

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Н. А. Якімова

АЛГЕБРА СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для здобувачів спеціальності 111 Математика

ОДЕСА
ОНУ
2025

**УДК 510.635:510.637(075.8)
Я453**

Автор:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рецензенти:

Д. С. Калюжний-Вербовецький, доктор фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики ОНПУ імені К. Д. Ушинського;

М. О. Малаксіано, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри технічної кібернетики й інформаційних технологій ім. проф. Р. В. Мерктя Одеського національного морського університету.

*Рекомендовано до видання вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 4 від 29 жовтня 2024 р.*

Якімова Н. А.

Я453 Алгебра скінченних предикатів [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобув. спец. 111 Математика / Н. А. Якімова. – Електронні текстові дані (1 файл : 2,8 МБ). – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2025. – 133 с.

ISBN 978-966-186-337-7

У пропонованому навчальному посібнику розглядаються основні алгебраїчні системи, які можуть в подальшому бути застосовані для дослідження математичного апарату систем штучного інтелекту. Особливу увагу приділено алгебрі скінченних предикатів першого та вищих порядків, алгебрі предикатних операцій та побудованим за аналогією з лінійною алгеброю векторним логічним просторам. Розглянуто можливість застосування описаних математичних моделей для формалізації природної мови.

Навчальний посібник складений для студентів другого (магістерського) рівня освіти спеціальності III «Математика». Також розглянутий в даному навчальному посібнику матеріал може бути рекомендований для студентів технічних спеціальностей.

УДК 510.635:510.637(075.8)

ЗМІСТ

Передмова	5
1. Алгебра скінченних предикатів	7
1.1. Скінченний алфавітний оператор	7
1.2. Основні поняття алгебри скінченних предикатів	8
1.3. Формули алгебри скінченних предикатів	11
1.4. Повнота алгебри скінченних предикатів	13
1.5. Властивості алгебри скінченних предикатів	14
1.6. Консервативне розширення алгебри скінченних предикатів	15
1.7. Змінні предикати і предикати вищих порядків	19
1.8. Контрольні запитання	23
2. Алгебра скінченних предикатів довільного порядку	24
2.1. Основні поняття алгебри скінченних предикатів довільного порядку	24
2.2. Формули алгебри скінченних предикатів довільного порядку	25
2.3. Повнота алгебри скінченних предикатів будь-якого типу	27
2.4. Універсальна алгебра скінченних предикатів	28
2.5. Алгебри підстановних предикатів і операцій	30
2.6. Контрольні запитання	35
3. Алгебра предикатних операцій	37
3.1. Основні поняття фундаментальної алгебри предикатних операцій	37
3.2. Повнота алгебри предикатних операцій	39
3.3. Основні тотожності фундаментальної алгебри предикатних операцій	43
3.4. Додаткові операції фундаментальної алгебри предикатних операцій	45
3.5. Квантори загальності та існування	48
3.6. Прикладна алгебра предикатних операцій	19
3.7. Контрольні запитання	52
4. Алгебра ідей	54
4.1. Поняття ідеї	54
4.2. Ізоморфізм алгебр ідей	58
4.3. Добуток та заперечення в алгебрі ідей	61
4.4. Деякі можливі інтерпретації алгебри ідей розмірності n	68
4.5. Контрольні запитання	71
5. Векторна логічна алгебра	72
5.1. Матричне подання елементів логічного поля	72
5.1.1. Поле логічних скалярів і його можлива графічна інтерпретація	72
5.1.2. Поняття логічної матриці	75
5.1.3. Операції над логічними матрицями	75
5.2. Булева та предикатна моделі векторних логічних просторів	84
5.2.1. Поняття векторного логічного простору. Можлива його графічна інтерпретація	84

5.2.2. Базис логічного простору. Координатне подання векторів логічного простору	87
5.2.3. Заміна базису логічного простору. Матриця переходу до нового базису логічного простору	88
5.2.4. Розмірність досконалого логічного простору	92
5.2.5. Операції кон'юнкції, згортки та заперечення векторів досконалого логічного простору	94
5.3. Логічні оператори	99
5.3.1. Поняття логічного оператора	99
5.3.2. Матриці лінійних логічних операторів	101
5.3.3. Деякі види лінійних логічних операторів	103
5.3.4. Деякі дії з лінійними логічними операторами	106
5.4. Можливі алгебраїчні інтерпретації булевої та предикатної моделей векторних логічних просторів та їхнє практичне значення	108
5.5. Математична формалізація текстів природної мови	111
5.5.1. Математичний опис змісту текстів природної мови	111
5.5.2. Формалізація простих словосполучень логіко-алгебраїчними засобами	116
5.5.3. Формалізація складних словосполучень та речень логіко-алгебраїчними засобами	121
5.5.4. Графічне подання формалізації синтаксичної структури речень і текстів природної мови	125
5.6. Контрольні запитання	128
Список літератури	130

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні притаманний бурхливий розвиток і стрімке розширення напрямків застосування новітніх інформаційних технологій. Наприкінці ХХ століття відбувся справжній «інформаційний вибух». Швидка змінюваність поколінь комп'ютерної техніки потребувала відповідних темпів розвитку програмного і математичного забезпечення. Однак, незважаючи на велику кількість мовленнєвих засобів програмування і принципово нових операційних систем і середовищ, що з'явилися за останні роки, усі вони спрямовані на автоматизацію та інтенсифікацію рутинних або обчислювальних процедур різного функціонального призначення й фізичної природи. Введення інформації в комп'ютер залишається незмінним і традиційним. Розшифровка та кодування природної мови як продукту мислення і подання знань залишаються недосконалими. Відсутні строго формалізовані підходи до подання знань і точні методи моделювання знань [1]. Тому виникла і набула великої актуальності проблема створення інструментарію для формального опису і комп'ютерного подання різного роду інформації, поданої у вигляді текстів природної мови або логічних структур мислення.

Як відомо, для моделювання подібного роду явищ і процесів використовуються алгоритми систем штучного інтелекту. Проблема створення математичного апарата для моделювання інтелектуальних процесів виникла вже давно. Наукова думка просунулася досить далеко на шляху моделювання фізичних процесів, що протікають у навколишньому середовищі. Зафіксувавши деякі початкові умови, можна з досить великою ймовірністю прогнозувати кінцевий стан процесу [2]. Іншими словами, протікання фізичних процесів є досить добре формалізованим. У зв'язку з цим виникає питання, чи є можливою настільки ж успішна реалізація інтелектуальної діяльності.

Найбільшим недоліком штучного інтелекту, істотно обмежуючим галузь його практичного застосування, є нездатність машини розуміти людську мову і, як наслідок, нездатність змістовної обробки нею текстів природної мови. Відшукання методів формалізації природномовних висловлювань може відкрити шляхи для удосконалення діалогових людино-машинних систем. У зв'язку з цим виникла необхідність у нових методах опису мовленнєвої взаємодії в діалогових системах, відкіля випливає задача формалізації моделі спілкування як частини системи подання знань, тому що образність і виразність опису моделі предметної області увесь час стрімко зростає [3]. Для формального опису текстів природної мови на теперішній час відсутній прийнятний математичний апарат. Як основу для його розробки можна взяти алгебру скінченних предикатів, мовою якої можна виразити будь-який закон інтелекту і будь-яку інтелектуальну діяльність, реалізовані на ЕОМ [4]. Унаслідок цього найбільш перспективним є використання такого розділу математики як логічний аналіз. Термін «логічний аналіз» уживає ще Рассел [5], позначаючи ним науку, що вивчає логічними засобами філософські проблеми. Однією з таких проблем і є вивчення природи інтелекту. Логічна алгебра є математичним апаратом, за допомогою якого можна вести подібне вивчення [6].

В даний час одним з напрямків науково-технічних досліджень є розробка засобів автоматизації процесів вироблення рішень у різних системах управління. Існуючі на сьогоднішній день алгоритми прийняття рішень у системах управління, як правило, базуються на процедурному способі подання знань, можливості якого обмежуються задачами прийняття і реалізації рішень при фіксованих структурах оперативних цілей системи. Застосування методів штучного інтелекту для подання знань у системах управління надає можливість автоматизувати процес прийняття рішень у відкритих задачах [7].

Аналізуючи проблему створення математичного апарата для моделювання процесів мислення, можна дійти висновку про те, що спроби формалізації природної мови і комп'ютерного подання знань виявилися неспроможними в зв'язку із відсутністю прийнятного математичного апарата. Важливі результати можна отримати, якщо провести аналогію між лінійною алгеброю, засобами якої формалізуються різні системи у вигляді математичних моделей, і логічною алгеброю, що є основою людського мислення. Дослідження математичних засобів логічного аналізу відкриває нові можливості в галузі формалізації природної мови.

Узагальнюючи сказане, можна зробити висновок про те, що проблема, пов'язана з розробкою математичного апарата моделювання продуктів мислення і комп'ютерного подання знань, є важливою та актуальною.

У пропонованому навчальному посібнику представлений матеріал, що висвітлює математичну базу для моделювання систем штучного інтелекту. Матеріал викладений у такій послідовності, щоб студенти мали можливість почати вивчення даного предмета із самих початкових відомостей про описуваний математичний апарат. У посібнику описані кілька алгебраїчних систем, за допомогою яких можна моделювати інтелектуальні структури, а також показаний зв'язок між цими алгебрами і можливість переходу від однієї з них до іншої в залежності від практичних нестатків, що виникають у процесі моделювання.

Для успішного засвоєння матеріалу студенти повинні мати повний обсяг знань з дискретної математики, математичної логіки, лінійної алгебри, тобто з тих дисциплін, які викладаються на математичних і технічних факультетах вищих навчальних закладів освіти.

Структура даного навчального посібника, зміст та охоплені ним питання визначені з урахуванням того, що ця дисципліна не є завершальною, тобто вимагає підготовки лише з фундаментальних математичних дисциплін, що, як правило, викладаються на перших курсах. Тому цей посібник може бути використано студентами не лише старших курсів, але вже починаючи з третього курсу математичних і технічних спеціальностей.

1. АЛГЕБРА СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

1.1. СКІНЧЕННИЙ АЛФАВІТНИЙ ОПЕРАТОР

Розглянемо скінченну множину $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, яку будемо називати **алфавітом**. Елементи a_1, a_2, \dots, a_k цієї множини називаються **буквами алфавіту A** . Число букв k у цьому алфавіті може бути довільним. Будь-яку послідовність букв алфавіту A назвемо **словом** в алфавіті A . Нехай $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ – деякі довільно обрані букви алфавіту A . Тоді послідовність $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m)$ є словом в алфавіті A . Кількість m букв у слові називають **довжиною слова**. Довжину слова ніяким чином не обмежують, тому m може бути будь-яким натуральним числом. Варто зазначити, що букви в слові можуть повторюватися, тому на різних місцях у ньому можуть зустрічатися однакові букви. Послідовності, що мають у своєму складі одну букву, і послідовності, що не містять жодної букви, також вважаються словами. В останньому випадку слово має нульову довжину. Таке слово називають **порожнім** і позначають символом Λ . Введення порожнього слова, можливо, виглядає неприродним, але воно є необхідним для логічної завершеності поняття слова. Наприклад, українські слова «лампа», «квітка» тощо можна розглядати як слова в українському алфавіті; десятковий запис будь-якого натурального числа є словом в алфавіті $\{0, 1, \dots, 9\}$ [1].

Нехай A – довільно обраний непорожній алфавіт. Розглянемо множину M всіх слів, складених з букв алфавіту A . В зв'язку з тим, що в даній множині зустрічаються слова як завгодно великої довжини, загальна кількість слів у неї є нескінченною. Формально множину M можна подати як об'єднання всіх декартових ступенів алфавіту A [45]. Таким чином,

$$M = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

Будь-яку підмножину L множини M всіх слів алфавіту A називають **мовою** над алфавітом A . Мова L може бути як скінченною, так і нескінченною. Прикладами мов можуть служити:

- множина всіх українських слів, що є скінченною мовою над українським алфавітом;
- множина десяткових кодів усіх натуральних чисел, що є нескінченною мовою над алфавітом десяткових цифр.

