, так як вона використовується при малих ймовірностей p .

Приклади.

1. Завод відправив замовнику 1000 виробів. Ймовірність пошкодження виробу у дорозі дорівнює 0,002. Знайти ймовірності того, що при перевезенні буде пошкоджено: а) один виріб; б) не більше двох виробів; в) принаймні один виріб.

Число $n = 1000$ велике, ймовірність $p = 0,002$ мала і $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$. Отже застосовна теорема Пуассона:

$$\text{а) } P_{1000}(1) = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = 2 \cdot 0,13534 = 0,27068.$$

$$\text{б) } P_{1000}(k \leq 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = 1 \cdot e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2!} e^{-2} =$$

$$= 5e^{-2} = 0,6767$$

$$\text{в) } P_{1000}(k \geq 1) = 1 - P_{1000}(0) = 1 - 1 \cdot e^{-2} = 1 - 0,13534 = 0,86466.$$

2. При приймальному контролі з партії в 1000 штук виробів проводиться безповоротна вибірка 50 виробів. Знайти ймовірність того, що у вибірці не опиниться дефектних виробів, якщо у всієї партії міститься 4 дефектних виробу.

За умовою $n = 50$; $p = 0,004$, тоді $\lambda = np = 0,2$. За теоремою Пуассона $P_{50}(0) = 1 \cdot e^{-0,2} = 0,819$.

3. Ймовірність виграшу по одному лотерейному білету $p = 0,01$.

Скільки треба купити білетів, щоб виграти принаймні по одному з них з ймовірністю, яка не менша 0,95?

Ймовірність виграшу мала, а кількість білетів, які треба купити, очевидно велика, тому скористаємося теоремою Пуассона

$1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda} \geq 0,95$, звідки $e^{-\lambda} \leq 0,05$ і $\lambda \geq 3$. Таким чином,

$\lambda = np = n \cdot 0,01 \geq 3$, звідки $n \geq 300$.

Завдання.

- 1) Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при перевезенні пляшка може бути розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірності того, що магазин отримує розбитих пляшок: а) рівно дві; б) менше двох; в) більше двох.
- 2) Якщо в середньому шульги становлять 1%, які шанси на те, що серед 200 осіб знайдеться рівно три шульги?
- 3) В деякій місцевості в середньому на кожні 100 вирощених кавунів приходить один вагою не менше 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії 400 кавунів з цієї місцевості, буде: а) рівно три кавуна, вагою не менше 10 кг кожний; б) не менше двох таких кавунів.

§ 30. Характеристичні функції

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана випадкова величина ξ .

Означення. Характеристичною функцією випадкової величини ξ називають математичне сподівання випадкової величини $e^{i\xi t}$, де t дійсна змінна

$$\varphi_{\xi}(t) = Me^{i\xi t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi}(x).$$

Характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ існує для будь якої випадкової величини ξ . Дійсно, з того, що

$|e^{ixt}| = |\cos xt + i \sin xt| = \sqrt{\cos^2 xt + \sin^2 xt} = 1$ випливає існування та абсолютна збіжність інтегралу

$$|\varphi_{\xi}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixt}| dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi}(x) = 1.$$

Якщо випадкова величина ξ є абсолютно неперервною з щільністю $p_{\xi}(x)$, то характеристична функція $\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) e^{ixt} dx$ є інтегралом або перетворенням Фур'є щільності функції розподілу.

Властивості характеристичних функцій.

1. Для будь якої випадкової величини ξ

$$\varphi_{\xi}(0) = 1 \text{ та } |\varphi_{\xi}(t)| \leq 1 \text{ для усіх } t.$$

Дійсно, з означення характеристичної функції випливає

$$\varphi_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi}(x) = 1 \text{ та}$$

$$|\varphi_{\xi}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixt}| dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi}(x) = 1.$$

2. Характеристична функція є рівномірно неперервною на всій числовій прямій, тобто для будь якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$|\varphi_{\xi}(t+h) - \varphi_{\xi}(t)| < \varepsilon \text{ коли } |h| < \delta \text{ та при усіх } t.$$

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned} |\varphi_{\xi}(t+h) - \varphi_{\xi}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+h)} dF_{\xi}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi}(x) \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} (e^{ixh} - 1) dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixt}| |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{-A} |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) + \int_{-A}^A |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) + \int_A^{\infty} |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x).$$

З нерівності $|e^{ixh} - 1| \leq |e^{ixh}| + 1 = 2$ та збіжності невластного інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF_{\xi}(x) = 1 \text{ випливає, що для довільного } \varepsilon > 0 \text{ знайдеться } A > 0$$

таке, що
$$\int_{-\infty}^{-A} |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{-A} dF_{\xi}(x) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{та}$$

$$\int_A^{\infty} |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) \leq 2 \int_A^{\infty} dF_{\xi}(x) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далі, за $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що коли $|h| < \delta$ маємо

$$\begin{aligned} |e^{ixh} - 1| &= |\cos xh - 1 + i \sin xh| = \sqrt{(\cos xh - 1)^2 + \sin^2 xh} = \\ &= \sqrt{\cos^2 xh - 2 \cos xh + 1 + \sin^2 xh} = \sqrt{2(1 - \cos xh)} = \\ &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{xh}{2}} = 2 \left| \sin \frac{xh}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

враховуючи неперервність функції синуса. Тоді

$$\int_{-A}^A |e^{ixh} - 1| dF_{\xi}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-A}^A dF_{\xi}(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Таким чином,}$$

$$|\varphi_{\xi}(t+h) - \varphi_{\xi}(t)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

3. Якщо $\eta = a\xi + b$, де a і b сталі, то $\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi}(at)e^{ibt}$.

Дійсно, $\varphi_{\eta}(t) = Me^{i\eta t} = Me^{i(a\xi+b)t} = M(e^{ia\xi t} \cdot e^{ibt}) = e^{ibt} Me^{ia\xi t} = \varphi_{\xi}(at)e^{ibt}$.

4. Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні випадкові величини і $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, то

$$\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) \dots \varphi_{\xi_n}(t),$$

тобто характеристична функція суми незалежних випадкових величин

дорівнює добутку характеристичних функцій доданків.

Дійсно, якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні випадкові величини, то разом з ними будуть незалежними також випадкові величини $e^{i\xi_1 t}, e^{i\xi_2 t}, \dots, e^{i\xi_n t}$. Тоді за властивістю математичного сподівання

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(t) &= Me^{i\eta t} = Me^{i(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)t} = M(e^{i\xi_1 t} \cdot e^{i\xi_2 t} \cdot \dots \cdot e^{i\xi_n t}) = \\ &= Me^{i\xi_1 t} \cdot Me^{i\xi_2 t} \cdot \dots \cdot Me^{i\xi_n t} = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) \dots \varphi_{\xi_n}(t).\end{aligned}$$

Застосування характеристичних функцій значною мірою базується на цієї властивості. Розглянуті у §18 формули додавання незалежних випадкових величин достатньо складні. Для характеристичних функцій ця складна операція замінюється звичайним множенням характеристичних функцій доданків.

5. Якщо випадкова величина ξ має абсолютні моменти $M|\xi|^k$ до m -го порядку включно ($k = 1, 2, \dots, m$), то характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ має неперервні похідні до m -го порядку включно і $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Доведення. Розглянемо $\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_\xi(x)$. Це невластний інтеграл, який залежить від параметру t . Його можна диференціювати за параметром t , якщо збігається рівномірно інтеграл від похідної підінтегральної функції, а ця умова виконується

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} ix \cdot e^{ixt} dF_\xi(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |i| \cdot |x| \cdot |e^{ixt}| dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x) = M|\xi|.$$

Таким чином, існує похідна $\varphi'_\xi(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{ixt} dF_\xi(x)$. Вона буде неперервною так як неперервна підінтегральна функція та інтеграл збігається рівномірно.

Повторюючи ці міркування, отримаємо, що коли $k = 1, 2, \dots, m$ існують та неперервні похідні $\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ixt} dF_\xi(x)$. Крім цього

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_{\xi}(x) = i^k M \xi^k = i^k \nu_k.$$

З існування похідних характеристичної функції випливає можливість розкласти її за формулою Маклорена

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= \varphi_{\xi}(0) + \frac{\varphi'_{\xi}(0)}{1!}t + \frac{\varphi''_{\xi}(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi_{\xi}^{(m)}(0)}{m!}t^m + o(t^m) = \\ &= 1 + \frac{i\nu_1}{1!}t + \frac{i^2\nu_2}{2!}t^2 + \dots + \frac{i^m\nu_m}{m!}t^m + o(t^m) = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{(it)^k}{k!} \nu_k + o(t^m). \end{aligned}$$

Крім того, знаючи характеристичну функцію випадкової величини, легко знайти її математичне сподівання та дисперсію. Дійсно, так як $\varphi'_{\xi}(0) = iM\xi$, а $\varphi''_{\xi}(0) = -M\xi^2$, то $M\xi = -i\varphi'_{\xi}(0)$ і $D\xi = -\varphi''_{\xi}(0) + (\varphi'_{\xi}(0))^2$.

Знайдемо тепер характеристичні функції для деяких розподілів.

