

Mathematical Subject Classification: 34E05, 34A12
УДК 517.925.54

А. А. Кореновский

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ
РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ
ОСОБОМ СЛУЧАЕ**

Кореновський А. О. Асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків диференціальних рівнянь в одному особливому випадку. Розглядається система квазілінійних диференціальних рівнянь зі зникаючими (сумованими та несумованими) при $t \rightarrow +\infty$ множниками в правій частині. Наведені достатні умови, за яких для даної системи побудовані асимптотичні в певному сенсі розвинення O -розв'язків при $t \rightarrow +\infty$.
Ключові слова: квазілінійні сингулярні диференціальні рівняння, існування та асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків.

Кореновский А. А. Асимптотические разложения исчезающих решений дифференциальных уравнений в одном особом случае. Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений с исчезающими (суммируемыми и несуммируемыми) при $t \rightarrow +\infty$ множителями в правой части. Приведены достаточные условия, при выполнении которых для данной системы построены асимптотические в определенном смысле разложения O -решений при $t \rightarrow +\infty$.
Ключевые слова: квазилинейные сингулярные дифференциальные уравнения, существование и асимптотические разложения исчезающих решений.

Korenovskyi A. Asymptotical expansion of vanishing solutions of differential equations in one special case. Considered in this paper is a system of quasilinear differential equations with factors on the right side that disappear when $t \rightarrow \infty$ (absolutely integrable or not). Sufficient conditions are obtained under which it is possible to conduct the asymptotic in a certain sense at $t \rightarrow \infty$ expansions of O -solutions of the described system.

Key words: quasilinear singular differential equations, existence and asymptotic expansion of disappearing solutions.

ВВЕДЕНИЕ. Данная статья является непосредственным продолжением работы [1]. На исследуемую в [1] систему дифференциальных уравнений наложены дополнительные условия. Построены обобщенные (в смысле работ [2–4]) асимптотические разложения исчезающих при $t \rightarrow +\infty$ решений этой системы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Рассмотрим в некоторой области $G = \Delta \times \nabla$, $\Delta = \{t : t_0 \leq t < +\infty\}$,

$$\begin{aligned} \nabla = \{ \xi : & \text{colon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ & \xi_1 = \text{colon}(\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}, \\ & \xi_2 = \text{colon}(\xi_{0,n_1+1}, \dots, \xi_{0,n_1+n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2}, \\ & \xi_3 = \text{colon}(\xi_{0,n_1+n_2+1}, \dots, \xi_{0,n_1+n_2+n_3}) \in \mathbb{C}^{n_3}, \\ & \|\xi\| \leq c, \ c = \text{const} > 0, \ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

(здесь и далее используется обозначение $\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$, где $A = (a_{ik}) - m \times n$ -матрица, $n, m \in \mathbb{N}$) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\xi'_1 &= Q_1(t) + B_{11}(t)\xi_1 + B_{12}(t)\xi_2 + B_{13}(t)\xi_3 + F_1(t, \xi), \\ \xi'_2 &= \alpha(t) [Q_2(t) + B_{21}(t)\xi_1 + B_{22}(t)\xi_2 + B_{23}(t)\xi_3 + F_2(t, \xi)], \\ \xi'_3 &= \beta(t) [Q_3(t) + B_{31}(t)\xi_1 + B_{32}(t)\xi_2 + B_{33}(t)\xi_3 + F_3(t, \xi)]\end{aligned}\quad (1)$$

(здесь и далее под произведением вектора $\beta(t)$ на матрицу будем подразумевать $\beta(t)B = (\beta_k(t)b_{ki})$, где $B = (b_{ki}) - m \times n$ -матрица, $m = n_3$, $n \in \mathbb{N}$), в которой все величины, исключая t , являются, в общем случае комплексными, и выполняются такие условия:

- 1) $\beta(t) = \text{colon}(\beta_1(t), \dots, \beta_{n_3}(t))$,
 $\beta_k(t)$ ($k = \overline{1, n_3}$), $\alpha(t)$ – скалярные функции,
 $\alpha(t) \neq 0$, $\beta_k(t) \neq 0$ ($t \in \Delta$), $\int_{t_0}^{+\infty} |\alpha(t)| dt = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0$,
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\int_{t_0}^{+\infty} |\beta_k(t)| dt = l_k < +\infty$ ($l_k = \text{const}$) ($k = \overline{1, n_3}$),
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta'_k(t)}{\beta_k(t)} = 0$, ($k = \overline{1, n_3}$),
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_s(t)}{\beta_k(t)} = 0$ ($s > k$, $k = \overline{1, n_3 - 1}$, $s = \overline{2, n_3}$),
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta_1(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^{-1}(t)\beta_k(t))'}{\beta_k(t)} = 0$ ($k = \overline{1, n_3}$);
- 2) $Q_1(t) = \text{colon}(q_1(t), \dots, q_{n_1}(t))$, $Q_2(t) = \text{colon}(q_{n_1+1}(t), \dots, q_{n_1+n_2}(t))$, $Q_3(t) = \text{colon}(q_{n_1+n_2+1}(t), \dots, q_{n_1+n_2+n_3}(t))$,
 $q_k(t) \in C_\Delta$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} q_k(t) = 0$ ($k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}$);
- 3) $B_{ki}(t)$ – матрицы соответствующей размерности, $B_{ki}(t) \in C_\Delta$ и существуют пределы $B_{ki}(+\infty) = B_{0,ki}$ ($k, i = \overline{1, 3}$), где $B_{0,ki}$ – постоянные матрицы;
 корни λ_k ($k = \overline{1, n_1}$) уравнения

$$\det(B_{0,11} - \lambda E) = 0$$

(E – единичная $n_1 \times n_1$ -матрица) обладают свойством

$$|\operatorname{Re} \lambda_k| \geq \gamma, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