Нехай A – довільно обраний непорожній алфавіт, а M – множина всіх слів цього алфавіту. Будь-яку функцію $Y = FX$, що відображає слова X із множини M у слова Y із множини M , називають **алфавітним оператором**, заданим на множині M . Іншими словами, алфавітним оператором називається будь-яка однозначна відповідність, що зіставляє словам якогось алфавіту слова того ж самого алфавіту. Сукупність L_1 всіх слів, для кожного з яких алфавітний оператор F ставить у відповідність деяке цілком визначене слово, називають **областю визначення** або **вхідною мовою** алфавітного оператора F . Може так трапитися, що алфавітний оператор F деяким словам множини M не ставить у відповідність жодного слова, так що вхідна мова не обов'язково збігається із множиною M . Множина L_2 всіх слів, що є значеннями алфавітного оператора F , називають його **областю значень** або **вихідною мовою**. Слова вхідної мови називають **вхідними словами** алфавітного оператора, слова вихідної мови – відповідно його **вихідними словами**. Алфавітний оператор, вхідна мова якого збігається із множиною M , називається **всюди визначеним**. Якщо ж вхідна мова є лише частиною множини M , то такий алфавітний оператор називається **частковим**. Прикладом усюди визначеного алфавітного оператора може служити оператор, заданий на множині всіх

десяткових кодів всіх натуральних чисел, що десятковому коду кожного натурального числа ставить у відповідність десятковий код квадрата цього числа. Прикладом часткового алфавітного оператора може служити оператор, заданий на тій самій множині, що десятковому коду натурального числа ставить у відповідність десятковий код квадратного кореня із цього числа, але за умови, що корінь – натуральне число.

Поняття алфавітного оператора має один істотний недолік: його задають у нескінченній множині слів, що містить слова як завгодно великої довжини. Ця обставина призводить до потенційної присутності нескінченності в понятті алфавітного оператора [2], що створює певні незручності. Цієї незручності можна уникнути, замінивши поняття алфавітного оператора близьким йому поняттям **скінченного алфавітного оператора**. Відмінність скінченного алфавітного оператора від описаного поняття алфавітного оператора полягає лише в тому, що він задається не на нескінченній множині $A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$ слів різної довжини, а на скінченній множині A^m слів однакової довжини m , складених із букв алфавіту A . В якості числа m має бути обране число, не менше за максимальну довжину слів, якими може оперувати досліджуваний інтелект. При цьому виникає ускладнення, пов'язане зі здатністю інтелекту оперувати словами різної довжини, тоді як у понятті скінченного алфавітного оператора фігурують слова однакової довжини. Ця перешкода легко усувається за рахунок введення в алфавіт A додаткової букви \square , яку називають **знаком пробілу** або просто **пробілом**. Слово, що має довжину, меншу за m , при математичному описі замінюється словом довжини m , ліва частина якого збігається з вихідним словом, а права частина є послідовністю пробілів (але взагалі можна було б зробити й навпаки). При читанні формального запису слова знаки пробілу, що розташовані у слові правіше всіх інших букв, не повинні прийматися до уваги. Слово, складене з самих пробілів, має інтерпретуватися як порожнє слово. Наприклад, якщо обрано $m = 6$, то слово «ранок» буде формально подане у вигляді $р а н о к \square \square$. Ситуація тут така ж сама, як і при машинному записі числових кодів: довжина всіх кодів прийнята однаковою, однак нулі, що розташовані у правій частині коду, при його читанні до уваги не приймаються. Якби ми визначили поняття скінченного алфавітного оператора в такий спосіб, щоб до складу його вхідних та вихідних мов ввійшли також і слова довжини, меншої за m , то це істотно ускладнило б математичну мову для запису таких операторів.

Множина M , на якій заданий скінченний алфавітний оператор, містить $c = k^m$ слів, тобто рівно стільки, скільки є m -розрядних k -їчних числових кодів. Усього існує c^c різних скінченних алфавітних операторів, заданих на множині M .

1.2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Щоб мати можливість математично описувати функції інтелекту, потрібна формальна мова, на якій можна було б вести опис. Вона має бути обраною з таким розрахунком, щоб на ній можна було б у зручній формі записати будь-який скінченний алфавітний оператор. Зазначену мову дає нам так звана алгебра скінченних предикатів. Уведемо поняття скінченного предиката. Нехай A – скінченний алфавіт, що складається із k букв a_1, a_2, \dots, a_k , Σ - множина, що складається із двох елементів, позначуваних символами 0 і 1 , що називаються **неправдою** та **істиною** відповідно. Змінну, задану на множині A , називають **буквеною**, а змінну, задану на множині Σ - логічною. **Скінченим n -місним предикатом** над алфавітом A називається будь-яка функція $t = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n буквених аргументів x_1, x_2, \dots, x_n ,

заданих на множині A , що приймає логічні значення t . Інколи скінченний предикат f називають k -їчним, підкреслюючи, що його алфавіт A складається із k букв. Будь-який скінченний предикат можна задати за допомогою таблиці його значень, у якій кожному набору значень аргументів (x_1, x_2, \dots, x_n) ставиться у відповідність значення предиката t .

Розглянемо, наприклад, двомісний предикат $t = f(x_1, x_2)$, заданий над алфавітом $A = \{a, m, n\}$. Його значення подані у наступній таблиці.

Таблиця 1.1

x_1	а	а	а	м	м	м	п	п	п
x_2	а	м	п	а	м	п	а	м	п
t	0	0	1	1	1	0	0	1	1

За цією таблицею знаходимо, що, наприклад, на наборі значень аргументів $(x_1, x_2) = (a, m)$ предикат f приймає значення 0, а на наборі (n, m) – значення 1. Аналогічно перебирають значення предиката й для інших наборів. Розставивши в останньому рядку таблиці логічні значення в який-небудь інший спосіб, отримуємо інший двомісний предикат над тим самим алфавітом.

Пронумеруємо всі k -їчні n -місні предикати, для чого будемо інтерпретувати послідовність значень предиката, розташовану в нижньому рядку його таблиці, як k^n -розрядний двійковий код. Символ 0 інтерпретується як цифра «0», а символ 1 – як цифра «1». Число, що відповідає коду, приймається як номер скінченного предиката. Наприклад, предикату з таблиці 1.1 привласнюється № 001110011, що відповідає числу 115 у десятковій системі. Нехай $N(n, k)$ – кількість всіх k -їчних n -місних предикатів. Є очевидним, що воно збігається із кількістю всіх k^n -розрядних двійкових кодів, тому $N(n, k) = 2^{(k^n)}$. Наприклад, кількість всіх двомісних 3-їчних предикатів дорівнює $N(2, 3) = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$.

Кожному скінченному алфавітному операторові можна поставити у відповідність деякий свій скінченний предикат. Робиться це в наступний спосіб. Нехай

$$y_1 y_2 \dots y_m = F(x_1 x_2 \dots x_m)$$

– довільно обраний скінченний алфавітний оператор, що перетворює вхідні слова $x_1 x_2 \dots x_m$ довжини m у вихідні слова $y_1 y_2 \dots y_m$ тієї ж самої довжини, складені з букв алфавіту A . Побудуємо $2m$ -місний скінченний предикат $f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m)$ над алфавітом A , керуючись наступним правилом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m) = \begin{cases} 1, & y_1 y_2 \dots y_m = F(x_1 x_2 \dots x_m) \\ 0, & y_1 y_2 \dots y_m \neq F(x_1 x_2 \dots x_m) \end{cases}$$

Запишемо рівняння

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m) = 1. \quad (1.1)$$

Це рівняння зв'язує змінні $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ деяким співвідношенням. Підставляючи в (1.1) букви вхідного слова $(x_1 x_2 \dots x_m)$ алфавітного оператора F , отримуємо в результаті рішення даного рівняння, тобто букви вихідного слова $(y_1 y_2 \dots y_m)$. Таким чином, предикат f , побудований в описаний спосіб, містить всю інформацію про алфавітний оператор F , яка нас цікавить. Також з його допомогою можна визначити вихідне слово алфавітного оператора, що подане цим предикатом, для будь-якого вхідного слова.

Слід зазначити, що в такій самій спосіб можна задати за допомогою скінченних предикатів не лише всюди визначені, але й будь-які часткові скінченні алфавітні оператори. Якщо вхідному слову $(x_1 x_2 \dots x_m)$ алфавітний оператор F не ставить у відповідність жодного вихідного слова, то це означає, що рівняння (1.1) для заданого набору значень аргументів (x_1, x_2, \dots, x_m) не має жодного рішення щодо набору змінних (y_1, y_2, \dots, y_m) , тобто рішення у зазначеного рівняння не існує. Важливо, що за допомогою одного скінченного предиката можна задати ціле сімейство скінченних алфавітних операторів. Це досягається введенням у предикат додаткової змінної z , значеннями якої служать номери тих алфавітних операторів, що задаються. Нехай, наприклад, потрібно подати у вигляді скінченного предиката сімейство, що складається із трьох алфавітних операторів

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \dots y_m &= F_1(x_1 x_2 \dots x_m), \\ y_1 y_2 \dots y_m &= F_2(x_1 x_2 \dots x_m), \\ y_1 y_2 \dots y_m &= F_3(x_1 x_2 \dots x_m). \end{aligned}$$

Будуємо $(2m + 1)$ -місний предикат $f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m, z)$, маючи на увазі, що при $z = 1$ він відповідає алфавітному оператору F_1 , при $z = 2$ – алфавітному оператору F_2 , при $z = 3$ – алфавітному оператору F_3 .

За допомогою скінченних предикатів можна подавати не лише скінченні алфавітні оператори з однозначними значеннями, але й так звані багатозначні оператори. **Багатозначним скінченим алфавітним оператором** називається така відповідність F , що зіставляє кожне вхідне слово з A^m з деяким сімейством вихідних слів з тієї ж множини. Якщо вхідному слову $(x_1 x_2 \dots x_m)$ алфавітний оператор F ставить у відповідність кілька вихідних слів, то рівняння (1.1) для заданого набору значень аргументів (x_1, x_2, \dots, x_m) має кілька рішень щодо набору змінних (y_1, y_2, \dots, y_m) . Багатозначний оператор можна розглядати як узагальнення поняття однозначного скінченного алфавітного оператора. **Однозначні скінченні алфавітні оператори** – це такі багатозначні оператори, які кожному вхідному слову ставлять у відповідність деяку множину вихідних слів, що складається не більш, ніж з одного слова. Якщо кожному вхідному слову ставиться у відповідність множина, що складається не більш, ніж із одного слова, то такий скінченний алфавітний оператор називається **всюди визначеним**, якщо ж деяким із вхідних слів ставиться у відповідність порожня множина слів, то такий алфавітний оператор – **частковий**.

Розглянемо приклад подання скінченного алфавітного оператора за допомогою скінченного предиката. Нехай заданий оператор $Y = FX$, що перетворює двобуквені слова $X = x_1 x_2$ українського алфавіту в однобуквені слова $Y = y_1$ того ж самого алфавіту. Вигляд перетворення зазначений у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

X	до	ре	мі	фа	ля	сі
Y	а	о	у	і	є	я

Цьому алфавітному операторові ставимо у відповідність предикат $t = f(x_1, x_2, y)$, описаний у таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

x_1	д	р	м	ф	л	с
x_2	о	е	і	а	я	і
y	а	о	у	і	є	я
t	1	1	1	1	1	1

У таблиці зазначені не всі стовпці, а лише ті з них, у яких в останньому рядку розташоване значення **1**. Мається на увазі, що у всіх відсутніх стовпцях предикат приймає значення **0**. У зв'язку з тим, що в українському алфавіті 34 букви, загальна кількість стовпців таблиці мала б становити $34^3 \approx 30000$. Але таке різке збільшення розмірів таблиці зовсім не означає, що подання операторів у вигляді скінченних предикатів не дає ніяких переваг і лише все ускладнює. Справа в тому, що скінченні предикати, на відміну від скінченних алфавітних операторів, які довелося б описувати засобами багатозначної логіки, припускають зручний аналітичний запис, подібний до формул алгебри логіки.

1.3. ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Щоб отримати можливість записувати скінченні предикати у вигляді формул, вводиться спеціальна алгебраїчна система, що називається алгеброю скінченних предикатів [1]. Точніше, вводиться не одна, а ціле сімейство таких алгебр. Кожна алгебра скінченних предикатів повністю характеризується алфавітом букв A , що складається із k символів a_1, a_2, \dots, a_k , і алфавітом змінних B , що складається з n символів x_1, x_2, \dots, x_n . Засобами алгебри скінченних предикатів з алфавітом букв $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ і алфавітом змінних $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ може бути записаний будь-який скінченний k -їчний n -місний предикат $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданий над алфавітом A . Вважається, що букви та змінні алфавітів A і B пронумеровані. Введемо поняття формули алгебри скінченних предикатів з алфавітом букв $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ і алфавітом змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Формули будемо будувати з наступних символів: букв a_1, a_2, \dots, a_k ; змінних x_1, x_2, \dots, x_n ; знаків диз'юнкції \vee і кон'юнкції \wedge ; відкриваючої та закриваючої дужок $()$; логічних констант **0** і **1**, що називаються відповідно неправдою та істиною. Поняття формули визначається індуктивно за допомогою наступної системи з 4-х правил:

- 1) символи **0** і **1** вважаються формулами;
- 2) всі вирази, що мають вигляд $a_i(x_j)$, де $1 \leq i \leq k$, а $1 \leq j \leq n$, називаються формулами;
- 3) якщо вирази A і B є формулами, то вираз $(A(B))$ також є формулою;
- 4) якщо вирази A і B є формулами, то вираз $(B(A))$ також є формулою.