1) Нехай випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Тоді } \varphi_{\xi}(t) = Me^{i\xi t} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

2) Нехай випадкова величина ξ розподілена за нормальним

$$\text{законом з щільністю } p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Знайдемо

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} p_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\begin{array}{l} z = \frac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma z + a, dx = \sigma dz \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sigma z + a)} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma z} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos t\sigma z + i \sin t\sigma z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Так як $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, як інтеграл від непарної функції в

симетричних межах, то $\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Обчислимо невластний інтеграл $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. Він збігається

рівномірно за параметром t так як

$$|I(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\cos t \sigma z| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Крім того інтеграл від похідної підінтегральної функції також збігається рівномірно

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (-\sigma z \cdot \sin t \sigma z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &\leq \sigma \int_{-\infty}^{\infty} |z| |\sin t \sigma z| e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leq \sigma \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\ &= 2\sigma \int_0^{\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -2\sigma \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\sigma. \end{aligned}$$

Отже цей інтеграл можна диференціювати за параметром t

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \sin t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left[\begin{array}{l} u = \sin t \sigma z, du = t \sigma \cos t \sigma z \\ dv = z e^{-\frac{z^2}{2}} dz, v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right] = \\ &= -\sigma \left(-\sin t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + t \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = \\ &= -t \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos t \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -t \sigma^2 I(t) \end{aligned}$$

Таким чином, для знаходження інтегралу $I(t)$ ми отримали звичайне диференціальне рівняння $I'(t) = -t \sigma^2 I(t)$. Розв'яжемо його

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = -t \sigma^2, \ln I(t) = -\frac{t^2 \sigma^2}{2} + \ln C, I(t) = C \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Коли $t = 0$, то $C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, тобто $I(t) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Отже $\varphi_{\xi}(t) = \frac{e^{iat}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

У випадку, коли випадкова величина ξ нормована ($a = 0, \sigma = 1$), характеристична функція приймає простий вигляд $\varphi_{\xi}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

3) Нехай випадкова величина ξ має гамма розподіл з щільністю

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \alpha > 0, \beta > 0$$

Знайдемо її характеристичну функцію

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} p_{\xi}(x) dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{ixt} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-it)} dx = \\ &= \left[\begin{matrix} z = x(\beta-it) \\ x = \frac{z}{\beta-it}, dx = \frac{dz}{\beta-it} \end{matrix} \right] = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{(\beta-it)^{\alpha-1}} e^{-z} \frac{dz}{\beta-it} = \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta-it)^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta-it)^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta-it)^{\alpha}} = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Так як показників розподіл з щільністю $p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0$

є частковим випадком гамма розподілу коли $\alpha = 1, \beta = \lambda$, то характеристична функція для цього розподілу має вигляд

$$\varphi_{\xi}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

4) Нехай випадкова величина ξ розподілена за біноміальним законом, тобто ξ є число появ події A в серії з n незалежних

випробувань, в кожному з яких вона може з'явитися з ймовірністю p або не з'явитися з ймовірністю $q = 1 - p$.

Запишемо випадкову величину ξ у вигляді суми n незалежних випадкових величин $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, де ξ_k є результат k -го випробування та яка набуває лише два значення: 1 або 0 з ймовірностями p або q відповідно.

Характеристичні функції величин ξ_k дорівнюють

$$\varphi_{\xi_k}(t) = M e^{i \xi_k t} = p e^{i \cdot 1 \cdot t} + q e^{i \cdot 0 \cdot t} = p e^{it} + q.$$

За властивістю характеристичної функції суми незалежних випадкових величин отримуємо

$$\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) \dots \varphi_{\xi_n}(t) = (p e^{it} + q)^n.$$

Ми показали, що для кожної випадкової величини ξ , тобто за функцією розподілу $F_{\xi}(x)$, можна знайти її характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t)$. Для нас важливо, що має місце також обернене твердження: за характеристичною функцією функція розподілу визначається однозначно.

Якщо випадкова величина ξ є абсолютно неперервною з щільністю $p_{\xi}(x)$,

то її характеристична функція $\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) e^{ixt} dx$ є інтегралом

Фур'є від щільності функції розподілу, а тому за формулою обернення

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi}(t) e^{-ixt} dt,$$

тобто за характеристичною функцією знаходиться функція розподілу.

У загальному випадку формула обернення дається наступною теоремою

Теорема. Якщо $F_{\xi}(x)$ і $\varphi_{\xi}(t)$ функція розподілу і характеристична функція випадкової величини ξ , то для будь яких точок неперервності x та y функції розподілу

$$F_{\xi}(x) - F_{\xi}(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi_{\xi}(t) e^{-\sigma^2 t^2} dt.$$

У випадку коли функція $\frac{\varphi_{\xi}(t)}{t}$ є інтегрованою на нескінченності,

то стає

законним граничний перехід під знаком інтеграла і формула обернення приймає вигляд

$$F_{\xi}(x) - F_{\xi}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt.$$

Без доведення.

Теорема єдиності. Функція розподілу $F_{\xi}(x)$ випадкової величини ξ однозначно визначається своєю характеристичною функцією $\varphi_{\xi}(t)$.

Доведення. Згідно з формулою обернення різниця $F_{\xi}(x) - F_{\xi}(y)$ однозначно визначається за характеристичною функцією $\varphi_{\xi}(t)$ у точках неперервності x та y . Нехай в цій формулі $y \rightarrow -\infty$ за точками неперервності. Враховуючи, що $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi}(y) = 0$, отримуємо що у кожній точці неперервності функція розподілу визначається як

$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \varphi_{\xi}(t) e^{-\sigma^2 t^2} dt.$$

Якщо x_0 є точкою розриву функції $F_{\xi}(x)$, а ця функція, як ми знаємо, неперервна зліва, то покладемо $F_{\xi}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_{\xi}(x)$, де границя береться за точками неперервності x . Таким чином, функція розподілу $F_{\xi}(x)$ однозначно визначається за характеристичною функцією $\varphi_{\xi}(t)$.

Отже, ми отримали, що між множиною функцій розподілу $\{F_{\xi}(x)\}$ та множиною характеристичних функцій $\{\varphi_{\xi}(t)\}$ існує взаємно однозначна відповідність.

У якості приклада отриманих результатів розглянемо властивість стійкості розподілу – зберігати тип розподілу при сумуванні випадкових величин.

Приклади.

1. Нехай випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні та розподілені за нормальним законом з параметрами a_1, σ_1 та a_2, σ_2 відповідно. Покажемо, що їх сума $\eta = \xi_1 + \xi_2$ також розподілена за нормальним законом, та знайдемо його параметри.

Дійсно, випадкові величини ξ_1 та ξ_2 мають характеристичні функції

$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{ia_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2}$ та $\varphi_{\xi_2}(t) = e^{ia_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}$ відповідно. Характеристична функція суми $\eta = \xi_1 + \xi_2$ дорівнює їх добутку

$$\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = e^{ia_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} \cdot e^{ia_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{i(a_1 + a_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}.$$

Це характеристична функція нормального закону розподілу з параметрами $a = a_1 + a_2, \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. На підставі теореми єдиності з отриманої рівності виводимо, що функція розподілу випадкової величини η є нормальною функцією розподілу з вказаними параметрами.

2. Нехай випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні та мають гамма розподіл з параметрами α_1, β та α_2, β відповідно. Покажемо, що їх сума $\eta = \xi_1 + \xi_2$ також має гамма розподіл, та знайдемо його параметри.

Дійсно, випадкові величини ξ_1 та ξ_2 мають характеристичні функції

$$\varphi_{\xi_1}(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_1} \text{ та } \varphi_{\xi_2}(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_2} \text{ відповідно. Характеристична}$$

функція суми $\eta = \xi_1 + \xi_2$ дорівнює їх добутку

$$\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_1} \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha_2} = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Це характеристична функція гамма розподілу з параметрами $\alpha_1 + \alpha_2, \beta$. З теореми єдиності випливає, що функція розподілу випадкової величини η є функцією гамма розподілу з цими параметрами.

Завдання.

- 1) Нехай випадкова величина ξ приймає значення $-1, 0, 1$ з ймовірностями $\frac{1}{3}$ кожне. Знайти характеристичну функцію цієї випадкової величини.
- 2) Нехай випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежні та розподілені за законом Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно. Знайти закон розподілу та його параметри випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

§ 31. Генератрис

Для цілочисельних випадкових величин використовують метод генератрис, які є дискретними аналогами характеристичних функцій.

Нехай ξ дискретна випадкова величина, яка приймає цілочисельні значення $P\{\xi = k\} = p_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Її характеристична функція

$$\varphi_{\xi}(t) = Me^{i\xi t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k (\cos kt + i \sin kt)$$

являє собою ряд Фур'є функції $\varphi_{\xi}(t)$, який записано у комплексній формі.

За формулою коефіцієнтів ряду Фур'є отримаємо

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{\xi}(t) e^{-ikt} dt,$$

тобто за характеристичною функцією закон розподілу випадкової величини ξ визначається однозначно.

Крім того, характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ є періодичною з періодом 2π , отже достатньо задати її значення тільки на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Далі, характеристична функція фактично залежить від аргументу e^{it} . Тому ми можемо ввести комплексний аргумент $z = e^{it}$, який змінюється на одиничному колі $|z|=1$. В цьому випадку характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ приймає вигляд

$$\varphi_{\xi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k (e^{it})^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k.$$

Означення. Функцію

$$\psi_{\xi}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k$$

називають генератрисою випадкової величини ξ .

