

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Апроксимація одного рівняння з дробовою похідною  
Капуто»

«Approximation of the equation with a Caputo fractional  
derivative»

Виконала: здобувачка денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Освітня програма «Прикладна математика»  
Жарка Марія Сергіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В.В. \_\_\_\_\_

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Таїрова М.С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2023 р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2023 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

Одеса — 2023 р.

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b>		3
<b>1</b>	<b>Постановка задачі</b>	5
<b>2</b>	<b>Інтеграли та похідні дробового порядку</b>	6
2.1	Дробові інтеграли та похідні Рімана-Ліувілля . . . . .	6
2.2	Дробові похідні Грюнвальда-Летнікова . . . . .	9
2.3	Дробові похідні Капуто . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Скінченно-різницева апроксимація дробового рівняння адвекції-дисперсії</b>	14
3.1	Матричне представлення схем скінченних різниць . . . . .	17
3.2	Аналіз збіжності дробових скінченно-різницевих схем . . . . .	19
3.3	Аналіз стійкості дробових скінченно-різницевих схем . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Обчислювальний експеримент</b>	26
	<b>Висновки</b>	31
	<b>Список літератури</b>	32
	<b>Додаток А. Текст програми</b>	33

## ВСТУП

Вимоги сучасної техніки потребують перегляду усталеного чисто математичного підходу до моделювання фізичних процесів. В останні роки з'явилася значна кількість досліджень, зокрема в теорії в'язкопружності та в спадковій механіці твердого тіла, де для більш точного опису властивостей матеріалів використовуються дробові похідні [9].

Застосування дробових похідних у математичному моделюванні природно призводить до виникнення диференціальних рівнянь дробового порядку. Ці рівняння відрізняються від традиційних диференціальних рівнянь, оскільки в них зустрічаються дробові похідні замість звичайних цілих порядків. Це ставить під сумнів застосування класичних методів розв'язання диференціальних рівнянь і вимагає розробки нових чисельних алгоритмів.

Крім того, формулювання початкових умов для диференціальних рівнянь дробового порядку також потребує спеціального підходу. Прикладні задачі вимагають визначення дробових похідних, що дозволяють використовувати фізично інтерпретовані початкові умови, які враховують особливості системи та фізичні обмеження.

При дослідженні рівняння з дробовими похідними виникає проблема початкових умов, які містять граничні значення дробових похідних. Хоча математично такі початково-крайові задачі можуть бути успішно вирішені, на практиці вони мало корисні, оскільки не існує фізичної інтерпретації для таких типів початкових умов.

Цей факт викликає конфлікт між усталеною та вивченою математичною теорією і практичними потребами. Втім, Мішель Капуто запропонував певне розв'язання цього конфлікту. Його підхід полягає у застосуванні дробових похідних Капуто [4, 9], які дозволяють сформулювати початкові умови з фізичною інтерпретацією, враховуючи особливості системи та фізичні обмеження.

Одним зі складних завдань є апроксимація рівнянь з дробовими похідними, оскільки вони вимагають спеціального підходу до їх чисельного розв'язання.

Об'єктом дослідження є початково-крайова задача для дробового рівняння адвекції-дисперсії з похідною Капуто.

Предметом дослідження є скінченно-різницева апроксимація початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії.

Мета роботи — отримання нових знань і практичного досвіду щодо побудови числових розв'язків фізичних моделей з дробовими похідними.

## РОЗДІЛ 1

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дробове рівняння адвекції-дисперсії

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Z \frac{\partial u}{\partial x} = d \left( \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + d \left( \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}, \quad (1.1)$$

де  $u$  — це концентрація розчинених речовин у даній системі, також відома як щільність.  $Z$  — середня швидкість руху води в порах,  $x$  і  $t$  — відповідні просторові та часові координати,  $d$  — коефіцієнт дифузії,  $\alpha$  — порядок дробової похідної з  $1 < \alpha \leq 2$ . Значення параметра  $\gamma$  відображає співвідношення ймовірностей переходу частинок розчинника вперед та назад. Якщо  $-1 \leq \gamma \leq 0$ , то ймовірність переходу зміщена назад, а якщо  $0 \leq \gamma \leq 1$ , то ймовірність переходу зміщена вперед.

Треба розглянути скінченно-різницеву апроксимацію початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії з похідною Капуто.

Визначити умови стійкості запропонованої схеми.

Створити програмний додаток мовою пакету MATLAB, який реалізує вказану схему, та знаходить скінченно-різницевий розв'язок для різних коефіцієнтів дробового рівняння та різних параметрів сітки.

Провести серію обчислювальних експериментів щодо встановлення стійкості скінченно-різницевої схеми.

## РОЗДІЛ 2

### ІНТЕГРАЛИ ТА ПОХІДНІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Приведемо основні визначення щодо дробових інтегралів та похідних [4, 9]

#### 2.1 Дробові інтеграли та похідні Рімана-Ліувілля

Розглянемо  $n$ -кратний інтеграл від деякої функції  $f(x)$ :

$$J_a^n f(x) = \int_a^x dt_n \int_a^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_a^{t_2} dt_1 f(t_1).$$

Застосуємо правило Діріхле про зміну порядку інтегрування у двократному інтегралі зі змінною межею внутрішнього

$$\int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} dt_1 f(t_1) = \int_a^x dt_1 \int_{t_1}^x dt_2 f(t_1),$$

і використаємо метод математичної індукції, тоді  $n$ -кратний інтеграл можна перетворити на одноразовий зі степеневим ядром та отримати так звану формулу Коші

$$J_a^n f(x) = \int_a^x dt_n \int_x^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_a^{t_2} dt_1 f(t_1) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Таким чином ми визначили інтегральний оператор  $J_a^n$  для  $n \in \mathbb{N}$ .

**Означення 2.1.** Нехай  $n \in \mathbb{R}_+$ . Оператор  $J_a^n$ , визначений на  $L_1[a, b]$  таким чином

$$J_a^n f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

для  $a \leq x \leq b$ , називається оператором Рімана-Ліувілля дробового інтегру-

вання порядку  $n$ . Для  $n = 0$ ,  $J_a^0 \equiv I$ , тотожній оператор.

**Теорема 2.1.** Нехай  $f \in L_1[a,b]$  та  $n > 0$ . Тоді інтеграл  $J_a^n f(x)$  існує майже для усіх  $x \in [a,b]$ . Крім того, функція  $J_a^n f(x)$  належить  $L_1[a,b]$ .

**Теорема 2.2.** Нехай  $m, n \geq 0$  і  $\phi \in L_1[a,b]$ . Тоді

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n} \phi$$

справедливо майже скрізь на  $[a,b]$ . Якщо при цьому  $\phi \in C[a,b]$  або  $m+n \geq 1$ , то цей вираз справедливий всюди на  $[a,b]$ .

**Теорема 2.3.** Оператори  $\{J_a^n : L_1[a,b] \rightarrow L_1[a,b]; n \geq 0\}$  утворюють комутативну напівгрупу відносно конкатенації. Тотожній оператор  $J^0$  є нейтральним елементом цієї напівгрупи.