Кожну формулу будемо розглядати як позначення деякого предиката $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданого над алфавітом $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Закон відповідності між формулами й позначуваними ними предикатами визначається індуктивно наступними правилами:

- 1) формула **0** позначає тотожно хибний предикат, тобто предикат, що дорівнює нулю для всіх наборів значень аргументів;
- 2) формула **1** позначає тотожно істинний предикат, тобто предикат, що дорівнює одиниці для всіх наборів значень аргументів;
- 3) формула $a_i(x_j)$ позначає предикат, що дорівнює одиниці для всіх тих наборів значень аргументів, для яких $x_j = a_i$, і дорівнює нулю для всіх інших наборів.

Нехай формула A позначає предикат f , а формула B – предикат g . Тоді

- 4) формула $(A \vee B)$ позначає предикат, що дорівнює нулю для всіх тих наборів значень аргументів, для яких $f = 0$ та $g = 0$, і дорівнює одиниці для всіх інших наборів;
- 5) формула $(A \wedge B)$ позначає предикат, що дорівнює одиниці для всіх тих наборів значень аргументів, для яких $f = 1$ та $g = 1$, і дорівнює нулю для всіх інших наборів.

Предикат $(A \vee B)$ називається диз'юнкцією або логічною сумою, а предикат $(A \wedge B)$ – відповідно кон'юнкцією або логічним добутком предикатів A і B . Функція, що ставить у відповідність будь-яким предикатам A і B предикат $(A \vee B)$ називається операцією диз'юнкції або операцією логічного додавання. Аналогічно функція, що ставить у відповідність будь-яким предикатам A і B предикат $(A \wedge B)$ називається операцією кон'юнкції або операцією логічного добутку. Операції диз'юнкції та кон'юнкції називаються елементарними операціями алгебри скінченних предикатів.

Нехай x, y – логічні змінні. Тоді функція $f = x \vee y$ називається функцією диз'юнкції, а функція $f = x \wedge y$ – відповідно функцією кон'юнкції. В залежності від значень своїх змінних ці функції приймають наступні значення [2]:

<i>Диз'юнкція</i>			<i>Кон'юнкція</i>		
x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

У ряді випадків формули алгебри скінченних предикатів зручно розглядати як значення відповідних предикатів, тобто як логічні константи. При такій інтерпретації записи виду $(A \vee B)$ і $(A \wedge B)$ можна розглядати як функції диз'юнкції та кон'юнкції, а вирази A і B , що входять до їх складу, – як логічні змінні. Кожну формулу виду $a_i(x_j)$ зручно розглядати як одномісний предикат, що залежить тільки від змінної x_j та визначений в наступний спосіб [1]:

$$a_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_j = a_i; \\ 0, & \text{якщо } x_j \neq a_i. \end{cases}$$

Предикат $a_i(x_j)$ нібито «упізнає» одну єдину букву a_i серед можливих букв алфавіту A , тому його називають предикатом упізнавання букви a_i або просто упізнаванням букви a_i , що залежить від змінної x_j . Усього існує k^n різних «упізнавань» букв, діючи на які операціями диз'юнкції та кон'юнкції багаторазово та у різному порядку, можна одержати різні предикати. Впізнавання букв називаються елементарними предикатами алгебри скінченних предикатів. Сукупність елементарних операцій й елементарних предикатів утворить базис алгебри скінченних предикатів [1].

Приклад 1.1. Нехай $k = 3$, $n = 4$, $a_1 = a$, $a_2 = m$, $a_3 = n$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$. Доведемо, що вираз

$$((a(y) \wedge a(t))) \wedge ((m(x) \wedge m(z)) \vee (n(x) \wedge n(z)))) \quad (a)$$

є формулою алгебри скінченних предикатів.

Доведення. Для цього зазначимо, що згідно з 2-м правилом утворення формул, вирази $a(y)$, $a(t)$, $m(x)$, $m(z)$, $n(x)$, $n(z)$ є формулами. За допомогою 4-го правила із уже наявних формул

будуємо наступні формули: $(\mathbf{a}(y) \wedge \mathbf{a}(t))$, $(\mathbf{m}(x) \wedge \mathbf{m}(z))$, $(\mathbf{п}(x) \wedge \mathbf{п}(z))$. Із двох останніх формул за 3-м правилом утворюємо формулу $((\mathbf{m}(x) \wedge \mathbf{m}(z)) \vee (\mathbf{п}(x) \wedge \mathbf{п}(z)))$. Нарешті, із застосуванням 4-го правила до формул $(\mathbf{a}(y) \wedge \mathbf{a}(t))$, $((\mathbf{m}(x) \wedge \mathbf{m}(z)) \vee (\mathbf{п}(x) \wedge \mathbf{п}(z)))$, отримуємо формулу, яку треба було довести. **Формулу доведено.**

Недоліком наведених формул є те, що вони виглядають невиправдано громіздкими. Це можна побачити з наведеного прикладу. Однак цього недоліку можна уникнути, якщо скористатися скороченим записом формул [2]. При переході від повного запису формули до скороченого опускають зовнішні дужки, тобто формули $(A \vee B)$ і $(A \wedge B)$ записуються як $A \vee B$ і $A \wedge B$. Впізнавання букв $\mathbf{a}_i(x_j)$ також можна записувати в більш короткій і зручній формі $x_j^{a_i}$, називаючи букву \mathbf{a}_i показником впізнавання букв. Знак кон'юнкції в скорочених записах формул можна замінювати крапкою або зовсім опускати: $A \wedge B = A \cdot B = AB$. Крім того, у записах формул можна опускати всі ті дужки, наявність яких не є обов'язковою для правильного розуміння змісту формули. Якщо дужки, що регулюють порядок виконання дій, у скороченому записі формул не зазначені, то за прийнятою згодою про старшинство операцій, спочатку виконуються операції кон'юнкції, а лише потім – операції диз'юнкції. Цією угодою операція кон'юнкції приймається за старшу відносно до операції диз'юнкції. При відсутності дужок у формулі першою з однотипних операцій виконується та, знак якої розташований у формулі лівіше. Прийняті правила скорочення запису формул є такими, що за потреби завжди можна перейти від скороченого запису формули до самої початкової формули. Застосовуючи розглянуті способи скорочення запису формул, формулу (а) можна інакше подати у наступному вигляді:

$$y^a t^a (x^m z^m \vee x^п z^п). \quad (б)$$

Від формули завжди можна перейти до таблиці позначуваного нею предиката. Для цього потрібно за цією формулою обчислити значення позначуваного нею предиката для всіляких наборів значень аргументів. Обчислимо, наприклад, значення предиката $f(x, y, z, t)$, що поданий формулою (б), для наборів значень аргументів $(\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{a})$ і $(\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{п}, \mathbf{a})$:

$$f(\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{a}) = a^a a^a (\mathbf{m}^m \mathbf{m}^m \vee \mathbf{m}^п \mathbf{п}^п) = 1 \cdot 1 (1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 1) = 1 (1 \vee 0) = 1;$$

$$f(\mathbf{m}, \mathbf{a}, \mathbf{п}, \mathbf{a}) = a^a a^a (\mathbf{m}^m \mathbf{п}^m \vee \mathbf{m}^п \mathbf{п}^п) = 1 \cdot 1 (1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1) = 1 (0 \vee 0) = 0.$$

Аналогічні обчислення для всіляких буквених наборів, складених з букв \mathbf{a} , \mathbf{m} , $\mathbf{п}$ (їх усього $3^4 = 81$), показують, що предикат f «впізнає» лише два слова: «*мама*» і «*папа*». Він ставить їм у відповідність значення $\mathbf{1}$, тобто істину. Іншим словам предикат f ставить у відповідність значення $\mathbf{0}$, тобто неправду.

1.4. ПОВНОТА АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Алгебра скінченних предикатів є повною. Дійсно, тотожно хибний предикат може бути записаний у вигляді формули $\mathbf{0}$. Предикат, що приймає значення $\mathbf{1}$ лише на одному наборі значень аргументів $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, можна подати формулою $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$. Предикат, що приймає значення $\mathbf{1}$ на довільних наборах $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n})$, $(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2n})$, \dots , $(\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \dots, \sigma_{mn})$, може бути поданий формулою

$$x_1^{\sigma_{11}} x_2^{\sigma_{12}} \dots x_n^{\sigma_{1n}} \vee x_1^{\sigma_{21}} x_2^{\sigma_{22}} \dots x_n^{\sigma_{2n}} \vee \dots \vee x_1^{\sigma_{m1}} x_2^{\sigma_{m2}} \dots x_n^{\sigma_{mn}}.$$

Таким чином, будь-який скінченний предикат може бути записаний мовою алгебри скінченних предикатів. Алгебра скінченних предикатів є не лише повною, але навіть у деякому змісті надлишковою. Введена в ній першим правилом формула **1** не знадобилася для запису довільних предикатів. Позначуваний формулою **1** тотожно істинний предикат може бути виражений за допомогою інших засобів алгебри скінченних предикатів, наприклад, у формі диз'юнкції всіляких кон'юнкцій вигляду $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$. У випадку, коли $k \geq 2$, тобто коли алфавіт A містить, принаймні, дві букви a_1 і a_2 , можна обійтися й без вживання формули **0**. Позначуваний даною формулою тотожно хибний предикат може бути записаний, наприклад, у вигляді формули $x_1^{a_1} x_1^{a_2}$. Виключимо з означення формули алгебри скінченних предикатів перше правило, що вводить формули **0** і **1**. Крім того, припустимо, що $k \geq 2$. Виявляється, що за прийнятих припущень алгебра скінченних предикатів нескоротна в тому розумінні, що будь-які подальші скорочення в правилах утворення її формул, що залишилися, ведуть до неповноти даної алгебри. Дійсно, якщо виключити із числа формул один з виразів вигляду $a_i(x_j)$, що вводяться другим правилом, то стане неможливим утворити формулу для позначення предиката, що звертається в одиницю на всіх тих наборах значень аргументів, для яких $x_j = a_i$, і в нуль – на решті наборах. Якщо ж виключити третє правило, тоді неможливо подати у вигляді формули тотожно істинний предикат. Виключення четвертого правила унеможливить подання у вигляді формули тотожно хибний предикат. Таким чином, формули **0** і **1** не є обов'язковими для алгебри скінченних предикатів. Їхнє введення не розширює виразних можливостей цієї алгебри, тому що й без зазначених формул алгебра скінченних предикатів є повною. Символи **0** і **1** включені до складу формул тому, що вони забезпечують додаткові зручності при користуванні алгеброю скінченних предикатів. Треба, однак, зазначити, що формула **0** для повноти алгебр, у яких $k = 1$, все ж таки є необхідною. Алгебри даного типу не представляють серйозного інтересу для теорії інтелекту через їх виродженість. Алфавіт A таких алгебр складається з однієї єдиної букви a_1 . Предикати, охоплювані такими алгебрами, приймають значення **1** лише на одному єдиному наборі значень аргументів (a_1, a_1, \dots, a_1) , у якому a_1 зустрічається n разів. Такою алгеброю охоплюються лише два предикати: **0** і **1**.