Так як генератриси отримуються з характеристичних функцій за допомогою заміни аргументу, то для них залишаються в силі усі ті властивості, які були отримані для характеристичних функцій. Зокрема генератриса суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку генератрис доданків: якщо $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, то

$$\psi_{\eta}(z) = \psi_{\xi_1}(z) \psi_{\xi_2}(z) \dots \psi_{\xi_n}(z).$$

Знайдемо генератриси для деяких розподілів.

1. Якщо випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ то її характеристична функція, як ми}$$

раніше отримали, має вигляд $\varphi_{\xi}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$. Тоді її генератрисою буде $\psi_{\xi}(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

2. Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл

$P\{\xi = k\} = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$ Генератриса цієї випадкової величини буде наступною

$$\psi_{\xi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} (qz)^{k-1} = \frac{pz}{1-qz}.$$

3. Якщо випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, то її характеристична функція, як ми раніше отримали, має вигляд $\varphi_{\xi}(t) = (pe^{it} + q)^n$.

Отже, генератрисою цієї випадкової величини буде $\psi_{\xi}(z) = (pz + q)^n$.

Якщо згадати формулу бінома Ньютона, то $\psi_{\xi}(z) = (pz + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} z^k$, тоді коефіцієнт $C_n^k p^k q^{n-k}$ при z^k є не що інше, як ймовірність $P_n(k)$ того, що у даній серії з n незалежних випробувань подія сталася рівно k разів.

4. Узагальнимо отриманий у попередньому прикладі результат.

Нехай

проводиться серія з n незалежних випробувань і нехай при k -му випробуванню деяка подія A може відбутися з ймовірністю p_k або не відбутися з ймовірністю $q_k = 1 - p_k$. Випадкова величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ є числом появ події A в даній серії випробувань. Так як $\psi_{\xi_k}(z) = p_k z + q_k$, то

$$\psi_{\xi}(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \dots (p_n z + q_n) = \sum_{k=0}^n P\{\xi = k\} z^k.$$

Отримана формула використовується при розв'язанні задач такого типу.

Приклад. Дві батареї по три гармати у кожній здійснюють залп по цілі. Ціль буде знищена, якщо кожна з батарей дасть не менше двох влучень. Ймовірності влучень в ціль гарматами першої батареї дорівнюють 0,4; 0,5 і 0,6, а для другої батареї – 0,5; 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність знищення цілі при одному залпі цих двох батарей.

Для першої батареї генератриса має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= (0,4z + 0,6)(0,5z + 0,5)(0,6z + 0,4) = \\ &= 0,12z^3 + 0,38z^2 + 0,38z + 0,12 \end{aligned}$$

Для другої батареї генератрисою буде

$$\begin{aligned}\psi_2(z) &= (0,5z + 0,5)(0,6z + 0,4)(0,7z + 0,3) = \\ &= 0,21z^3 + 0,44z^2 + 0,38z + 0,06\end{aligned}$$

Тоді ймовірність того, що кожна з батарей дасть не менше двох влучень

$$p = (0,12 + 0,38)(0,21 + 0,44) = 0,5 \cdot 0,65 = 0,365.$$

Завдання.

Чотири елемента деякого приладу працюють незалежно. Ймовірність відмови першого елемента за час T дорівнює 0,2, другого – 0,25, третього – 0,3 і четвертого – 0,4. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять: а) чотири елемента; б) два елемента; в) жодного елемента; г) принаймні один елемент.

§ 32. Розподіли Пірсона та Стюдента

Розглянемо декілька нових законів розподілу, які нам знадобляться надалі.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні випадкові величини, які розподілені за нормальним законом з параметрами $a = 0, \sigma = 1$, тобто нормовані. Розглянемо випадкову величину

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Про неї говорять, що вона має розподіл Пірсона або χ^2 з n ступенями свободи. Число ступенів свободи n є єдиним параметром цього розподілу.

Знайдемо щільність випадкової величини χ^2 . Для цього розглянемо спочатку один доданок, тобто випадкову величину $\eta = \xi^2$, де випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами

$a = 0, \sigma = 1$ та має щільність $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. У прикладі 1 з § 18 ми отримали, що

$$p_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} [p_{\xi}(\sqrt{x}) + p_{\xi}(-\sqrt{x})], & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

і там же показали, що це є щільність гамма розподілу з параметрами $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$. Таким чином, кожний доданок ξ_i^2 у виразу для випадкової величини χ^2 має гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$.

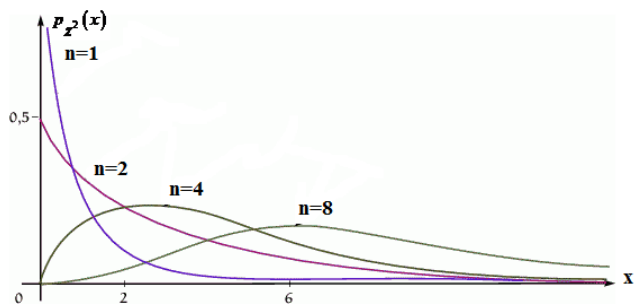
У прикладі 2 з § 30 ми довели, що сума n таких доданків також має гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{1}{2}n, \beta = \frac{1}{2}$, отже щільність розподілу χ^2 буде наступною

$$p_{\chi^2}(x) = k_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Знайдемо тепер математичне сподівання та дисперсію цього розподілу

$$M \chi^2 = \frac{\alpha}{\beta} = n, D \chi^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} = 2n.$$

Зі збільшенням числа ступенів свободи n розподіл χ^2 наближується до нормального розподілу.



З розподілом χ^2 тісно пов'язані наступні розподіли

$$\chi = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \text{ з щільністю } p_{\chi}(x) = 2xk_n(x^2)$$

$$\frac{1}{n} \chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \text{ з щільністю } p(x) = nk_n(nx)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\chi = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2} \text{ з щільністю } p(x) = 2nxk_n(nx^2)$$

Нехай тепер η і $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні випадкові величини, які розподілені за нормальним законом з параметрами $a=0, \sigma=1$, тобто нормовані. Розглянемо випадкову величину

$$t = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}}.$$

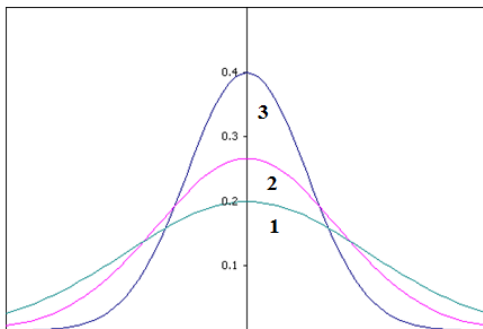
Про неї говорять, що вона має розподіл Стюдента з n ступенями свободи. Число ступенів свободи n є єдиним параметром цього розподілу. Щільність розподілу Стюдента має вигляд

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Математичне сподівання та дисперсія цього розподілу такі

$$Mt = 0 \ (n > 1), \ Dt = \frac{n}{n-2} \ (n > 2).$$

Зі збільшенням числа ступенів свободи n розподіл Стюдента прямує



до нормального розподілу з параметрами $a=0, \sigma=1$. На малюнку криві 1 та 2 є щільності розподілу Стюдента коли $n=5$ та $n=10$ відповідно, а крива 3 є щільність нормального нормованого розподілу.

Якщо у розподілах χ^2 або Стюдента випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ пов'язані деякими m залежностями, то число ступенів свободи у цих розподілах вже буде $n-m$.

Розподіли Пірсона та Стюдента широко використовуються в задачах математичної статистики.

§ 33. Збіжність випадкових величин та функцій розподілу

Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задані послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ і випадкова величина ξ . Ми вже раніше ввели поняття збіжності за ймовірністю послідовності випадкових величин $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0 \text{ або, що теж саме, } \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} = 1.$$

Крім збіжності за ймовірністю розглядають ще один вид збіжності випадкових величин

Означення. Говорять, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ збігається до випадкової величини ξ з ймовірністю 1 або майже напевно, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ для усіх елементарних подій $\omega \in \Omega$ за винятком, можливо, множини $N \subset \Omega$ нульової ймовірності

$$P\{N\} = P\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)\right\} = 0, \quad \text{звідки}$$

$$P\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Збіжність майже напевно будемо позначати так $\xi_n \xrightarrow{М.Н.} \xi$.

З наведеного означення видно, що з збіжності майже напевно випливає збіжність за ймовірністю. Зворотне, взагалі кажучи, не вірно.

