

Н. А. Малаксиано

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ГЕРИНГА И МАКЕНХАУПТА

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки
Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант Ф7/329-2001

Рекомендовано до друку науковим семінаром
з теорії функцій ОНУ 22.03.2001 р.

Отримані необхідні та достатні умови на монотонну зовнішню функцію, при яких суперпозиція з довільною функцією з одного фіксованого класу Герінга належить до іншого фіксованого класу Герінга. Аналогічне питання розглянуто для класів Макенхаупта.

Получены необходимые и достаточные условия на монотонную внешнюю функцию, при которых суперпозиция с произвольной функцией из одного фиксированного класса Геринга принадлежит другому фиксированному классу Геринга. Аналогичный вопрос рассмотрен для классов Макенхаупта.

The necessary and sufficient conditions for a monotonous external function such that superposition with an arbitrary function from one fixed Gehring class belongs to the other fixed Gehring class were obtained. The analogous question for Muckenhoupt classes was considered as well.

Введение. Рассматриваются только неотрицательные функции на кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что ребра всех кубов параллельны координатным осям. Обозначим $f_E \equiv \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx$, где $|E|$ – мера Лебега множества E .

Определение 1. Говорят, что функция f принадлежит классу Макенхаупта $A_q(B)$ на кубе Q_0 , если для любого подкуба $Q \subset Q_0$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^{-\frac{1}{q-1}}(x) dx \right)^{q-1} \leq B,$$

где B не зависит от Q . Принято обозначать $A_q \equiv \bigcup_{B>1} A_q(B)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция f принадлежит классу Геринга $G_p(C)$ на кубе Q_0 , если для любого подкуба $Q \subset Q_0$ функция f удовлетворяет “обратному неравенству Гёльдера” (условию Геринга):

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right),$$

где C не зависит от Q . Принято обозначать $G_p \equiv \bigcup_{C>1} G_p(C)$.

Такие классы функций играют важную роль в теории весовых пространств, квазиконформных отображений и в других вопросах.

Очевидно, что функция f , принадлежащая некоторому классу Геринга (Макенхаупта), после умножения на постоянную или после линейной замены переменной будет принадлежать тому же классу Геринга (Макенхаупта). Естественно возникают следующие вопросы:

- 1) При какой функции g для любой $f \in G_p$ (или A_q) верно $f \cdot g \in G_{p_1}$ (или A_{q_1})?
- 2) При какой нелинейной замене переменной ψ для любой $f \in G_p$ (или A_q) верно $f(\psi) \in G_{p_1}$ (или A_{q_1})?
- 3) При какой внешней функции φ для любой $f \in G_p$ (или A_q) верно $\varphi(f) \in G_{p_1}$ (или A_{q_1})?

Первый вопрос был исследован в работах [1], [2], [3] и [4]. Второй вопрос был решен в работах [1], [2] и [5]. Рядом авторов исследовались свойства суперпозиций вида $\varphi(f)$, где $f \in G_p$ (или A_q), а φ – степенная функция (см., например, [6], [1], [2]). Нам не известны работы, в которых бы исследовались свойства суперпозиций, где φ – не степенная функция. Данная работа посвящена решению третьего вопроса для случая произвольной неубывающей функции φ . Главные результаты работы представлены в следующих трех теоремах.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ не убывает и заданы произвольные числа $p_1 > 1$ и $p_2 > 1$. Для того чтобы для любой $f \in G_{p_1}$ на кубе Q_0 суперпозиция $\varphi(f)$ принадлежала G_{p_2} , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > p_1/p_2$ существовало K такое, что $\varphi(ax) \leq K \cdot x^\alpha \cdot \varphi(a)$ для любых $a > 0$ и $x \geq 1$.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ не убывает и зафиксированы числа $q_1 \geq q_2 > 1$. Для того чтобы для любой $f \in A_{q_1}$ на кубе Q_0 суперпозиция $\varphi(f)$ принадлежала A_{q_2} , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > (q_2 - 1)/(q_1 - 1)$ существовало K такое, что $\varphi(ax) \leq K \cdot x^\alpha \cdot \varphi(a)$ для любых $a > 0$ и $x \geq 1$.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ не убывает и зафиксированы числа $q_2 \geq q_1 > 1$. Для того чтобы для любой $f \in A_{q_1}$ на кубе Q_0 суперпозиция $\varphi(f)$ принадлежала A_{q_2} , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > 1$ существовало K такое, что $\varphi(ax) \leq K \cdot x^\alpha \cdot \varphi(a)$ для любых $a > 0$ и $x \geq 1$.