**Теорема 2.4.** Нехай  $n > 0$ ,  $p > \max\{1, 1/n\}$  та  $\phi \in L_p[a,b]$ . Тоді

$$J_a^n \phi(x) = o\left((x-a)^{n-1/p}\right)$$

при  $x \rightarrow a_+$ . Якщо при цьому  $n - 1/p \notin \mathbb{N}$ , то  $J_a^n \phi \in C^{n-1/p}[a,b]$ , та  $D^{\lfloor n-1/p \rfloor} J_a^n \phi \in H_{n-1/p-\lfloor n-1/p \rfloor}[a,b]$ .

**Приклад 2.1.** Нехай  $f(x) = (x-a)^\beta$  для деякого  $\beta > -1$  та  $n > 0$ . Тоді

$$J_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (x-a)^{n+\beta}.$$

Ураховуючи відомий відповідний результат у випадку  $n \in \mathbb{N}$ , цей результат є саме тим, що можна очікувати від узагальнення інтегрального оператора. Дійсно, з урахуванням властивостей бета-функції,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \text{де } \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+,$$

отримаємо:

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\beta (x-t)^{n-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta(1-s)^{n-1} ds = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}(x-a)^{n+\beta}.$$

Встановивши основні властивості інтегральних операторів Рімана-Ліувілля, перейдемо до відповідних диференціальних операторів.

**Означення 2.2.** Нехай  $n \in \mathbb{R}_+$  и  $m = [n]$ . Оператор  $D_a^n$ , визначений як

$$D_a^n \equiv D^m J_a^{m-n},$$

називається оператором Рімана-Ліувілля дробової похідної порядку  $n$ .

Для  $n = 0$ ,  $D_a^0 \equiv I$ , тотожній оператор.

Як наслідок цього визначення, сформулюємо дробні похідні деяких елементарних функцій.

**Приклад 2.2.** Нехай  $f(x) = (x-a)^\beta$  для деякого  $\beta > -1$  та  $n > 0$ . Тоді, з урахуванням прикладу 2.1,

$$D_a^n f(x) = D^{[n]} J_a^{[n]-n} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma([n]-n+\beta+1)} D^{[n]}(x-a)^{[n]-n+\beta}.$$

Зокрема, якщо  $n - \beta \in \mathbb{N}$ , то права частина є  $[n]$ -ою похідною класичного полінома степеня  $[n] - (n - \beta) \in 0, 1, \dots, [n] - 1$ , тому вираз дорівнює нулю, тобто

$$D_a^n(x-a)^{n-m} = 0 \quad \forall n > 0, m \in \{1, 2, \dots, [n]\}.$$

З іншого боку,  $n - \beta \notin \mathbb{N}$ , маємо, що

$$D_a^n(x-a)^{n-\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n}.$$

Обидва ці співвідношення є прямими узагальненнями того, що ми знаємо про похідні цілого порядку.

## 2.2 Дробові похідні Грюнвальда–Летнікова

Скінченні різниці назад порядку  $n$  з кроком  $h$  визначимо як

$$\Delta_h^n f(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \quad (2.1)$$

щоб отримати наступний результат.

**Теорема 2.5.** *Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^n[a, b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді*

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n}{h^n}. \quad (2.2)$$

Цей результат насправді є корисним не лише для аналітичних досліджень. Використовуючи скінчене позитивне значення для  $h$  замість граничного переходу  $h \rightarrow 0$ , отримаємо чисельну апроксимацію похідної. Тому бажано мати аналог і для дробового випадку.

Дійсно, все, що потрібно зробити, це надати значення скінченній різниці в (2.1) при  $n \notin \mathbb{N}$ . Нагадаємо, що біноміальні коефіцієнти  $\binom{n}{k}$  для  $n \in \mathbb{R}$  і  $k \in \mathbb{N}_0$  визначаються співвідношеннями

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}. \quad (2.3)$$

Зауважимо, що  $\binom{n}{k} = 0$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$  та  $n < k$ . Таким чином, при  $n \in \mathbb{N}$  (2.3) рівносильно

$$\Delta_h^n f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \quad (2.4)$$

Тепер згадаємо, що хочемо мати вираз для класу функцій, який зазвичай є підмножиною  $C[a, b]$ , тобто класу функцій, визначених на скінченному інтервалі  $[a, b]$ . У цьому контексті варто зауважити, що представлення (2.4) мають дві проблеми в разі  $n \notin \mathbb{N}$ , де жоден з біноміальних коефіцієнтів не дорівнює нулю, тому що цей вираз насправді є нескінченним рядом:

- щоб обчислити вираз в (2.4) для всіх  $x \in (a, b]$ , необхідно визначити

функцію  $f$  на  $(-\infty, b]$ ;

- функція  $f$  повинна бути такою, щоб ряд збігався

Ці дві проблеми мають просте рішення: для заданої функції  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  визначимо нову функцію

$$f^* : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in [a, b], \\ 0, & \text{якщо } x \in (-\infty, a), \end{cases}$$

та використаємо цю функцію замість  $f$ . Ураховуючи, що  $f$  і  $f^*$  співпадають на відрізку, де визначені обидва функції, інтерпретуємо  $f^*$  як продовження  $f$  і, трохи зловживаючи позначеннями, будемо далі писати  $f$  замість  $f^*$ .

Узагальнимо тепер (2.2). З метою спрощення обмежимося умовою, що  $h \rightarrow 0$ . Спеціально для розглянутого значення  $x$  ми припускаємо, що  $h$  приймає лише значення  $h_N = (x - a)/N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Детальний аналіз показує, що ця умова не є обов'язковою.

**Означення 2.3.** Нехай  $n > 0$ ,  $f \in C^{[n]}[a, b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді

$$\tilde{D}_a^n f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{h_N}^n}{h_N^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N),$$

де  $h_N = (x - a)/N$ , називається дробовою похідною Грюнвальда–Летнікова порядку  $n$  функції  $f$ .

Наступний результат пояснює зв'язок між новим поняттям дробової похідної та вже відомим нам.

**Теорема 2.6.** Нехай  $n > 0$ ,  $m = [n]$  та  $f \in C^m[a, b]$ . Тоді для  $x \in (a, b]$ ,

$$\tilde{D}_a^n f(x) = D_a^n f(x).$$

В силу цієї теореми та співвідношення

$$(-1)^k \binom{-n}{k} = (-1)^k \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

$$= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots n}{k!} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)}.$$

є справедливим наступне означення.

**Означення 2.4.** Нехай  $n > 0$ ,  $f \in C[a,b]$  та  $a < x \leq b$ . Тоді

$$\tilde{J}_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lim_{N \rightarrow \infty} h_N^n \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)} f(x - kh_N),$$

де  $h_N = (x-a)/N$ , називається дробним інтегралом Грюнвальда–Летнікова порядку  $n$  функції  $f$ .

## 2.3 Дробові похідні Капуто

Виявляється, дробові похідні Римана–Ліувіля мають певні недоліки при спробі моделювання явищ реального світу за допомогою диференціальних рівнянь дробного порядку. Тому розглянемо модифіковане поняття дробної похідної. При порівнянні двох концепцій, друга з них, здається, краще підходить для таких завдань.

Почнемо попередньо з означення.

**Означення 2.5.** Нехай  $n \geq 0$  та  $m = \lceil n \rceil$ . Тоді задамо оператор  $\widehat{D}_a^n$  як

$$\widehat{D}_a^n f := J_a^{m-n} D^m f$$

для усіх  $D^m f \in L_1[a,b]$ .