Теорема. Нехай $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ коли $n \rightarrow \infty$ і $f(x)$ довільна обмежена та неперервна функція. Тоді $Mf(\xi_n) \rightarrow Mf(\xi)$ коли $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned} |Mf(\xi_n) - Mf(\xi)| &= |M(f(\xi_n) - f(\xi))| \leq M|f(\xi_n) - f(\xi)| = \\ &= M(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| < \delta) + M(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| \geq \delta). \end{aligned}$$

Так як функція $f(x)$ неперервна, то за $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що $|f(\xi_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ коли $|\xi_n - \xi| < \delta$. Так як функція $f(x)$

обмежена, то існує $C > 0$ таке, що $|f(x)| \leq C$, отже $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq 2C$. Таким чином,

$$\begin{aligned} |Mf(\xi_n) - Mf(\xi)| &\leq M(\varepsilon; |\xi_n - \xi| < \delta) + M(2C; |\xi_n - \xi| \geq \delta) = \\ &= \varepsilon \int_{\Omega_1} dF_\xi(x) + 2C \int_{\Omega_2} dF_\xi(x), \end{aligned}$$

де $\Omega_1 = \{\omega: |\xi_n - \xi| < \delta\}$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1 = \{\omega: |\xi_n - \xi| \geq \delta\}$.

Оцінимо $\int_{\Omega_1} dF_\xi(x) \leq \int_{\Omega} dF_\xi(x) = 1$, $\int_{\Omega_2} dF_\xi(x) = P\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\}$.

Тоді $|Mf(\xi_n) - Mf(\xi)| \leq \varepsilon + 2C \cdot P\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\}$. Так як за умовою $P\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\} \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$, отже і $|Mf(\xi_n) - Mf(\xi)| \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$.

Наслідок. Якщо $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ коли $n \rightarrow \infty$, то для будь якого t послідовність характеристичних функцій $\{\varphi_{\xi_n}(t)\}$ збігається до характеристичної функції $\varphi_\xi(t)$.

Дійсно, $\varphi_{\xi_n}(t) = Me^{i\xi_n t}$, а функція $f(\xi_n) = e^{i\xi_n t} = \cos \xi_n t + i \sin \xi_n t$ неперервна та обмежена $|e^{i\xi_n t}| = 1$. Тоді за теоремою $\varphi_{\xi_n}(t) = Me^{i\xi_n t} \rightarrow Me^{i\xi t} = \varphi_\xi(t)$ коли $n \rightarrow \infty$.

Отже, у нас є два способи охарактеризувати близькість випадкових величин, які задані на одному ймовірнісному просторі – збіжність за ймовірністю та збіжність майже напевно. Але як бути, якщо випадкові величини задані на різних ймовірнісних просторах. В цьому випадку характеризують близькість функцій розподілу цих величин. При вдалому визначенні такої близькості ми зможемо у багатьох задачах наближати потрібні нам, але важкодоступні з точки зору обчислень розподіли, за допомогою більш простих розподілів, як це було зроблено за допомогою теорем Муавра – Лапласа і Пуассона, де біноміальний розподіл наближався нормальним розподілом або розподілом Пуассона. Для цього потрібно ввести поняття збіжності

послідовності функцій розподілу $\{F_{\xi_n}(x)\}$ випадкових величин ξ_n до функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

Означення. Говорять, що послідовність функцій розподілу $\{F_{\xi_n}(x)\}$ слабо збігається до функції розподілу $F_\xi(x)$, якщо для будь якої неперервної та обмеженої функції $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x).$$

Слабку збіжність будемо позначати так $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_\xi(x)$.

Теорема. Якщо послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ збігається за ймовірністю до випадкової величини ξ , то послідовність їх функцій розподілу $\{F_{\xi_n}(x)\}$ слабо збігається до функції розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ .

Доведення. Дійсно, якщо $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, то за попередньою теоремою

$Mf(\xi_n) \rightarrow Mf(\xi)$ коли $n \rightarrow \infty$. Так як $Mf(\xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x)$, а

$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x)$, де $f(x)$ довільна неперервна та обмежена

функція, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x)$, тобто $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_\xi(x)$.

Нехай $\{\xi_n\}$ послідовність випадкових величин з функціями розподілу $F_{\xi_n}(x)$ і характеристичними функціями $\varphi_{\xi_n}(t)$. Нехай випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$ і характеристичну функцію $\varphi_\xi(t)$.

Нехай $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_{\xi}(x)$, тобто для довільної неперервної та обмеженої функції $f(x)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_{\xi}(x) \quad \text{коли} \quad n \rightarrow \infty.$$

Поклавши тут $f(x) = e^{ixt}$, отримуємо
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi_n}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF_{\xi}(x),$$
 тобто $Me^{i\xi_n t} \rightarrow Me^{i\xi t}$, звідки $\varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$ коли $n \rightarrow \infty$ та любого t .

Можна довести і обернене твердження: якщо за будь якого t $\varphi_{\xi_n}(t) \rightarrow \varphi_{\xi}(t)$ коли $n \rightarrow \infty$, то $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{сл.} F_{\xi}(x)$.

Таким чином, ми встановили, що між множиною функцій розподілу $\{F_{\xi}(x)\}$ і множиною характеристичних функцій $\{\varphi_{\xi}(t)\}$ є взаємно однозначне і взаємно неперервне відображення. Цей факт широко використовується при доведенні граничних теорем, коли один розподіл наближається іншим, більш простим розподілом з погляду дослідження та обчислення.

§ 34. Центральна гранична теорема

Нормальний розподіл або розподіл Гауса грає велику роль як в теорії ймовірностей, так і в різноманітних її застосуваннях. Одна із найважливіших схем, за якою йде використання результатів теорії ймовірностей в природознавстві й техніці, полягає ось у чому: вважають, що процес проходить під впливом великої кількості незалежно діючих випадкових факторів, кожний з яких мало змінює хід явища або процесу. Дослідник який вивчає процес в цілому, спостерігає лише сумарну дію таких факторів. Це проявляється в багатьох прикладних задачах – теорії вимірювань, коли на точність виміру впливає багато дрібних факторів; тривалість справної роботи приладу, коли на вихід його з ладу впливають різні випадкові дії; розсіювання точок влучення снарядів при стрільбі по цілі і так далі. Таким чином, виникає завдання вивчення закономірностей, властивих сумам великої кількості незалежних випадкових величин, кожна з яких мало впливає на суму. Все це привело до створення розділу

теорії ймовірностей, в якому досліджуються умови, які необхідно накласти на окремі доданки, щоби їх сума мала розподіл, що прагне до нормального розподілу. Ці умови в теорії ймовірностей прийнято називати граничними теоремами.

Ми вже знайомі з одною з таких граничних теорем – теоремою Муавра – Лапласа. Надамо запису цієї теореми трохи інший вигляд, більш притаманний граничним теоремам. Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A може з'явитися зі сталою ймовірністю p або не з'явитися з ймовірністю $q=1-p$. Випадкова величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ є число появ події A у даній серії випробувань, а ξ_k є результат k -го випробування (1 або 0).

Вона має математичне сподівання $M\xi = \sum_{k=1}^n M\xi_k = np$ та дисперсію

$D\xi = \sum_{k=1}^n D\xi_k = npq$. Нормована випадкова величина (нормована сума)

$\xi_n = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}}$ коли $n \rightarrow \infty$ прямує до нормального розподілу з

параметрами $a=0, \sigma=1$

$$P\{\xi_n < x\} = P\left\{\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Узагальненням цього результату є наступна теорема.

Центральна гранична теорема. Нехай на просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, які мають математичні сподівання $M\xi_k = a_k$, дисперсії $D\xi_k = \sigma_k^2$ та моменти до третього порядку включно. Нехай $B_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ і виконується умова Ляпунова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^3 = 0.$$

Тоді нормована сума $S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}$, де

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, MS_n = \sum_{k=1}^n a_k, DS_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = B_n^2,$$

коли $n \rightarrow \infty$ прямує до нормального розподілу з параметрами $a=0, \sigma=1$

$$P\{S_n^* < x\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доведення. Представимо випадкову величину S_n^* у вигляді суми

$$S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - a_k}{B_n} = \sum_{k=1}^n \eta_{nk}, \text{ де } \eta_{nk} = \frac{\xi_k - a_k}{B_n}.$$

Випадкові величини η_{nk} мають математичне сподівання $M\eta_{nk} = 0$,

дисперсію $D\eta_{nk} = \frac{D\xi_k}{B_n^2}$ та момент третього порядку

$$M\eta_{nk}^3 = M\left(\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right)^3, \quad \text{при} \quad \text{цьому}$$

$$|M\eta_{nk}^3| \leq M|\eta_{nk}|^3 = M\left|\frac{\xi_k - a_k}{B_n}\right|^3 = \frac{1}{B_n^3} M|\xi_k - a_k|^3 \rightarrow 0 \quad \text{коли} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{за}$$

умовою Ляпунова.

Позначимо через $\varphi_{nk}(t)$ характеристичну функцію випадкової величини η_{nk} . Так як випадкова величина η_{nk} має моменти до третього порядку включно, то її характеристична функція $\varphi_{nk}(t)$ має неперервні похідні до третього порядку включно і ми можемо її розкласти за формулою Маклорена

$$\varphi_{nk}(t) = \varphi_{nk}(0) + \varphi'_{nk}(0) \cdot t + \varphi''_{nk}(0) \cdot \frac{t^2}{2} + R_{nk}(t).$$

Врахуємо, що $\varphi_{nk}(0)=1, \varphi'_{nk}(0)=i \cdot M \eta_{nk}=0, \varphi''_{nk}(0)=i^2 \cdot M \eta_{nk}^2=-D \eta_{nk}$.

