

УДК 517.548

О. В. Онищук

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

РАЗЛОЖЕНИЕ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА В РЯД ЛОРАНА

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
з математичних проблем механіки і математичної фізики ОНУ 21.03.2003 р.

Для голоморфного вектора (H-регулярной функции, разв'язку системы Моисила – Теодореску) одержано розвинення в ряд Лорана. Все члены ряда є добутками голоморфных векторов і констант (кватернионов).

Для голоморфного вектора (H-регулярной функции, решения системы Моисила – Теодореску) получено разложение в ряд Лорана. Все члены ряда являются произведениями голоморфных векторов и констант (кватернионов).

The Laurent series expansion for a holomorphic vector (H-regular function, Moisil – Teodorescu system solution) is obtained. All terms of the series are the products of a holomorphic vectors and constants (quaternions).

Введение. Теория пространственных голоморфных векторов (кватернионный анализ) является обобщением комплексного анализа на случай отображений $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Подробному изложению этой теории и ее приложений посвящена монография [1]. Ниже продолжают исследования, начатые автором в работе [2], и существенно используются результаты этой работы. Кроме того, в [2] приведен развернутый обзор состояния проблемы.

В качестве ряда Лорана в [1] приведено разложение, которое в обозначениях работы [2] имеет вид:

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n(\vec{a}, \vec{\theta}) |\vec{x} - \vec{a}|^n + \sum_{n=-\infty}^{-2} \mathbf{u}_n(\vec{a}, \vec{\theta}) |\vec{x} - \vec{a}|^n, \quad \vec{\theta} = \vec{\theta}(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{a})/|\vec{x} - \vec{a}|. \quad (0.1)$$

Такая форма записи может быть использована при доказательстве некоторых теорем, однако для приложений более удобен вариант

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{v}_n^k(\vec{x} - \vec{a}) \diamond \mathbf{c}_n^k - \sum_{n=-\infty}^{-2} \sum_{k=0}^{-n-2} \mathbf{v}_n^k(\vec{x} - \vec{a}) \diamond \mathbf{c}_n^k, \quad (0.2)$$

где $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ – голоморфные векторы, однородные степени $n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $\mathbf{c}_n^k$ – константы. В работе [2] построен ряд Тейлора, соответствующий первому слагаемому в (0.2), то есть построены $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и получены выражения для $\mathbf{c}_n^k$ для случая $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Целью предлагаемой статьи является построение $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и получение выражений для $\mathbf{c}_n^k$ для случая $n = \dots, -3, -2$. Существенного упрощения доказательств и выкладок по сравнению с [2] удалось достичь благодаря иному подходу к построению систем гармонических функций и записи операций над кватернионами в бикомплексной форме.

1. Системы гармонических функций. Запишем уравнение Лапласа в сферических координатах R, θ, φ (см. [3, стр. 290–291]):

$$\Delta_{R\theta} u + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \text{ где } \Delta_{R\theta} u \equiv \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (1.1)$$

При разделении переменных для уравнения (1.1) получаются системы гармонических функций, однородных степени $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (см. [3, стр. 373–376]):

$$U_n^m(\vec{x}) = a_n^m R^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = C_n^m(\vec{x}) + i S_n^m(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (1.2)$$

$$C_n^m(\vec{x}) = a_n^m R^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad S_n^m(\vec{x}) = a_n^m R^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \quad P_n^m = P_{n,m}.$$

Пусть $\vec{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Следуя [4, 5], перейдем к новым переменным

$$z_1 = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}, \quad z_2 = 2x_3, \quad z_3 = -x_1 + ix_2 = -re^{-i\varphi}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 = -z_1 z_3 \quad (1.3)$$

Если в (1.2) положить

$$a_n^m = 2^n (-1)^m [(n+1)_m]^{-1}, \quad (1.4)$$

то для функций U_n^m будут иметь место простые формулы дифференцирования

$$\frac{\partial U_n^m}{\partial z_s} = n U_{n-1}^{m+s-2}, \quad s = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

и рекуррентные соотношения

$$U_{n+1}^m = z_1 U_n^{m-1} + z_2 U_n^m + z_3 U_n^{m+1}. \quad (1.6)$$

Формулы (1.5), (1.6) доказаны в [4] для $n = 0, 1, 2, \dots; m = -n, \dots, n$ и в [5] для $n = -(l+1); l = 0, 1, 2, \dots; m = -l, \dots, l$. Доказательство в [4, 5] основывалось на использовании свойств присоединенных функций Лежандра P_n^m и было довольно громоздким.