Доказательства этих теорем аналогичны, поэтому далее приведено лишь доказательство теоремы 1.

1. Вспомогательные результаты.

Определение 3. Нсвозрастающая перестановка функции f на измеримом множестве E определяется равенством

$$f^*(t) \equiv \inf \left\{ \alpha > 0 : \left| \{x \in E : f(x) > \alpha\} \right| \leq t \right\}, \quad 0 < t < |E|.$$

Определенная таким образом перестановка f^* непрерывна справа, не возрастает на $(0, |E|)$ и равноизмерима с f на E . Далее нам понадобится следующее простое утверждение:

Лемма 1. Если φ не убывает, а функция f измерима на E , то $\varphi(f^*(t)) = (\varphi(f))^*(t)$ для п. в. $t \in (0, |E|)$.

Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [7].

Теорема 4. Для любых $p > 1$ и $C > 1$ существует число M такое, что для любой монотонной на (a, b) функции $f \in G_p(C)$ верно $f((b-a)/2) \geq M \cdot f_{(a,b)}$.

Теорема 5. Функция f принадлежит G_p на кубе Q_0 тогда и только тогда, когда существуют $\beta < 1/p$ и C такие, что для любого подкуба $Q \subset Q_0$ верно неравенство

$$(f|Q)^*(t) \leq C \cdot \left(\frac{t}{|Q|} \right)^{-\beta} \cdot f_Q, \quad t \in (0, |Q|).$$

Здесь $f|Q$ означает сужение функции f на множество Q . Для доказательства необходимости в теореме 5 достаточно применить известное неравенство Гёльдера и теорему Геринга (см. [8]). Достаточность следует из определения классов G_p и неравенства Гёльдера.

Определение 4. Обозначим

$$G_p(f) \equiv G_p(f; Q_0) \equiv \sup_{Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx \right)^{-1} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 2. Пусть функция φ такова, что для любой функции $f \in G_p$ на $(0,1)$ верно $\varphi(f) \in G_{p_1}$. Тогда для любой фиксированной функции $f_0 \in G_p$ и чисел $a_1, a_2 > 0$ найдется такое C , что для любой функции g , удовлетворяющей неравенству $a_1 f_0(x) \leq g(x) \leq a_2 f_0(x)$, $x \in (0,1)$, верно $\varphi(g) \in G_{p_1}(C)$.

В этой лемме важно то, что число C не зависит от выбора функции g .

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что существует такая последовательность функций $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых $a_1 f_0(x) \leq g_k(x) \leq a_2 f_0(x)$, $x \in (0,1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и $G_{p_1}(\varphi(g_k); (0,1)) \geq k$.

Возьмем

$$\zeta(x) = \begin{cases} g_k(2^{k+1}x - 1), & x \in (1/2^{k+1}, 1/2^k), \quad k = 0, 2, 4, \dots; \\ g_k(2 - 2^{k+1}x), & x \in (1/2^{k+1}, 1/2^k), \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Чтобы рассматривать ζ на $(0,1)$, на оставшемся множестве меры нуль доопределим функцию произвольным образом. Так как для любого четного k

$$G_{p_1}(\varphi(\zeta); (0,1)) \geq G_{p_1}(\varphi(\zeta); (1/2^{k+1}, 1/2^k)) = G_{p_1}(\varphi(g_k(2^{k+1}x - 1)); (1/2^{k+1}, 1/2^k)) = G_{p_1}(\varphi(g_k); (0,1)) \geq k,$$

то $\varphi(\zeta) \notin G_{p_1}$ на $(0,1)$.

Для того, чтобы прийти к противоречию и тем самым доказать лемму, достаточно показать, что $\zeta \in G_p$ на $(0,1)$. Действительно, тогда, в силу условия леммы, $\varphi(\zeta)$ будет принадлежать G_{p_1} на $(0,1)$. Зафиксируем произвольно $(b, c) \subset (0,1)$. Доказать принадлежность $\zeta \in G_p$ можно по определению классов G_p , рассмотрев каждый из следующих трех случаев:

- 1) $(b, c) \subset [1/2^{k+1}, 1/2^k]$ при некотором k ;
- 2) $b \in [1/2^{k+2}, 1/2^{k+1}]$, $c \in [1/2^{k+1}, 1/2^k]$ при некотором k ;
- 3) для некоторого l и $k > l+1$ верно $b \in [1/2^{k+1}, 1/2^k]$, $c \in [1/2^{l+1}, 1/2^l]$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть функция φ такова, что для любой функции $f \in G_p$ на $(0,1)$ верно $\varphi(f) \in G_{p_1}$. Тогда для любой фиксированной функции $f_0 \in G_p$ найдется

такое C , что для любого $a \in (0, 1]$ верно $\varphi(a \cdot f_0) \in G_{p_1}(C)$.