Розглянемо випадок, коли  $n \in \mathbb{N}$ . Тут  $m = n$ , і, отже, з визначення випливає

$$\widehat{D}_a^n f = J_a^0 D^n f = D^n f,$$

тобто, ми відновлюємо стандартне визначення в класичному випадку. Розпочнемо аналіз цього оператора в дробовому випадку  $n \notin \mathbb{N}$  з простого прикладу.

**Приклад 2.3.** Нехай  $f(x) = (x - a)^\beta$  для деякого  $\beta \geq 0$ . Тоді

$$\widehat{D}_a^n f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(x-a)^{\beta-n} & \text{якщо } \beta \in \mathbb{N} \text{ і } \beta \geq m, \\ & \text{чи } \beta \notin \mathbb{N} \text{ і } \beta > m-1. \end{cases}$$

Порівняємо це твердження з відповідним твердженням для операторів Рімана-Ліувілля (приклад 2.2). Зауважимо, зокрема, на те, що два оператори мають різні ядра і що області визначення двох операторів (показані тут з точки зору допустимого діапазону параметра  $\beta$ ) також відрізняються.

Ми вимагали  $m = \lceil n \rceil$  в означенні 2.5. Така ж умова накладена в означенні  $D_a^n := D^m J_a^{m-n}$  дробової похідної Рімана-Ліувілля (означення 2.2). Однак у останньому випадку це обмеження насправді не є необхідним. Ми можемо використовувати будь-яке  $m \in \mathbb{N}$  з  $m \geq n$  у випадку Рімана-Ліувілля. Для введеного оператора  $\widehat{D}_a^n := J_a^{m-n} D^m$  з означення 2.5 ситуація інша: тут ми не можемо замінити  $m = \lceil n \rceil$  на яке-небудь  $m \in \mathbb{N}$  з  $m > \lceil n \rceil$ . Це стає очевидним, якщо подивитися на простий приклад  $f(x) = (x - a)^{\lceil n \rceil}$ . Для такої функції згідно з прикладом 2.5 маємо

$$\widehat{D}_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\lceil n \rceil + 1)}{\Gamma(\lceil n \rceil + 1 - n)}(x - a)^{\lceil n \rceil - n},$$

але, якщо  $m \in \mathbb{N}$  з  $m > \lceil n \rceil$ , отримаємо  $D^m f(x) = 0$ , отже  $J_a^{m-n} D^m f(x) = 0$  також.

Важною ланкою у формуванні альтернативного диференціального оператора є тотожність, яка пов'язує похідні Рімана-Ліувілля з одного боку і введений новий оператор з іншого.

**Теорема 2.7.** Нехай  $n \geq 0$  та  $m = \lceil n \rceil$ . Крім того, припустимо, що  $f \in A^m[a, b]$ . Тоді

$$\widehat{D}_a^n f = D_a^n [f - T_{m-1}[f; a]]$$

майже всюди. Зауважимо, що

$$T_{m-1}[f; a] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

позначає поліном Тейлора ступеня  $m - 1$  для функції  $f$  з центром в точці  $a$ ; у випадку, коли  $m = 0$ , вважаємо, що  $T_{m-1}[f; a] = 0$ .

Зверніть увагу, що вираз у правій частині рівняння існує, якщо існує  $D_a^n f$  і  $f$  має  $m - 1$  похідну в точці  $a$ , причому остання умова забезпечує існування полінома Тейлора. Ця умова є слабшою за попередню умову  $f \in A^m[a, b]$  (це впливає з того, що  $f \in A^m[a, b]$  приводить до (а)  $f \in C^{m-1}[a, b]$ , а отже, до існування полінома Тейлора і його похідної Рімана–Ліувілля, і (б) до існування  $D_a^n f$  майже всюди). З цього моменту ми будемо використовувати останній вираз.

**Означення 2.6.** Припустимо, що  $n \geq 0$  і  $f$  такі, що  $D_a^n[f - T_{m-1}[f; a]]$  існує, де  $m = \lceil n \rceil$ . Тоді визначимо функцію  $D_{*a}^n f$  рівністю

$$D_{*a}^n f = D_a^n[f - T_{m-1}[f; a]].$$

Оператор  $D_{*a}^n$  називається диференціальним оператором Капуто порядку  $n$ .

Зазначимо, що для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = n$  і, отже,

$$D_{*a}^n f = D_a^n[f - T_{n-1}[f; a]] = D^n f - D^n T_{n-1}[f; a] = D^n f$$

оскільки  $T_{n-1}[f; a]$  — поліном степені  $n - 1$ , який анулюється класичним оператором  $D^n$ . Таким чином, навіть у цьому випадку ми відновлюємо звичайний диференціальний оператор. Зокрема,  $D_{*a}^0$  знову є тотожним оператором.

## РОЗДІЛ 3

### СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВА АПРОКСИМАЦІЯ ДРОБОВОГО РІВНЯННЯ АДВЕКЦІЇ-ДИСПЕРСІЇ

Задамо дробовий оператор  $\nabla_\gamma^\alpha$

$$2\nabla_\gamma^\alpha = (1 + \gamma) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + (1 - \gamma) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}, \quad (3.1)$$

тоді, рівняння (1.1) можемо записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Z \frac{\partial u}{\partial x} = d\nabla_\gamma^\alpha u. \quad (3.2)$$

Представимо дробові похідні за допомогою схеми Грюнвальда-Летнікова, яка має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{\left[\frac{x-a}{\Delta x}\right]} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} u(x - \tau\Delta x, t), \\ \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha}(x, t) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{\left[\frac{b-x}{\Delta x}\right]} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} u(x + \tau\Delta x, t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $[a]$  є ціла частина числа  $a$  [9].

Для визначення явних схем ми використаємо варіант методу Грюнвальда-Летнікова, в якому оцінки функції зсуваються вліво або вправо, і отримуємо те, що відомо як зсунута формула Грюнвальда-Летнікова. Зсув вище відповідає заміні відповідних компонент  $u(x - \tau\Delta x, t)$  та  $u(x + \tau\Delta x, t)$  на  $u(x - \tau\Delta x + \Delta x, t)$  та  $u(x + \tau\Delta x - \Delta x, t)$ , що не впливає на межу при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Вибір зсунутої формули Грюнвальда-Летнікова має дві причини:

- шлях отримання узагальнень наявних схем, а саме: при дробовому порядку  $\alpha = 2$  ми отримуємо стандартне рівняння переносу-дифузії.
- апроксимації похідних, отримані за допомогою класичного методу

Грюнвальда-Летнікова, досить часто призводять до нестабільних числових схем, що може ускладнити розрахунки.

Для отримання схеми дробової скінченно-різницевої апроксимації ми припускаємо, що існують апроксимації  $U = \{U_j^n\}$  значень  $U(x_j, t_n)$  в точках сітки

$$x_j = j\Delta x, \quad j = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N$$

та

$$t_n = n\Delta t, \quad n \geq 0,$$

де  $\Delta x$  - це рівномірний крок по простору, а  $\Delta t$  - рівномірний крок по часу.

Нехай для  $\Delta x$  та  $\Delta t$

$$\nu = \frac{Z\Delta t}{\Delta x} \quad \text{та} \quad \omega_\alpha = \frac{d\Delta t}{\Delta x^\alpha}.$$

Кількість  $\nu$  відома як число Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ), а параметр  $\omega_\alpha$  пов'язаний з коефіцієнтом дифузії.