В работе [6, п. 11.5.1] изложен способ построения системы гармонических функций, однородных степени $n = 0, 1, 2, \dots$. Ниже этот способ распространяется на случай $n = -1, -2, -3, \dots$. При этом получаются простые доказательства формул (1.5), (1.6).

Следующая лемма позволяет прояснить суть проводимых ниже построений.

Лемма 1. Если функция $u(R, \theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в некоторой торообразной области $V = \{\vec{x} : (R, \theta) \in V_2 \subset \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^3$,

$$v_m(R, \theta, \varphi) = a_m(\varphi) \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \psi) b_m(\psi) d\psi, \quad (1.7)$$

$$a_m(\varphi) = A_1 e^{im\varphi} + A_2 e^{-im\varphi}, \quad b_m(\psi) = B_1 e^{im\psi} + B_2 e^{-im\psi}, \quad (1.8)$$

то при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ и любом выборе A_1, A_2, B_1, B_2 функции (1.7) удовлетворяют уравнению (1.1) в области V (возможно, за исключением лучей $\theta = 0$ и $\theta = \pi$).

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned} \Delta_{R\theta} v_m + \frac{\partial^2 v_m}{\partial \varphi^2} &= a_m(\varphi) \int_0^{2\pi} \Delta_{R\theta} u(R, \theta, \psi) b_m(\psi) d\psi + \frac{d^2 a_m}{d\varphi^2} \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \psi) b_m(\psi) d\psi = \\ &= a_m(\varphi) \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right) b_m(\psi) d\psi + \frac{d^2 a_m}{d\varphi^2} \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \psi) b_m(\psi) d\psi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \psi) \left[a_m(\varphi) \left(-\frac{\partial^2 b_m}{\partial \psi^2} \right) + \frac{d^2 a_m}{d\varphi^2} b_m(\psi) \right] d\psi = \\
&= \int_0^{2\pi} u(R, \theta, \psi) \left[a_m(\varphi) m^2 b_m(\psi) + (-m^2 a_m(\varphi)) b_m(\psi) \right] d\psi = 0.
\end{aligned}$$

Первое равенство очевидно, во втором использовано уравнение (1.1), третье равенство получено интегрированием по частям (внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль за счет периодичности с периодом 2π функций $b_m(\psi)$ при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), четвертое равенство получено дифференцированием формул (1.8).

Лемма доказана.

Пусть x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты точки $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, связанные со сферическими координатами R, θ, φ соотношениями $x_1 = R \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = R \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = R \cos \theta$. Возьмем

$$u(R, \theta, \varphi) = u_n(R, \theta, \varphi) = [2(x_3 + ix_2)]^n = (z_1 + z_2 + z_3)^n. \quad (1.9)$$

В последнем равенстве использованы формулы (1.3).

Функции (1.9) – однородные степени $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. При $n = 0, 1, 2, \dots$ они являются гармоническими во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и в лемме 1 можно брать $V = \mathbb{R}^3$. При $n = -1, -2, -3, \dots$ из области гармоничности нужно исключить прямую $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 \in (-\infty, \infty)$ и в лемме 1 можно брать полупространства $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$. При этом лемма 1 позволяет из простых гармонических функций (1.9) двух переменных x_2, x_3 получить систему гармонических функций трех переменных x_1, x_2, x_3 :

$$v_{n,m}(\vec{x}) = e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [2(x_3 + ix_2)]^n e^{-im\psi} d\psi = e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_1 + z_2 + z_3)^n e^{-im\psi} d\psi. \quad (1.10)$$

В результате несложных преобразований можно от выражений (1.10) перейти к выражениям, которые при $n = 0, 1, 2, \dots$ были использованы в [7, гл. VII, § 2, п. 94] как исходный пункт для построения системы сферических функций (см. также [8, пп. 59, 62]). Далее можно доказать совпадение функций (1.10) с функциями (1.2), (1.4). Однако простых доказательств формул (1.5), (1.6) при этом получить не удастся. Поэтому укажем еще один способ получения из функций (1.9) системы гармонических функций трех переменных x_1, x_2, x_3 , совпадающей с (1.10).