Тоді $\varphi_{nk}(t)=1-D \eta_{nk} \cdot \frac{t^2}{2}+R_{nk}(t)$.

Розглянемо залишковий член

$R_{nk}(t)=\varphi'''_{nk}(t_0) \cdot \frac{t^3}{3!}=\frac{t^3}{6} \cdot i^3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{ixt_0} dF_{\eta_{nk}}(x)$ та оцінимо його

$$|R_{nk}(t)| \leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_{\eta_{nk}}(x) = \frac{|t|^3}{6} M |\eta_{nk}|^3 = \frac{|t|^3}{6} \cdot \frac{1}{B_n^3} M |\xi_k - a_k|^3 \rightarrow 0$$

коли $n \rightarrow \infty$ за умовою Ляпунова при будь яком фіксовану t .

Розглянемо тепер

$$\begin{aligned} D \eta_{nk} &= M \eta_{nk}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\eta_{nk}}(x) = \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{\eta_{nk}}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{\eta_{nk}}(x) \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \int_{|x| \leq \varepsilon} dF_{\eta_{nk}}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{|x|^3}{|x|} dF_{\eta_{nk}}(x) \leq \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x| > \varepsilon} |x|^3 dF_{\eta_{nk}}(x), \text{ де } \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

так як $\int_{|x| \leq \varepsilon} dF_{\eta_{nk}}(x) \leq 1$ і $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{\varepsilon}$ коли $|x| > \varepsilon$. Враховуючи, що

$$\int_{|x| > \varepsilon} |x|^3 dF_{\eta_{nk}}(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dF_{\eta_{nk}}(x) = M |\eta_{nk}|^3 = \frac{1}{B_n^3} M |\xi_k - a_k|^3 \rightarrow 0$$

коли $n \rightarrow \infty$, за $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0 такий, що

$$\frac{1}{B_n^3} M |\xi_k - a_k|^3 < \varepsilon^2 \text{ коли } n \geq n_0.$$

Тоді $D \eta_{nk} < \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon$, тобто $D \eta_{nk} \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$.

Тепер характеристичну функцію $\varphi_{nk}(t)$ можемо записати у вигляді

$$\varphi_{nk}(t) = 1 - D \eta_{nk} \cdot \frac{t^2}{2} + R_{nk}(t) = 1 + z_{nk}, \text{ де } z_{nk} = -D \eta_{nk} \cdot \frac{t^2}{2} + R_{nk}(t),$$

при цьому $z_{nk} \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$ при будь якому фіксованому t .

$$\text{Розглянемо } \ln \varphi_{nk}(t) = \ln(1 + z_{nk}) = z_{nk} - \frac{z_{nk}^2}{2} + \frac{z_{nk}^3}{3} - \dots$$

Цей ряд буде збіжним, так як $|z_{nk}| < 1$ починаючи з деякого номера N в силу того, що $z_{nk} \rightarrow 0$ коли $n \rightarrow \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} |\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}| &= \left| -\frac{z_{nk}^2}{2} + \frac{z_{nk}^3}{3} - \dots \right| \leq \frac{|z_{nk}|^2}{2} + \frac{|z_{nk}|^3}{3} + \dots < \\ &< |z_{nk}|^2 + |z_{nk}|^3 + \dots = \frac{|z_{nk}|^2}{1 - |z_{nk}|} < |z_{nk}|^2 \text{ коли } n > N. \end{aligned}$$

Нехай $\varphi_{S_n^*}(t)$ характеристична функція нормованої суми $S_n^* = \sum_{k=1}^n \eta_{nk}$.

Так як випадкові величини η_{nk} незалежні, то $\varphi_{S_n^*}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{nk}(t)$ і

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{S_n^*}(t) &= \sum_{k=1}^n \ln \varphi_{nk}(t) = \sum_{k=1}^n (\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}) + \sum_{k=1}^n z_{nk} = \\ &= \sum_{k=1}^n (\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}) - \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n D\eta_{nk} + \sum_{k=1}^n R_{nk}(t). \end{aligned}$$

Врахуємо, що $\sum_{k=1}^n D\eta_{nk} = \sum_{k=1}^n \frac{D\xi_k}{B_n^2} = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k = \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = \frac{1}{B_n^2} B_n^2 = 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} \left| \ln \varphi_{S_n^*} + \frac{t^2}{2} \right| &\leq \sum_{k=1}^n |\ln \varphi_{nk}(t) - z_{nk}| + \sum_{k=1}^n |R_{nk}(t)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |z_{nk}|^2 + \frac{|t|^3}{6} \cdot \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^n M |\xi_k - a_k|^3 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

коли $n \rightarrow \infty$ при будь якому фіксованому t .

Таким чином, ми показали, що у будь який точці t

$$\ln \varphi_{S_n^*}(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2} \text{ коли } n \rightarrow \infty, \text{ тобто } \varphi_{S_n^*}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ коли } n \rightarrow \infty.$$

Зі збіжності послідовності характеристичних функцій $\{\varphi_{S_n^*}(t)\}$ до характеристичної функції $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ нормального розподілу з

параметрами $a=0, \sigma=1$ впливає збіжність послідовності функцій розподілу $\{F_{S_n^*}(x)\}$ до функції розподілу нормального розподілу

$$F_{S_n^*}(x) = P\{S_n^* < x\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доведена нами центральна гранична теорема знаходить надзвичайно багато додатків у різних галузях. Це пов'язано з її універсальністю, її стійкістю відносно незначних відхилень від умов теореми та відносно високої точності навіть для помірних значень n . Універсальність теореми полягає у тому, що вона може застосовуватися до випадкових величин ξ_k з будь-якими розподілами, якби тільки існували дисперсії σ_k та вони були достатньо мали. Стійкість теореми полягає у тому, що поява деякої помірної залежності між випадковими величинами ξ_k не змінює нормальності граничного розподілу. Однак, як і у випадку теореми Муавра – Лапласа, центральну граничну теорему не можна застосовувати при оцінці ймовірностей рідкісних подій, тобто при дуже малих p .

Розглянемо один приклад на застосування центральної граничної теореми.

Приклад. Студент отримує на іспиті оцінку «відмінно» з ймовірністю 0,6; «добре» з ймовірністю 0,3 і «задовільно» з ймовірністю 0,1. За період навчання він здає 40 іспитів. Знайти ймовірність того, що середній бал цього студента буде не менше ніж 4,6.

Нехай випадкова величина ξ є сума балів, отриманих студентом за весь період навчання. Середній бал буде не менше 4,6 якщо $\xi \geq 4,6 \cdot 40 = 184$. Ми не знаємо закон розподілу випадкової величини ξ , але ми можемо знайти її математичне сподівання $M\xi$ та дисперсію $D\xi$, використовуючи те, що випадкова величина ξ є сума незалежних випадкових величин ξ_k – результатів поточних іспитів. Знайдемо

$$M\xi_k = 5 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 4,5 \quad M\xi_k^2 = 25 \cdot 0,6 + 16 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 = 20,7$$

$$D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 = 20,7 - 4,5^2 = 0,45.$$

$$\text{Тоді } M\xi = 40 \cdot M\xi_k = 40 \cdot 4,5 = 180; D\xi = 40 \cdot 0,45 = 18.$$

Далі будемо робити так, як ми це робили при розв'язанні задач за допомогою теореми Муавра – Лапласа, тільки тут скористаємося центральною граничною теоремою

$$\begin{aligned} P\{184 \leq \xi \leq 200\} &= P\left\{\frac{184 - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \leq \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \leq \frac{200 - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right\} = \\ &= P\left\{0,94 \leq \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \leq 4,71\right\} = P\left\{\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \leq 4,71\right\} - P\left\{\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \leq 0,94\right\} = \\ &= \frac{1}{2} + \Phi(4,71) - \frac{1}{2} - \Phi(0,94) = \Phi(4,71) - \Phi(0,94) = \\ &= 0,5 - 0,3264 = 0,1736 \end{aligned}$$

де враховано, що згідно з центральною граничною теоремою

$$P\left\{\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Завдання.

- 1) Стрілець попадає в десятку з ймовірністю 0,6, в дев'ятку з ймовірністю 0,3, а в вісімку з ймовірністю 0,1. Стрілець зробив 100 пострілів. Знайти межі, у яких з ймовірністю 0,95 лежить сума S вибитих їм очок.
- 2) Гральний кубик підкинули 200 разів. Знайти ймовірність того, що загальна сума очок буде не менш ніж 750.