Схеми скінченних різниць будуть описані на основі операторів проти потоку, центрального та другого порядку [8], які відповідно визначаються

$$\Delta_- U_j^n = U_j^n - U_{j-1}^n, \quad \Delta_0 U_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2}, \quad \text{та} \quad \xi^2 U_j^n = U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n.$$

За допомогою апроксимації на основі зсунутих формул Грюнвальда-Летнікова ми визначаємо дискретні наближення до дробових похідних

$$\left( \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{N+j+1} p_\tau U_{j+1-\tau}^n, \quad \left( \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} \right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta x^\alpha} \sum_{\tau=0}^{N-j+1} p_\tau U_{j-1+\tau}^n, \quad (3.4)$$

для

$$p_\tau = (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} = (-1)^\tau \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\tau+1)}{\tau!} = \frac{\Gamma(\tau-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\tau+1)}. \quad (3.5)$$

Дробовий оператор  $\nabla_\gamma^\alpha$ , заданий у (3.1), апроксимується на  $\xi_\gamma^\alpha/2\Delta x^\alpha$ , де  $\xi_\gamma^\alpha$  визначається як

$$\xi_\gamma^\alpha U_j^n = (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{N+j+1} p_\tau U_{j+1-\tau}^n + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{N-j+1} p_\tau U_{j-1+\tau}^n. \quad (3.6)$$

Отже, запишемо схему скінченних різниць для апроксимації рівняння (1.1) у формі

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu \Delta_- U_j^n + \frac{1}{2} \omega_\alpha \xi_\gamma^\alpha U_j^n. \quad (3.7)$$

Згідно з дискретизацією адвективної частини, ми називаємо вищенаведену схему схемою проти потоку. Інша апроксимація отримується заміною оператора против потоку на центральний оператор у вигляді

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu \Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2} \omega_\alpha \xi_\gamma^\alpha U_j^n. \quad (3.8)$$

Ми називаємо цю схему центральною схемою, відповідно до дискретизації адвективної частини. Остання схема отримується аналогічно схемі Лакса-Вендроффа. Якщо розкласти функцію  $u$  навколо часового рівня  $n$ , отримаємо

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \quad (3.9)$$

З рівняння (3.2) та  $d = 0$  маємо

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = Z^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Підставимо (3.2) та (3.10) у (3.9), тоді

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \left[ -Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + d (\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n \right] + \frac{\Delta t^2}{2} Z^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n.$$

Отже, схема Лакса-Вендроффа може бути записана у вигляді

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \nu \Delta_0 U_j^n + \frac{1}{2} \omega_\alpha \xi_\gamma^\alpha U_j^n + \frac{1}{2} z^2 \xi^2 U_j^n. \quad (3.11)$$

### 3.1 Матричне представлення схем скінченних різниць

Запишемо розглянуті вище явні схеми у вигляді матриці. Припустимо, що вузлові точки мають вигляд  $U_j^n = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N$ , також припустимо, що граничні умови відомі, тобто функції  $U_{-N}^n$  та  $U_N^n$  відомі для  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Запровадивши вектор  $\mathbf{U}^n = [U_{-N+1}^n, \dots, U_{-1}^n, U_0^n, U_1^n, U_2^n, \dots, U_{N-1}^n]^T$ , ми можемо записати схеми у вигляді матричного рівняння

$$\mathbf{U}^{n+1} = G\mathbf{U}^n + \mathbf{z}^n, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

де  $\mathbf{G}$  - матриця ітерації розміром  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ , а  $\mathbf{z}^n$  - вектор, що містить граничні значення.

Матрицю  $\mathbf{G}$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\omega_\alpha \mathbf{B}, \quad (3.13)$$

де  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$  - матриці однакового розміру  $(2N - 1) \times (2N - 1)$ , і  $\mathbf{A}$  відповідає дискретизації адвекції, тоді як  $\mathbf{B}$  пов'язана з дискретизацією дифузії. Для всіх вищезгаданих схем матриця  $\mathbf{B}$  є однаковою і визначається таким чином

$$\mathbf{B} = (1 + \gamma) \mathbf{L} + (1 - \gamma) \mathbf{L}^T,$$

де

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & & & & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & p_0 & \\ p_{2N-1} & \cdots & p_2 & p_1 & \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Вектор  $\mathbf{z}^n$  складається з двох частин

$$\mathbf{z}^n = \mathbf{z}_A^n + \mathbf{z}_B^n,$$

де вектор  $\mathbf{z}_A^n$  містить граничні значення, які відповідають матриці  $\mathbf{A}$ , а вектор  $\mathbf{z}_B^n$  - граничні значення, які відносяться до матриці  $\mathbf{B}$ . Для  $\mathbf{z}_B^n$  маємо

$$\mathbf{z}_B^n = \mathbf{z}_{B+}^n + \mathbf{z}_{B-}^n,$$

де

$$\mathbf{z}_{B+}^n = \frac{\omega_\alpha(1+\gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_2 \\ \vdots \\ p_{2N-1} \\ p_{2N} \end{pmatrix} U_{-N}^n + \frac{\omega_\alpha(1+\gamma)}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_0 \end{pmatrix} U_N^n$$

та

$$\mathbf{z}_{B-}^n = \frac{\omega_\alpha(1-\gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n + \frac{\omega_\alpha(1-\gamma)}{2} \begin{pmatrix} p_{2N} \\ p_{2N-1} \\ \vdots \\ p_2 \end{pmatrix} U_N^n$$

Для схеми проти потоку матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{z}_A^n$  мають відповідно такий вигляд

$$\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 1-\nu & & & & \\ & \nu & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \mathbf{z}_*^n = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n.$$

Для центральної схеми матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{z}_A^n$  мають відповідно

такий вигляд

$$\mathbf{A}_{**} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu/2 & & \\ \nu/2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -\nu/2 \\ & & \nu/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } \mathbf{z}_{**}^n = \begin{pmatrix} \nu/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\nu/2 \end{pmatrix} U_N^n.$$

Для схеми Лакса-Вендроффа матриця  $\mathbf{A}$  та вектор  $\mathbf{z}_{\mathbf{A}}^n$  мають відповідно такий вигляд

$$\mathbf{A}_{***} = \begin{pmatrix} 1 - \nu^2 & \frac{\nu(\nu-1)}{2} & & \\ \frac{\nu(\nu+1)}{2} & & \ddots & \\ & \ddots & & \frac{\nu(\nu-1)}{2} \\ & & \frac{\nu(\nu+1)}{2} & 1 - \nu^2 \end{pmatrix}$$

та

$$\mathbf{z}_{***}^n = \begin{pmatrix} \frac{\nu(\nu+1)}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} U_{-N}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\nu(\nu-1)}{2} \end{pmatrix} U_N^n.$$

## 3.2 Аналіз збіжності дробових скінченно-різницьових схем

Розглянемо збіжність скінченно-різницьових схем. По-перше, покажемо, що схеми сумісні з рівнянням (1.1), а по-друге, дослідимо, при яких умовах вони стійкі. Для аналізу стійкості використаємо два методи.