Доказательство. Возьмем

$$\zeta(x) = \begin{cases} 2^{-k} \cdot f_0(2^{k+1}x - 1), & x \in (1/2^{k+1}, 1/2^k), \quad k = 0, 2, 4, \dots; \\ 2^{-k} \cdot f_0(2 - 2^{k+1}x), & x \in (1/2^{k+1}, 1/2^k), \quad k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Чтобы рассматривать ζ на $(0, 1)$, на оставшемся множестве меры нуль доопределим функцию произвольным образом. Пользуясь определением, несложно доказать, что $\zeta \in G_p$ на $(0, 1)$. Таким образом мы получим, что для любой функции $f_0 \in G_p$ найдется C такое, что для любого целого $k \geq 0$ верно $\varphi(2^{-k} \cdot f_0) \in G_{p_1}(C)$. Для завершения доказательства достаточно применить лемму 2.

Лемма доказана.

Легко проверить, что лемма 3 останется верной, если в ее формулировке взять $a \in [1, \infty)$. Таким образом, справедлива следующая

Лемма 4. Пусть функция φ такова, что для любой функции $f \in G_p$ на $(0, 1)$ верно $\varphi(f) \in G_{p_1}$. Тогда для любой фиксированной функции $f_0 \in G_p$ найдется такое C , что для любого числа $a > 0$ верно $\varphi(a \cdot f_0) \in G_{p_1}(C)$.

2. Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть φ такова, что $\varphi(f) \in G_{p_2}$ для любой $f \in G_{p_1}$. Зафиксируем произвольное $\alpha > p_1/p_2$. Возьмем $\gamma = (1/(\alpha p_2) + 1/p_1)/2$. Очевидно, что $\gamma < 1/p_1$ и $1/(\gamma p_2) < \alpha$. Легко проверить, что $f(x) \equiv x^{-\gamma} \in G_{p_1}$ на $(0, 1)$. Поэтому в силу леммы 4 найдется C_1 такое, что $\varphi(a \cdot f) \in G_{p_2}(C_1)$ для любого $a > 0$. Зафиксируем произвольное $a > 0$. Из теоремы 5 следует существование $\beta < 1/p_2$ и C_2 , зависящих лишь от p_2 и C_1 и таких, что

$$(\varphi(a \cdot f) | (0, 1))^*(t) \leq C_2 t^{-\beta} \int_0^1 \varphi(a \cdot f(x)) dx, \quad t \in (0, 1).$$

Используя это, а также лемму 1 и теорему 4, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot t^{-\gamma})^{\frac{1}{\beta}} (\varphi(a \cdot f) | (0, 1))^*(t) &\leq C_2 t^{-\beta} \int_0^1 \varphi(a \cdot f(x)) dx = C_2 (t^{-\gamma})^{\frac{\beta}{\gamma}} \int_0^1 \varphi(a \cdot f(x)) dx \leq \\ &\leq C_2 (t^{-\gamma})^{\frac{\beta}{\gamma}} C_3 \varphi(a \cdot f(1/2)) \leq C_2 C_3 (t^{-\gamma})^{\frac{1}{\gamma p_2}} \varphi(a \cdot 2^\gamma) \leq C_2 C_3 (t^{-\gamma})^\alpha \varphi(a \cdot 2^\gamma). \end{aligned}$$

Заметим, что определяемое теоремой 4 число C_3 зависит только от p_2 и C_1 , то есть от p_1 , α , p_2 и φ . Итак, мы доказали, что $\varphi(a t^{-\gamma}) \leq C_2 C_3 (t^{-\gamma})^\alpha \varphi(a \cdot 2^\gamma)$ для любых $t \in (0, 1)$ и $a > 0$. Переобозначим $x = t^{-\gamma}/2^\gamma$, $a_1 = a \cdot 2^\gamma$. Получим $\varphi(a_1 x) \leq C_2 C_3 \cdot 2^{\gamma\alpha} x^\alpha \varphi(a_1)$ при любых $x \geq 1$, $a_1 > 0$. Обозначим $K = C_2 C_3 \cdot 2^{\gamma\alpha}$. Как видно из доказательства, K зависит только от p_1 , p_2 , α и φ .

Необходимость доказана.