Таблиця 1 значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,34	0,3765	0,68	0,3266	1,02	0,2371
0,01	0,3989	0,35	0,3752	0,69	0,3144	1,03	0,2347
0,02	0,3989	0,36	0,3739	0,70	0,3123	1,04	0,2323
0,03	0,3988	0,37	0,3725	0,71	0,3101	1,05	0,2299
0,04	0,3986	0,38	0,3712	0,72	0,3079	1,06	0,2275
0,05	0,3984	0,39	0,3697	0,73	0,3056	1,07	0,2251
0,06	0,3982	0,40	0,3683	0,74	0,3034	1,08	0,2227
0,07	0,3980	0,41	0,3668	0,75	0,3011	1,09	0,2203
0,08	0,3977	0,42	0,3653	0,76	0,2989	1,10	0,2179
0,09	0,3973	0,43	0,3637	0,77	0,2966	1,11	0,2155
0,10	0,3970	0,44	0,3621	0,78	0,2943	1,12	0,2131
0,11	0,3965	0,45	0,3605	0,79	0,2920	1,13	0,2107
0,12	0,3961	0,46	0,3589	0,80	0,2897	1,14	0,2083
0,13	0,3956	0,47	0,3572	0,81	0,2874	1,15	0,2059
0,14	0,3951	0,48	0,3555	0,82	0,2850	1,16	0,2036
0,15	0,3945	0,49	0,3538	0,83	0,2827	1,17	0,2012
0,16	0,3939	0,50	0,3521	0,84	0,2803	1,18	0,1989
0,17	0,3932	0,51	0,3503	0,85	0,2780	1,19	0,1965
0,18	0,3925	0,52	0,3485	0,86	0,2756	1,20	0,1942
0,19	0,3918	0,53	0,3467	0,87	0,2732	1,21	0,1919
0,20	0,3910	0,54	0,3448	0,88	0,2709	1,22	0,1895
0,21	0,3902	0,55	0,3429	0,89	0,2685	1,23	0,1872
0,22	0,3894	0,56	0,3410	0,90	0,2661	1,24	0,1849
0,23	0,3885	0,57	0,3391	0,91	0,2637	1,25	0,1826
0,24	0,3876	0,58	0,3372	0,92	0,2613	1,26	0,1804
0,25	0,3867	0,59	0,3352	0,93	0,2589	1,27	0,1781
0,26	0,3857	0,60	0,3332	0,94	0,2565	1,28	0,1758
0,27	0,3847	0,61	0,3312	0,95	0,2541	1,29	0,1736
0,28	0,3836	0,62	0,3292	0,96	0,2516	1,30	0,1714
0,29	0,3825	0,63	0,3271	0,97	0,2492	1,31	0,1691
0,30	0,3814	0,64	0,3251	0,98	0,2468	1,32	0,1669
0,31	0,3802	0,65	0,3230	0,99	0,2444	1,33	0,1647
0,32	0,3790	0,66	0,3209	1,00	0,2420	1,34	0,1626
0,33	0,3778	0,67	0,3187	1,01	0,2396	1,35	0,1604

Продовження таблиці 1

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1,36	0,1582	1,71	0,0925	2,06	0,0478	2,41	0,0219
1,37	0,1561	1,72	0,0909	2,07	0,0468	2,42	0,0213
1,38	0,1539	1,73	0,0893	2,08	0,0459	2,43	0,0208
1,39	0,1518	1,74	0,0878	2,09	0,0449	2,44	0,0203
1,40	0,1497	1,75	0,0863	2,10	0,0440	2,45	0,0198
1,41	0,1476	1,76	0,0848	2,11	0,0431	2,46	0,0194
1,42	0,1456	1,77	0,0833	2,12	0,0422	2,47	0,0189
1,43	0,1435	1,78	0,0818	2,13	0,0413	2,48	0,0184
1,44	0,1415	1,79	0,0804	2,14	0,0404	2,49	0,0180
1,45	0,1394	1,80	0,0790	2,15	0,0396	2,50	0,0175
1,46	0,1374	1,81	0,0775	2,16	0,0387	2,51	0,0171
1,47	0,1354	1,82	0,0761	2,17	0,0379	2,52	0,0167
1,48	0,1334	1,83	0,0748	2,18	0,0371	2,53	0,0163
1,49	0,1315	1,84	0,0734	2,19	0,0363	2,54	0,0158
1,50	0,1295	1,85	0,0721	2,20	0,0355	2,55	0,0154
1,51	0,1276	1,86	0,0707	2,21	0,0347	2,56	0,0151
1,52	0,1257	1,87	0,0694	2,22	0,0339	2,57	0,0147
1,53	0,1238	1,88	0,0681	2,23	0,0332	2,58	0,0143
1,54	0,1219	1,89	0,0669	2,24	0,0325	2,59	0,0139
1,55	0,1200	1,90	0,0656	2,25	0,0317	2,60	0,0136
1,56	0,1182	1,91	0,0644	2,26	0,0310	2,61	0,0132
1,57	0,1163	1,92	0,0632	2,27	0,0303	2,62	0,0129
1,58	0,1145	1,93	0,0620	2,28	0,0297	2,63	0,0126
1,59	0,1127	1,94	0,0608	2,29	0,0290	2,64	0,0122
1,60	0,1109	1,95	0,0596	2,30	0,0283	2,65	0,0119
1,61	0,1092	1,96	0,0584	2,31	0,0277	2,66	0,0116
1,62	0,1074	1,97	0,0573	2,32	0,0270	2,67	0,0113
1,63	0,1057	1,98	0,0562	2,33	0,0264	2,68	0,0110
1,64	0,1040	1,99	0,0551	2,34	0,0258	2,69	0,0107
1,65	0,1023	2,00	0,0540	2,35	0,0252	2,70	0,0104
1,66	0,1006	2,01	0,0529	2,36	0,0246	2,71	0,0101
1,67	0,0989	2,02	0,0519	2,37	0,0241	2,72	0,0099
1,68	0,0973	2,03	0,0508	2,38	0,0235	2,73	0,0096
1,69	0,0957	2,04	0,0498	2,39	0,0229	2,74	0,0093
1,70	0,0940	2,05	0,0488	2,40	0,0224	2,75	0,0091

Продовження таблиці 1

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,72	0,0099	3,04	0,0039	3,36	0,0014	3,68	0,0005
2,73	0,0096	3,05	0,0038	3,37	0,0014	3,69	0,0004
2,74	0,0093	3,06	0,0037	3,38	0,0013	3,70	0,0004
2,75	0,0091	3,07	0,0036	3,39	0,0013	3,71	0,0004
2,76	0,0088	3,08	0,0035	3,40	0,0012	3,72	0,0004
2,77	0,0086	3,09	0,0034	3,41	0,0012	3,73	0,0004
2,78	0,0084	3,10	0,0033	3,42	0,0012	3,74	0,0004
2,79	0,0081	3,11	0,0032	3,43	0,0011	3,75	0,0004
2,80	0,0079	3,12	0,0031	3,44	0,0011	3,76	0,0003
2,81	0,0077	3,13	0,0030	3,45	0,0010	3,77	0,0003
2,82	0,0075	3,14	0,0029	3,46	0,0010	3,78	0,0003
2,83	0,0073	3,15	0,0028	3,47	0,0010	3,79	0,0003
2,84	0,0071	3,16	0,0027	3,48	0,0009	3,80	0,0003
2,85	0,0069	3,17	0,0026	3,49	0,0009	3,81	0,0003
2,86	0,0067	3,18	0,0025	3,50	0,0009	3,82	0,0003
2,87	0,0065	3,19	0,0025	3,51	0,0008	3,83	0,0003
2,88	0,0063	3,20	0,0024	3,52	0,0008	3,84	0,0003
2,89	0,0061	3,21	0,0023	3,53	0,0008	3,85	0,0002
2,90	0,0060	3,22	0,0022	3,54	0,0008	3,86	0,0002
2,91	0,0058	3,23	0,0022	3,55	0,0007	3,87	0,0002
2,92	0,0056	3,24	0,0021	3,56	0,0007	3,88	0,0002
2,93	0,0055	3,25	0,0020	3,57	0,0007	3,89	0,0002
2,94	0,0053	3,26	0,0020	3,58	0,0007	3,90	0,0002
2,95	0,0051	3,27	0,0019	3,59	0,0006	3,91	0,0002
2,96	0,0050	3,28	0,0018	3,60	0,0006	3,92	0,0002
2,97	0,0048	3,29	0,0018	3,61	0,0006	3,93	0,0002
2,98	0,0047	3,30	0,0017	3,62	0,0006	3,94	0,0002
2,99	0,0046	3,31	0,0017	3,63	0,0005	3,95	0,0002
3,00	0,0044	3,32	0,0016	3,64	0,0005	3,96	0,0002
3,01	0,0043	3,33	0,0016	3,65	0,0005	3,97	0,0002
3,02	0,0042	3,34	0,0015	3,66	0,0005	3,98	0,0001
3,03	0,0040	3,35	0,0015	3,67	0,0005	3,99	0,0001

Таблиця 2 значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2704	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3079	1,20	0,3849
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3888
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

Продовження таблиці 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,37	0,4911
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,03	0,4788	2,38	0,4913
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,39	0,4916
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,05	0,4798	2,40	0,4918
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,06	0,4803	2,41	0,4920
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,07	0,4808	2,42	0,4922
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,43	0,4925
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,09	0,4817	2,44	0,4927
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,10	0,4821	2,45	0,4929
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,11	0,4826	2,46	0,4931
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,12	0,4830	2,47	0,4932
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,13	0,4834	2,48	0,4934
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,14	0,4838	2,49	0,4936
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,15	0,4842	2,50	0,4938
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,16	0,4849	2,51	0,4940
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,17	0,4850	2,52	0,4941
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,53	0,4943
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,19	0,4857	2,54	0,4945
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,55	0,4946
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,21	0,4864	2,56	0,4948
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,57	0,4949
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,23	0,4871	2,58	0,4951
1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,59	0,4952
1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,25	0,4878	2,60	0,4953
1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,26	0,4881	2,61	0,4955
1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,27	0,4884	2,62	0,4956
1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,28	0,4887	2,63	0,4957
1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,29	0,4890	2,64	0,4959
1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,65	0,4960
1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,31	0,4896	2,66	0,4961
1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,32	0,4898	2,67	0,4962
1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,33	0,4901	2,68	0,4963
1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,34	0,4904	2,69	0,4964
1,65	0,4505	2,00	0,4773	2,35	0,4906	2,70	0,4965
1,66	0,4515	2,01	0,4778	2,36	0,4909	2,71	0,4966