корни γ_{n_1+k} ($k = \overline{1, n_2}$) уравнения

$$\det(B_{0,22} - B_{0,21}(B_{0,11})^{-1}B_{0,12} - \lambda E) = 0$$

(E – единичная $n_2 \times n_2$ -матрица) обладают свойством

$$|\operatorname{Re}(\alpha(t)\gamma_{n_1+k})| \geq \gamma|\alpha(t)| \quad (t \in \Delta);$$

- 4) вектор-функция

$$F(t, \xi) = \text{colon}(F_1(t, \xi), F_2(t, \xi), F_3(t, \xi))$$

$$(F_1(t, \xi) = \text{colon}(f_1(t, \xi), \dots, f_{n_1}(t, \xi)),$$

$$F_2(t, \xi) = \text{colon}(f_{n_1+1}(t, \xi), \dots, f_{n_1+n_2}(t, \xi)),$$

$$F_3(t, \xi) = \text{colon}(f_{n_1+n_2+1}(t, \xi), \dots, f_{n_1+n_2+n_3}(t, \xi)))$$

удовлетворяет в области G условию Липшица по ξ

$$\|F(t, \xi_{(1)}) - F(t, \xi_{(2)})\| \leq L \|\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\|, \quad L = L(c) = \text{const},$$

где постоянную L можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа c , определяющего область G , а также условию $F(t, 0) = 0$.

Пусть $f(t), \alpha_i(t), \beta_j(t) \in C_\Delta^\infty$, $f(t)\alpha_i(t), \beta_j(t) : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = \overline{1, s}; j = \overline{1, k}$) – некоторые скалярные функции, причем $\alpha_i(t), \beta_j(t)$ удовлетворяют условиям типа 1)

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_i(t) \neq 0, \beta_j(t) \neq 0 \ (t \in \Delta), \int_{t_0}^{+\infty} |\alpha_i(t)| dt = +\infty, \right. \\ & \int_{t_0}^{+\infty} |\beta_j(t)| dt = l_j < \infty \ (l_j = \text{const}), \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha_s^{-1}(t)\beta_1(t))'}{\beta_1(t)} = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_n(t)} \right)' \frac{1}{\alpha_m(t)} = 0, \ m > n, \ m = \overline{2, s}, \ n = \overline{1, s-1}, \\ & \left. \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta_r(t)}{\beta_p(t)} \right)' \frac{1}{\beta_r(t)} = 0, \ r > p, \ r = \overline{2, k}, \ p = \overline{1, k-1} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$f^{\{0\}}(t) = |f(t)|, \ f_{\alpha_i(t)}^{\{1\}}(t) = \frac{f'(t)}{\alpha_i(t)}, \ (i = \overline{1, s}), \ f^{\{1\}}(t) = \sum_{i=1}^s \left| f_{\alpha_i(t)}^{\{1\}}(t) \right|,$$

$$f^{<0>}(t) = |f(t)|, \ f_{\beta_i(t)}^{<1>}(t) = \int_{+\infty}^t \beta_i(t) f(t) dt, \ (i = \overline{1, k}),$$

$$f^{<1>}(t) = \sum_{i=1}^k \left| f_{\beta_i(t)}^{<1>}(t) \right|,$$

$$f^{[0]}(t) = |f(t)|, \ f_{\alpha_i(t)}^{[1]}(t) = f_{\alpha_i(t)}^{\{1\}}(t), \ (i = \overline{1, s}),$$

$$f_{\beta_j(t)}^{[1]}(t) = f_{\beta_j(t)}^{<1>}(t), \ (j = \overline{1, k}), \ f^{[1]} = f^{\{1\}}(t) + f^{<1>}(t).$$

Обозначив $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ символами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s+k}$ соответственно, положим

$$f_{\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_{r-1}} \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) = \begin{cases} \left[f_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{r-1}}}(t) \right]_{\gamma_{i_r}}^{\{1\}}, & i_r \leq s, \\ \left[f_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_{r-1}}}(t) \right]_{\gamma_{i_r}}^{<1>}, & s < i_r \leq s+k, \end{cases}$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_r, r \in \mathbb{N}; i_1, i_2, \dots, i_r = \overline{1, s+k}),$$

$$f^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{s+k} \sum_{i_{r-1}=1}^{s+k} \dots \sum_{i_1=1}^{s+k} \left| f_{\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right|.$$

$f_{\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t)$ будем называть $\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \dots \gamma_{i_r}$ -производной функции $f(t)$ r -го порядка, а $f^{[r]}(t)$ – мажорантой полной (α) -производной функции $f(t)$ r -го порядка, где $\alpha = \text{strit}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, $\beta = \text{strit}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$.