1.5. ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Спочатку розглянемо основні тотожності алгебри скінченних предикатів. Як відомо, тотожними називаються формули, що позначають той самий предикат [2]. Нехай A, B, C – довільні формули алгебри скінченних предикатів. Справедливими є наступні тотожності:

закони комутативності:

$$\begin{aligned} A \vee B &= B \vee A, \\ A B &= B A; \end{aligned} \quad (1.2)$$

закони асоціативності:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C), \\ (A B) C &= A (B C); \end{aligned} \quad (1.3)$$

закони дистрибутивності:

$$\begin{aligned} (A \vee B) C &= A C \vee A B, \\ A B \vee C &= (A \vee C) (B \vee C); \end{aligned} \quad (1.4)$$

закони ідемпотентності:

$$\begin{aligned} A \vee A &= A, \\ A A &= A; \end{aligned} \quad (1.5)$$

закони елімінації (поглинання):

$$\begin{aligned} A \vee A B &= A, \\ A (A \vee B) &= A. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Назви для наведених тотожностей запозичені із алгебри логіки, де розглядаються співпадаючі з ними за формою закони. Однак, в алгебрі логіки формули означають не скінченні предикати, а булеві функції [2]. Справедливість тотожностей легко перевіряється перебором усіляких значень предикатів A, B, C . Справедливий, крім того, ряд тотожностей, у яких беруть участь логічні константи: $A \vee 1 \equiv 1, A \cdot 0 \equiv 0, A \cdot 1 \equiv A, A \vee 0 \equiv 0$. Нехай x – довільна буквена змінна. Тоді має місце наступна тотожність:

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv 1. \quad (1.7)$$

Дійсно, яку б букву алфавіту A ми не підставили замість змінної x у ліву частину тотожності (1.7), завжди один з диз'юнктивів, а разом з ним і вся диз'юнкція, обертається в одиницю. Тотожність (1.7) називається законом істинності. Нехай a і b – дві довільні букви алфавіту A , що відрізняються одна від одної. Тоді має місце наступна тотожність:

$$x^a x^b \equiv 0. \quad (1.8)$$

Дійсно, яку б букву алфавіту A ми не підставили замість змінної x у ліву частину тотожності (1.8), завжди один з кон'юнктивів, а разом з ним і вся кон'юнкція, обертається в нуль. Тотожність (1.8) називається законом хибності. Закон істинності можна в деякому змісті розглядати як аналог закону виключення третього алгебри логіки, а закон хибності - як аналог закону протиріччя [3].

1.6. КОНСЕРВАТИВНЕ РОЗШИРЕННЯ АЛГЕБРИ СКІНЧЕНИХ ПРЕДИКАТІВ

Введення операції заперечення дозволяє показати, що алгебра скінчених предикатів є булевою алгеброю [2]. Крім того, наявність операції заперечення дасть можливість у ряді випадків записувати скінченні предикати у формі більш компактних виразів, а також виконувати тотожні перетворення формул більш коротким шляхом. Операція заперечення – це одномісна функція, задана на множині всіх k -їчних n -місних предикатів зі значеннями в тій же множині. Якщо A – аргумент і B – значення операції заперечення, то пишуть $B = (\neg A)$ або в скороченій формі $B = \bar{A}$. Запереченням предиката $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається предикат $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що приймає значення 0 для всіх наборів значень аргументів (x_1, x_2, \dots, x_n) , при яких $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$, і значення 1 для всіх тих наборів значень аргументів, для яких $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, тобто

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ 0, & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1. \end{cases}$$

При $k \geq 2$ можна визначити операцію заперечення аксіоматично, задавши її наступними тотожностями:

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \overline{B}, \quad (1.9)$$

$$\overline{A B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}, \quad (1.10)$$

$$\overline{x^{a_i}} \equiv x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \dots \vee x^{a_k}. \quad (1.11)$$

Тут A і B – довільні формули, x – довільна буквена змінна, a_i – довільна буква алфавіту алгебри скінченних предикатів, індекс $i = \overline{1, k}$. Тотожності (1.9) і (1.10) збігаються за формою із законами де Моргана в алгебрі логіки, які застосовуються тепер не до булевих змінних, а до змінних предикатів. Тотожності (1.11) називаються законами заперечення. При $k = 1$ закони заперечення втрачають сенс. У цьому випадку $\overline{x^{a_i}} = 0$. Користуючись властивостями алгебри скінченних предикатів, а також тотожностями (1.9) - (1.11), можна довести, що

$$\overline{0} \equiv 1, \quad (1.12)$$

$$\overline{1} \equiv 0. \quad (1.13)$$

Будь-яка формула із запереченнями може бути перетворена за допомогою залежностей (1.9) – (1.13) у тотожну їй формулу без заперечень. Дійсно, застосовуючи багаторазово закони де Моргана, завжди можна знаки заперечення, що розташовані над формулою або її частинами, опустити безпосередньо на впізнавання букв або на 0 та 1 . Потім, користуючись тотожностями (1.11) – (1.13), з формули можна виключити заперечення. У ряді випадків процес виключення знаків заперечення істотно спрощується, якщо використати наступні тотожності:

$$x^{a_i} \overline{x^{a_j}} \equiv x^{a_i}, \quad (1.14)$$

$$x^{a_i} (\overline{x^{a_j}} \vee A) \equiv x^{a_i}. \quad (1.15)$$

Ці властивості є справедливими за умови, що $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$. Буквою A позначена довільна формула алгебри скінченних предикатів. Тотожності (1.14) називаються законами поглинання заперечення, тотожності (1.15) – узагальненими законами поглинання заперечення. Для операції заперечення також справедливі наступні тотожності:

закон подвійного заперечення

$$\overline{\overline{A}} \equiv A; \quad (1.16)$$

закон виключення третього

$$A \vee \overline{A} \equiv 1; \quad (1.17)$$

закон протиріччя

$$A \overline{A} \equiv 0. \quad (1.18)$$

Ці тотожності за формою збігаються з однойменними законами алгебри логіки [2].

Отже, в алгебрі скінченних предикатів, поряд із операціями диз'юнкції та кон'юнкції, існує операція заперечення з усіма властивостями, якими наділяє її булева алгебра (тотожності (1.9), (1.10), (1.12), (1.13), (1.16) – (1.18)). Тому алгебру скінченних предикатів можна розглядати як різновид булевої алгебри. Основною множиною в ній служить система всіх k -ічних n -місних предикатів з алфавітом букв $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ і алфавітом змінних $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, роль нуля виконує тотожно хибний предикат, роль одиниці – тотожно істинний предикат, у ролі базисних операцій виступають диз'юнкція, кон'юнкція та

заперечення. Як система тотожностей алгебри скінченних предикатів, що задає в ній структуру булевої алгебри (і тільки цю структуру), можна використати, наприклад, наступний набір аксіом: (1.5), (1.2), (1.3), (1.4), (1.16), (1.9) і тотожність $(A \vee \bar{A}) B \equiv B$. Однак алгебра скінченних предикатів – це не лише булева алгебра, вона має й свої специфічні тотожності: закони істинності (1.6), хибності (1.7) і заперечення (1.11), що не впливають із аксіом булевої алгебри. Закони істинності й хибності можна записати в модифікованому вигляді без використання символів $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$:

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv A \vee \bar{A},$$

$$x^{a_i} x^{a_j} \equiv A \bar{A}, \quad i \neq j.$$

Слід зазначити, що введення операції заперечення в алгебрі скінченних предикатів не розширює її виразних можливостей, тому що вона є повною і без операції заперечення. Таким чином, за допомогою введення операції заперечення досягається лише консервативне розширення алгебри скінченних предикатів [4].

Предикат $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається **двоїстим** до предиката $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Це поняття та його означення подібне до поняття та означення двоїстих булевих функцій. Таблиця двоїстого предиката може бути отримана з таблиці початкового предиката заміною в її останньому рядку значень предиката на зворотні: $\mathbf{0}$ на $\mathbf{1}$ та $\mathbf{1}$ на $\mathbf{0}$, а потім перегортанням отриманого рядку зліва направо. Для кожного предиката існує двоїстий до нього предикат. Предикат, двоїстий до двоїстого предиката, збігається з початковим: $f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Система предикатів, двоїстих до усіляких предикатів, збігається із системою всіх предикатів (маються на увазі предикати, що відповідають цілком визначеним множинам букв і змінних). Щоб за формулою деякого скінченного предиката побудувати формулу для двоїстого предиката, необхідно у початковій формулі замінити всі знаки диз'юнкції на знаки кон'юнкції, знаки кон'юнкції – на знаки диз'юнкції, знаки $\mathbf{0}$ – на знаки $\mathbf{1}$, знаки $\mathbf{1}$ – на знаки $\mathbf{0}$. Цей алгоритм подібний до принципу двоїстості в булевій алгебрі. Але, на відміну від звичайної булевої алгебри, для побудовання за цим принципом формули двоїстого скінченного предиката слід також ввести знаки заперечення над тими упізнаваннями букв, де вони до цього були відсутні, і прибрати їх у тих упізнавань букв, над якими вони були присутні. Нехай, наприклад,

$$f = x_1^a x_2^b \vee x_3^c.$$

Тоді

$$f^* = (\bar{x}_1^a \vee \bar{x}_2^b) x_3^c.$$

В алгебрі скінченних предикатів вводяться ще три двомісні операції, за рахунок яких досягається консервативне її розширення. **Імплікація предикатів** визначається як:

$$A \supset B \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A} \vee B.$$

Букви A і B позначають довільні формули алгебри скінченних предикатів. Операція імплікації вважається молодшою стосовно операцій диз'юнкції та кон'юнкції. Це означає, що при відсутності дужок, що регулюють порядок виконання операцій, імплікація має виконуватися після кон'юнкції та диз'юнкції. Властивості імплікації предикатів збігаються із властивостями імплікації висловлень:

рефлексивність

$$A \supset A \equiv 1,$$

транзитивність

$$(A \supset B) (B \supset C) \supset (A \supset C) \equiv 1,$$

властивості логічних констант

$$0 \supset A \equiv 1,$$

$$1 \supset A \equiv A,$$

$$A \supset 0 \equiv \bar{A},$$

$$A \supset 1 \equiv 1,$$

закон дедукції

$$A (A \supset B) \supset B \equiv 1,$$

закон контрапозиції

$$A \supset B \equiv \bar{B} \supset \bar{A},$$

закон імпортації

$$(A (B \supset C)) \supset (A B \supset C) \equiv 1,$$

закон експортації

$$(A B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)),$$

закон приведення до абсурду

$$A \bar{A} \supset B \equiv 1.$$

Еквівалентність предикатів формально визначається як:

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{=} A B \vee \bar{A} \bar{B}.$$

Для неї мають місце наступні властивості:

рефлексивність

$$A \sim A \equiv 1,$$

комутативність

$$A \sim B \equiv B \sim A,$$

асоціативність

$$(A \sim B) \sim C \equiv A \sim (B \sim C),$$

транзитивність

$$(A \sim B) (B \sim C) \supset (A \sim C) \equiv 1,$$

властивості логічних констант

$$A \sim 0 \equiv \bar{A},$$

$$A \sim 1 \equiv A.$$

Нерівнозначність предикатів формально визначається як:

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} A \bar{B} \vee \bar{A} B.$$

Для неї мають місце наступні властивості:

антирефлексивність

$$A \oplus A \equiv 0,$$

комутативність

$$A \oplus B \equiv B \oplus A,$$

асоціативність

$$(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C),$$

дистрибутивність

$$(A \oplus B) C \equiv A C \oplus B C,$$

властивості логічних констант

$$A \oplus 0 \equiv A,$$

$$A \oplus 1 \equiv \bar{A}.$$

Тут A , B і C – довільні формули алгебри скінченних предикатів. У випадку відсутності у формулі дужок, що регулюють порядок виконання операцій, безпосередньо після виконання операцій заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції та імплікації виконується операція еквівалентності, і тільки потім – операція нерівнозначності.