Достаточность. Зафиксируем произвольную функцию $f \in G_{p_1}$. Зафиксируем произвольный куб $Q \subset Q_0$. По теореме 5 найдутся $\beta < 1/p_1$ и $C_1 > 0$, зависящие только от $G_{p_1}(f)$ и p_1 , такие, что

$$(f | Q)^*(t) \leq C_1 (t | Q)^{-\beta} f_Q \text{ для любого } t \in (0, |Q|). \quad (1)$$

Возьмем $\alpha \equiv (1/(\beta p_2) + p_1/p_2)/2$. Очевидно, $p_1/p_2 < \alpha < 1/(\beta p_2)$ и $\gamma \equiv \beta\alpha < 1/p_2$.

По условию, для выбранного α существует K такое, что $\varphi(ax) \leq K \cdot x^\alpha \varphi(a)$ для любых $a > 0$ и $x \geq 1$. Пользуясь леммой 1 и неравенством (1), для $t \leq |Q|/2$ получаем

$$\begin{aligned} (\varphi(f)|Q)^*(t) &\stackrel{1^\circ}{=} \varphi\left((f|Q)^*(t)\right) = \varphi\left((f|Q)^*(|Q|/2) \cdot \frac{(f|Q)^*(t)}{(f|Q)^*(|Q|/2)}\right) \leq \\ &\leq K \cdot \left(\frac{(f|Q)^*(t)}{(f|Q)^*(|Q|/2)}\right)^\alpha \cdot \varphi\left((f|Q)^*(|Q|/2)\right) \leq K \cdot \left(\frac{C_1(t/|Q|)^{-\beta} f_Q}{C_2 f_Q}\right)^\alpha \cdot \varphi\left((f|Q)^*(|Q|/2)\right) \leq \\ &\leq K \cdot \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{t}{|Q|}\right)^{-\beta\alpha} \cdot \frac{2}{|Q|} \cdot \int_0^{|Q|} (\varphi(f)|Q)^*(s) ds = \\ &= 2K \cdot \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{t}{|Q|}\right)^{-\gamma} \cdot \frac{1}{|Q|} \cdot \int_Q \varphi(f(x)) dx \end{aligned}$$

для любого $t \leq |Q|/2$. Здесь, в силу теоремы 4, постоянная C_2 зависит только от p_1 и $G_{p_1}(f)$. Следовательно, для любого $t \in (0, |Q|)$

$$(\varphi(f)|Q)^*(t) \leq C_3 \cdot \left(\frac{t}{|Q|}\right)^{-\gamma} \cdot \frac{1}{|Q|} \cdot \int_Q \varphi(f(x)) dx,$$

где постоянная $C_3 = 2^{1+\gamma} K \cdot (C_1/C_2)^\alpha$ зависит только от p_1, p_2, β, K , и $G_{p_1}(f)$. Отсюда, в силу теоремы 5, имеем $\varphi(f) \in G_{p_2}$.

Теорема доказана.

Заключение. Найдены необходимые и достаточные условия на монотонную внешнюю функцию, при которых суперпозиция с произвольной функцией из класса Геринга G_p (класса Макенхаупта A_q) принадлежит классу Геринга G_{p_1} (классу Макенхаупта A_{q_1}).

Автор выражает глубокую признательность А. А. Кореновскому за постановку задачи и ценные советы.

1. Johnson R., Neugebauer C. J. Homeomorphisms preserving (A_p) // Rev. Mat. Iberoam. – 1987. – V. 3, No. 2. – P. 249–273.
2. Johnson R., Neugebauer C. J. Change of variable results for (A_p) - and reverse Hölder RH-classes // Trans. Am. Math. Soc. – 1991. – V. 328, No. 2. – P. 639–666.
3. Buckley S. M. Pointwise multipliers for reverse Hölder spaces // Stud. Math. – 1994. – V. 109, No. 1. – P. 23–39.
4. Buckley S. M. Pointwise multipliers for reverse Hölder spaces II // Proc. R. Ir. Acad., Sect. A 95–1995. – No. 2. – P. 193–204.
5. Johnson R. Changes of variable and (A_p) weights // Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1990. – V. 107. – P. 93–99.
6. Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. L. Weighted norm inequalities and related topics. V. 116. – Amsterdam: North-Holland Math. Stud., 1985.
7. Strömberg J. O., Torchinsky A. Weighted Hardy spaces. Lecture notes in math. V. 1381. – Berlin: Springer-Verlag, 1989.
8. Gehring F.W. The L^p – integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. – 1973. – V. 130. – P. 265–277.