Дополнительно к условиям 1)–4) относительно системы дифференциальных уравнений (1) будем предполагать, что для нее выполнены следующие условия:

- 1а) $\alpha(t) \in C_\Delta^\infty$, $\beta_i(t) \in C_\Delta^\infty$, $(i = \overline{1, n_3})$;
- 2а) $q_k(t) \in C_\Delta^\infty$, $(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3})$;
- 3а) $b_{ki}(t) \in C_\Delta^\infty$, $(k, i = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3})$;
- 4а) $F(t, \xi) \in C_G^\infty$ и существует функция $L(t) \in C_\Delta^\infty$, $\sup_\Delta |L(t)| < +\infty$ такая, что в области G справедливы неравенства

$$\|F(t, \xi)\| \leq L(t)\|\xi\|^2, \quad \|F'_\xi(t, \xi)\| \leq L(t)\|\xi\|,$$

$$\left\| \left(\frac{\partial^N F}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_{n_1+n_2+n_3}^{k_{n_1+n_2+n_3}}} (t, 0) \right)^{[r]} \right\| = O(L^{[r]}(t)),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3} k_i = N; N = 2, 3, \dots; r = 0, 1, 2, \dots \right),$$

и, кроме того,

$$b_{ki}^{[r]}(t) = O(L^{[r]}(t)), \quad (k, i = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}, r = 0, 1, 2, \dots);$$

- 5а) если обозначить

$$P_r(t) = \sup_{\tau \geq t} \max_k \left\{ q_k^{[r-1]}(\tau), \alpha^{[r-1]}(\tau), \beta^{[r-1]}(\tau), L^{[r]}(\tau) \right\},$$

$$(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}; r = 1, 2, \dots),$$

где максимум берется при каждом фиксированном $\tau > t_0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_r(t) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Определение 1. Для каждой функции $v(t)$, $t \geq t_0$, для которой выполняется оценка вида

$$|v(t)| \leq A_v \sum_{r=r_1}^{r_2} P_1^{k_1}(t) P_2^{k_2}(t) \dots P_r^{k_r}(t), \quad t \geq t_0, \quad A_v = \text{const},$$

где r_1, r_2 – некоторые натуральные числа, $r_1 \leq r_2$ и где для каждого данного значения r показатели $k_1, \dots, k_r$ могут принимать любые целые неотрицательные значения с условием, что $k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r = r$, условимся говорить, что она имеет (α) -ранг $\geq r_1$ и будем писать $R_\alpha^\beta(v) \geq r_1$.

Чтобы обобщить это определение на матрицы (в частности, столбцы) условимся неравенство $R_\alpha^\beta(D) \geq r_1$, где $D = (d_{ki}(t))$, $t \geq t_0$ считать равносильным требованию

$$R_\alpha^\beta(\|D\|) \geq r_1.$$

Условимся также неравенство $R_\alpha^\beta(v) \geq 0$ считать эквивалентным свойству ограниченности функции $v(t)$ при $t \geq t_0$.

Приведем без доказательства некоторые очевидные свойства $(\frac{\alpha}{\beta})$ -ранга.

Свойство 1. Из неравенства $R_\alpha^\beta(v) \geq r_1$ вытекает любое неравенство вида $R_\alpha^\beta(v) \geq r$, где $r = 0, 1, \dots, r_1 - 1$.

Свойство 2. Из неравенства $|v_1(t)| \leq |v_2(t)|$, $t \geq t_0$ и $R_\alpha^\beta(v_2) \geq r_1$ вытекает неравенство $R_\alpha^\beta(v_1) \geq r_1$.

Свойство 3. Если даны функции $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$) и известно, что $R_\alpha^\beta(v_k) \geq r_k$, то имеют место также следующие неравенства

$$1. \quad R_\alpha^\beta(v_1 + \dots + v_l) \geq \tilde{r}, \quad \text{где } \tilde{r} = \min_k \{r_k\},$$

$$2. \quad R_\alpha^\beta(v_1 \cdot v_2 \dots v_l) \geq r_1 + r_2 + \dots + r_l,$$

$$R_\alpha^\beta(v_1^{k_1} \cdot v_2^{k_2} \dots v_l^{k_l}) \geq r_1 k_1 + r_2 k_2 + \dots + r_l k_l,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_l$ – любые натуральные числа.

Следствие 1. Если $D = (d_{ki}(t))$ – некоторая $n_1 \times n_2$ матрица, то условие $R_\alpha^\beta(D) \geq r$ равносильно $n_1 \cdot n_2$ условиям

$$R_\alpha^\beta(d_{ki}) \geq r, \quad (k = \overline{1, n_1}, \quad i = \overline{1, n_2}).$$

Это свойство вытекает из свойства 3.

Следствие 2. Если $R_\alpha^\beta(v) \geq r$, а функция $\omega(t)$ ограничена при $t \geq t_0$, то $R_\alpha^\beta(v\omega) \geq r$.

Свойство 4. Если для функций $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$) существуют производные $v'_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$) и известно, что

$$R_\alpha^\beta(v_k) \geq r_k, \quad R_\alpha^\beta(v_k^{[1]}) \geq r_k + 1,$$

то будут иметь место также неравенства

$$R_\alpha^\beta[(v_1 \dots v_l)^{[1]}] \geq r_1 + \dots + r_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta[(v_1^{k_1} \dots v_l^{k_l})^{[1]}] \geq r_1 k_1 + \dots + r_l k_l + 1,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_l$ – любые натуральные числа.

Определение 2. Условимся функциями класса W_α^β называть такие функции $v(t)$, $t \geq t_0$, для которых существуют $v^{[k]}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) при $t \geq t_0$ и существует хотя бы одно целое число $r \geq 0$ такое, что имеет место бесконечная последовательность неравенств

$$R_\alpha^\beta(v) \geq r, R_\alpha^\beta(v^{[1]}) \geq r+1, \dots, R_\alpha^\beta(v^{[k]}) \geq r+k, \dots$$

Число r , входящее в это определение, мы будем называть начальным $\binom{\alpha}{\beta}$ -рангом данной функции $v(t)$. Отсутствие однозначности в определении r не препятствует использованию такого понятия.