1.7. ЗМІННІ ПРЕДИКАТИ ТА ПРЕДИКАТИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай x – буквенна змінна, що позначає довільний предмет, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ – букви, що позначають деякі індивідуальні предмети. Твердження « x належить множині $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ » скорочено запишеться у вигляді $x \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$. Воно є логічно еквівалентним до відношення, що задається наступним рівнянням алгебри скінченних предикатів [1]:

$$x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_p} = 1. \quad (1.19)$$

Таким чином, можна записати

$$x \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_p}.$$

Запис виду $x_1, x_2 \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ формалізується в наступний спосіб:

$$x_1, x_2 \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}) \wedge (x_2 \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}).$$

Аналогічно може бути формалізований запис $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$. Коли x належить одноелементній множині $\{\sigma\}$, тобто $x \in \{\sigma\}$, то пишуть $x = \sigma$ [45]. Таким чином, **рівність елемента x фіксованому значенню σ** визначається предикатом

$$(x = \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} x^\sigma.$$

Аналогічно, нерівність елемента x фіксованому значенню σ визначається предикатом

$$(x \neq \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x^\sigma}. \quad (1.20)$$

Узяте саме по собі означення (1.20) не є цілком ефективним, тому що не завжди є придатним для практичного застосування. Справа в тому, що опис об'єктів передбачається вести мовою алгебри скінченних предикатів, що хоч і скінченна, але невиразно велика. Це призводить до неможливості виключити знак заперечення із правої частини рівності (1.20), тому що для цього довелося б перелічити всі, крім σ , букви прийнятої алгебри, що практично неможливо здійснити. Щоб визначення (1.20) стало цілком ефективним, тобто придатним для будь-яких застосувань, варто особливо вказати конкретну область зміни для змінної x . Це можна зробити за допомогою рівняння (1.19). Приймаючи додатково $x \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$, приходимо до означення

$$(x \neq \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_{i-1}} \vee x^{\sigma_{i+1}} \vee \dots \vee x^{\sigma_p}, & \sigma = \sigma_i \\ x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_p}, & \sigma \neq \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}; \end{cases}$$

вільного від зазначеного недоліку. Точно так само визначається поняття неприналежності елемента x множині $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$:

$$(x \notin \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_p}}.$$

Це означення буде цілком ефективним тоді, коли буде додатково задана область зміни змінної x . Приналежність елемента x порожній множині \emptyset записується у вигляді предиката, що тотожно дорівнює нулю:

$$x \in \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Неприналежність елемента x порожній множині \emptyset записується у вигляді тотожно рівного одиниці предиката:

$$x \notin \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Умова рівності букв $x = y$ формально записується у вигляді наступного предиката:

$$(x = y) \stackrel{\text{def}}{=} x^{a_1} y^{a_1} \vee x^{a_2} y^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_\chi} y^{a_\chi}. \quad (1.21)$$

Є очевидним, що без вказівки конкретних областей зміни аргументів x і y визначення рівності букв, введене співвідношенням (1.21), буде не цілком ефективним, тому що неможливо практично вписати всі диз'юнктивні члени, що розташовані у правій частині рівності (1.21). Нехай додатково задано, що $x, y \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$. Тоді рівність букв формально можна записати у вигляді:

$$(x = y) \stackrel{\text{def}}{=} x^{\sigma_1} y^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} y^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_p} y^{\sigma_p}. \quad (1.22)$$

Говорять, що в цьому випадку рівність букв поширюється на область $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$. Означення (1.22) є цілком ефективним. Хоча означення (1.21) і (1.22) ідентичні за формою, але їх змістовне наповнення розрізняється. У першому випадку χ - це невиразно велике число. Тому вираз, що розташований в правій частині рівності (1.21), фактично не може бути вписаний. Тут ми маємо справу не із самою формулою, а лише з її умовним позначенням. У другому випадку p - це не занадто велике реально припустиме число. Тому запис, що розташований в правій частині рівності (1.22), - фактично вписана формула, яку можна

реально використати при розв'язанні тих або інших задач. Введена рівність букв має наступні властивості [1, 45]:

рефлексивність:

$$x = x;$$

симетричність:

$$\text{якщо } x = y, \text{ то } y = x;$$

транзитивність: для будь-яких x, y, z з довільної фіксованої множини

$$\text{якщо } x = y \text{ і } y = z, \text{ то } x = z;$$

екстенціональність: для будь-яких букв x, y з довільної фіксованої множини і для будь-якого скінченного одномісного предиката P , заданого на цій самій множині,

$$\text{якщо } x = y, \text{ то } P(x) = P(y).$$

Наведемо математичний опис понять теорії відносин. Приналежність набору $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ декартовому добутку множин $M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, де A_1, A_2, \dots, A_n – фіксовані скінченні множини букв, формально визначається в наступний спосіб:

$$\xi \in M \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (x_n \in A_n).$$

Декартовий ступінь A^n множини букв A вводиться рівністю

$$\xi \in A^n \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 \in A) \wedge (x_2 \in A) \wedge \dots \wedge (x_n \in A).$$

Рівність буквеного набору $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ фіксованому набору $\alpha = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ запишеться у вигляді предиката

$$(\xi = \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} x^{\sigma_1} x^{\sigma_2} \dots x^{\sigma_n}.$$

Рівність буквених наборів $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ та $\eta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ формально запишеться як

$$(\xi = \eta) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n).$$

Нехай $P = \{(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n}), \dots, (\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \dots, \sigma_{mn})\}$ – фіксоване n -арне відношення, $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n}, \dots, \sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \dots, \sigma_{mn}$ – букви деякої універсальної алгебри скінченних предикатів, $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – буквений набір. Висловлення про те, що набір ξ належить відношенню P , формально запишеться у вигляді

$$\xi \in P \stackrel{\text{def}}{=} x^{\sigma_{11}} x^{\sigma_{12}} \dots x^{\sigma_{1n}} \vee \dots \vee x^{\sigma_{m1}} x^{\sigma_{m2}} \dots x^{\sigma_{mn}}.$$

Приналежність набору $\zeta = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ декартовому добутку $P \times Q$ відносин P і Q формально запишеться як

$$\zeta \in (P \times Q) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi \in P) \wedge (\eta \in Q),$$

де $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ і $\eta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Нехай R – фіксоване бінарне відношення, задане на декартовому добутку $E^m \times E^n$, де $\xi = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ і $\eta = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, а E – деяка множина букв. Мовою алгебри скінченних предикатів приналежність пари (ξ, η) до відношення R запишеться у вигляді предиката

$$\xi R \eta \stackrel{\text{def}}{=} \xi \in \eta \stackrel{\text{def}}{=} R(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

що визначений в наступний спосіб:

$$R(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \xi R \eta; \\ 0, & \xi \bar{R} \eta. \end{cases}$$

Перейдемо до розгляду змінних одномісних скінченних предикатів. Нехай $P(x)$ – змінний предикат, заданий на скінченній множині $E = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. Засобами алгебри скінченних предикатів він запишеться в наступний спосіб:

$$P(x) = p_1 x^{a_1} \vee p_2 x^{a_2} \vee \dots \vee p_l x^{a_l}. \quad (1.23)$$

Тут p_1, \dots, p_l – логічні змінні. Якщо $p_i = 1, i = \overline{1, l}$, то $P(a_i) = 1$; якщо $p_i = 0$, то $P(a_i) = 0$. Набір (p_1, \dots, p_l) називається **характеристикою предиката $P(x)$** . Завданням характеристики предиката $P(x)$ досягається його однозначне визначення рівністю (1.23). Будемо писати $P = (p_1, \dots, p_l)$. Цей запис означає, що предикат P має характеристику (p_1, \dots, p_l) . Логічна змінна p_i називається **i -тим компонентом характеристики предиката P** . Нехай $P = (p_1, \dots, p_l), Q = (q_1, \dots, q_l)$ – змінні предикати, задані на множині E . Є очевидним, що

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_l), \\ P \vee Q &= (p_1 \vee q_1, \dots, p_l \vee q_l), \\ P \wedge Q &= (p_1 \wedge q_1, \dots, p_l \wedge q_l), \\ P \supset Q &= (p_1 \supset q_1, \dots, p_l \supset q_l), \\ P \oplus Q &= (p_1 \oplus q_1, \dots, p_l \oplus q_l). \end{aligned}$$

Пов'язуючи рівняннями компоненти характеристик різних змінних предикатів, можна записувати мовою алгебри скінченних предикатів відносини між цими предикатами. В аналогічний спосіб можуть бути записані двомісні та взагалі n -місні змінні скінченні предикати.

Мовою алгебри скінченних предикатів можна записувати предикати вищих порядків. Нехай (p_1, \dots, p_l) – характеристика одномісного предиката P , заданого на множині E . Предикат Q від предиката P , тобто одномісний предикат 2-го порядку $Q(P)$ записується в наступному вигляді:

$$Q(P) \stackrel{\text{def}}{=} f(p_1, \dots, p_l).$$

Тут p_1, \dots, p_l – це предикати, що залежать від деяких буквених параметрів, f – логічна функція, визначена в наступний спосіб:

$$f(p_1, \dots, p_l) = \begin{cases} 1, & Q(P) = 1; \\ 0, & Q(P) = 0. \end{cases}$$

Під терміном «логічні функції» розуміються функції, у яких і аргументами, і значеннями служать логічні змінні. У загальному вигляді функція f запишеться як:

$$f(p_1, \dots, p_l) = f_1 \bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_l \vee f_2 \bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_l \vee \dots \vee f_l \bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_l.$$

Набір логічних змінних (f_1, f_2, \dots, f_l) називається **характеристикою предиката 2-го порядку**. Предикат S від предиката Q , тобто одномісний предикат 3-го порядку $S(Q)$, запишеться аналогічно:

$$S(Q) \stackrel{\text{def}}{=} g(f_1, f_2, \dots, f_l),$$

де

$$g(f_1, f_2, \dots, f_l) = \begin{cases} \mathbf{1}, & S(Q) = \mathbf{1}; \\ \mathbf{0}, & S(Q) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

В аналогічний спосіб можуть бути математично описані предикати довільного порядку. Якщо предикат довільного порядку заданий не на всій можливій області визначення, то спеціальним рівнянням, що пов'язує компоненти його характеристики, має бути задана область його визначення.

1.8. Контрольні запитання

1. Наведіть приклади скінченних та нескінченних мов.
2. Що таке алфавітний оператор, його вхідна та вихідна мови?
3. В чому полягає відмінність поняття скінченного алфавітного оператора від близького йому поняття алфавітного оператора?
4. Що таке скінченний n -місний предикат?
5. Як визначається поняття формули алгебри скінченних предикатів?
6. Як визначається закон відповідності між формулами та позначуваними ними предикатами?
7. Які операції є елементарними операціями алгебри скінченних предикатів?
8. Які предикати є елементарними предикатами алгебри скінченних предикатів?
9. Що складає базис алгебри скінченних предикатів?
10. У якому сенсі алгебра скінченних предикатів є надлишковою?
11. За яких припущень алгебра скінченних предикатів є нескоротною?
12. Які тотожності мають місце у алгебрі скінченних предикатів?
13. Що саме дозволяє стверджувати, що алгебра скінченних предикатів є булевою алгеброю?
14. Як саме можна записати закони істинності та хибності без використання символів $\mathbf{0}$ та $\mathbf{1}$?
15. Що таке двоїстий предикат? Якому поняттю він відповідає в булевій алгебрі?
16. За рахунок введення яких саме операцій досягається консервативне розширення алгебри скінченних предикатів?
17. Як за допомогою алгебри скінченних предикатів можна формалізувати основні поняття теорії множин?
18. В який спосіб засобами алгебри скінченних предикатів записуються змінні предикати?
19. В який спосіб мовою алгебри скінченних предикатів можна записувати предикати вищих порядків?

2. АЛГЕБРА СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

2.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Введемо множину $M_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_{k_0}\}$ первинних символів a_1, a_2, \dots, a_{k_0} , які називаються буквами, де k_0 – кількість букв у множині M_0 . Множина M_0 називається алфавітом букв. Припустимо, що вже введено множини M_1, M_2, \dots, M_{i-1} , де i – якесь число із чисел $1, 2, \dots, p$. Скінченим предикатом i -го порядку називається будь-яка функція, що має вигляд [5]

$$f = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{i-1,1}, x_{i-1,2}, \dots, x_{i-1,n_{i-1}})$$

зі значеннями в множині $\{0, 1\}$, і яку задано на декартовому добутку $M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} \times \dots \times M_{i-1}^{n_{i-1}}$. Тут n_0, n_1, \dots, n_{i-1} – якісь числа із натурального ряду. За множину M_i приймається сукупність всіх скінчених предикатів i -го порядку. Приймаючи $i = p$, отримуємо означення скінченного предиката p -го порядку. Скінченим предикатом p -го порядку називається будь-яка функція, що має вигляд

$$f = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, \dots, x_{p-1,n_{p-1}}) \quad (2.1)$$

зі значеннями в множині $\{0, 1\}$, і яку задано на декартовому добутку $M_0^{n_0} \times M_1^{n_1} \times \dots \times M_{p-1}^{n_{p-1}}$. Множину всіх скінчених предикатів p -го порядку позначимо через M_p . Говорять, що введені в такий спосіб скінченні предикати p -го порядку мають тип $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$.

Змінні $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}$, кожна з яких визначена на множині M_0 , називаються змінними нульового порядку або буквеними змінними. Змінні $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$, задані на множині M_i , $i = \overline{1, p-1}$, називають змінними i -го порядку або змінними предикатами i -го порядку. Всі введені змінні, крім буквених, називають предикатними змінними. Змінні, від яких значення функції не залежить, називають фіктивними змінними цієї функції. У тому окремому випадку, коли всі предикатні змінні скінченного предиката p -го порядку фіктивні, його можна вважати скінченим предикатом 1-го порядку. Таким чином, скінченні предикати 1-го порядку є окремим випадком скінчених предикатів p -го порядку. До скінчених предикатів 1-го порядку можна перейти й в інший спосіб, поклавши у виразі (2.1) $p = 1$.