Для розглянутих чисельних схем проаналізуємо помилку відсікання

$T_j^n$ . Припустимо, що  $u = u(x, t)$  є розв'язком рівняння (1.1). У кожній з трьох схем ми апроксимуємо дробовий оператор  $\nabla_\gamma^\alpha$  за  $\frac{\xi_\beta^\alpha}{2\Delta x^\alpha}$ . Цей оператор має точність першого порядку для випадку однорідних граничних умов, тобто

$$\frac{\xi_\beta^\alpha u_j^n}{2\Delta x^\alpha} = (\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x).$$

Використаємо цей вираз для схеми проти потоку (3.7) та отримаємо

$$\begin{aligned} T_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + Z \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \frac{d}{2\Delta x^\alpha} \xi_\gamma^\alpha u_j^n \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t) + Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x) - d(\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Тобто схема проти потоку має порядок точності  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta x)$ .

Аналогічно для центральної схеми (3.8) маємо

$$\begin{aligned} T_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + Z \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{d}{2\Delta x^\alpha} \xi_\gamma^\alpha u_j^n \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t) + Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) - d(\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

та порядок точності  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x)$ .

Для схеми Лакса-Вендроффа (3.11) маємо

$$\begin{aligned} T_j^n &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + Z \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - Z^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{d}{2\Delta x^\alpha} \xi_\gamma^\alpha u_j^n = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) + Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) - Z^2 \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta x^2) - d(\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Порядок точності дорівнює  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x)$ . Для маленьких значень  $d$  з (3.10) випливає, що

$$T_j^n = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^2) + Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) - d(\nabla_\gamma^\alpha u)_j^n + \mathcal{O}(\Delta x),$$

тоді схема Лакса-Вендроффа має порядок точності близький до  $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x)$ .

### 3.3 Аналіз стійкості дробових скінченно-різницевих схем

Щоб отримати необхідні умови стійкості для дробових скінченно-різницевих схем, використаємо аналіз Фур'є або аналіз фон Неймана, як у класичному випадку. Крім того, отримаємо достатні умови стійкості, обчислюючи чисельно норму ітераційної матриці кожної схеми. Ці умови дозволяють нам зробити висновок, що деякі з теоретично необхідних умов, отриманих за допомогою аналізу фон Неймана, є необхідними і достатніми умовами для стійкості.

Аналіз Фур'є або аналіз фон Неймана передбачає, що ми маємо розв'язок, визначений на всій дійсній прямій. Він також застосовується до задач з періодичними граничними умовами, оскільки розв'язок розглядається як періодична функція, обмежена в  $\mathbb{R}$ . Хоча аналіз фон Неймана дає необхідні і достатні умови стійкості тільки при застосуванні до чистої задачі з початковими значеннями і до задач з періодичними граничними умовами, він завжди дає необхідні умови для стійкості, незалежно від того, чи є граничні умови проблеми періодичними [8].

Аналіз фон Неймана припускає, що будь-яка скінчена функція сітки, наприклад, числове розв'язок  $U_j^n$ , має тенденцію декомпозуватися на ряд Фур'є у вигляді

$$U_j^n = \sum_{s=-N}^N \varphi_s^n e^{i\kappa_s(j\Delta x)}, \quad j = -N, \dots, N,$$

де  $\varphi_s^n$  - це амплітуда  $s$ -го гармоніка, а  $\kappa_s = \frac{s\pi}{N\Delta x}$ . Добуток  $\kappa\Delta x$  іноді називається кутом фази  $\eta = \kappa_s\Delta x$ , який охоплює всю область  $[-\pi, \pi]$ , з кроком  $\pi/N$ . Якщо фактор амплітуди  $\varphi$  не зростає з часом, умови стійкості будуть виконані, тобто, якщо ми маємо  $\varphi(\eta) \leq 1$  для всіх  $\eta$ .

Спочатку, ми розглянемо деякі очевидні властивості, що стосуються

коефіцієнтів  $p_\tau$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, 2N$ .

**Лема 3.1.** *Коефіцієнти  $p_\tau$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, 2N$  мають наступні властивості:*

$$(a) p_0 = 1, p_1 = -\alpha, p_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \text{ і } p_\tau > 0, \tau \geq 3.$$

$$(б) \sum_{\tau=2}^{\infty} p_\tau = \alpha - 1$$

*Доведення.* (а) Запишемо  $p_\tau$  як

$$p_0 = 1 \text{ та } p_{\tau+1} = -\frac{(\alpha - \tau)}{\tau + 1} p_\tau, \tau \geq 1.$$

З означення  $p_\tau$  ми маємо  $p_1 = -\alpha$  і  $p_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} > 0$ . Оскільки  $\alpha - \tau < 0$  при  $\tau \geq 3$ , за індукцією ми приходимо до висновку, що  $p_\tau > 0$  при  $\tau \geq 3$ .

(б) Цей результат безпосередньо впливає з того, що  $\sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau = 0$ , оскільки  $p_0 = 1$  і  $p_1 = -\alpha$ , що дає  $p_0 + p_1 + \sum_{\tau=2}^{\infty} p_\tau = 0$ .  $\square$

При  $Z = 0$ , рівняння (1.1) зводиться до дробового рівняння дифузії

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\omega_\alpha \xi_\gamma^\alpha U_j^n}{2}. \quad (3.15)$$

Для застосування аналізу фон Неймана ми припустимо, що задача визначена на  $\mathbb{R}$  і задамо дискретний оператор  $\xi_\gamma^\alpha$

$$\xi_\gamma^\alpha U_j^n = (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau U_{j+1-\tau}^n + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau U_{j-1+\tau}^n. \quad (3.16)$$

Отже, ми можемо записати схему (3.15) у вигляді

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau U_{j+1-\tau}^n + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau U_{j-1+\tau}^n \right\}. \quad (3.17)$$

Слід зазначити, що при  $\alpha = 2$ , маємо  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = 1$  та  $p_\tau = 0$  для всіх  $\tau \geq 3$ .

**Теорема 3.1.** *Нехай  $-1 \leq \gamma \leq 1$  та  $1 < \alpha \leq 2$ . Якщо числова схема (3.17) є стійкою за фон Нейманом, тоді  $\omega_\alpha \leq 2^{1-\alpha}$ .*

*Доведення.* Підставивши моду  $\varphi^n e^{ij\eta}$  у (3.17), отримаємо коефіцієнт підсилення

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{i(1-\tau)\eta} + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{-i(1-\tau)\eta} \right\}. \quad (3.18)$$

Далі розглянемо випадки  $\eta = 0$  та  $\eta = \pi$  в рівнянні (3.18). Зауважимо, що область навколо  $\eta = 0$  та  $\eta = \pi$  відповідає низьким та високим частотам, відповідно.

Тож для  $\eta = 0$  коефіцієнт підсилення (3.18) зводиться до

$$\varphi(0) = 1 + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau \right\},$$

так як  $\sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau = 0$ , тоді  $\varphi(0) = 1$ .

Для  $\eta = \pi$  коефіцієнт підсилення (3.18) матиме вигляд

$$\varphi(\pi) = 1 + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau \cos((1 - \tau)\pi) + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau \cos((1 - \tau)\pi) \right\},$$

Оскільки  $\cos((1 - \tau)\pi) = (-1)^{\tau-1}$ , з цього випливає, що

$$\varphi(\pi) = 1 + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ -(1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau - (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau \right\} = 1 - \omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau,$$

де  $\sigma_\tau = \binom{\alpha}{\tau}$  та умова  $|\varphi(\pi)| \leq 1$  еквівалентна

$$\omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau \leq 2.$$

Тому для  $\sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau = 2^\alpha$  повинна виконуватись нерівність  $\omega_\alpha 2^\alpha \leq 2$ , тобто  $\omega_\alpha \leq 2^{1-\alpha}$ .