Свойство 5. К классу W_α^β заведомо относятся все коэффициенты системы (1) (удовлетворяющие условиям 1) – 4), 1а) – 5а)) (при этом можно взять $r = 0$) и их $\binom{\alpha}{\beta}$ -производные любого порядка (при этом можно считать r равным порядку $\binom{\alpha}{\beta}$ -производной).

Свойство 6. Если функции $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$) принадлежат классу W_α^β , а числа r_k ($k = \overline{1, l}$) являются начальными $\binom{\alpha}{\beta}$ -рангами этих функций, то число $r_0 = \min_k \{r_k\}$ можно рассматривать как начальный $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг любой из функций $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$).

Условимся называть r_0 общим начальным $\binom{\alpha}{\beta}$ -рангом функций $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$). Свойство 5 очевидно, а свойство 6 вытекает из свойства 1.

Свойство 7. Если для функций $v_k(t)$ ($k = \overline{1, l}$), существуют производные $v_k^{(r)}(t)$ ($k = \overline{1, l}$) и известно, что

$$R_\alpha^\beta(v_k) \geq r_k, R_\alpha^\beta(v_k^{[r]}) \geq r_k + r,$$

$\omega(t)$ – функция класса W_α^β с начальным $\binom{\alpha}{\beta}$ -рангом равным нулю, $\omega(t) \neq 0$ и $\omega^{-1}(t)$ – ограничена при $t \geq t_1$, то имеют место такие неравенства

$$R_\alpha^\beta \left[\left(\frac{v_1^{k_1} \dots v_l^{k_l}}{\omega(t)} \right)^{[1]} \right] \geq r_1 k_1 + r_2 k_2 + \dots + r_l k_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta \left[\left(\frac{v_1^{k_1} \dots v_l^{k_l}}{\omega(t)} \right)^{[r]} \right] \geq r_1 k_1 + r_2 k_2 + \dots + r_l k_l + r,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_l$ – любые натуральные числа.

Условимся еще в тех случаях, когда нам задана вектор-функция $\tilde{F}(t, Z)$, компоненты разложения в ряд Тейлора по Z которой являются рядами от $Z_1, \dots, Z_l$ тип

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=0}^{\infty} \tilde{p}_{k_1 \dots k_l}(t) Z_1^{k_1} \dots Z_l^{k_l},$$

выражения $\tilde{p}_{kk_1 \dots k_l}(t)Z_1^{k_1} \dots Z_l^{k_l}$ называть составляющими вектор-функции $\tilde{F}(t, Z)$, а саму вектор-функцию будем называть v -рядом от Z . Функции $\tilde{p}_{kk_1 \dots k_l}(t)$ будем называть коэффициентами v -ряда $\tilde{F}(t, Z)$.

Применим к системе (1) преобразование

$$\begin{aligned}\xi_1 &= X_1, \\ \xi_2 &= \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2, \\ \xi_3 &= X_3,\end{aligned}\tag{2}$$

где $X_i(t)$ ($i = \overline{1, 3}$) – столбцы новых неизвестных функций,

$$C_{21}(t) = B_{21}(t)B_{11}^{-1}(t);$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}X_1' &= Q_1(t) + [B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 + \Phi_1(t, X), \\ X_2' &= \alpha \left\{ Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + \left[\alpha B_{22}C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha}C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21}B_{12}C_{21} \right] X_1 + \right. \\ &\quad \left. + [B_{22} - C_{21}B_{12}]X_2 + [B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}]X_3 + \Phi_2(t, X) \right\},\end{aligned}\tag{3}$$

$$X_3' = \beta \{ Q_3(t) + [B_{31} + \alpha B_{32}C_{21}]X_1 + B_{32}X_2 + B_{33}X_3 + \Phi_3(t, X) \},$$

где все величины – функции переменной t ,

$$\Phi_1(t, X) = F_1(t, \xi(X)), \quad \Phi_2(t, X) = F_2(t, \xi(X)) - C_{21}(t)F_1(t, \xi(X)),$$

$$\Phi_3(t, X) = F_3(t, \xi(X)), \quad \xi(X) = \text{colon}(X_1, \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2, X_3).$$

Составим вспомогательную линейную относительно X_k ($k = \overline{1, 3}$) систему уравнений

$$\begin{aligned}Q_1(t) + [B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 &= 0, \\ Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + [B_{22} - C_{21}B_{12}]X_2 + [B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}]X_3 &= 0, \\ X_3 - \int_{+\infty}^t \beta Q_3(t) dt &= 0.\end{aligned}$$

Запишем ее сокращенно в форме

$$H(t, Z) = 0,\tag{4}$$

где $Z = \text{colon}(X_{11}(t), X_{21}(t), X_{31}(t))$. Предполагая далее, что все нижеследующие операции законны, применим к системе (3) преобразование

$$Z = \widetilde{Z}_1(t) + Z_2,$$

где $Z_2 = \text{colon}(X_{12}(t), X_{22}(t), X_{32}(t))$ – новый неизвестный столбец, а столбец $\widetilde{Z}_1(t) = \text{colon}(\widetilde{X}_{11}, \widetilde{X}_{21}, \widetilde{X}_{31})$ определяется из векторного уравнения

$$H(t, \widetilde{Z}) = 0, \quad t \geq t_0$$

и обладает свойством $\lim_{t \rightarrow +\infty} \widetilde{Z}_1(t) = 0$.