Кількість k_i предикатів i -го порядку, тобто кількість елементів у множині M_i , визначається формулою

$$k_i = 2^{k_0^{n_0} k_1^{n_1} \dots k_{i-1}^{n_{i-1}}}, i = \overline{1, p}.$$

Показник ступеня $k_0^{n_0} k_1^{n_1} \dots k_{i-1}^{n_{i-1}}$ у формулі характеризує кількість всіх різних наборів значень аргументів предиката i -го порядку.

2.2. ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТИВ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Для визначення поняття формули алгебри скінченних предикатів p -го порядку спочатку вводяться попарно символи, що розрізняються: *букви* a_1, a_2, \dots, a_{k_0} ; *змінні нульового порядку* $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}$; *змінні 1-го порядку* $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$; ...; *змінні $(p-1)$ -го порядку* $x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, \dots, x_{p-1,n_{p-1}}$; *знак диз'юнкції* \vee ; *знак кон'юнкції* \wedge ; *відкриваючу дужку* «(» *закриваючу дужку* «)»; *кому* «,»; *нуль* 0 ; *одиницю* 1 . Довільні послідовності введених символів називаються **виразами**.

Поняття **формули p -го порядку** визначається індуктивно за допомогою наступних правил [5]:

- 1) символи 0 та 1 називаються формулами 1-го порядку;
- 2) усі вирази вигляду $a_r(x_{0s_0})$, де $r = \overline{1, k_0}$, $s_0 = \overline{1, n_0}$ називаються формулами 1-го порядку;
- 3) якщо вираз A є формулою i -го порядку, то всі вирази вигляду $A(x_{is_i})$ вважаються формулами $(i+1)$ -го порядку, $i = \overline{1, p-1}$, $s_i = \overline{1, n_i}$;
- 4) всі формули i -го порядку вважаються формулами $(i+1)$ -го порядку, $i = \overline{1, p-1}$;
- 5) якщо вирази A і B є формулами i -го порядку, то вирази $A \vee B$ і $A \wedge B$ також є формулами i -го порядку, $i = \overline{1, p}$;
- 6) всі формули p -го порядку називаються **формулами алгебри скінченних предикатів p -го порядку**.

Говорять, що цими правилами введені формули алгебри типу $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$. Суворо кажучи, було введено не одну, а нескінченне сімейство алгебр скінченних предикатів. Вибір конкретної алгебри із цього сімейства однозначно визначається визначенням порядку p алгебри, а також її алфавіту букв $M_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_{k_0}\}$ і p алфавітів змінних $N_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}\}$, де $i = \overline{1, p}$. Вважається, що букви та змінні алфавітів M_0 і N_1, N_2, \dots, N_{p-1} перенумеровані.

Числове значення порядку формул, що входять до складу формули p -го порядку, може бути визначене за допомогою наступних правил:

- 1) якщо вираз $A \vee B$ є формулою i -го порядку, то вирази A і B також є формулами i -го порядку;
- 2) якщо вираз $A \wedge B$ є формулою i -го порядку, то вирази A і B також є формулами i -го порядку;
- 3) у формулі виду $A(x_{js_j})$, $j = \overline{1, p-1}$, вираз A є предикатом j -го порядку.

Недоліком описаного способу утворення формул є те, що отримані формули є невиправдано громіздкими. Для усунення цього недоліку використовують **скорочений запис формул**. При переході від повного запису формул до скороченого опускаються зовнішні дужки. Вираз вигляду $A(x_{is_i})$, $i = \overline{1, p-1}$, можна записувати у вигляді $x_{is_i}^A$, тобто $A(x_{is_i}) = x_{is_i}^A$. Знак кон'юнкції в скороченому записі замінюється крапкою або зовсім опускається: $A \wedge B = A \cdot B = AB$. У записах формул також опускаються всі ті дужки, наявність яких не є обов'язковою для правильного розуміння структури формули. Вводиться також угода про старшинство знаків: кон'юнкція вважається старшою за диз'юнкцію.

Кожну формулу алгебри скінченних предикатів p -го порядку можна розглядати як позначення деякого предиката p -го порядку. Закон відповідності між формулами та позначуваними ними предикатами визначається індуктивно наступними правилами [5]:

- 1) формула i -го порядку 0 позначає тотожно хибний предикат i -го порядку, тобто предикат, що дорівнює нулю на всіх наборах значень аргументів $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{i-1,1}, x_{i-1,2}, \dots, x_{i-1,n_{i-1}})$;
- 2) формула i -го порядку 1 позначає тотожно істинний предикат i -го порядку, тобто предикат, що дорівнює одиниці на всіх наборах значень аргументів $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{i-1,1}, x_{i-1,2}, \dots, x_{i-1,n_{i-1}})$;
- 3) формула $(i+1)$ -го порядку $x_{is_i}^A$ позначає предикат $(i+1)$ -го порядку, тобто предикат, що дорівнює одиниці на всіх тих наборах значень аргументів, на яких $x_{is_i}^A = A$, і дорівнює нулю на решті наборах. При цьому A – це фіксований предикат i -го порядку;
- 4) нехай формула i -го порядку A позначає деякий предикат f i -го порядку, а формула i -го порядку B позначає деякий предикат g i -го порядку. Тоді формула $A \vee B$ позначає такий предикат i -го порядку, що дорівнює нулю на всіх тих наборах значень аргументів, на яких $f = 0$ і $g = 0$, та дорівнює одиниці на решті наборах. При цьому предикат $A \vee B$ називається диз'юнкцією або логічною сумою предикатів A і B ;
- 5) нехай формула i -го порядку A позначає деякий предикат f i -го порядку, а формула i -го порядку B позначає деякий предикат g i -го порядку. Тоді формула $A \wedge B$ позначає предикат i -го порядку, що дорівнює одиниці на всіх тих наборах значень аргументів, на яких $f = 1$ і $g = 1$, та дорівнює нулю на решті наборах. При цьому предикат $A \wedge B$ називається кон'юнкцією або логічним добутком предикатів A і B .

Функцію, що ставить у відповідність будь-яким предикатам A і B однакового порядку предикат $A \vee B$ того ж самого порядку, називається операцією диз'юнкції або операцією логічного додавання. Аналогічно функція, що ставить у відповідність предикатам A і B однакового порядку предикат $A \wedge B$ того ж самого порядку, називається операцією кон'юнкції або операцією логічного добутку. Операції кон'юнкції та диз'юнкції називаються елементарними операціями алгебри скінченних предикатів заданого типу.

Кожну формулу $(i+1)$ -го порядку $x_{is_i}^A$ ($i = \overline{1, p-1}$, $s_i = \overline{1, n_i}$) зручно розглядати як одномісний предикат $(i+1)$ -го порядку, що залежить лише від змінної x_{is_i} та визначений в наступний спосіб:

$$x_{is_i}^A = \begin{cases} 1, & x_{is_i} = A; \\ 0, & x_{is_i} \neq A. \end{cases}$$

Тут A – яка-небудь буква або предикат, що входять до області визначення змінної x_{is_i} . При цьому предикат $A(x_{is_i})$ як би «упізнає» один єдиний символ A , що позначає букву або предикат, серед всіх можливих значень змінної x_{is_i} . Тому він називається предикатом упізнавання символу A або просто упізнаванням символу A , що залежить від змінної x_{is_i} . Виконуючи із упізнаваннями різних символів, що залежать від тих чи інших змінних, операції диз'юнкції та кон'юнкції – багаторазово та у різному порядку – можна отримати різні предикати заданого типу. Всілякі предикати впізнавання об'єктів вважаються елементарними предикатами алгебри скінченних предикатів типу $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$. Елементарні операції та елементарні предикати, узяті разом, утворюють базис алгебри скінченних предикатів заданого типу.

Приклад 2.1. Складемо таблицю предиката 2-го порядку $f(x, X)$, поданого формулою $X^{x^a} x^b \vee x^a$. Тут мається на увазі, що $M_0 = \{a, b\}$, $(k_0, n_0, n_1) = (2, 1, 1)$, x – буквена змінна, X – предикатна змінна. Необхідно обчислити значення предиката $f(x, X)$ для всіляких значень аргументів x і X .

Розв'язання. Підставляти значення аргументів замість змінних, що фігурують у показниках формул, не треба. Вираз x^a , що розташований в показнику ступеня формули, – це ім'я предиката X^{x^a} . Тому символ x у цьому виразі неможна розглядати як змінну алгебри. Він є лише одним із знаків, що складають ім'я x^a предиката X^{x^a} . Замість знаку x , що входить до імені предиката, підставляти значення змінної x неможна. У записі X^{x^a} є лише одна справжня (або **вільна**) змінна, а саме X . У цьому випадку спостерігається омографія знаку x , який використовується у двох зовсім різних ролях. Робимо підстановку всіляких значень аргументів x і X у кінцеву формулу та обчислюємо значення предиката $f(x, X)$:

$$\begin{aligned} f(a, 0) &= (0)^{x^a} a^b \vee a^a = 0 \cdot 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = \mathbf{1}; \\ f(a, x^a) &= (x^a)^{x^a} a^b \vee a^a = 1 \cdot 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = \mathbf{1}; \\ f(a, x^b) &= (x^b)^{x^a} a^b \vee a^a = 0 \cdot 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = \mathbf{1}; \\ f(a, 1) &= (1)^{x^a} a^b \vee a^a = 0 \cdot 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = \mathbf{1}; \\ f(b, 0) &= (0)^{x^a} b^b \vee b^a = 0 \cdot 1 \vee 0 = 0 \vee 0 = \mathbf{0}; \\ f(b, x^a) &= (x^a)^{x^a} b^b \vee b^a = 1 \cdot 1 \vee 0 = 1 \vee 0 = \mathbf{1}; \\ f(b, x^b) &= (x^b)^{x^a} b^b \vee b^a = 0 \cdot 1 \vee 0 = 0 \vee 0 = \mathbf{0}; \\ f(b, 1) &= (1)^{x^a} b^b \vee b^a = 0 \cdot 1 \vee 0 = 0 \vee 0 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

При обчисленні було враховано, що змінна x приймає значення a і b , а змінна X – значення 0 , x^a , x^b , 1 . За даними цих обчислень будується наступна таблиця предиката $f(x, X)$.

$x \backslash X$	0	x^a	x^b	1
a	1	1	1	1
b	0	1	0	0

2.3. ПОВНОТА АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТИВ БУДЬ-ЯКОГО ТИПУ

Алгебра скінченних предикатів будь-якого типу є повною. Дійсно, тотожно хибний предикат можна записати у вигляді формули 0 . Предикат $f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, \dots, x_{p-1,n_{p-1}})$, що дорівнює одиниці лише на одному єдиному наборі значень аргументів $(\sigma_{01}, \sigma_{02}, \dots, \sigma_{0n_0}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n_1}, \dots, \sigma_{p-1,1}, \sigma_{p-1,2}, \dots, \sigma_{p-1,n_{p-1}})$, можна подати формулою

$$x_{01}^{\sigma_{01}} x_{02}^{\sigma_{02}} \dots x_{0n_0}^{\sigma_{0n_0}} x_{11}^{\sigma_{11}} x_{12}^{\sigma_{12}} \dots x_{1n_1}^{\sigma_{1n_1}} \dots x_{p-1,1}^{\sigma_{p-1,1}} x_{p-1,2}^{\sigma_{p-1,2}} \dots x_{p-1,n_{p-1}}^{\sigma_{p-1,n_{p-1}}}.$$

Предикат, що дорівнює одиниці лише на наступних довільно обраних t наборах

$$(\sigma_{011}, \sigma_{021}, \dots, \sigma_{0n_01}, \sigma_{111}, \sigma_{121}, \dots, \sigma_{1n_11}, \dots, \sigma_{p-1,1,1}, \sigma_{p-1,2,1}, \dots, \sigma_{p-1,n_{p-1},1}),$$

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_{012}, \sigma_{022}, \dots, \sigma_{0n_0 2}, \sigma_{111}, \sigma_{122}, \dots, \sigma_{1n_1 2}, \dots, \sigma_{p-1,1,2}, \sigma_{p-1,2,2}, \dots, \sigma_{p-1,n_{p-1},2}), \\
 & \dots\dots\dots, \\
 & (\sigma_{01t}, \sigma_{02t}, \dots, \sigma_{0n_0 t}, \sigma_{11t}, \sigma_{12t}, \dots, \sigma_{1n_1 t}, \dots, \sigma_{p-1,1,t}, \sigma_{p-1,2,t}, \dots, \sigma_{p-1,n_{p-1},t}),
 \end{aligned}$$