Воспользуемся тем, что гармоническими будут также функции

$$u_n(R, \theta, \varphi + \alpha) = (z_1 e^{i\alpha} + z_2 + z_3 e^{-i\alpha})^n = (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n, \quad \tau = e^{i\alpha}, \quad (1.11)$$

получающиеся из (1.9) при повороте системы координат вокруг оси x_3 на угол $-\alpha$.

Сначала рассмотрим случай $n = 0, 1, 2, \dots$. Выполним возведение в степень n и соберем множители при одинаковых степенях τ :

$$(z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n = \sum_{m=-n}^n w_{n,m}(\vec{x}) \tau^m = \sum_{m=-n}^n w_{n,m}(\vec{x}) e^{im\alpha}. \quad (1.12)$$

При этом $w_{n,m}(\vec{x}) = f_{n,m}(r, z_2) e^{im\varphi}$.

Формулу (1.12) примем за определение гармонических многочленов $w_{n,m}(\vec{x})$.

При $\alpha = 0$, $\tau = 1$ формула (1.12) принимает вид

$$(z_1 + z_2 + z_3)^n = \sum_{m=-n}^n w_{n,m}(\vec{x}) = \sum_{m=-n}^n f_{n,m}(r, z_2) e^{im\varphi}. \quad (1.13)$$

Непосредственным интегрированием этой формулы получаем

$$e^{im\varphi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z_1 + z_2 + z_3)^n e^{-im\psi} d\psi = w_{n,m}(\vec{x}), \quad (1.14)$$

где под интегралом φ заменяется на ψ и сумма по m на сумму по l .

Сравнивая (1.10) и (1.14), получаем равенство $w_{n,m}(\vec{x}) = v_{n,m}(\vec{x})$.

Определение гармонических многочленов $w_{n,m}(\vec{x})$ с помощью *производящей функции* (1.12) только в обозначениях незначительно отличается от определения работы [6, п. 11.5.1]. Оно является наиболее удобным для доказательства соотношений (1.5), (1.6) и им подобных.

Теперь рассмотрим случай $n = -1, -2, -3, \dots$. В этом случае вместо (1.12) для определения гармонических функций $w_{n,m}(\vec{x})$ будем использовать разложение

$$(z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m}(\vec{x}) \tau^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{n,m}(\vec{x}) e^{im\alpha}. \quad (1.15)$$

Ряд (1.15) является рядом Лорана по переменной τ для функций (1.11):

$$(z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n \equiv \Phi_n(\vec{x}, \tau) \equiv \Phi_n(x_1, x_2, x_3, \tau) \equiv f_n(\tau). \quad (1.16)$$

Корни уравнения

$$z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1} \equiv \tau^{-1} (z_1 \tau^2 + z_2 \tau + z_3) = 0 \quad (1.17)$$

равны:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{-z_2 + 2R}{2z_1} = \frac{-x_3 + R}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{x_3 + R} = \tau_1(\vec{x}), \\ \tau_2 &= \frac{-z_2 - 2R}{2z_1} = \frac{-x_3 - R}{x_1 + ix_2} = \frac{x_1 - ix_2}{x_3 - R} = \tau_2(\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь использованы формулы (1.3) и тождества

$$\begin{aligned} D &= z_2^2 - 4z_1 z_3 = 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 4R^2, \\ (R + x_3)(R - x_3) &= R^2 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2). \end{aligned}$$

Точки τ_1 и τ_2 являются полюсами порядка $-n = 1, 2, 3, \dots$ для функций $f_n(\tau)$.

Если $x_3 > 0$, то $|\tau_1| < 1 < |\tau_2|$ и разложение (1.15) сходится в кольце $|\tau_1| < |\tau| < |\tau_2|$.

Если $x_3 < 0$, то $|\tau_2| < 1 < |\tau_1|$ и разложение (1.15) сходится в кольце $|\tau_2| < |\tau| < |\tau_1|$.

Для $n = -1$ получаем

$$\begin{aligned} f_{-1}(\tau) &= \frac{1}{z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1}} = \frac{\tau}{2R} \left(\frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2} \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2R} \left(\sum_{m=-\infty}^0 \tau_1^{-m} \tau^m + \sum_{m=1}^{\infty} \tau_2^{-m} \tau^m \right) & \text{при } x_3 > 0 \\ -\frac{1}{2R} \left(\sum_{m=-\infty}^0 \tau_2^{-m} \tau^m + \sum_{m=1}^{\infty} \tau_1^{-m} \tau^m \right) & \text{при } x_3 < 0 \end{cases} = \sum_{m=-\infty}^0 w_{-1,m}(\vec{x}) \tau^m + \sum_{m=1}^{\infty} w_{-1,m}(\vec{x}) \tau^m. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В частности,

$$w_{-1,0}(\vec{x}) = \frac{1}{2R} \text{sign}(x_3) = U_{-1}^0(\vec{x}) \text{sign}(x_3). \quad (1.20)$$

Плоскость $x_3 = 0$ исключается из рассмотрения как в случае использования разложения (1.15), так и в случае применения леммы 1 к функциям (1.9).

Перейдем к доказательству соотношений для функций $w_{n,m}(\vec{x})$. Для общности сразу рассмотрим случай $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, а в доказательствах будем использовать разложение (1.15) как более общую форму записи. Если конечную сумму в разложении (1.12) приравнять ряду вида (1.15), то при $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $|m| > n$ получим равенство $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv 0 \equiv U_n^m(\vec{x})$.

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. Для функций $w_{n,m}(\vec{x})$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ выполняются:

а) формулы дифференцирования

$$\frac{\partial w_{n,m}}{\partial z_s} = n w_{n-1, m+s-2}, \quad s = 1, 2, 3; \quad (1.21)$$

б) рекуррентные соотношения

$$w_{n+1,m} = z_1 w_{n,m-1} + z_2 w_{n,m} + z_3 w_{n,m+1}, \quad (1.22)$$

$$m w_{n+1,m} = (n+1) (z_1 w_{n,m-1} - z_3 w_{n,m+1}). \quad (1.23)$$

Доказательство. Определение функций $w_{n,m}(\vec{x})$ с помощью разложений вида (1.15) позволяет доказать все формулы по единой схеме: приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях τ в исходном ряде и ряде, полученном в результате тождественных преобразований.

а) Формулы (1.21) следуют из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial w_{n,m}}{\partial z_s} \tau^m &= \frac{\partial}{\partial z_s} (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n = n (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^{n-1} \tau^{-s+2} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} n w_{n-1, m+s-2} \tau^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} n w_{n-1, m+s-2} \tau^m. \end{aligned}$$

б) Соотношение (1.22) следует из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_{n+1,m} \tau^m &= (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^{n+1} = (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1}) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_1 w_{n,m} \tau^{m+1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_2 w_{n,m} \tau^m + \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_3 w_{n,m} \tau^{m-1} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (z_1 w_{n,m-1} + z_2 w_{n,m} + z_3 w_{n,m+1}) \tau^m. \end{aligned}$$

Соотношение (1.23) следует из равенств

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m w_{n+1,m} \tau^m &= \tau \frac{\partial}{\partial \tau} (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^{n+1} = (n+1) (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^n (z_1 \tau - z_3 \tau^{-1}) = \\ &= \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right) (z_1 \tau + z_2 + z_3 \tau^{-1})^{n+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n+1) (z_1 w_{n,m-1} - z_3 w_{n,m+1}) \tau^m, \end{aligned}$$

где последнее равенство получено с использованием формул (1.21).

Лемма доказана.

Следствие 1. Для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $|m| \leq n \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})$.

Доказательство. Для $n = 0 \quad w_{0,0}(\vec{x}) \equiv 1 \equiv U_0^0(\vec{x})$, $w_{0,m}(\vec{x}) \equiv 0 \equiv U_0^m(\vec{x})$ при $m \neq 0$.
Для $n = 1, 2, 3, \dots$ тождество $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x})$ следует из (1.6), (1.22).

Следствие 2. Для $n = -1, -2, -3, \dots$ и $|m| \leq -n - 1$ при $x_3 \neq 0 \quad w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x}) \text{sign}(x_3)$.

Доказательство. Для $n = -1$ тождество $w_{n,m}(\vec{x}) \equiv U_n^m(\vec{x}) \text{sign}(x_3)$ совпадает с (1.20), для $n = -2, -3, \dots$ оно следует из (1.5), (1.21).

2. Бикомплексная форма кватернионов. В работе [2] использовались векторно-скалярная и покоординатная формы записи кватернионов, что приводило к громоздким выражениям. Анализ полученных в [2] выражений указывает на целесообразность записи кватернионов в виде двух комплексных чисел (аналогично [9, с. 37]):

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{e}_0 + u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \diamond (u_1 \mathbf{e}_3 + u_2) + (u_3 \mathbf{e}_3 + u_0) = \mathbf{e}_2 \diamond u_p + u_s, \quad (2.1)$$

где $u_p = u_1 \mathbf{e}_3 + u_2 = u_1 i + u_2 = \text{Pl } \mathbf{u}$, $u_s = u_3 \mathbf{e}_3 + u_0 = u_3 i + u_0 = \text{Ss } \mathbf{u}$.

Так как $\mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_0 = -1 = i^2$, то умножение кватернионов вида $\mathbf{c} = b\mathbf{e}_3 + a \in \mathbb{H}$ и комплексных чисел $c = bi + a \in \mathbb{C}$ производится по одним и тем же правилам. Поэтому будем считать $b\mathbf{e}_3 + a = bi + a$.

Комплексные числа u_p и u_s будем называть соответственно *плоской* (Plane) и *пространственно-скалярной* (Space-scalar) частями кватерниона, а функции Pl и Ss будем использовать для выделения указанных частей.

Рассмотрим произведение двух кватернионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{u} \diamond \mathbf{v} &= (\mathbf{e}_2 \diamond u_p + u_s) \diamond (\mathbf{e}_2 \diamond v_p + v_s) = \mathbf{e}_2 \diamond u_p \diamond \mathbf{e}_2 \diamond v_p + u_s \diamond \mathbf{e}_2 \diamond v_p + \mathbf{e}_2 \diamond u_p \diamond v_s + u_s \diamond v_s = \\ &= \mathbf{e}_2 \diamond (u_p v_s + \bar{u}_s v_p) + (u_s v_s - \bar{u}_p v_p) = \mathbf{e}_2 \diamond \omega_p + \omega_s. \end{aligned}$$

В предпоследнем равенстве использовались тождества

$$\mathbf{e}_2^2 = -1, \quad \mathbf{e}_2 \diamond \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \diamond \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}_2 \diamond c = \mathbf{e}_2 \diamond \mathbf{c} = \mathbf{e}_2 \diamond (b\mathbf{e}_3 + a) = (-b\mathbf{e}_3 + a) \diamond \mathbf{e}_2 = \text{conj}(\mathbf{c}) \diamond \mathbf{e}_2 = \bar{c} \diamond \mathbf{e}_2.$$

Ниже используется более наглядная и компактная форма записи:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_p \\ u_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \diamond \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_p \\ u_s \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} v_p \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p v_s + \bar{u}_s v_p \\ u_s v_s - \bar{u}_p v_p \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}} \diamond \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2i \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 2i \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} v_p \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \left(\frac{\partial v_s}{\partial z_1} - \frac{\partial v_p}{\partial z_2} \right) \\ 2i \left(\frac{\partial v_s}{\partial z_2} - \frac{\partial v_p}{\partial z_3} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Внешне отличие от векторно-скалярной и покоординатной форм записи выражается в отсутствии горизонтальной разделительной черты (см. [2, формулы (0.9) и (3.6)]).

Используя формулы (2.2) и (1.5), получаем для $n = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\bar{\mathbf{D}} \diamond U_{n+1}^{k+1} = \begin{pmatrix} 2i \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 2i \frac{\partial}{\partial z_2} \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 0 \\ U_{n+1}^{k+1} \end{pmatrix} = 2(n+1) \begin{pmatrix} i U_n^k \\ i U_n^{k+1} \end{pmatrix} = 2(n+1) \mathbf{v}_n^k(\vec{x}). \quad (2.3)$$

$$\mathbf{e}_3 \diamond \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) = \mathbf{e}_3 \diamond \text{conj}(\mathbf{v}_{-n-2}^k(\vec{\xi})) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} -i U_{-n-2}^k \\ -i \bar{U}_{-n-2}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{-n-2}^k \\ \bar{U}_{-n-2}^{k+1} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}). \quad (2.4)$$

Функции $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ и $\bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi})$ построены в [2, формулы (3.4)–(3.8)] для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

3. Ряд Лорана. Как показано в [1,2], если $\mathbf{u}(\vec{x}) \in \mathcal{O}(V)$, то имеет место интегральная формула Коши (см. [2, формула (0.15)])

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \iint_S \vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) \diamond \vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}} \quad \text{при } \vec{x} \in V, \quad \vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\xi} |\vec{\xi}|^{-3}, \quad S = \partial V. \quad (3.1)$$

Как и в [2], для упрощения записи формул все разложения будем рассматривать для точки $\vec{a} = 0$. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 3. Для ядра $\vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi} - \vec{x})$ имеют место разложения

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \diamond \mathbf{e}_3 \diamond \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) \quad \text{при } R_x < R_{\xi}, \quad (3.2)$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) \sum_{k=0}^{-n-2} (-1)^k \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \diamond \mathbf{e}_3 \diamond \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) \quad \text{при } R_x > R_{\xi}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Разложение (3.2) следует из [2, формула (3.8)] и тождества (2.4).

Меняя в (3.2) местами $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$, а также делая замену $n = -l-2$, $l = -n-2 = \dots, -3, -2$, получим разложение

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{x} - \vec{\xi}) = -\frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{-2} (l+1) \sum_{k=0}^{-l-2} (-1)^k \mathbf{v}_{-l-2}^k(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{e}_3 \diamond \bar{\mathbf{v}}_l^k(\vec{x}) \quad \text{при } R_{\xi} < R_x, \quad (3.4)$$

которое после использования тождеств

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{\xi} - \vec{x}) = -\vec{\mathcal{M}}(\vec{x} - \vec{\xi}) = \text{conj}(\vec{\mathcal{M}}(\vec{x} - \vec{\xi})), \quad \text{conj}(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} \diamond \mathbf{c}) = \bar{\mathbf{c}} \diamond \bar{\mathbf{b}} \diamond \bar{\mathbf{a}} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = -\mathbf{e}_3 \quad (3.5)$$

и замены l на n преобразуется в разложение (3.3). Лемма доказана.

Лемма 4. Если $\bar{\mathbf{m}}(\vec{x}) \in \mathcal{O}(V)$ и $\mathbf{u}(\vec{x}) \in \mathcal{O}(V)$, то

$$\iint_S \bar{\mathbf{m}}(\vec{\xi}) \diamond \vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}} = 0, \quad S = \partial V, \quad (3.6)$$

$$\iint_{S_1} \bar{\mathbf{m}}(\vec{\xi}) \diamond \vec{\mathbf{v}}_1^+(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}} = \iint_{S_2} \bar{\mathbf{m}}(\vec{\xi}) \diamond \vec{\mathbf{v}}_2^-(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}}, \quad S_1 \cup S_2 = S, \quad (3.7)$$

где $\vec{\mathbf{v}}_1^+(\vec{\xi}) = \vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi})$ – нормаль к S_1 в точке $\vec{\xi} \in S_1$, внешняя по отношению к V ,

$\vec{\mathbf{v}}_2^-(\vec{\xi}) = -\vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi})$ – нормаль к S_2 в точке $\vec{\xi} \in S_2$, внутренняя по отношению к V ,

то есть величина интеграла не изменяется при деформации поверхности S_1 в S_2 в области голоморфности векторов $\bar{\mathbf{m}}(\vec{x})$ и $\mathbf{u}(\vec{x})$ с сохранением направления нормали.

Доказательство. Формула (3.6) легко получается из [2, формулы (1.3) и (1.9)], а формула (3.7) является простым следствием формулы (3.6). Лемма доказана.

Перейдем к основному утверждению.

Теорема 1. Пусть $V_{12} = \{\vec{\xi} : \rho_1 > R_{\xi} > \rho_2\}$ – сферический слой, ограниченный сферическими поверхностями $\Omega_1 = \{\vec{\xi} : R_{\xi} = \rho_1\}$ и $\Omega_2 = \{\vec{\xi} : R_{\xi} = \rho_2\}$.

Если $\mathbf{u}(\vec{x}) \in \mathcal{O}(V_{12})$, то $\forall \vec{x} \in V_{12}$ имеет место разложение (0.2), где

$$\mathbf{c}_n^k = \frac{n+1}{\pi} (-1)^k \mathbf{e}_3 \diamond \iint_{S_0} \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) \diamond \vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}}. \quad (3.8)$$

Здесь S_0 – кусочно-гладкая замкнутая поверхность, удовлетворяющая требованию:

$\mathbf{u}(\vec{x})$ является вектором, голоморфным в области между S_0 и Ω_j ($j=1,2$), $\vec{\mathbf{v}}(\vec{\xi})$ – нормаль к S_0 , внешняя по отношению к области, ограниченной поверхностью S_0 .

Доказательство. По формуле (3.1) при $V = V_{12}$ и $S = \Omega_1 \cup \Omega_2$ получаем

$$\mathbf{u}(\vec{x}) = \mathbf{u}_1(\vec{x}) - \mathbf{u}_2(\vec{x}) \quad \text{при } \vec{x} \in V_{12}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{u}_1(\vec{x}) = \iint_{\Omega_1} \mathcal{M}(\vec{\xi} - \vec{x}) \diamond \vec{v}_1^+(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}}, \quad \mathbf{u}_2(\vec{x}) = \iint_{\Omega_2} \mathcal{M}(\vec{\xi} - \vec{x}) \diamond \vec{v}_2^-(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}}.$$

Здесь $\vec{v}_1^+(\vec{\xi}) = \vec{v}(\vec{\xi})$ – нормаль к Ω_1 в точке $\vec{\xi} \in \Omega_1$, *внешняя по отношению к V_{12}* ,

$\vec{v}_2^-(\vec{\xi}) = -\vec{v}(\vec{\xi})$ – нормаль к Ω_2 в точке $\vec{\xi} \in \Omega_2$, *внутренняя по отношению к V_{12}* .

Ряды в (3.2) и (3.3) при фиксированном $\vec{x} \in V_{12}$ сходятся равномерно по $\vec{\xi} \in \Omega_1$ и $\vec{\xi} \in \Omega_2$ соответственно. Подставляя (3.2) в $\mathbf{u}_1(\vec{x})$, (3.3) в $\mathbf{u}_2(\vec{x})$ и выполняя почленное интегрирование рядов, получаем

$$\mathbf{u}_1(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \diamond \mathbf{c}_n^k, \quad \mathbf{c}_n^k = \frac{n+1}{\pi} (-1)^k \mathbf{e}_3 \diamond \iint_{\Omega_1} \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) \diamond \vec{v}_1^+(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}},$$

$$\mathbf{u}_2(\vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \sum_{k=0}^{-n-2} \mathbf{v}_n^k(\vec{x}) \diamond \mathbf{c}_n^k, \quad \mathbf{c}_n^k = \frac{n+1}{\pi} (-1)^k \mathbf{e}_3 \diamond \iint_{\Omega_2} \bar{\mathbf{v}}_{-n-2}^k(\vec{\xi}) \diamond \vec{v}_2^-(\vec{\xi}) \diamond \mathbf{u}(\vec{\xi}) dS_{\vec{\xi}}. \quad (3.10)$$

и равенство (3.9) переходит в разложение (0.2). По лемме 4 интегралы в (3.10) можно заменить интегралами по S_0 с заменой $\vec{v}_j^{\pm}(\vec{\xi})$ ($j = 1, 2$) на $\vec{v}(\vec{\xi})$.

Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, для вектора $\mathbf{u}(\vec{x})$, голоморфного в сферическом слое, доказана возможность разложения в аналог ряда Лорана (0.2), где $\mathbf{v}_n^k(\vec{x})$ определяются формулой (2.3), а $\mathbf{c}_n^k$ – формулой (3.8).

Одним из направлений дальнейших исследований может быть построение теории вычетов.

1. **Gürlebeck K., Sprößig W.** Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems. – Berlin: Akademie-Verlag, 1989. – 253 p.
2. **Онищук О. В.** Разложение голоморфного вектора в степенной ряд // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. 3. Фіз.-мат. науки. – С. 28–35.
3. **Копляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1962. – 768 с.
4. **Решение пространственных задач теории упругости на основе новых соотношений для гармонических многочленов** / Онищук О. В., Попов Г. Я., Толкачев А. В., Чумаченко К. И. // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 4. – С. 11–18.
5. **Онищук О. В., Чумаченко К. И.** Метод минимизации энергии погрешности для многосвязных областей // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2000. – Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. – С. 109–115.
6. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1974. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
8. **Гобсон Е. В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952. – 476 с.
9. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

Получено 28.03.2003 г.