□

Наступний результат стійкості стосується схеми проти потоку (3.7).

**Теорема 3.2.** *Нехай  $-1 \leq \gamma \leq 1$  та  $1 < \alpha \leq 2$ . Якщо схема проти потоку (3.7) є стійкою за фон Нейманом, тоді  $\nu + \omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .*

*Доведення.* Коефіцієнт підсилення для схеми проти потоку має вигляд

$$\varphi_U(\eta) = 1 - \nu(1 - e^{-i\eta}) + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{i(1-\tau)\eta} + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{-i(1-\tau)\eta} \right\}.$$

Якщо  $\eta = \pi$ , маємо

$$\varphi_U(\eta) = 1 - 2\nu - \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau \right\}.$$

Щоб задовольнити умову  $|\varphi_U(\pi)| \leq 1$ , має бути виконано

$$2\nu + \omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau \leq 2.$$

Крім того

$$2\nu + \omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau = 2\nu + \omega_\alpha 2^\alpha$$

та з  $2\nu + \omega_\alpha 2^\alpha \leq 2$  випливає, що  $\nu + \omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ . □

Наступний результат стійкості стосується схеми Лакса-Вендроффа (3.11).

**Теорема 3.3.** *Нехай  $-1 \leq \gamma \leq 1$  та  $1 < \alpha \leq 2$ . Якщо схеми Лакса-Вендроффа (3.11) є стійкою за фон Нейманом, тоді  $z^2 + \omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .*

*Доведення.* Коефіцієнт підсилення для схеми Лакса-Вендроффа (3.11) має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_L(\eta) = & 1 - \frac{\nu}{2}(e^{i\eta} - e^{-i\eta}) + \frac{\nu^2}{2}(e^{i\eta} - 2 + e^{-i\eta}) \\ & + \frac{\omega_\alpha}{2} \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{i(1-\tau)\eta} + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{-i(1-\tau)\eta} \right\}. \end{aligned}$$

Якщо  $\eta = \pi$ , тоді

$$\varphi_L(\eta) = 1 - 2\nu^2 - \frac{1}{2}\omega_\alpha \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma_\tau \right\}.$$

Щоб задовольнити умову  $|\varphi_L(\pi)| \leq 1$ , має бути виконано

$$2\nu^2 + \omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau \leq 2.$$

Крім того

$$2\nu + \omega_\alpha \sum_{\tau=0}^{\infty} \sigma^\tau = 2\nu^2 + \omega_\alpha 2^\alpha$$

та з  $2\nu^2 + \omega_\alpha 2^\alpha \leq 2$  випливає, що  $\nu^2 + \omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .  $\square$

Отримання умов стійкості для центральної схеми набагато складніше, ніж для попередніх схем. Для центральної схеми стандартного рівняння переносу-дифузії, тобто при  $\alpha = 2$ , також складно. Фактично, аналіз стійкості, пов'язаний з цією схемою, протягом років був предметом дискусій через явну складність отримання умов стійкості. Наступна теорема, пов'язана з центральною схемою, вказує необхідні умови стійкості.

**Теорема 3.4.** *Нехай  $-1 \leq \gamma \leq 1$  та  $1 < \alpha \leq 2$ . Якщо центральна схема (3.8) є стійкою за фон Нейманом, тоді  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .*

*Доведення.* Для центральної схеми (3.8) коефіцієнт підсилення можна записати у вигляді

$$\varphi_C(\eta) = 1 - \frac{\nu}{2}(e^{i\eta} - e^{-i\eta}) + \frac{1}{2}\omega_\alpha \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{i(1-\tau)\eta} + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau e^{-i(1-\tau)\eta} \right\}.$$

Якщо  $\eta = \pi$ , тоді

$$\varphi_C(\eta) = 1 - \frac{1}{2}\omega_\alpha \left\{ (1 + \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau + (1 - \gamma) \sum_{\tau=0}^{\infty} p_\tau \right\}.$$

і так як  $|\varphi_C(\eta)| \leq 1$ , отримаємо, що  $\omega_\alpha \leq 2^{1-\alpha}$ .  $\square$

## РОЗДІЛ 4

### ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Для побудови скінченно-різницевого розв'язку початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії був складений програмний додаток мовою пакету MATLAB.

Розглянемо деякі особливості даної програми.

Побудуємо рівномірну сітку

$$x_j = j\Delta x, \quad j = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n \geq 0.$$

Визначимо такі граничні

$$U_{-N}^n = 1 - n\Delta t, \quad U_N^n = 1 + n\Delta t$$

та початкові умови

$$U_j^0 = (j\Delta x)^2.$$

Спочатку побудуємо матриці  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}$ , та матрицю  $\mathbf{A}_{**}$  і вектор  $z^n$  для випадку коли похідна  $\frac{\partial u}{\partial x}$  апроксимується за центральною схемою. Знаючи скінченно-різницевий розв'язок  $U^n$  в момент часу  $t = n\Delta t$ , за формулою (3.12) знайдемо скінченно-різницевий в момент часу  $t = (n + 1)\Delta t$ :

```
L = zeros(2*N-1, 2*N-1);
v(1:2*N-2)=p(0);
L=diag(v,1);
for k=1:2*N-1
    v=[];
    v(1:2*N-k) = p(k);
    p_v(k) = p(k+1);
    L=L+diag(v,-k+1);
end
B = (1+gamma_val)*L + (1-gamma_val)*L';
```

```

v(1:2*N-2) = nu/2;
A = diag(v, -1) + diag(-v, 1)+diag(ones(1,2*N-1),0);
for i = 1:2*N-1
    U(i, 1)= U0(-1 + i*dx);
end
% матриця ітерацій
G = A + omega_alpha/2 * B;
for nt = 0:M-2
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(1) = nu;
    v_1 = zeros(2*N-1, 1);
    v_1(1) = nu/2;
    %central
    z_N_a = v_1 * U_m_N(nt) + -v_1(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(2*N-1) = p(0);
    z_N_b_m = p_v' * U_m_N(nt) + v* U_p_N(nt);
    z_N_b_m = omega_alpha * (1+gamma_val)/2 * z_N_b_m
    z_N_b_p = v(end:-1:1) * U_m_N(nt) + p_v'(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    z_N_b_p = omega_alpha * (1-gamma_val)/2 * z_N_b_p
    z_b = z_N_b_m + z_N_b_p;
    z_n = z_N_a + z_b;
    U_n = U(:, nt+1);
    U_n_1 = G*U_n + z_n;
    U(:, nt+2) = U_n_1;
end

```

Побудуємо графік скінченно-різницевого розв'язку:

```

[X,Y]=meshgrid(dt:dt:T, -1+dx:dx:1-dx);
mesh(X,Y,U)

```

За теоремою 3.4 центральна схема (3.7) є стійкою, якщо  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} \leq 1$ .

При  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 0.5$ ,  $d = 0.2$  ми маємо  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} = 0.063246$ , тобто умова виконується, скінченно-різницева схема стійка. Скінченно-

різницевий розв'язок приведено на Рис. 4.1.