Очевидно, что такое решение системы уравнений является единственным при выполнении условий 2), 3).

Запишем вспомогательную систему дифференциальных уравнений для столбцов $X_{12}(t)$, $X_{22}(t)$, $X_{32}(t)$

$$\begin{aligned}
X'_{12} &= -\widetilde{X}_{11}'(t) + \Phi_1(t, \widetilde{Z}_1) + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] X_{12} + \\
&\quad + B_{12} X_{22} + B_{13} X_{32} + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{1X_i}(t, \widetilde{Z}_1) X_{i2} + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \Phi''_{1X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}(t, \widetilde{Z}_1) X_{12}^{k_1} X_{22}^{k_2} X_{32}^{k_3} + \dots, \\
X'_{22} &= \alpha \left\{ -\frac{\widetilde{X}_{21}'(t)}{\alpha} + \Phi_2(t, \widetilde{Z}_1) + \right. \\
&\quad + \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] (\widetilde{X}_{11}(t) + X_{12}) + \\
&\quad + [B_{22} - C_{21} B_{12}] X_{22} + [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] X_3 + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{2X_i}(t, \widetilde{Z}_1) X_{i2} + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \Phi''_{2X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}(t, \widetilde{Z}_1) X_{12}^{k_1} X_{22}^{k_2} X_{32}^{k_3} + \dots \Big\}, \\
X'_{32} &= \beta \left\{ \Phi_3(t, \widetilde{Z}_1) + [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] (\widetilde{X}_{11}(t) + X_{12}) + \right. \\
&\quad + B_{32} (\widetilde{X}_{21}(t) + X_{22}) + B_{33} (\widetilde{X}_{31}(t) + X_{32}) + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{3X_i}(t, \widetilde{Z}_1) X_{i2} + \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \Phi''_{3X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}(t, \widetilde{Z}_1) X_{12}^{k_1} X_{22}^{k_2} X_{32}^{k_3} + \dots \Big\}.
\end{aligned}$$

Здесь $X_{12} = \text{colon}(x_{12}, \dots, x_{n_1 2})$, $X_{22} = \text{colon}(x_{n_1+1 2}, \dots, x_{n_1+n_2 2})$,

$$X_{32} = \text{colon}(x_{n_1+n_2+1 2}, \dots, x_{n_1+n_2+n_3 2}),$$

$$\Phi_{sX_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}^{(N)}(t, \widetilde{Z}_1) X_{12}^{k_1} X_{22}^{k_2} X_{32}^{k_3} = \left(p_{l_s i_1 \dots i_{n_1+n_2+n_3}}(t) \prod_{s=1}^{n_1+n_2+n_3} x_{s2}^{i_s} \right),$$

($s = \overline{1, 3}$, $l_1 = \overline{1, n_1}$, $l_2 = \overline{n_1+1, n_1+n_2}$, $l_3 = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3}$, $N, i_1, \dots, i_{n_1+n_2+n_3}$ — натуральные числа такие, что $i_1 + \dots + i_{n_1+n_2+n_3} = N$; $p_{l_s i_1 \dots i_{n_1+n_2+n_3}}(t)$ представляют собой коэффициенты разложения функции $f_{l_s}(t, X)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\widetilde{Z}_1$).

Эта система позволяет найти столбец $\widetilde{Z}_2$ тем же способом, что и столбец $\widetilde{Z}_1$. Затем полагаем

$$Z = \widetilde{Z}_1(t) + \widetilde{Z}_2(t) + Z_3,$$

где Z_3 – новый неизвестный столбец.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим ряд, формально удовлетворяющий системе (3) и, вообще говоря, расходящийся.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о взаимосвязи между полученным формальным рядом и истинными решениями системы (3).

Теорема 1. При выполнении условий 1) – 4), 1а) – 5а) решение системы уравнений (4) $Z = U_1(t)$, $t \in \Delta$ с условием $Z(t) \rightarrow 0$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -производные любого порядка, причем $U_1^{[r]}(t)$ ($r = 0, 1, \dots$) есть вектор $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранга $\geq r + 1$.

Существование всех $\binom{\alpha}{\beta}$ -производных ($r = 1, 2, \dots$) вытекает из известных теорем анализа, остается только получить для них оценку (при этом наличие свойства $R_\alpha^\beta(U_1) \geq 1$ очевидно).

Запишем тождество $H(t, U_1) = 0$ в виде

$$Q(t) + P(t)U_1 = 0 \quad (5)$$

($Q(t) = H(t, 0)$, $P(t) = H'_Z(t, U_1)$, причем $|\text{Det}(H'_Z(t, U_1))| \geq d > 0$, $d = \text{const}$ при $t \geq t_0$, $P(t)$ и $Q(t)$ принадлежат классу W_α^β).