Продовження таблиці 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,72	0,4967	3,01	0,4987	3,30	0,49952	3,59	0,49984
2,73	0,4968	3,02	0,4987	3,31	0,49953	3,60	0,49984
2,74	0,4969	3,03	0,4988	3,32	0,49955	3,61	0,49985
2,75	0,4970	3,04	0,4988	3,33	0,49957	3,62	0,49985
2,76	0,4971	3,05	0,4989	3,34	0,49958	3,63	0,49986
2,77	0,4972	3,06	0,4989	3,35	0,49960	3,64	0,49986
2,78	0,4973	3,07	0,4989	3,36	0,49961	3,65	0,49987
2,79	0,4974	3,08	0,4990	3,37	0,49962	3,66	0,49987
2,80	0,4974	3,09	0,4990	3,38	0,49964	3,67	0,49988
2,81	0,4975	3,10	0,49903	3,39	0,49965	3,68	0,49988
2,82	0,4976	3,11	0,49907	3,40	0,49966	3,69	0,49989
2,83	0,4977	3,12	0,49910	3,41	0,49968	3,70	0,49989
2,84	0,4977	3,13	0,49913	3,42	0,49969	3,71	0,49990
2,85	0,4978	3,14	0,49916	3,43	0,49970	3,72	0,49990
2,86	0,4979	3,15	0,49918	3,44	0,49971	3,73	0,49990
2,87	0,4979	3,16	0,49921	3,45	0,49972	3,74	0,49991
2,88	0,4980	3,17	0,49924	3,46	0,49973	3,75	0,49991
2,89	0,4981	3,18	0,49926	3,47	0,49974	3,76	0,49992
2,90	0,4981	3,19	0,49929	3,48	0,49975	3,77	0,49992
2,91	0,4982	3,20	0,49931	3,49	0,49976	3,78	0,49992
2,92	0,4983	3,21	0,49934	3,50	0,49977	3,79	0,49993
2,93	0,4983	3,22	0,49936	3,51	0,49978	3,80	0,499928
2,94	0,4984	3,23	0,49938	3,52	0,49978	3,90	0,499948
2,95	0,4984	3,24	0,49940	3,53	0,49979	4,00	0,499968
2,96	0,4985	3,25	0,49942	3,54	0,49980	4,50	0,499997
2,97	0,4985	3,26	0,49944	3,55	0,49981	5,00	0,49999997
2,98	0,4986	3,27	0,49946	3,56	0,49982		
2,99	0,4986	3,28	0,49948	3,57	0,49982		
3,00	0,4987	3,29	0,49950	3,58	0,49983		

Відповіді

Глава 1.

§ 2. 1. Позначимо кулі A та B . $\Omega = \{(A, B; \emptyset), (A; B), (B; A), (\emptyset; A, B)\}$,

$$p = \frac{1}{2}.$$

2. Простір Ω – 36 подій.

$$A \cap B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1), (6, 1)\}; p = \frac{1}{6}.$$

$$3. \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; p_1 = \frac{1}{21}, p_2 = \frac{2}{21}, p_3 = \frac{3}{21}, p_4 = \frac{4}{21}, p_5 = \frac{5}{21}, p_6 = \frac{6}{21}.$$

$$4. \Omega = \{ГГ, ЦЦ, ЦГГ, ГЦЦ, ГЦГГ, ЦГЦЦ, ГЦГЦЦ, ЦГЦГГ, \dots\}$$

$$p = 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{16}.$$

$$5. P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1/2}{1 - 3/4} = \frac{2}{3}; P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}.$$

§ 3. 1. $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. 2. Всього чисел $A_7^5 = 2520$, парних

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 1440$, непарних $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$. 3. $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! = 1728$.

$$4. C_9^2 \cdot C_7^3 \cdot C_4^4 = 1260. 5. C_n^2 - n = \frac{n}{2}(n-3). 6. A_7^3 = 210.$$

$$7. 10^4 \cdot 28^3 = 219520000. 8. 31^2 = 961 < 1000.$$

$$\S 4. 1. P(A) = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{3}{5}; P(B) = \frac{C_7^3}{C_{10}^6} = \frac{1}{6}.$$

$$2. P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}; P(B) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

$$3. p = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{C_{52}^3} \approx 0.003. 4. p = \frac{C_4^3 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{4^4} = \frac{3}{16}.$$

$$5. p = \frac{C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \dots \cdot C_{n-n_1-\dots-n_5}^{n_6}}{6^n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_6! \cdot 6^n}.$$

$$\S 7. 1. P(A) = \frac{2}{\pi}; P(B) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}. 2. p = \frac{1}{2}. 3. p = \frac{3}{4}.$$

$$4. p = 0,4 - 0,09 \ln 9 = 0,2022. \quad 5. p = \frac{43}{128} = 0,336.$$

$$6. p = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{T} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^2. \quad 7. p = \frac{(1-2\tau)^2}{(1-\tau)^2}.$$

$$\S 8. 1. a) p = 0,7 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,2 = 0,38; \quad б) p = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

$$2. p = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{67}{91}. \quad 3. p = 0,7^2 \cdot 0,8^3 = 0,25088.$$

$$4. p = 3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,243. \quad 5. \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq 0,1; n \geq 4.$$

$$6. p = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}. \quad 7. \text{Однакова } p = \frac{1}{5}. \quad 8. p = \frac{2}{5}.$$

$$9. P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36} \right)^{24} \approx 0,491; P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^4 \approx 0,518.$$

$$10. a) p = 3 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}. \quad б) p = 3! \cdot \frac{5}{72} = \frac{5}{12}. \quad в) p = A_6^3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 = \frac{5}{9}.$$

$$11. a) p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}. \quad б) p = 3! \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{10}.$$

$$12. p = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} + \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} + \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{93}{288}.$$

$$13. P(A) = 1 - (1-p)^{nm}; P(B) = \left(1 - (1-p)^n \right)^m.$$

$$14. a) P(A) = \left(\frac{9}{10} \right)^k. \quad б) P(B) = \left(\frac{9}{10} \right)^k. \quad в) P(A \cap B) = \left(\frac{8}{10} \right)^k.$$

$$г) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2 \left(\frac{9}{10} \right)^k - \left(\frac{8}{10} \right)^k.$$

$$15. P(A) = \beta_1 \beta_2; P(B) = 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

$$\S 9. 1. a) p = P_5(0) + P_5(1) = \frac{3}{16}. \quad б) p = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

$$2. P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \left(\frac{a-x}{a} \right)^3.$$

$$3. p = C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8.$$

$$4. 1 - \left(\frac{20}{22}\right)^n > \frac{1}{2}; \left(\frac{10}{11}\right)^n < \frac{1}{2}; n > \frac{\ln 2}{\ln 11 - \ln 10}; n = 8.$$

$$5. P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6^3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6^3}\right)^3 = 0,0002.$$

$$6. P_3(0) = \left(\frac{C_{32}^9}{C_{36}^9}\right)^3 = 0,026. \text{ Не має.}$$

$$7. p = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} C_{N-1}^i \left(\frac{kt}{N}\right)^i \left(1 - \frac{kt}{N}\right)^{N-1-i}.$$

$$\S 10. 1. P(A) = 0,784. 2. P(A) = 0,5. 3. P(A) = 0,28.$$

$$4. P(A) = \frac{38}{105} = 0,36. 5. P(A) = 0,45.$$

$$\S 11. 1. P(H_2 / A) = \frac{7}{17}. 2. \text{Ймовірніше легкова } \left(p = \frac{4}{7}\right), \text{ ніж вантажна}$$

$$\left(p = \frac{3}{7}\right). 3. p = \frac{24}{77}. 4. p = \frac{33}{47} = 0,702. 5. p = \frac{7}{46} = 0,152.$$

$$6. p = \frac{2a}{1+a-b}. 7. P(H_1 / A) = \frac{56}{241}; P(H_1 / B) = \frac{84}{179}. 8. p = 0,048.$$

$$9. p = \frac{20}{21} = 0,952.$$

$$10. H_1 - 3 \text{ білих, } H_2 - 2 \text{ білих і 1 чорна, } H_3 - 1 \text{ біла і 2 чорні, } H_4 - 3 \text{ чорні; } P(H_1 / A) = 0; P(H_2 / A) = \frac{4}{5}; P(H_3 / A) = \frac{1}{5}; P(H_4 / A) = 0.$$

$$11. P(H_4 \cup H_5 / A) = \frac{5}{11}.$$

Глава 2.