можна подати формулою

$$\begin{aligned}
 & x_{01}^{\sigma_{011}} x_{02}^{\sigma_{021}} \dots x_{0n_0}^{\sigma_{0n_0 1}} x_{11}^{\sigma_{111}} x_{12}^{\sigma_{121}} \dots x_{1n_1}^{\sigma_{1n_1 1}} \dots x_{p-1,1}^{\sigma_{p-1,1,1}} x_{p-1,2}^{\sigma_{p-1,2,1}} \dots x_{p-1,n_{p-1}}^{\sigma_{p-1,n_{p-1},1}} \vee \\
 & \vee x_{01}^{\sigma_{012}} x_{02}^{\sigma_{022}} \dots x_{0n_0}^{\sigma_{0n_0 2}} x_{11}^{\sigma_{112}} x_{12}^{\sigma_{122}} \dots x_{1n_1}^{\sigma_{1n_1 2}} \dots x_{p-1,1}^{\sigma_{p-1,1,2}} x_{p-1,2}^{\sigma_{p-1,2,2}} \dots x_{p-1,n_{p-1}}^{\sigma_{p-1,n_{p-1},2}} \vee \\
 & \vee \dots \vee \\
 & \vee x_{01}^{\sigma_{01t}} x_{02}^{\sigma_{02t}} \dots x_{0n_0}^{\sigma_{0n_0 t}} x_{11}^{\sigma_{11t}} x_{12}^{\sigma_{12t}} \dots x_{1n_1}^{\sigma_{1n_1 t}} \dots x_{p-1,1}^{\sigma_{p-1,1,t}} x_{p-1,2}^{\sigma_{p-1,2,t}} \dots x_{p-1,n_{p-1}}^{\sigma_{p-1,n_{p-1},t}}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, будь-який скінченний предикат типу $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$ можна записати мовою алгебри скінченних предикатів того ж самого типу.

Алгебра скінченних предикатів довільного типу є не лише повною, але ще й надлишковою. Так, введена в ній 1-м й 4-м правилами формула **1** не знадобилася для запису предикатів. Позначуваний формулою **1** тотожно істинний предикат можна виразити за допомогою інших засобів алгебри, наприклад, у формі

$$x_{01}^{a_1} \vee x_{01}^{a_2} \vee \dots \vee x_{01}^{a_k}.$$

У випадку, коли $k_0 \geq 2$, $p \geq 1$, $n_0 \geq 1$, тобто коли алгебра скінченних предикатів є **невиродженою**, можна обійтися також і без формули **0**. Позначуваний цією формулою тотожно хибний предикат можна записати у вигляді формули $x_{01}^{a_1} x_{01}^{a_2}$.

Виключимо з визначення формули алгебри скінченних предикатів довільного порядку 1-ше правило, що вводить формули **1** і **0**, і припустимо, що алгебра є невивродженою. За цих умов алгебра є нескоротною в тому розумінні, що будь-які подальші скорочення в правилах утворення тих її формул, що залишилися, ведуть до неповноти даної алгебри.

2.4. УНІВЕРСАЛЬНА АЛГЕБРА СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Фактично вище було введено не одну, а ціле сімейство алгебр скінченних предикатів довільного порядку [5]. Кожна з цих алгебр характеризується своїм типом $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$, алфавітом букв $M_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_{k_0}\}$ і алфавітами змінних $N_0 = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}\}$, $N_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}\}$, ..., $N_{p-1} = \{x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, \dots, x_{p-1,n_{p-1}}\}$. Починаючи процес розв'язання тієї чи іншої задачі з використанням алгебри скінченних предикатів довільного порядку, необхідно заздалегідь указати тип цієї алгебри та всі її алфавіти. Це не завжди зручно. Роль єдиної алгебри для всіх можливих задач може виконати так звана універсальна алгебра, алфавіт букв якої $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\chi_0}\}$ і алфавіти змінних $B_0 = \{\xi_{01}, \xi_{02}, \dots, \xi_{0\nu_0}\}$, $B_1 = \{\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1\nu_1}\}$, ..., $B_{\pi-1} = \{\xi_{\pi-1,1}, \xi_{\pi-1,2}, \dots, \xi_{\pi-1,\nu_{\pi-1}}\}$. Ця алгебра називається **універсальною алгеброю скінченних предикатів**. Особливість цієї алгебри полягає в тому, що порядок алгебри π і числа $\chi_0, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{\pi-1}$ у її алфавітах завжди залишаються незмінними. Про ці числа вважається відомим лише те, що вони скінченні та настільки великі, що задовольняють будь-яким практичним потребам. Це означає, що в алфавітах $A, B_0, B_1, \dots, B_{\pi-1}$ містяться усі потрібні знаки, тому в універсальній алгебрі можна користуватися будь-якими знаками без жодних обмежень.

Після введення описаних обмежень і законів істинності всі невизначеності, притаманні універсальній алгебрі, зникають, і ми отримуємо один із варіантів алгебри, що має трохи загальнішу природу, ніж початкова алгебра скінченних предикатів довільного порядку, введена в розділі 2.2. Більша спільність проявляється, по-перше, у тім, що тепер кожна зі змінних може мати свою власну область визначення, відмінну від областей визначення інших змінних. По-друге, у тім, що частина змінних початкової алгебри в новому варіанті алгебри може бути відсутньою. Кожна з отриманих в такий спосіб алгебраїчних систем також називається **алгеброю скінченних предикатів**.

Для універсальної алгебри скінченних предикатів також має місце **закон хибності**

$$x_i^a x_i^b \equiv 0,$$

а також всі ті тотожності, що були введені для алгебри скінченних предикатів у розділі 1.5.

2.5. АЛГЕБРИ ПІДСТАНОВНИХ ПРЕДИКАТІВ ТА ОПЕРАЦІЙ

Нехай x – яка-небудь зі змінних універсальної алгебри скінченних предикатів довільного порядку. Її область визначення M записується за допомогою закону істинності:

$$x^{\alpha_1} \vee x^{\alpha_2} \vee \dots \vee x^{\alpha_s} = 1.$$

Цей запис означає, що $x \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$. Якщо x – змінна нульового порядку, то $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – це букви. Якщо x – змінна i -го порядку, $i = \overline{1, p-1}$, тобто змінний предикат i -го порядку, то $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – це фіксовані предикати i -го порядку. Розглянемо відношення $x \in X$ приналежності змінного елемента x змінній множині X . Нехай, наприклад, $x \in \{a, b\}$, $X \in \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$. Потрібно записати відношення $x \in X$ мовою алгебри скінченних предикатів. Для цього необхідно виписати всі варіанти приналежності елементів із множини $\{a, b\}$ множинам із системи $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$: $a \in \{a\}$, $a \in \{a, b\}$, $b \in \{a, b\}$. Таким чином, відношення $x \in X$ є наступною множиною пар: $\{(a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (b, \{a, b\})\}$. Переходимо від отриманого співвідношення до відповідного предиката:

$$x \in X \equiv x^a X^{(x^a)} \vee x^1 \vee x^b \equiv x^a X^{(x^a)} \vee (x^a \vee x^b) X^1 \equiv x^a X^{(x^a)} \vee X^1.$$

При спрощенні формули використався закон істинності для змінної x : $x^a \vee x^b = 1$. Змінна x , від якої залежить значення предиката $X = X(x)$, позначена тим самим символом, що й незалежна змінна x . В універсальній алгебрі цієї двозначності можна уникнути, позначивши незалежну змінну предиката X якимось іншим символом, конкретно – символом y . В результаті отримуємо предикат $X(y)$. В універсальній алгебрі це можливо, тому що в ній є скільки завгодно змінних будь-якого порядку. Область визначення змінної y вводиться рівнянням $y^a \vee y^b = 1$. Область визначення для предикатної змінної X записується рівнянням

$$X^0 \vee X^{(y^a)} \vee X^1 = 1.$$

Формула для предиката приналежності в нових позначеннях записується у вигляді:

$$x \in X \equiv x^a X^{(y^a)} \vee X^1. \quad (2.3)$$

Наприклад, за допомогою формули (2.3) з'ясуємо, чи виконується щойно введене відношення $x \in X$ для $x = b$ та $X = \{b\}$. Маємо $x = b$, $X = y^b$. Отже,

$$(x \in X) = (b \in y^b) = b^a (y^b)^{(y^a)} \vee (y^b)^1 = 0 \cdot 0 \vee 0 = 0.$$

Отже, приналежність $b \in \{b\}$ у цьому випадку не виконується. Це пояснюється відсутністю предиката y^b в області визначення предикатної змінної X .

Перепишемо формулу (2.3) в іншому вигляді:

$$x \in X \equiv 0 \cdot X^0 \vee x^a X^{(y^a)} \vee 1 \cdot X^1.$$

Звідси видно, що предикат-множник і предикат-показник у кожному з диз'юнктивних членів формули збігаються з точністю до позначення аргументу предиката. При цьому кожен предикат з області $\{0, y^a, 1\}$ визначення змінної X використовується в точності по одному разу й породжує свій диз'юнктивний член. Це спостереження дозволяє дати наступне загальне визначення відносини приналежності $x \in X$ елемента x множині X . Нехай $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ – область визначення змінних x і y , $N = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ – область визначення змінної X . Тоді

$$(x \in X) \Leftrightarrow (P_1(x) X^{P_1} \vee P_2(x) X^{P_2} \vee \dots \vee P_t(x) X^{P_t}),$$

або в більш компактній формі:

$$(x \in X) \Leftrightarrow \bigvee_{P \in N} P(x) X^P. \quad (2.4)$$

У формулі (2.4) фігурує допоміжна змінна першого порядку P , що відіграє роль індексу, за яким ведеться логічне підсумовування. Вона має ту ж область визначення, що й змінна X :

$$P^{P_1} \vee P^{P_2} \vee \dots \vee P^{P_t} = 1.$$

У формулі (2.4) запис $P(x)$ означає, що елемент x належить фіксованій множині P . Запис X^P означає, що множина X збігається із множиною P . В цілому, формула (2.4) означає, що знайдеться така множина P , що належить системі множин N , для якої $x \in P$ і $P = X$, тобто що $x \in X$.

У рівності (2.4) під символом x можна розуміти не лише букви, але й предикати довільного i -го порядку ($i = \overline{1, p-2}$), а під символом X – не лише предикати першого порядку, але й предикати $(i+1)$ -го порядку. Таким чином, за допомогою визначення (2.4) можна описувати приналежність відносини будь-якого порядку системі відносин того ж самого порядку.

Нехай X – змінне r -місне відношення i -го порядку. Мається на увазі, що $X \in N$, де N – якась система r -місних відношень i -го порядку. Нехай, крім того, (x_1, x_2, \dots, x_r) – довільний r -місний набір, де x_1, x_2, \dots, x_n – які-небудь відношення $(i-1)$ -го порядку, взяті із множини M . За область визначення для всіх предикатів $X \in N$ приймається множина M . Приналежність $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X$ набору (x_1, x_2, \dots, x_r) відношенню $X \in N$ відношенням $(i+1)$ -го порядку ($i = \overline{1, p-1}$). Воно записується мовою алгебри скінченних предикатів у вигляді наступного предиката $(i+1)$ -го порядку:

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X \Leftrightarrow \bigvee_{P \in N} P(x_1, x_2, \dots, x_r) X^P. \quad (2.5)$$

Має місце наступна тотожність:

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \in A \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

де A – якийсь фіксований предикат i -го порядку. Однак було б невірно писати

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X \equiv X(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Запис $X(x_1, x_2, \dots, x_r)$ позначає просто деяку змінну i -го порядку алгебри скінченних предикатів. Хоч ми й називаємо її змінним предикатом, однак насправді X – це не предикат. Предикатами є значення змінної X . В той же час, запис $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X$ – це предикат, але не змінний, а фіксований, залежний від змінних x_1, x_2, \dots, x_r, X . Предикат $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X$ має порядок $(i + 1)$. Позначимо для стислості $(x_1, x_2, \dots, x_r) = \xi$. Тоді (2.5) можна записати в більше компактному вигляді:

$$(\xi \in X) \Leftrightarrow \bigvee_{P \in N} P(\xi)X^P.$$

Нехай $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_r = s_r$, де s_1, s_2, \dots, s_r – значення змінних x_1, x_2, \dots, x_r . Фіксований набір (s_1, s_2, \dots, s_r) позначимо символом σ . Розглянемо відношення $\sigma \in X$ приналежності фіксованого набору σ змінному відношенню X . Йому відповідає наступний **предикат приналежності $\sigma \in X$ фіксованого набору σ змінному предикату X** :

$$(\sigma \in X) \Leftrightarrow \bigvee_{P \in N} P(\sigma)X^P.$$

Предикат $\sigma \in X$ – це деякий цілком визначений предикат $(i + 1)$ -го порядку, що залежить від змінної X i -го порядку. Позначимо цей предикат через $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) \Leftrightarrow \bigvee_{P \in N} P(\sigma)X^P.$$

Предикат $\sigma(X)$ називається **підстановним предикатом** від змінної X по набору σ .