Из (5), с одной стороны, следует

$$\left| \alpha^{-1}(t) (P^{-1}(t)Q(t))' \right| - U_1^{\{1\}}(t) = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) P^{-1}(t) Q(t) dt \right| - U_1^{<1>}(t) = 0. \quad (7)$$

Из (6) и (7) имеем

$$\left| \alpha^{-1}(t) (P^{-1}(t)Q(t))' \right| + \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) P^{-1}(t) Q(t) dt \right| = U_1^{[1]}.$$

Так как каждая составляющая левой части имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг ≥ 2 (легко проверить, применяя свойства 3, 4 и 7 $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранга), то непосредственно из этого тождества ясно, что

$$R_\alpha^\beta(U_1^{[1]}(t)) \geq 2.$$

Докажем по индукции, что $U_1^{[r]}(t)$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг $\geq r + 1$. В самом деле, для $r = 1$ это верно. Предположим, что это утверждение верно для номера r . Поскольку из (5) следует, что

$$P^{-1}(t)Q(t) + U_1(t) = 0,$$

$$U_1^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left| U_{1\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right| \quad (8)$$

($\gamma_1, \dots, \gamma_{n_3+1}$ равны $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n_3}$ соответственно), то каждая составляющая правой части (8) определяется из равенств вида

$$U_{1\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) - H_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t) = 0, \quad (9)$$

где $H_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t)$ – некоторая функция (β) -ранга $\geq r+1$. Из (9), с одной стороны, следует

$$\left[U_{1\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right]^{\{1\}} - \left| \alpha(t) H'_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t) \right| = 0. \quad (10)$$

С другой стороны

$$\left[U_{1\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}^{[r]}(t) \right]^{<1>} - \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t) dt \right| = 0. \quad (11)$$

Складывая (10) и (11) и суммируя их по $i_1, i_2, \dots, i_r$ будем иметь

$$U_1^{[r+1]} = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left(\left| \alpha(t) H_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t) \right| + \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_r}}(t) dt \right| \right). \quad (12)$$

Поскольку все составляющие правой части (12) имеют (β) -ранг $\geq r+2$, то и $U_1^{[r+1]}$ имеет (β) -ранг $\geq r+2$. Тем самым теорема 1 доказана.

Анализируя метод построения формальных решений, а также учитывая, что $H(t, U_1) \equiv 0$ при $t > t_0$ ($U_1(t) = \text{colon}(\widetilde{X}_{11}, \widetilde{X}_{21}, \widetilde{X}_{31})$), нетрудно далее убедиться, что столбец $U_2(t) = \text{colon}(\widetilde{X}_{12}, \widetilde{X}_{22}, \widetilde{X}_{32})$ формального решения находится из системы неявных уравнений

$$\begin{aligned} -\Phi_1(t, U_1) + \widetilde{X}_{11}'(t) &= [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21} + \Phi'_{1X_1}(t, U_1)] X_{12} + \\ &+ [B_{12} + \Phi'_{1X_2}(t, U_1)] X_{22} + [B_{13} + \Phi'_{1X_3}(t, U_1)] X_{32}, \\ -\Phi_2(t, U_1) + \alpha^{-1} \widetilde{X}_{21}'(t) &- \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - \right. \\ &\left. - C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] \widetilde{X}_{11}(t) = \\ &= [B_{22} - C_{21} B_{12} + \Phi'_{2X_2}(t, U_1)] X_{22} + [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21} + \Phi'_{2X_3}(t, U_1)] X_{32}, \\ X_{32} &= \int_{+\infty}^t \beta(t) \left[(B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}) \widetilde{X}_{11}(t) + B_{32} \widetilde{X}_{21}(t) + \right. \\ &\left. + B_{33} \widetilde{X}_{31}(t) + \Phi_3(t, U_1) \right] dt, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Phi'_{1X_1}(t, U_1), \Phi'_{1X_2}(t, U_1), \Phi'_{1X_3}(t, U_1), \Phi'_{2X_2}(t, U_1), \Phi'_{2X_3}(t, U_1)$$

стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Имеет место

Лемма 1. При выполнении для системы уравнений (4) условий 1) – 4), 1а) – 5а) существует вектор $U_2(t) = \text{colon}(\widetilde{X}_{12}, \widetilde{X}_{22}, \widetilde{X}_{32})$, стремящийся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, удовлетворяющий системе (13) и обладающий свойством

$$R_\alpha^\beta(U_2) \geq 2.$$

Чтобы оценить $\binom{\alpha}{\beta}$ -производные $U_2^{[r]}(t)$ ($r = 1, 2, \dots$), докажем следующую теорему, более общую, чем теорема 1.

Теорема 2. Пусть дано векторное уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, Z) &= Q(t) + P(t)Z = 0, \quad t \geq t_0, \\ \left(Q(t) &= \tilde{H}(t, 0), \quad P(t) = \tilde{H}'_Z(t, 0) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

коэффициенты которого являются при $t \geq t_0$ функциями класса W_α^β , причем общий начальный $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг элементов столбца $Q(t)$ равен $\tilde{r}_0 \geq 1$, а остальные коэффициенты имеют начальный $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг ≥ 0 и известно, что

$$|\text{Det}P(t)| \geq d_1 > 0, \quad t \geq t_0, \quad d_1 = \text{const.}$$

Тогда уравнение (14) заведомо имеет решение $Z = \tilde{U}(t)$, стремящееся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, непрерывное в некотором промежутке $[\tilde{t}, +\infty[$, это решение имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -производные любого порядка, причем $\tilde{U}^{[r]}(t)$ ($r = 1, 2, \dots$) есть столбец $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранга $\geq r + \tilde{r}_0$.

Существование искомых решений $Z = \tilde{U}(t)$, а также тот факт, что $\tilde{U}(t)$ есть столбец $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранга $\geq \tilde{r}_0$, очевидны.