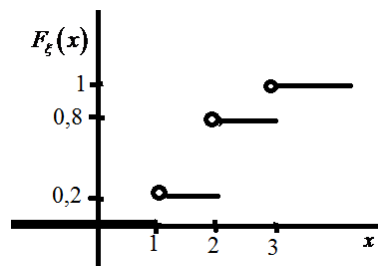
§ 14. 1. Біноміальний розподіл

ξ	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

2. Гіпергеометричний розподіл

ξ	1	2	3
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0,2, & 1 < x \leq 2 \\ 0,8, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



3. Геометричний розподіл $P\{\xi = k\} = (0,9)^{k-1} \cdot 0,1; k = 1, 2, \dots$

4. $P\{\xi = 1\} = p_1; P\{\xi = 2\} = q_1 p_2; P\{\xi = 3\} = q_1 q_2 p_1;$

$P\{\xi = 4\} = q_1^2 q_2 p_2; P\{\xi = 5\} = q_1^2 q_2^2 p_1; \dots$

5. $C = 1; P\{\xi \geq 3\} = \frac{1}{3}$

§ 15. 1. $P\{-1 < \xi < 1\} = \frac{1}{3}.$

$$2. p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{\pi}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

$$3. P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\pi} \right).$$

$$4. F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$5. C = \frac{1}{2}; F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; P\{0 < \xi < 1\} = 0,0803.$$

$$6. P\{7 < \xi < 10\} = 0,3.$$

$$7. p = P\{|\xi| < 4\} = P\{-4 < \xi < 4\} = 2\Phi(0,2) = 0,1586.$$

$$q = 1 - 0,1586 = 0,8414; P = 1 - q^3 = 0,4043$$

§ 18. 1. a)

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - F_{\xi}(-\ln x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} p_{\xi}(-\ln x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$б) F_{\eta}(x) = F_{\xi}(e^x); p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = p_{\xi}(e^x)e^x.$$

$$в) F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ F_{\xi}(\operatorname{tg} x), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$p_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} p_{\xi}(\operatorname{tg} x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$г) p_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \left(p_{\xi}(\sqrt{x^2 - 1}) + p_{\xi}(-\sqrt{x^2 - 1}) \right), & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}.$$

$$2. p_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1;1) \\ 0, & x \notin (-1;1) \end{cases} . 3. p_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\ln^2 x}, & x \in (0;1] \\ 0, & x \notin (0;1] \end{cases} .$$

$$4. p_{\zeta}(x) = e^{-x} \left(e^{\frac{1}{2}x} - 1 \right).$$

Глава 3.

$$\S 20. 1. M\eta = \sum_{i=1}^4 2^{\xi_i} p_i = 2,4.$$

$$2. Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\xi}(x) dx = \int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2}.$$

$$3. M\xi = 0 \cdot \frac{n}{n+m} + 1 \cdot \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1} + 2 \cdot \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} \cdot \frac{n}{n+m-2} + \\ + \dots + m \cdot \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} \cdot \frac{m-2}{n+m-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n}.$$

$$\S 21. 1. M\xi = \frac{1}{p} = 2. 2. p_1 = 0,405; p_2 = 0,14; p_3 = 0,455.$$

$$3. M\xi_n = \frac{7}{2}n, D\xi_n = \frac{35}{12}n.$$

$$4. p = P_5(4) = C_5^4 (0,9)^4 \cdot 0,1 = 0,32805; M\xi = np = 50 \cdot 0,32805 \approx 16.$$

$$5. M\xi = \sum_{k=1}^n p_k; D\xi = \sum_{k=1}^n p_k q_k. 6. M\xi = 0; D\xi = \frac{1}{2}.$$

$$7. M|\xi| = \frac{5}{6}; D|\xi| = \frac{5}{36}. 8. a = \frac{\lambda}{2}; M\xi = 0; D\xi = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Глава 4.

$$\S 25. 1. P\{\xi \geq 200\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon} = \frac{75}{200} = 0,375.$$

$$2. M\xi = np = 16; D\xi = npq = 3,2;$$

$$a) P\{|\xi - 16| < 3\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 0,64; б) P\{|\xi - 16| \geq 5\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 0,128.$$

$$3. M\xi = 50; D\xi = 25; .$$

$$P\{40 < \xi < 60\} = P\{|\xi - M\xi| < 10\} \geq 1 - \frac{D\xi}{10^2} = 0,75.$$

$$4. M\xi = 600; D\xi = 400;$$

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\{|k - M\xi| < \varepsilon n\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = 0,95.$$

$$5. P\{|k - M\xi| < \varepsilon n\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = 0,9; \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = 0,1;$$

$$n = \frac{pq}{0,1\varepsilon^2} = 22222,2\dots; n = 22223.$$

$$6. P\{|k - M\xi| < \varepsilon n\} \geq 1 - \frac{D\xi}{(\varepsilon n)^2} = 0,95; \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = 0,05;$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{0,05n}} = 0,02108 \approx 0.02.$$

$$\S 27. 1. k_0 = 2; P_{10}(2) = C_{10}^2 (0,2)^2 (0,8)^8 = 0,302. 2. p \in (0,6; 0,62].$$

$$3. a) k_0 = 2; б) P_6(2) = 0,324; в) p = 0,5798.$$

$$4. P_{100}(75) = 0,04565. 5. P_{50}(38) = 0,11.$$

$$\S 28. 1. P_{2100}(1470 \leq k \leq 1500) = 0,4236. 2. P_{60}(31 \leq k \leq 60) = 0,9066.$$

$$3. P_{1000}(0 \leq k \leq 120) = 0,9826. 4. n = 176.$$

$$5. P\left\{\left|\frac{k}{625} - 0,8\right| < 0,02\right\} = 0,7888.$$

$$6. n \geq 633. 7. n = 6447. 8. \varepsilon = 0,02. 9. 5 \leq k \leq 21.$$

$$\S 29. 1.a) P_{1000}(2) = 0,225; б) P_{1000}(0 \leq k < 2) = 0,2;$$

$$в) P_{1000}(k > 2) = 0,575.$$

$$2. P_{200}(3) = 0,18. 3. a) P_{400}(3) = 0,195; б) P_{400}(k \geq 2) = 0,905.$$

$$\S 30. 1. \varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos t).$$

$$2. \varphi_{\eta}(t) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{it} - 1)}, \text{ Пуассон с } \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

$$\S 31. 1. a) P_4(4) = 0,006; б) P_4(2) = 0,254; в) P_4(0) = 0,252;$$

г) $P_4(\geq 1) = 0,748$.

§ 34. 1. $937 \leq S \leq 963$. 2. $P\{\xi \geq 750\} = 0,0192$.

Література

Основна

1. Б.В. Гнеденко. Курс теорії ймовірностей. К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
2. Карташов М.В. Ймовірність, процеси, статистика. Посібник. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 494 с.
3. А.Я. Дороговцев, Д.С. Сільвестров, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко. Теорія ймовірностей. Сбірник задач. К.: Вища школа, 1976. – 384 с.
4. В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник. К.: ВПЦ Київський університет, 2019. – 367 с.
5. Гіхман І.І., Скороход А.В., Ядренко М.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: Вища школа, 1978. – 408 с.

Додаткова

1. Бабак В.М., Марченко Б.Г. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник для студентів вузів. К.: Техніка, 2004. – 287 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник для студентів вузів. К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 422 с.
3. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. К.: Знання, 2007. – 556 с.
4. Єлейко Я.І., Копитко Б.І., Тріш Б.М. Теорія ймовірностей: теореми, приклади і задачі: Навчальний посібник. Львів: Львівський національний університет ім. І. Франко, 2009. – 250 с.
5. Коляда Р.В., Пушак А.С., Мельник І.О. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник. Львів: Укр. акад.. друкарства, 2010. – 160 с.

6. Introduction to probability theory / G.P. Butsan. National acad. of science of Ukrain, Y.O. Mitropolski intern. math. center/. Kyiv: Akadempriodika, 2012. – 248 p.

Електронні інформаційні ресурси

1. <http://nbuv.gov.ua/> – Сайт Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського;
2. <http://lib.onu.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова.
3. <http://www.library.univ.kiev.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки ім. М. Максимовича Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.
4. <http://www.lnulibrary.lviv.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Львівського національного університету ім. Івана Франка.
5. <http://www.library.chun.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича.
6. <http://www.library.dnu.dp.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Дніпровського національного університету ім. Олеся Гончара.
7. <http://www.library.univer.kharkov.ua/> - Сайт центральної Наукової бібліотеки Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна.
8. <http://www.library.znu.edu.ua/> - Сайт Наукової бібліотеки Запорізького національного університету.
9. <http://www.dnpb.gov.ua/> – Сайт Державної науково-педагогічної бібліотеки України імені В.О. Сухомлинського;
10. <http://korolenko.kharkov.com/> – Сайт Харківської державної наукової бібліотеки імені В.Г. Короленка;
11. <http://scholar.google.com.ua/> - Сайт для пошуку наукової літератури з різних дисциплін і джерел: книги, статті, дисертації.

Навчальне видання

Процеров Юрій Сергійович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

для студентів

факультету математики, фізики та інформаційних технологій
спеціальностей 113 Прикладна математика та 111 Математика

В авторській редакції

Підп. до друку 14.11.2023. Формат 60х84/16.

Ум.-друк. арк. 10,81. Наклад 15 пр.

Зам. № 2695.

Видавець і виготовлювач

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua