

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Рівновимірні перестановки та їх
застосування»**

«Equimeasurable rearrangements and their applications»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Марчук Катерина Володимирівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, Шанін Р. В.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,

проф. Кореновський А. О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Попередні результати	5
2 Означення та основні властивості	7
3 Клас функцій з обмеженим середнім коливанням	11
3.1 Середні коливання та основні властивості	11
3.2 Означення класу ВМО	14
4 Застосування перестановок	17
4.1 Оцінки перестановок	17
4.2 Теорема Джона — Ніренберга	20
Висновки	24
Список літератури	25

ВСТУП

Дипломна робота присвячена дослідженню перестановок функцій, їхніх основних властивостей та застосування.

Актуальність. Теорія перестановок бере початок в ХІХ столітті, в роботах Я. Штейнера [8] і Г. Шварца [7]. Саме в цих роботах вперше вивчалися симетричні перестановки функцій. Однак систематичні дослідження перестановок функцій були розпочаті значно пізніше, в роботах Харді і Літлвуда [4].

Оцінки рівновимірних перестановок функцій відіграють важливу роль при вивченні класів функцій, що задовольняють обернені нерівності Єнсена або Гельдера. Завдяки точним оцінкам перестановок було знайдено параметри у властивості самопокращення показника сумовності функцій.

Крім цього, завдяки точним оцінкам перестановок було доведено теорему Джона — Ніренберга і знайдено точні сталі у відповідній нерівності.

Мета і задачі роботи

Метою роботи є встановлення основних властивостей перестановок та їх застосування. Досягненню мети сприяють такі основні задачі роботи.

- 1) Визначити перестановку функції і вивчити її основні властивості.
- 2) Визначити клас функцій з обмеженим середнім коливанням.
- 3) Довести теорему Джона — Ніренберга за допомогою рівновимірних перестановок.
- 4) Знайти точну константу у нерівності Джона — Ніренберга в одновимірному випадку завдяки точним оцінкам перестановок функцій.

Структура роботи. Дипломна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку літератури.

У першому розділі наведено основні твердження, які знадобляться для формулювання і доведення основних результатів цієї роботи.

Другий розділ присвячений визначенню перестановки f^* функції і доведенню її основних властивостей.

У третьому розділі розглянуті основні властивості середніх коливань,

визначено клас BMO функцій з обмеженими середніми коливаннями, наведено приклад необмеженої функції, яка належить класу BMO .

У четвертому розділі доведені теореми про точні оцінки перестановок і теорема Джона — Ніренберга.

Дипломна робота має реферативний характер.

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Наведемо відомі твердження, які будуть потрібні для визначення перестановки і доведення її основних властивостей.

Теорема 1.1 (монотонність міри Лебега). *Нехай A і B — вимірні множини. Якщо $A \subset B$, то $|A| \leq |B|$.*

Теорема 1.2 (неперервність міри Лебега). *Нехай $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність вимірних множин. Тоді:*

1) якщо $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ і множина $A \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ обмежена, то $|A| = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|$;

2) якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, то для множини $B \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ виконується рівність $|B| = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|$.

Означення 1.1. Для вимірної на множині $E \subset \mathbb{R}^n$ функції f функцією розподілу називається функція

$$\mu_f(y) = |\{x \in E : |f(x)| > y\}|, \quad (y \geq 0). \quad (1.1)$$

Означення 1.2. Дві функції f і g , означені на множинах E_1 і E_2 відповідно, називаються рівновимірними, якщо $|E_1| = |E_2|$ і $\mu_f(y) = \mu_g(y)$ для всіх $y \geq 0$.

Теорема 1.3. *Нехай $f, g, f_n, (n = 1, 2, \dots)$ — функції, означені на множині $E \subset \mathbb{R}^n$, c — будь-яке ненульове число. Функція розподілу μ_f — невід’ємна, спадна і неперервна справа. Крім того,*

$$|g| \leq |f| \Rightarrow \mu_g \leq \mu_f; \quad (1.2)$$

$$\mu_{cf}(y) = \mu_f\left(\frac{y}{|c|}\right), \quad (y \geq 0); \quad (1.3)$$

$$\mu_{f+g}(y_1 + y_2) \leq \mu_f(y_1) + \mu_g(y_2), \quad (y_1, y_2 \geq 0). \quad (1.4)$$

Доведення цієї теореми можна знайти у [2, с. 37]

Означення 1.3. Нехай функція f задана на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^n$. f^{**} називається максимальною функцією f^* і визначається

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

Теорема 1.4. Нехай f, g означені на $E \subset \mathbb{R}^n$, c — будь-яке число. Тоді максимальна функція f^{**} — невід’ємна, спадна і неперервна справа. Крім того,

$$f^* \leq f^{**};$$

$$|g| \leq |f| \Rightarrow g^{**} \leq f^{**};$$

$$(cf) = |c|f^{**}.$$

Для визначення класу BMO нам знадобляться такі означення.

Означення 1.4. Нехай функція f задана на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^n$. Функція f називається локально сумовною ($f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$), якщо f сумовна на всіх компактних підмножинах E .

Означення 1.5. Нехай функція f — сумовна на множині $E \subset \mathbb{R}^n$. Середнє значення функції f на E позначається через

$$f_E = \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

Для доведення основних результатів останнього розділу нам знадобиться наступна лема про покриття.

Лема 1.1. Нехай G — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $|G| < \infty$. Тоді існує не більш, ніж зчислений набір кубів Q_j , внутрішності яких попарно не перетинаються, таких, що

$$|G \cap Q_j| \leq \frac{1}{2} |Q_j| \leq |Q_j \cap G|,$$

$$G \subset \bigcup_j Q_j,$$

$$|G| \leq \sum_j |Q_j| \leq 2^{n+1} |G|.$$

РОЗДІЛ 2

ОЗНАЧЕННЯ ТА ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 2.1. Нехай функція f задана на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^n$. Спадною перестановкою f називається визначена на $[0; \infty)$ функція f^* така, що

$$f^*(t) = \inf\{y: \mu_f(y) \leq t\}, \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Очевидно, що

$$f^*(t) = \sup\{y: \mu_f(y) > t\} = \mu_{\mu_f}(t).$$

Якщо $\{y: \mu_f(y) \leq t\} = \emptyset$, то вважаємо, що $\inf\{y: \mu_f(y) \leq t\} = \infty$ і, якщо $\{y: \mu_f(y) > t\} = \emptyset$, то покладемо, що $\sup\{y: \mu_f(y) > t\} = 0$.

Розглянемо основні властивості спадної перестановки.

Теорема 2.1. Нехай $f, g, f_n, (n = 1, 2, \dots)$ — функції, означені на множині $E \subset \mathbb{R}^n$, c — будь-яке ненульове число. Спадна перестановка f^* — невід’ємна, спадна, неперервна справа і рівновимірна з $|f|$. Крім того,

$$|g| \leq |f| \Rightarrow g^* \leq f^*; \quad (2.2)$$

$$(cf)^* = |c|f^*; \quad (2.3)$$

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2) \quad (t_1, t_2 \geq 0). \quad (2.4)$$

Доведення. Оскільки функція f^* є функцією розподілу, то вона невід’ємна і спадна, що було доведено в (1.3). Позначимо

$$E_1(t) = \{y > 0: \mu_f(y) > t\},$$

$$E_2(t) = \{y > 0: \mu_f(y) \leq t\}.$$

Нехай $t_1 < t_2$. Тоді $E_2(t_1) \subset E_2(t_2)$. Звідси випливає, що $\inf E_2(t_2) \leq \inf E_2(t_1)$. Таким чином, функція f^* — спадна.

Доведемо неперервність справа. Для будь-якого $t \in (0, |E|)$

$$E_2(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_2\left(t + \frac{1}{n}\right),$$

$$\dots \subset E_2\left(t + \frac{1}{n+1}\right) \subset E_2\left(t + \frac{1}{n}\right) \subset \dots \subset E_2(t+1).$$

Звідси отримуємо, що

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf E_2(t) = \inf \bigcap_{n=1}^{\infty} E_2\left(t + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_2\left(t + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^*\left(t + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

а це означає неперервність справа функції f^* .

Доведемо, що функція f^* рівновимірна з f . Зафіксуємо довільне y_0 і покажемо, що $\mu_f^*(y_0) = \mu_f(y_0)$. Позначимо $t_0 = \mu_f(y_0)$, $E_0 = (0, |E|)$. Звідси отримаємо, що

$$f^*(\mu_f(y_0)) = f^*(t_0) = \inf\{y: \mu_f(y) \leq t_0\} \leq y_0.$$

Очевидно, що

$$E_0(f^*(t) > y_0) \cup E_0(f^* \leq y_0) = (0, |E|),$$

$$E_0(f^*(t) > y_0) \cap E_0(f^* \leq y_0) = \emptyset.$$

Крім того, $t_1 < t_2$ для всіх $t_1 \in E_0(f^*(t) > y_0)$ і $t_2 \in E_0(f^* \leq y_0)$. Використовуючи аксіому повноти дійсних чисел, отримуємо

$$\sup\{t > 0: f^*(t) > y_0\} = \inf\{t > 0: f^*(t) \leq y_0\}.$$

Оскільки функція f^* спадає, то

$$\mu_{f^*}(y_0) = \sup\{t > 0: f^*(t) > y_0\} = \inf\{t > 0: f^*(t) \leq y_0\}.$$

Враховуючи, що f^* неперервна справа, отримуємо, що

$$\mu_{f^*}(y_0) = \min\{t > 0 : f^*(t) \leq y_0\}.$$

Отже, отримали, що

$$\mu_{f^*}(y_0) = \inf\{t > 0 : f^*(t) \leq y_0\} \leq t_0 = \mu_f(y_0).$$

З іншої сторони, нехай $0 < t < t_0$. Тоді $\mu_f(y_0) > t$ і

$$f^*(t) = \min\{y > 0 : \mu_f(y) \leq t\} > y_0.$$

Звідси отримуємо, що $(0, t_0) \subset \{t > 0 : f^*(t) > y_0\}$, а це означає, що

$$\mu_{f^*} = \sup\{t > 0 : f^*(t) > y_0\} \geq t_0 = \mu_f(y_0).$$

Таким чином, отримали, що $\mu_{f^*}(y_0) = \mu_f(y_0)$. Оскільки, y_0 довільне, то рівновимірність f^* і $|f|$ доведена.

Доведемо властивість (2.2). Оскільки, $|g| \leq |f|$, то

$$g^*(t) = \inf\{y : \mu_g(y) \leq t\} \leq \inf\{y : \mu_f(y) \leq t\} = f^*(t).$$

Отримали, що $g^*(t) \leq f^*(t)$, що і треба було довести.

Доведемо властивість (2.3)

$$\begin{aligned} (cf)^* &= \inf\{y : \mu_{cf}(y) \leq t\} = \inf\{y : \mu_f\left(\frac{y}{|c|}\right) \leq t\} = \inf\{|c|z : \mu_f(z) \leq t\} = \\ &= |c| \inf\{z : \mu_f(z) \leq t\} = |c|f^*. \end{aligned}$$

Доведемо нерівність (2.4). Нехай $y = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ і $t = \mu_{f+g}(y)$.

Враховуючи нерівність трикутника, маємо

$$\begin{aligned} t &= |\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\}| \\ &\leq |\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\}| + |\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\}| \\ &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що $(f + g)^*$ — спадна, отримуємо

$$\begin{aligned}(f + g)^*(t_1 + t_2) &\leq (f + g)^*(t) = (f + g)^*(\mu_{f+g}(y)) \leq y = \\ &= f^*(t_1) + g^*(t_2).\end{aligned}$$

□

Також для перестановки f^* виконується така нерівність

$$\int_E |f(t)| dt \leq \int_0^{|E|} f^*(t) dt.$$

Позначимо через $\chi_{E(t)}$ характеристичну функцію вимірної множини E . Тоді $\mu_{|f|\chi_E}(y) \leq |E|$ і $\mu_{|f|\chi_E}(y) \leq \mu_{|f|}(y)$, тому $\mu_{|f|\chi_E}(y) \leq \min\{|E|, \mu_{|f|}(y)\}$. Проінтегруємо цю нерівність і отримаємо

$$\int_E |f(t)| dt = \int_0^\infty \mu_{|f|\chi_E}(y) dy \leq \int_0^\infty \min\{|E|, \mu_{|f|}(y)\} dy = \int_0^{|E|} f^*(t) dt.$$

РОЗДІЛ 3

КЛАС ФУНКЦІЙ З ОБМЕЖЕНИМ СЕРЕДНІМ КОЛИВАННЯМ

3.1. Середні коливання та основні властивості

Означення 3.1. Нехай функція $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Середнім коливанням f на кубі $Q \subset \mathbb{R}^n$ називається величина

$$\Omega(f, Q) = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx.$$

Розглянемо деякі властивості середніх коливань, які ми будемо використовувати для доведення основних результатів наступного розділу.

Властивість 3.1. *Нехай функція f сумовна на Q . Тоді*

$$\begin{aligned} \Omega(f, Q) &= \frac{2}{|Q|} \int_{\{x \in Q: f(x) > f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx = \\ &= \frac{2}{|Q|} \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx. \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки

$$\int_{\{x \in Q: f(x) > f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx + \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\{x \in Q: f(x) > f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx &= - \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx = \\ &= \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 & \int_Q |f(x) - f_Q| dx = \\
 &= \int_{\{x \in Q: f(x) > f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx + \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx = \\
 &= 2 \int_{\{x \in Q: f(x) > f_Q\}} (f(x) - f_Q) dx = 2 \int_{\{x \in Q: f(x) < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Поділивши отриману рівність на $|Q|$, отримаємо твердження, яке і треба було довести. $\square$

З цієї властивості випливає наступна лема.

Лема 3.1 ([6]). *Нехай незростаюча функція φ локально сумовна на $[0; \infty)$, $F(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$, $t > 0$. Тоді для будь-якого $a > 1$ виконується нерівність*

$$F\left(\frac{t}{a}\right) - F(t) = \frac{a}{2} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(u) - F(t)| du, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Доведення. Нехай $t > 0$. Якщо $\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \leq F(t)$, то

$$E_t = \{u \in [0; t]: \varphi(u) > F(t)\} \subset \left[0, \frac{t}{a}\right],$$

враховуючи властивість (3.1), отримаємо

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{t}{a}\right) - F(t) &= \frac{a}{t} \int_0^{t/a} (\varphi(u) - F(t)) du = \\
 &= \frac{a}{t} \int_{E_t} (\varphi(u) - F(t)) du + \frac{a}{t} \int_{[0, \frac{t}{a}] \setminus E_t} (\varphi(u) - F(t)) du \leq \\
 &\leq \frac{a}{t} \int_{E_t} (\varphi(u) - F(t)) du = \frac{a}{2} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(u) - F(t)| du.
 \end{aligned}$$

Якщо $\varphi\left(\frac{t}{2}\right) > F(t)$, то $E_t \supset \left[0, \frac{t}{a}\right]$. Використовуючи (3.1), отримаємо

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{t}{a}\right) - F(t) &\frac{a}{t} \int_0^{t/a} (\varphi(u) - F(t)) du \leq \frac{a}{t} \int_{E_t} (\varphi(u) - F(t)) du = \\
 &= \frac{a}{2} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(u) - F(t)| du.
 \end{aligned}$$

$\square$

Позначимо

$$\Omega'(f, Q) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx,$$

$$\Omega''(f, Q) = \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dy dx.$$

Властивість 3.2. *Справедлива нерівність*

$$\Omega'(f, Q) \leq \Omega(f, Q) \leq 2\Omega'(f, Q). \quad (3.2)$$

Доведення. Оскільки

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx,$$

то ліва нерівність в (3.2) очевидна.

Доведемо тепер праву нерівність.

$$\begin{aligned} \Omega(f, Q) &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dx dy \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx. \end{aligned}$$

Перейдемо до точної нижньої межі по всім c і отримаємо праву нерівність в (3.2). $\square$

Властивість 3.3. *Справедлива нерівність*

$$\Omega(f, Q) \leq \Omega''(f, Q) \leq 2\Omega(f, Q). \quad (3.3)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \Omega(f, Q) &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q \left| f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dy dx = \Omega''(f, Q). \end{aligned}$$

Отримали ліву нерівність в (3.3).

$$\begin{aligned}\Omega''(f, Q) &= \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dy dx \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f_Q| dy dx + \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(y) - f_Q| dy dx = 2\Omega(f, Q).\end{aligned}$$

Отже, отримали праву нерівність в (3.3). $\square$

Властивість 3.4. *Справедлива нерівність*

$$\Omega(|f|, Q) \leq 2 \cdot \Omega(f, Q). \quad (3.4)$$

Доведення. Враховуючи (3.3),

$$\begin{aligned}\Omega(|f|, Q) &\leq \Omega''(f, Q) = \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q ||f(x)| - |f(y)|| dy dx \leq \\ &\leq \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dy dx \leq 2 \cdot \Omega(f, Q).\end{aligned} \quad \square$$

3.2. Означення класу ВМО

Розглянемо клас BMO функцій з обмеженим середнім коливанням.

Означення 3.2. Функція $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ має обмежене середнє коливання на $\mathbb{R}^n$ ($f \in BMO$), якщо

$$\|f\|_* = \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \Omega(f, Q) < \infty,$$

де точна верхня межа береться по всіх кубах $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Означення 3.3. Зафіксуємо куб $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$. Функція $f \in L_{loc}(Q_0)$ має обмежене середнє коливання на кубі Q_0 ($f \in BMO(Q_0)$), якщо

$$\|f\|_* = \sup_{Q \subset Q_0} \Omega(f, Q) < \infty,$$

де точна верхня межа береться по всіх кубах $Q \subset Q_0$.

Позначимо

$$\|f\|'_* = \sup_Q \Omega'(f, Q), \quad \|f\|''_* = \sup_Q \Omega''(f, Q)$$

З нерівностей (3.2) і (3.3) випливає, що

$$\|f\|'_* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|'_*$$

і

$$\|f\|_* \leq \|f\|''_* \leq 2\|f\|_*.$$

Візьмемо куб $Q \subset \mathbb{R}^n$. Існують кулі B_1, B_2 такі, що $B_1 \subset Q \subset B_2$, $c_2|B_2| \leq |Q| \leq c_1|B_1|$, де c_1, c_2 — додатні сталі, які залежать лише від n .

$$\begin{aligned} \Omega(f, Q) &\leq \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)| dy dx \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_{B_2}| dx \leq \\ &\leq \frac{2}{c_2} \frac{1}{|B_2|} \int_{B_2} |f(x) - f_{B_2}| dx = \frac{2}{c_2} \Omega(f, B_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(f, B_1) &\leq \frac{1}{|B_1|^2} \int_{B_1} \int_{B_1} |f(x) - f(y)| dy dx \leq \frac{2}{|B_1|} \int_{B_1} |f(x) - f_Q| dx \leq \\ &\leq 2c_1 \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx = 2c_1 \Omega(f, Q). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що середні коливання можна обчислювати по всіх кулях $B \subset \mathbb{R}^n$.

Приклад 3.1. $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$. Перевіримо, чи $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Для цього нам потрібно буде оцінити коливання по всіх кулях $B \subset \mathbb{R}^n$.

Зафіксуємо кулю $B \equiv B(x_0, r) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$. Якщо $|x_0| \geq 2r$, то для будь-яких $x, y \in B$ маємо $\frac{1}{2}|x| \leq |y| \leq \frac{3}{2}|x|$. Отже, $\frac{1}{2} \leq \frac{|y|}{|x|} \leq \frac{3}{2}$, тому

$$\begin{aligned} \Omega(f, B) &\leq \frac{1}{|B|^2} \int_B \int_B |f(x) - f(y)| dy dx = \frac{1}{|B|^2} \int_B \int_B \left| \ln \frac{|y|}{|x|} \right| dy dx \leq \\ &\leq \max \left(\ln \frac{3}{2}, \left| \ln \frac{1}{2} \right| \right) = \max \left(\ln \frac{3}{2}, \ln 2 \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $|x_0| < 2r$. Візьмемо $R = 3r$. Куля $B_1 \equiv B_1(0, R) \supset B$. Маємо

$$\begin{aligned} \Omega(f, B) &\leq 2\Omega(f, B) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - c| dx \leq \\ &\leq \frac{2}{|B|} \int_B \left| \ln \frac{1}{|x|} - \ln \frac{1}{R} \right| = \frac{|B_1|}{|B|} \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} \ln \frac{R}{|x|} dx = \\ &= 2 \cdot 3^n \frac{1}{V_n R^n} \int_{B_1} \ln \frac{R}{|x|}, \end{aligned}$$

де $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$, а Γ — гамма-функція Ейлера, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Видно, що

$$\frac{1}{R^n} \int_{B_1} \ln \frac{R}{|x|} dx = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 \rho^{n-1} \ln \frac{1}{\rho} d\rho$$

не залежить від радіуса кулі. Оскільки, ми отримали, що коливання по кулях мажоруються сталою, яка залежить лише від n , то $f \in BMO$.

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕСТАНОВОК

4.1. Оцінки перестановок

У цьому підрозділі ми розглянемо теореми про точні оцінки перестановок, які будуть потрібні для доведення основного результату цього розділу.

Теорема 4.1 ([3]). *Нехай $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Тоді справедлива нерівність*

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq 2^{n+4} \|f\|_*, \quad 0 < t < \infty. \quad (4.1)$$

Доведення. Оскільки $\|f\|_* \leq 2\|f\|_*$, то треба довести, що

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq 2^{n+3} \|f\|_*. \quad (4.2)$$

Зафіксуємо $t > 0$ і позначимо $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > f^*(t)\}$. Таким чином, $|E| \leq t$. Побудуємо таку відкриту множину $G \supset E$, що $|G| \leq 2t$. За допомогою леми (номер) знайдемо набір кубів Q_j , внутрішності яких попарно не перетинаються, для яких виконуються умови леми. Маємо

$$\begin{aligned} t(f^{**} - f^*(t)) &= \int_0^t (f^*(u) - f^*(t)) du = \\ &= \int_0^{|E|} (f^*(u) - f^*(t)) du + \int_{|E|}^t (f^*(u) - f^*(t)) du = \\ &= \int_0^{|E|} (f^*(u) - f^*(t)) du = \int_E (f(x) - f^*(t)) dx = \\ &= \sum_j \int_{E \cap Q_j} (f(x) - f^*(t)) dx = \\ &= \sum_j \int_{E \cap Q_j} (f(x) - f_{Q_j}) dx + \sum_j (f_{Q_j} - f^*(t)) |E \cap Q_j| \leq \\ &\leq \sum_j \int_{E \cap Q_j} |f(x) - f_{Q_j}| dx + \sum_j' (f_{Q_j} - f^*(t)) |E \cap Q_j|, \end{aligned}$$

де $\sum_j'$ — сума по тих номерах j , для яких $f_{Q_i} > f^*(t)$. Маємо

$$\begin{aligned} \sum_j' (f_{Q_i} - f^*(t)) |E \cap Q_j| &\leq \sum_j' (f_{Q_i} - f^*(t)) |G \cap Q_j| \leq \\ &\leq \sum_j' (f_{Q_i} - f^*(t)) |Q_j \setminus G| = \sum_j' \int_{Q_j \setminus G} (f_{Q_i} - f^*(t)) dx \leq \\ &\leq \sum_j' \int_{Q_j \setminus G} (f_{Q_i} - f(x)) dx \leq \sum_j' \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_i}| dx \leq \\ &\leq \sum_j \int_{Q_j} |f(x) - f_{Q_i}| dx. \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} t(f^{**}(t) - f^*(t)) &\leq 2 \sum_j \int_{Q_i} |f(x) - f_{Q_j}| dx \leq \\ &\leq 2\|f\|_* \sum_j |Q_j| \leq 2^{n+2}\|f\|_* \cdot |G| \leq 2^{n+3}\|f\|_* \cdot t, \end{aligned}$$

а це (4.2), що і треба було довести. □

Теорема 4.2 ([3]). *Нехай $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Тоді $f^* \in BMO([0, \infty))$ і*

$$\|f^*\|_* \leq c\|f\|_*,$$

де c залежить від вимірності простору n .

Доведення.

$$\|f^*\|_* = \sup_{t>0} \Omega(f^*, [0, t])$$

За властивістю коливань маємо

$$\begin{aligned} \Omega(f^*, [0, t]) &\leq 2\Omega'(f^*, [0, t]) = 2 \inf_c \frac{1}{t} \int_0^t |f^*(u) - c| du \leq \\ &\leq \frac{2}{t} \int_0^t (f^*(u) - f^*(t)) du = 2(f^{**}(t) - f^*(t)). \end{aligned}$$

Застосуємо теорему 4.1 і отримаємо

$$2(f^{**}(t) - f^*(t)) \leq 2 \cdot 2^{n+4}\|f\|_* = 2^{n+5}\|f\|_*,$$

де $c = 2^{n+5}$. □

Теорема 4.3. *Нехай $f \in BMO(Q_0)$. Тоді справедлива нерівність*

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq 2^{n+4} \|f\|_*, \quad 0 < t < \frac{1}{4} |Q_0|. \quad (4.3)$$

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 4.1 тільки для таких t , що $0 < t < \frac{1}{4} |Q_0|$.

Теорема 4.4. *Нехай $f \in BMO(Q_0)$. Тоді $f^* \in BMO([0, |Q_0|])$ і*

$$\|(f - f_{Q_0})^*\|_* \leq c \|f\|_*,$$

де c залежить від вимірності простору n .

Доведення. Нехай $f_{Q_0} = 0$. Зафіксуємо відрізок $[\alpha, \beta] \subset [0, |Q_0|]$.

Якщо $(f^*)_{[\alpha, \beta]} \leq |f|_{Q_0}$, то

$$\begin{aligned} \Omega(f^*, [\alpha, \beta]) &\leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f^*(u) - (f^*)_{[\alpha, \beta]}| du \leq \\ &\leq 2(f^*)_{[\alpha, \beta]} \leq 2|f|_{Q_0} = \frac{2}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f(x)| dx \leq 2\|f\|_*. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $(f^*)_{[\alpha, \beta]} > |f|_{Q_0}$. Знайдемо таке β_0 , $\beta \leq \beta_0 \leq |Q_0|$, що $(f^*)_{[\alpha, \beta]} = (f^*)_{[0, \beta_0]}$. Якщо $\beta_0 \geq \frac{1}{4} |Q_0|$, то

$$\begin{aligned} \Omega(f^*, [\alpha, \beta]) &\leq \Omega(f^*, [0, \beta_0]) = \\ &= \frac{2}{\beta_0} \int_{\{u: f^*(u) > f^{**}(\beta_0)\}} (f^*(u) - f^{**}(\beta_0)) du \leq \\ &\leq \frac{2}{\beta_0} \int_{\{u: f^*(u) > f^{**}(\beta_0)\}} (f^*(u) - |f|_{Q_0}) du \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\beta_0} \int_{\{u: f^*(u) > |f|_{Q_0}\}} (f^*(u) - |f|_{Q_0}) du = \\
&= \frac{2}{\beta_0} \int_{\{x \in Q_0: |f(x)| > |f|_{Q_0}\}} (|f(x)| - |f|_{Q_0}) dx = \\
&= \frac{|Q_0|}{\beta_0} \Omega(|f|, Q_0) \leq 4 \cdot 2 \cdot \Omega(f, Q_0) \leq 8 \sup \Omega(f, Q_0) = 8 \|f\|_*.
\end{aligned}$$

Якщо $\beta_0 \leq \frac{1}{4}|Q_0|$, то за теоремою 4.3,

$$\begin{aligned}
&\Omega(f^*, [\alpha, \beta]) \leq \Omega(f^*, [0, \beta_0]) \leq 2\Omega'(f^*, [0; \beta_0]) \leq \\
&\leq \frac{2}{\beta_0} \int_0^{\beta_0} (f^*(u) - f^*(\beta_0)) du = 2(f^{**}(\beta_0) - f^*(\beta_0)) \leq 2^{n+5} \|f\|_*.
\end{aligned}$$

Оскільки ми брали довільний відрізок з $[0; |Q_0|]$, то теорему доведено. $\square$

4.2. Теорема Джона — Ніренберга

Розглянемо основну теорему цього розділу.

Теорема 4.5 (Джона — Ніренберга, [5]). *Існують такі сталі b і B , які залежать від вимірності простору n , що для будь-якої функції $f \in BMO(Q_0)$ і будь-якого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$, справедлива нерівність*

$$(f - f_{Q_0})^*(t) \leq \frac{\|f\|_*}{b} \ln \frac{B|Q_0|}{t}, \quad 0 < t \leq |Q_0|. \quad (4.4)$$

Доведення. Нехай $f \in BMO(Q_0)$, куб $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ і $f_{Q_0} = 0$. Маємо

$$\begin{aligned}
&f^{**}\left(\frac{t}{2}\right) - f^{**}(t) = \frac{2}{t} \int_0^{t/2} (f^*(u) - f^{**}(t)) du \leq \\
&\leq \frac{2}{t} \int_0^t |f^*(u) - f^{**}(t)| du \leq 2\|f^*\|_*, \quad 0 < t \leq |Q_0|.
\end{aligned}$$

Застосовуючи теорему 4.4, маємо

$$f^{**}\left(\frac{t}{2}\right) - f^{**}(t) \leq 2c\|f\|_*, \quad 0 < t \leq |Q_0|, \quad (4.5)$$

c залежить від вимірності простору n .

Візьмемо $t \in (0, |Q_0|)$ та знайдемо n таке, що $2^{-n-1}|Q_0| < t \leq 2^{-n}|Q_0|$. Враховуючи (4.5), одержимо

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &\leq f^{**}(2^{-n-1}|Q_0|) \leq f^{**}(2^{-n}|Q_0|) + 2c\|f\|_* \leq \\ &\leq f^{**}(2^{-n+1}|Q_0|) + 2 \cdot (2c\|f\|_*) \leq \dots \leq f^{**}(|Q_0|) + (n+1)(2c\|f\|_*). \end{aligned}$$

Оскільки ми припустили, що $f_{Q_0} = 0$, то

$$f^{**}(|Q_0|) = \frac{1}{|Q_0|} \int_0^{|Q_0|} f^*(u) du = \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f(x)| dx \leq \|f\|_*,$$

отже,

$$\begin{aligned} f^*(t) \leq f^{**}(t) &\leq 2c(n+2)\|f\|_* \leq 2c \left(\frac{\ln \frac{|Q_0|}{t}}{\ln 2} + 2 \right) = \\ &= \frac{2c}{\ln 2} \|f\|_* \ln \frac{4|Q_0|}{t}, \quad 0 < t \leq |Q_0|. \end{aligned}$$

Враховуючи наше припущення $f_{Q_0} = 0$, отримана нерівність - це і є (4.4), де $B = 4$, а $b = \frac{\ln 2}{2c}$. $\square$

З теореми Джона — Ніренберга випливає

Наслідок 4.1. Якщо $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, то $f \in L_{loc}^p$ при будь-якому $p < \infty$.

Доведення. Покажемо, що для будь-якого куба $Q_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливе $f - f_{Q_0} \in L^p(Q_0)$. Скористаємось нерівністю (4.4) і отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} |f(x) - f_{Q_0}|^p dx &= \int_0^{|Q_0|} ((f - f_{Q_0})^*(t))^p dt \leq \\ &\leq \left(\frac{\|f\|_*}{b} \right)^p \int_0^{|Q_0|} \ln^p \frac{B|Q_0|}{t} dt = \\ &= \left(\frac{\|f\|_*}{b} \right)^p |Q_0| \cdot B \int_0^{1/B} \ln^p \frac{1}{u} du < \infty. \end{aligned} \quad \square$$

Знайдемо точну сталу в показнику експоненти в нерівності Джона — Ніренберга для одновимірного випадку.

З леми 3.1 випливає

Наслідок 4.2. *Нехай функція $f \in BMO([a_0, b_0])$, де $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$, $f_{[a_0, b_0]} = 0$. Тоді для будь-якого $a > 1$ справедлива нерівність*

$$f^{**}\left(\frac{t}{a}\right) - f^{**}(t) \leq \frac{a}{2}\|f\|_*, \quad 0 < t \leq b_0 - a_0. \quad (4.6)$$

Доведення. Візьмемо $\varphi = f^*$ в лемі 3.1, тоді $F = f^{**}$. З (3.1) маємо

$$f^{**}\left(\frac{t}{a}\right) - f^{**}(t) \leq \frac{a}{2}\|f^*\|$$

Звідси і з нерівності $\|f^*\|_* \leq \|f\|_*$ отримуємо (4.6). $\square$

За допомогою (4.6) можна отримати точну сталу нерівності Джона — Ніренберга в одновимірному випадку.