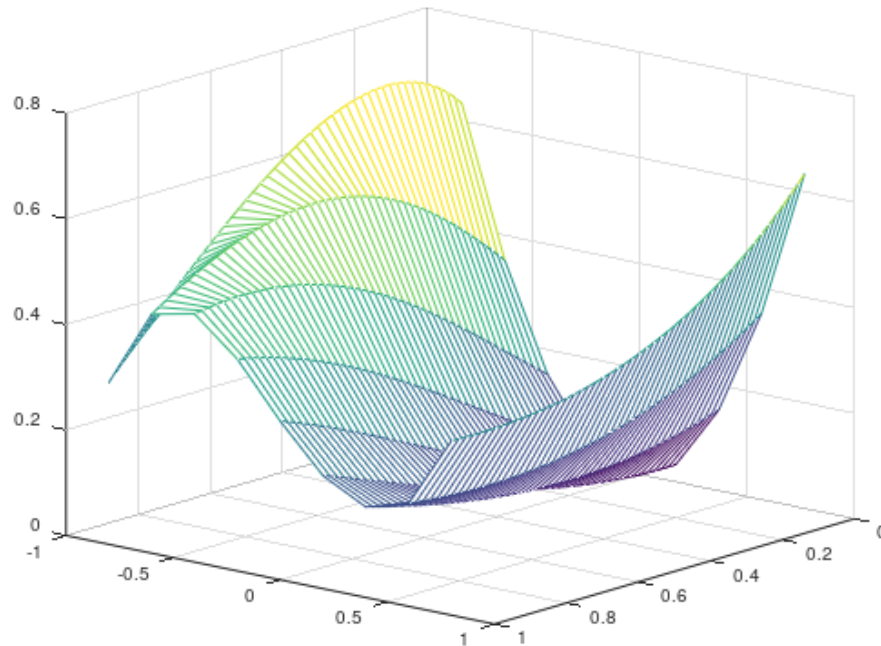


Рис. 4.1. Скінченно-різницевий розв'язок ( $N = 5$ ,  $n = 50$ )

Розглянемо приклад, коли  $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $d = 0.2$  та будемо змінювати значення параметра  $Z$  (рис 4.2)

Збільшення швидкості руху води в порах призводить до швидшого переміщення речовини через систему та спричиняє більш різкі зміни у розподілі концентрації. У чисельному розв'язку це може проявлятися як більша зміна значень функції між сусідніми точками сітки за один крок часу.

Якщо  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ , то  $\omega_\alpha 2^{\alpha-1} = 2.7386$  і умова стійкості не виконується. Тобто, в цьому випадку скінченно-різницева схема не є стійкою. На Рис. 4.3 приведено результати роботи програми, з яких видно, що задовільний розв'язок побудувати не вдалося.

Якщо  $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ , умова стійкості також виконується. Відмітимо, що параметр  $\gamma$  не впливає на стійкість схеми (рис. 4.4, 4.5)

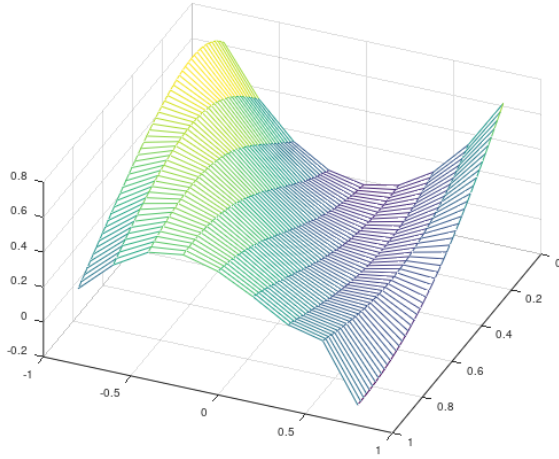
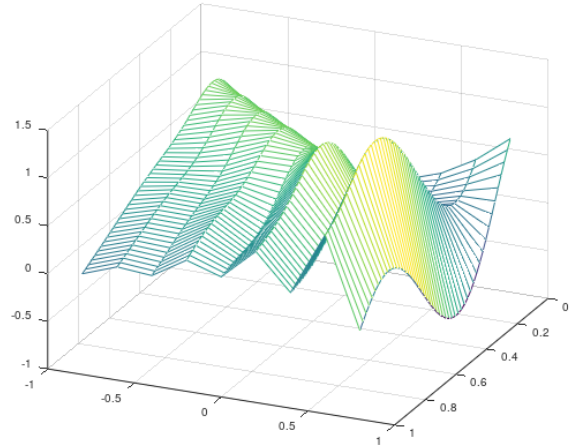
а)  $Z = 1$ б)  $Z = 3$ 

Рис. 4.2. Скінченно-різницевий розв'язок ( $\gamma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )

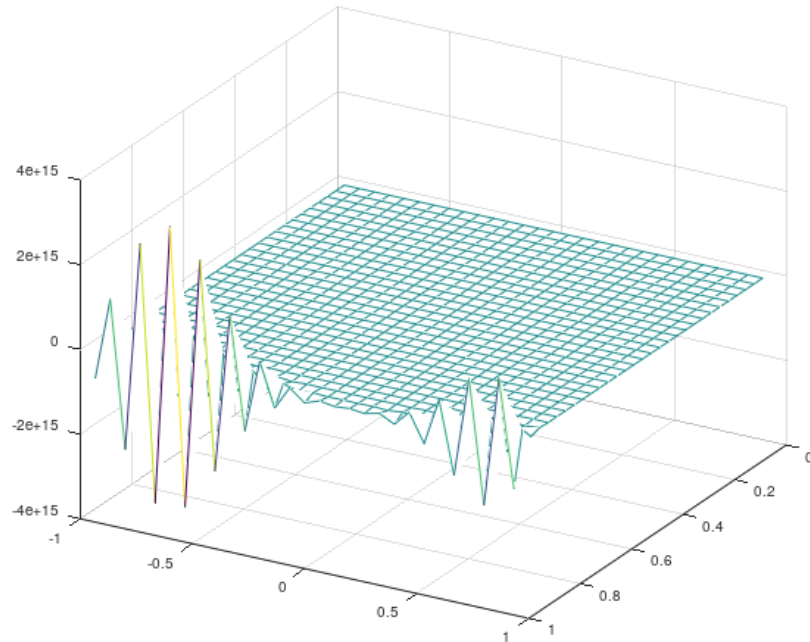
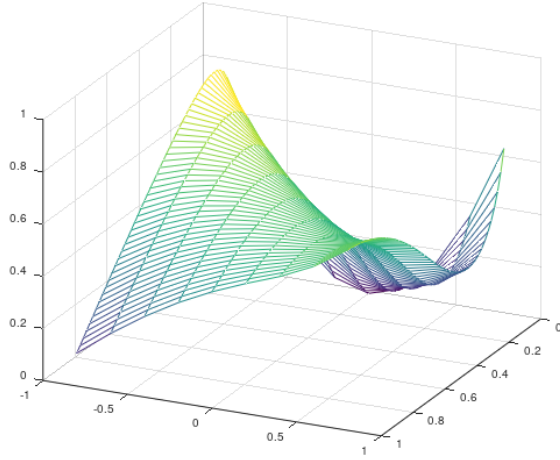
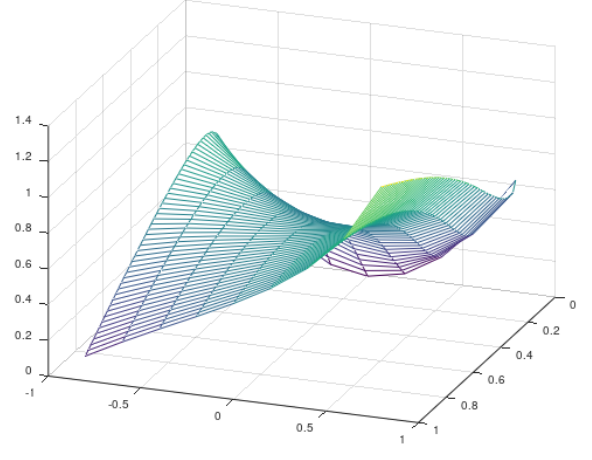
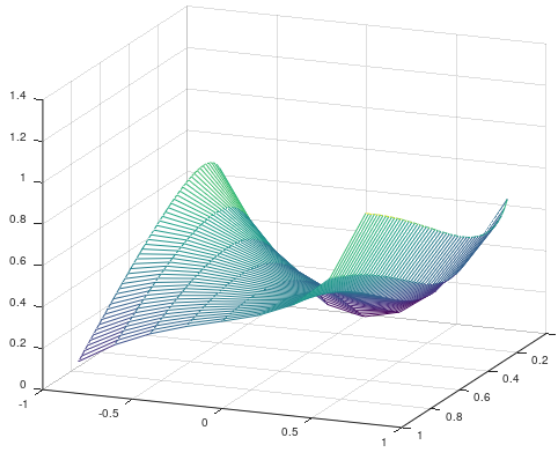
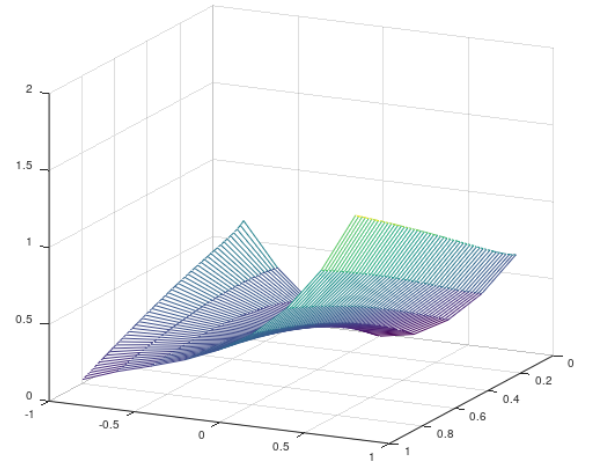