Заметим, что тогда любое слагаемое в левой части (14) после подстановки в (14) вместо Z вектора $\tilde{U}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг не меньше, чем $\tilde{r}_0$. Чтобы оценить $\tilde{U}^{[1]}(t)$, запишем тождество $\tilde{H}(t, \tilde{U}) = 0$ в виде

$$P^{-1}(t)Q(t) + \tilde{U}(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\left| \alpha^{-1}(t) (P^{-1}(t)Q(t))' \right| - \tilde{U}^{\{1\}}(t) = 0.$$

С другой стороны

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) P^{-1}(t) Q(t) dt \right| - \tilde{U}^{<1>}(t) = 0.$$

Сложив два последних равенства, получим

$$\left| \alpha^{-1}(t) (P^{-1}(t)Q(t))' \right| + \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int_{+\infty}^t \beta_i(t) P^{-1}(t) Q(t) dt \right| - \tilde{U}^{[1]}(t) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Легко убедиться, что каждая составляющая v -ряда, состоящего из первых $n_3 + 1$ слагаемых, будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг не меньше, чем $\tilde{r}_0 + 1$, а тогда и $\tilde{U}^{[1]}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг $\geq \tilde{r}_0 + 1$. Далее поступаем так же как и в случае теоремы 1.

Сформулируем теперь две основные теоремы о формальных рядах указанного типа.

Теорема 3. *Если система (3) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1а) – 5а), то для нее заведомо существует формальное частное решение*

$$Z = \text{colon}(X_1, X_2, X_3) \sim \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t),$$

обладающее такими свойствами:

1. Каждый столбец $U_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) существует и имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -производные любого порядка в некотором промежутке $[T_k, +\infty[$, причем числа T_k ($k = 1, 2, \dots$), вообще говоря, не равны между собой;
2. k -й столбец $U_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг $\geq k$, а его $\binom{\alpha}{\beta}$ -производная r -го порядка $U_k^{[r]}(t)$ ($r = 1, 2, \dots$) – $\binom{\alpha}{\beta}$ -ранг $\geq k + r$.

Действительно, существование столбца $U_2(t)$ в некотором промежутке $[T, +\infty[$ и то, что $R_{\alpha}^{\beta}(U_2^{[r]}) \geq r + 2$ ($r = 0, 1, \dots$), уже было установлено.

Для доказательства теоремы 3 по индукции допустим, что столбцы $U_1(t), \dots, U_{k-1}(t)$ существуют и обладают нужными свойствами. Нетрудно показать, что столбец $U_k(t)$ должен определяться тогда из такой системы уравнений

$$\begin{aligned} \widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \dots + \widetilde{X_{1k-1}}' &= Q_1(t) + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] \left(X_{1k} + \widetilde{X_{1k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\ &+ B_{12} \left(X_{2k} + \widetilde{X_{2k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}} \right) + B_{13} \left(X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} \right) + \\ &+ \Phi_1(t, U_{k-1} + \dots + U_1) + \sum_{i=1}^3 \Phi_{1X_i}'(t, U_{k-1} + \dots + U_1) X_{ik}, \\ \widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \dots + \widetilde{X_{2k-1}}' &= \alpha \left\{ Q_2 - C_{21} Q_1 + \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - C_{21}' - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] \left(\widetilde{X_{1k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [B_{22} - C_{21} B_{12}] \left(X_{2k} + \widetilde{X_{2k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] \left(X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} \right) + \Phi_2(t, U_{k-1} + \dots + U_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=2}^3 \Phi_{2X_i}'(t, U_{k-1} + \dots + U_1) X_{ik}, \right. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}} &= \int_{+\infty}^t \beta(t) \left[Q_3(t) + \right. \\
&+ [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] (\widetilde{X_{1k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}}) + B_{32} (\widetilde{X_{2k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}}) + \\
&+ B_{33} (\widetilde{X_{3k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}}) + \Phi_3(t, U_{k-1} + \cdots + U_1) \left. \right] dt.
\end{aligned}$$

Вычитая из (15) аналогичное равенство, полученное из (15) заменой k на $k-1$, в котором $Z_{k-1} = U_{k-1}$, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X_{1k-1}}' &= [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] X_{1k} + B_{12} X_{2k} + B_{13} X_{3k} + \\
&+ \sum_{i=1}^3 \Phi_{1X_i}'(t, U_1 + \cdots + U_{k-1}) X_{ik}, \\
\widetilde{X_{2k-1}}' &= \alpha \left\{ \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} + \right. \right. \\
&+ \Phi_{2X_1}'(t, U_1 + \cdots + U_{k-2}) \left. \right] \widetilde{X_{1k-1}} + \\
&+ [B_{22} - C_{21} B_{12}] X_{2k} + [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] X_{3k} + \\
&+ \sum_{i=2}^3 \Phi_{2X_i}'(t, U_{k-1} + \cdots + U_1) X_{ik} \left. \right\}, \\
X_{3k} &= \int_{+\infty}^t \beta(t) \left\{ [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] \widetilde{X_{1k-1}} + B_{32} \widetilde{X_{2k-1}} + B_{33} \widetilde{X_{3k-1}} + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^3 \Phi_{3X_i}'(t, U_{k-2} + \cdots + U_1) \widetilde{X_{ik-1}} + \\
&+ \frac{1}{2!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \Phi_{3X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}''(t, U_{k-2} + \cdots + U_1) \widetilde{X_{1k-1}}^{k_1} \widetilde{X_{2k-1}}^{k_2} \widetilde{X_{3k-1}}^{k_3} + \cdots \left. \right\} dt.
\end{aligned} \tag{16}$$

Применяя к системе (16) теорему 2, убеждаемся в существовании вектора $U_k(t)$, указанного в теореме 3 типа. Отсюда вытекает справедливость теоремы 3.

Доказательству следующей теоремы предпошлем одно определение.