Теорема 4.6 ([6]). *Нехай функція $f \in BMO([a_0, b_0])$. Тоді справедлива нерівність*

$$(f - f_{[a_0, b_0]})^*(t) \leq \frac{\|f\|_*}{2/e} \ln \frac{B(b_0 - a_0)}{t}, \quad 0 < t \leq b_0 - a_0, \quad (4.7)$$

де $B = \exp\left(1 + \frac{2}{e}\right)$.

Доведення. Нехай $f_{[a_0, b_0]} = 0$ і $a > 1$. Додаючи нерівності,

$$f^{**}\left(\frac{b_0 - a_0}{a^i}\right) - f^{**}\left(\frac{b_0 - a_0}{a^{i-1}}\right) \leq \frac{a}{2}\|f\|_*, \quad i = \overline{1, k+1},$$

які випливають з (4.6), отримуємо

$$f^{**}\left(\frac{b_0 - a_0}{a^{k+1}}\right) \leq (k+1)\frac{a}{2}\|f\|_* + f^{**}(b_0 - a_0). \quad (4.8)$$

Оскільки $f_{[a_0, b_0]} = 0$, то

$$f^{**}(b_0 - a_0) = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_0^{b_0 - a_0} f^*(u) du = \frac{1}{b_0 - a_0} \int_{a_0}^{b_0} |f(x)| dx = \Omega(f, [a_0, b_0]) \leq \|f\|_*,$$

Тоді з (4.8) маємо

$$f^{**} \left(\frac{b_0 - a_0}{a^{k+1}} \right) \leq \left((k+1) \frac{a}{2} + 1 \right) \|f\|_*, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Візьмемо $t \in (0, b_0 - a_0]$ і знайдемо таке k , що

$$\frac{b_0 - a_0}{a^{k+1}} < t \leq \frac{b_0 - a_0}{a^k}.$$

Тоді $k \leq \frac{1}{\ln a} \ln \frac{b_0 - a_0}{t}$ і з (1.4) отримуємо

$$\begin{aligned} f^*(t) &\leq f^{**}(t) \leq f^{**} \left(\frac{b_0 - a_0}{a^{k+1}} \right) \leq \left((k+1) \frac{a}{2} + 1 \right) \|f\|_* \leq \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln \frac{b_0 - a_0}{t} + 1 \right) \frac{a}{2} + 1 \right) \|f\|_* = \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{a}{\ln a} \cdot \ln \frac{b_0 - a_0}{t} + \frac{a}{2} + 1 \right). \end{aligned}$$

$\frac{a}{\ln a}$, де $a > 1$, набуває найменшого значення, коли $a = e$. Підставимо це значення в отриману нерівність

$$f^*(t) \leq \left(\frac{e}{2} \ln \frac{b_0 - a_0}{t} + \frac{e}{2} + 1 \right) \|f\|_* = \frac{\|f\|_*}{2/e} \ln \frac{\exp \left(1 + \frac{2}{e} \right) (b_0 - a_0)}{t},$$

отже ми отримали нерівність Джона — Ніренберга у вигляді (4.7). $\square$

ВИСНОВКИ

У даній роботі ми визначили перестановки функцій і дослідили їхні основні властивості. Розглянули поняття середніх коливань та встановили їхні властивості, визначили клас BMO функцій з обмеженими середніми коливаннями, довели приналежність функції $\ln \frac{1}{|x|}$ до класу BMO . Також довели теореми про точні оцінки перестановок, які дозволили довести нерівність Джона — Ніренберга і визначити точну сталу у ній.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кореновський А. О. Теорія міри та інтегралу. Курс лекцій/ А. О Кореновський. — М.: Одеса "Астропринт", 1999. — 134 с
2. Bennett C. Interpolation of Operators / C. Bennett, R. Sharpley. — Academic Press, N. Y., Inc. — 1988. — P. 37–58.
3. Bennett C., DeVore R. A., Sharpley R. Weak- L^∞ and BMO // Ann. Math. - 1981. - Vol. 113, № 2. - P. 601-611.
4. Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Math. — 1930. — Vol. 54. — P. 81–116.
5. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation// Comm. Pure Appl. Math. - 1961. - Vol. 14, № 4. - P. 415-426.
6. Korenovskii A. A. On the connection between mean oscillation and exact integrability classes of functions / A. A. Korenovskii // Math. USSR Sbornik. — 1992. — Vol. 71, № 2. — P. 561–567.
7. Schwarz H. A. Gesammelte Abhandlungen // Springer. — 1980. — Vol. 2. — P. 327–340.
8. Steiner J. Gesammelte Werke // Reimer. — 1882. — Vol. 2. — P. 75–91.