Рис. 4.3. Результати роботи програми ( $N = 15$ ,  $n = 30$ )

а)  $\gamma = -1$ б)  $\gamma = -0.5$ Рис. 4.4. Скінченно-різницевий розв'язок ( $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )а)  $\gamma = 0$ б)  $\gamma = 1$ Рис. 4.5. Скінченно-різницевий розв'язок ( $\alpha = 1.5$ ,  $Z = 1$ ,  $d = 1$ ,  $N = 5$ ,  $n = 50$ )

## ВИСНОВКИ

Розглянуто явну скінченно-різницеву апроксимацію початково-крайової задачі для дробового рівняння адвекції-дисперсії з похідною Капуто.

Схема є умовно стійкою.

Створено програмний додаток мовою пакету MATLAB, який реалізує вказану схему, та знаходить скінченно-різницевий розв'язок для різних коефіцієнтів дробового рівняння та різних параметрів сітки.

Проведено серію обчислювальних експериментів щодо встановлення стійкості скінченно-різницевої схеми.

Результати експериментів узгоджуються з теоретичними результатами щодо умовної стійкості скінченно-різницевої схеми.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В. В., Реут В. В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник / Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. 116 с.
2. Вербіцький В.В., Крачилова В.Д., Жарка М. С. Моделювання перенесення забруднюючих речовин у пористих середовищах: матеріали XV міжнародної науково-практичної конф. «Інформаційні технології і автоматизація – 2022» (Одеса, 20-21 жовтня 2022 р.) / Одеса, Видавництво ОНТУ, 2022. с. 20. (<https://card-file.ontu.edu.ua/handle/123456789/23815>)
3. D. A. Benson, S. W. Wheatcraft, and M. M. Meerschaert, The fractional order governing equations of Levy motion, *Water Resour Res*, vol. 36, 1413–1423, 2000.
4. Diethelm K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. — 281 p.
5. Li Ch. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. CRC Press, 2015. — 281 p.
6. J. F. Kelly and M. M. Meerschaert. “The fractional advection-dispersion equation for contaminant transport” in *Handbook Of Fractional Calculus With Applications (Applications in Physics, Volume 5, Part B)*, V. E. Tarasov, Eds. De Gruyter, 2019, , pp. 129-150.
7. K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974. —
8. Owolabi K. M., Atangana A. *Numerical Methods for Fractional Differentiation*. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2019. — 328 p.
9. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999. —

## ДОДАТОК А. ТЕКСТ ПРОГРАМИ

```

function fade
    global alpha
    global dt
    N = 50
    M = 100
    T = 1
    gamma_val = 0;
    alpha = 1.5
    Z = 0.5;
    d = 0.2;
    dx = 1/N
    dt = T/M

    nu = Z * dt/dx
    omega_alpha = d * dt/(dx^alpha)

    stab = omega_alpha*2^(alpha-1)

    L = zeros(2*N-1, 2*N-1);

    v(1:2*N-2)=p(0);
    L=diag(v,1);

    for k=1:2*N-1
        v=[];
        v(1:2*N-k) = p(k);
        p_v(k) = p(k+1);
        L=L+diag(v,-k+1);
    end

    B = (1+gamma_val)*L + (1-gamma_val)*L';

```

```

v(1:2*N-2) = nu/2;
A = diag(v, -1) + diag(-v, 1)+diag(ones(1,2*N-1),0);

for i = 1:2*N-1
    U(i, 1)= U0(-1 + i*dx);
end

% матриця ітерацій
G = A + omega_alpha/2 * B;

for nt = 0:M-2
    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(1) = nu;

    v_1 = zeros(2*N-1, 1);
    v_1(1) = nu/2;
    %central
    z_N_a = v_1 * U_m_N(nt) + -v_1(end:-1:1) * U_p_N(nt);

    v = zeros(2*N-1, 1);
    v(2*N-1) = p(0);

    z_N_b_m = p_v' * U_m_N(nt) + v* U_p_N(nt);

    z_N_b_m = omega_alpha * (1+gamma_val)/2 * z_N_b_m
    z_N_b_p = v(end:-1:1) * U_m_N(nt) + p_v'(end:-1:1) * U_p_N(nt);
    z_N_b_p = omega_alpha * (1-gamma_val)/2 * z_N_b_p
    z_b = z_N_b_m + z_N_b_p;

    z_n = z_N_a + z_b;

    U_n = U(:, nt+1);

    U_n_1 = G*U_n + z_n;

```

```
    U(:, nt+2) = U_n_1;
end
[X,Y]=meshgrid(dt:dt:T,-1+dx:dx:1-dx);
mesh(X,Y,U)
end

function y=U0(x)
    y=x^2;
endfunction

function y=U_m_N(n)
    global dt
    y = 1-n*dt;
endfunction

function y=U_p_N(n)
    global dt
    y = 1+n*dt;
endfunction

function y = p(tau)
    global alpha
    y=gamma(tau-alpha)/gamma(-alpha)/gamma(tau+1);
end
```