Определение 3. Формальный в общем случае ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)$, каждый элемент $U_k(t)$ ($U_k(t)$ – функции) которого определен, вообще говоря, в своем промежутке вида $[T_k, +\infty[$, условимся называть обобщенно-асимптотическим рядом для данной функции $v(t)$, $t \geq t_0$, если для каждого $m = 1, 2, \dots$ выполняется равенство

$$v(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) + \varepsilon_m(t), \quad t \geq \max\{t_0, T_1, \dots, T_m\},$$

в котором "добавок" $\varepsilon_m(t)$ удовлетворяет оценке типа (12) из [1] с функциями $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, имеющими $(\frac{\alpha}{\beta})$ -ранг $\geq m$.

Покажем, что справедливо следующее утверждение

Теорема 4. *Если система (1) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1а) – 5а), то найденный в теореме 3 формальный ряд будет являться обобщенно-асимптотическим рядом для любого решения $Z(t) = \text{colon}(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ системы (3) с условием $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z(t) = 0$, причем решения последнего типа заведомо существуют.*

Действительно, сделаем в системе (3) замену

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{1m}}(t) + X_{1k}, \\ X_2 &= \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{2m}}(t) + X_{2k}, \\ X_3 &= \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{3m}}(t) + X_{3k}. \end{aligned}$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \cdots + \widetilde{X_{1k-1}}' + X_{1k}' = Q_1(t) + \\ &+ [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] (X_{1k} + \widetilde{X_{1k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}}) + \\ &+ B_{12} (X_{2k} + \widetilde{X_{2k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}}) + B_{13} (X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}}) + \\ &+ \Phi_1(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1), \tag{17} \\ &\widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \cdots + \widetilde{X_{2k-1}}' + X_{2k}' = \alpha \left\{ Q_2 - C_{21} Q_1 + \left[\alpha B_{22} C_{21} - \right. \right. \\ &- \left. \left[\frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] (X_{1k} + \widetilde{X_{1k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}}) + \right. \\ &+ [B_{22} - C_{21} B_{12}] (X_{2k} + \widetilde{X_{2k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}}) + \\ &+ [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] (X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}}) + \Phi_2(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1), \\ &X_{3k}' + \widetilde{X_{3k-1}}' + \cdots + \widetilde{X_{31}}' = \beta \left[Q_3 + [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] (X_{1k} + \widetilde{X_{1k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{11}}) + \right. \\ &+ B_{32} (X_{2k} + \widetilde{X_{2k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{21}}) + B_{33} (X_{3k} + \widetilde{X_{3k-1}} + \cdots + \widetilde{X_{31}}) + \\ &+ \Phi_3(t, Z_k + U_{k-1} + \cdots + U_1) \left. \right]. \end{aligned}$$

Раскладывая нелинейности в правой части (17) по компонентам вектора Z_k , учитывая равенства, полученные из (15) заменой k на $k-1$, получим систему дифференциальных уравнений

$$X_{1k}' = -\widetilde{X_{1k-1}}' + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] X_{1k} + B_{12} X_{2k} + B_{13} X_{3k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{1X_i}(t, U_1 + \dots + U_{k-1}) X_{ik} + \Phi_{*1}(t, Z_k), \\
X'_{2k} = & \alpha \left\{ -\frac{\widetilde{X_{2k-1}}'}{\alpha} + \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C'_{21} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] X_{1k} + [B_{22} - C_{21} B_{12}] X_{2k} + [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] X_{3k} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{2X_i}(t, U_1 + \dots + U_{k-1}) X_{ik} + \Phi_{*2}(t, Z_k) \right\}, \quad (18) \\
X'_{3k} = & \beta \left\{ [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] (\widetilde{X_{1k-1}} + X_{1k}) + B_{32} (\widetilde{X_{2k-1}} + X_{2k}) + \right. \\
& + B_{33} (\widetilde{X_{3k-1}} + X_{3k}) + \Phi_3(t, U_{k-1} + \dots + U_1) - \Phi_3(t, U_{k-2} + \dots + U_1) + \\
& \left. + \sum_{i=1}^3 \Phi'_{3X_i}(t, U_{k-1} + \dots + U_1) X_{ik} + \Phi_{*3}(t, Z_k) \right\},
\end{aligned}$$

где v -ряды $\Phi_{*1}(t, Z_k)$, $\Phi_{*2}(t, Z_k)$, $\Phi_{*3}(t, Z_k)$ не содержат составляющих нулевой и первой степени относительно компонент вектора Z_k .

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что у системы (18) существуют частные решения, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Используя затем теорему 5 из [1] и учитывая, что $R_\alpha^\beta(U'_{k-1}) \geq R_\alpha^\beta(U_{k-1}^{[1]}) \geq k$, в силу теоремы 3 получаем нужный результат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Построены обобщенные асимптотические (в смысле работ [2–4]) ряды для O -решений системы дифференциальных уравнений (1). В дальнейшем предполагается рассмотреть аналогичную задачу для системы типа (1) с несколькими несуммируемыми множителями в правой части.

1. **Кореновский А. А.** Существование решений дифференциальных уравнений в особых случаях / Кореновский А. А. // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. - 2012. Т. 17, вип. 4(16). - С. 47-58.
2. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 6. - С. 875-889.
3. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 7. - С. 1070-1077.
4. **Костин, А. В.** О представлении решений дифференциальных уравнений асимптотическими рядами в особых случаях / А. В. Костин, А. А. Кореновский. - К., 1983. - 45 с. - Деп УКРНИИНТИ 30.12.83, № 1470Ук-Д83.