Значення предиката $\sigma(X)$ при конкретних значеннях змінної X можна визначити в наступний спосіб. Нехай $X = A$, де A – довільний предикат, взятий із множини N . Тоді

$$\sigma(A) = \bigvee_{P \in N} P(\sigma)A^P = A(\sigma)A^A.$$

Остаточно маємо, що $\sigma(A) = A(\sigma)$. Із цієї рівності випливає, що для обчислення значення предиката $\sigma(A)$ варто підставити в предикат $A(\xi)$ значення $\xi = \sigma$.

Предикат X^A можна виразити через підстановні предикати виду $\sigma(A)$ в наступний спосіб:

$$X^A \equiv \bigwedge_{\sigma \in M} (\sigma(X) \sim A(\sigma)). \quad (2.6)$$

Вираз $A(\sigma)$ є логічною константою $\mathbf{0}$ або $\mathbf{1}$. Якщо $A(\sigma) = \mathbf{1}$, то

$$\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma(X) \sim \mathbf{1} \equiv \sigma(X).$$

Якщо ж $A(\sigma) = \mathbf{0}$, то

$$\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma(X) \sim \mathbf{0} \equiv \overline{\sigma(X)}.$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \sigma^1(X) &\Leftrightarrow \sigma(X), \\ \sigma^0(X) &\Leftrightarrow \overline{\sigma(X)}. \end{aligned}$$

В обох випадках маємо

$$\sigma(X) \sim A(\sigma) \equiv \sigma^{A(\sigma)}(X).$$

З урахуванням цього виразу формулу (2.5) можна переписати в наступному вигляді:

$$X^A \equiv \bigwedge_{\sigma \in M} \sigma^{A(\sigma)}(X). \quad (2.7)$$

Формула (2.7) виражає упізнання X^A довільного предиката A для будь-якого змінного предиката X у вигляді суперпозиції операцій заперечення та кон'юнкції, які діють на всілякі підстановні предикати, що залежать від змінної X . Вона дозволяє ввести новий різновид повної алгебри скінченних предикатів, яка називається **алгеброю підстановних предикатів**. У цій алгебрі в якості *елементарних предикатів* використовуються:

- 1) всі предикати упізнання букви для всіляких буквених змінних, тому що їх не можна виразити через підстановні предикати за допомогою формули (2.7);
- 2) всі підстановні предикати для всіляких предикатних змінних.

В якості *елементарних операцій* в алгебрі підстановних предикатів використовується диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення. Є очевидним, що алгебра підстановних операцій є повною та за своєю описовою потужністю еквівалентна диз'юнктивній алгебрі скінченних предикатів [1]. Алгебра підстановних предикатів у порівнянні з диз'юнктивною алгеброю має на одну операцію більше (до кон'юнкції та диз'юнкції додається ще й заперечення), але, з іншого боку, кількість елементарних предикатів у ній є істотно меншою. Кількість всіх підстановних предикатів $\sigma(X)$, що залежать від змінної X , збігається із кількістю k всіх елементів множини M , тобто із кількістю всіх наборів значень аргументів предиката X . Кількість же всіх упізнань символів X^A , що залежать від змінної X , збігається із кількістю елементів у множині N , тобто із кількістю всіх предикатів A , які можуть бути значеннями предиката X . Це число дорівнює 2^k .

Будь-який підстановний предикат $\sigma(X)$ може бути поданий у диз'юнктивній алгебрі скінченних предикатів формулою

$$\sigma(X) \equiv \bigvee_{P \in N} P(\sigma) X^P.$$

Будь-який підстановний предикат є *адитивним* щодо операцій диз'юнкції та кон'юнкції:

$$\begin{aligned} \sigma(X \vee Y) &\equiv \sigma(X) \vee \sigma(Y), \\ \sigma(X \wedge Y) &\equiv \sigma(X) \wedge \sigma(Y). \end{aligned}$$

Аналогічну властивість підстановні предикати мають також і стосовно операції заперечення:

$$\sigma(\overline{X}) \equiv \overline{\sigma(X)}.$$

Ця властивість називається *однорідністю* підстановного предиката щодо операції заперечення.

Нехай $A(x_1, x_2, \dots, x_r)$ – який-небудь предикат i -го порядку, $i = \overline{1, p}$. Розглянемо операцію $Y = s_{x_j}(X)$, $j = \overline{1, r}$, що ставить у відповідність предикату $X = A(x_1, x_2, \dots, x_r)$ предикат $Y = B(x_1, x_2, \dots, x_r) = A(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_r)$, який можна отримати шляхом підстановки в кінцевий предикат A значення s замість змінної x_j , $j = \overline{1, r}$. У предикаті

B змінна x_j є несуттєвою (фіктивною) [2]. Введена операція називається **підстановною операцією** $x_j = s$. Будь-який підстановний предикат $\sigma(X)$, де $\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_r)$, вочевидь, виражається за допомогою наступної суперпозиції підстановних операцій $s_{1x_1}, s_{2x_2}, \dots, s_{rx_r}$:

$$\sigma(X) \equiv s_{1x_1}(s_{2x_2} \dots s_{rx_r}((x_1, x_2, \dots, x_r) \in X)), \quad (2.8)$$

діючої на предикат приналежності $\xi \in X$ набору ξ предикату X , де $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Тотожність (2.8) дозволяє ввести ще один різновид повної алгебри скінченних предикатів, яка називається **алгеброю підстановних операцій**. У цій алгебрі в ролі *елементарних предикатів* використовуються всі предикати упізнавання букв і всілякі предикати приналежності вигляду $\xi \in X$. В якості *елементарних операцій* в алгебрі підстановних операцій використовуються диз'юнкція, кон'юнкція, заперечення і всі підстановні операції вигляду $x_j = s$ при всіляких значеннях $j = \overline{1, r}$ і $s \in M_j$, де M_j – область визначення змінної x_j . Є очевидним, що алгебра підстановних операцій є повною та за своєю описовою потужністю еквівалента диз'юнктивній алгебрі скінченних предикатів.

Порівняно з алгеброю підстановних предикатів алгебра підстановних операцій містить істотно меншу кількість елементарних предикатів. Загальна їхня кількість в ній дорівнює $l + r$, де l – сумарна кількість букв в областях визначення всіх змінних нульового порядку, а r – кількість всіх предикатних змінних. Тут маються на увазі змінні задачі, обрані із числа змінних універсальної алгебри. З іншого боку, кількість елементарних операцій в алгебрі підстановних операцій є істотно більшою. До операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення тепер додається $k_1 + k_2 + \dots + k_k$ підстановних операцій, де k_1, k_2, \dots, k_k – кількість елементів у множинах M_1, M_2, \dots, M_r . Якщо ж порівняти сумарну кількість елементарних операцій і предикатів, то виявляється, що в алгебрі підстановних операцій ця кількість істотно менша, ніж в алгебрі підстановних предикатів.

Теорема 2.1. Формулювання. Будь-яку підстановну операцію $s_{x_j}(X)$ можна подати в диз'юнктивній алгебрі скінченних предикатів формулою

$$s_{x_j}(X) = \bigvee_{P \in N} P(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_r) X^P. \quad (2.9)$$

Доведення. Нехай $X = A$, де A – довільно обраний предикат із множини N . Тоді

$$\begin{aligned} & \bigvee_{P \in N} P(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_r) A^P \equiv \\ & \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_r) A^P \equiv \\ & \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, s, x_{j+1}, \dots, x_r) \equiv s_{x_j}(A). \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (2.9) виконується при будь-якому значенні змінної X . **Теорему доведено.**

Будь-яка підстановна операція є *адитивною* щодо операцій диз'юнкції та кон'юнкції:

$$s_{x_j}(X \vee Y) = s_{x_j}(X) \vee s_{x_j}(Y),$$

$$s_{x_j}(X \wedge Y) = s_{x_j}(X) \wedge s_{x_j}(Y).$$

Аналогічну властивість підстановні операції мають і стосовно операції заперечення:

$$s_{x_j}(\bar{X}) \equiv \overline{s_{x_j}(X)}.$$

Ця властивість називається *однорідністю підстановної операції* щодо операції заперечення.

Підстановні операції задовольняють властивостям *ідемпотентності*:

$$s'_{x_j}(s_{x_j}(X)) \equiv s_{x_j}(X),$$

що безпосередньо випливає з того факту, що змінна x_j у предиката $s_{x_j}(X)$ є несуттєвою. Тут $s, s' \in M_j$. Має місце, крім того, властивість *комутативності* підстановних операцій:

$$s_{x_{j_1}}(s'_{x_{j_2}}(X)) \equiv s'_{x_{j_2}}(s_{x_{j_1}}(X)),$$

де $j_1, j_2 \in \{1, 2, \dots, r\}$, $s \in M_1$, $s' \in M_2$. Ця властивість обумовлена тим, що результат підстановки значень змінних не залежить від порядку, у якому ці підстановки виконуються.

2.6. Контрольні запитання

1. Що таке скінченний предикат p -го порядку?
2. Який тип має скінченний предикат p -го порядку?
3. Від яких змінних залежить скінченний предикат p -го порядку?
4. У якому випадку скінченний предикат p -го порядку можна вважати скінченним предикатом 1 -го порядку?
5. В який ще спосіб можна перейти до скінченних предикатів 1 -го порядку?
6. За допомогою яких правил визначається поняття формули p -го порядку?
7. За допомогою яких правил визначається числове значення порядку формул, що входять до складу формули p -го порядку?
8. Що є недоліком цього способу утворення формул?
9. Як саме досягається скорочений запис формул?
10. Як визначається закон відповідності між формулами й позначуваними ними предикатами?
11. Які саме операції називаються елементарними операціями алгебри скінченних предикатів заданого типу?
12. Які саме предикати вважаються елементарними предикатами алгебри скінченних предикатів типу $(k_0, n_0, n_1, \dots, n_{p-1})$?
13. Що саме утворює базис алгебри скінченних предикатів заданого типу?
14. Чому алгебра скінченних предикатів довільного типу є не лише повною, але й надлишковою?
15. За яких умов алгебра скінченних предикатів довільного типу є нескоротною?
16. В чому полягає особливість універсальної алгебри скінченних предикатів?
17. Який предикат називається підстановним предикатом від змінної X по набору σ ?
18. Які саме предикати та операції використовуються в алгебрі підстановних предикатів в якості елементарних предикатів та елементарних операцій?
19. Які властивості має будь-який підстановний предикат щодо операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення?
20. Що називається підстановною операцією $x_j = s$?

21. Які саме предикати і операції використовуються в алгебрі підстановних операцій в якості елементарних предикатів та елементарних операцій?
22. Яка з алгебр (підстановних предикатів чи підстановних операцій) має меншу кількість елементарних предикатів, а яка має меншу кількість елементарних операцій?
23. Які властивості має будь-яка підстановна операція щодо операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення?
24. Яким властивостям задовольняють підстановні операції?

3. АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

3.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

Предикатні операції використовуються в тих випадках, коли виникає потреба виконувати дії над предикатами [6] або описувати зв'язки між ними [5]. Алгебра предикатних операцій є нібито другим поверхом, надбудовою над алгеброю предикатів, її розширенням. Алгебра предикатів охоплюється алгеброю предикатних операцій. Алгебра предикатів та алгебра предикатних операцій відносяться до області логічної математики, що виникла у зв'язку з необхідністю формального опису об'єктів і процесів, спостережуваних у внутрішньому (суб'єктивному, психологічному) світі людини та машини. Основна сфера застосування логічної математики - формальний опис інформаційних об'єктів та процесів.

Нехай U – універсум предметів; x_1, x_2, \dots, x_m – предметні змінні; M - множина всіх предикатів $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на предметному просторі U^m [6]. Множина M називається **універсумом предикатів**. Змінні x_1, x_2, \dots, x_m , визначені на множині M , називаються **предикатними змінними**. Їхніми значеннями є предикати, задані на U^m . Множина M^n називається **предикатним простором розмірності n** над предметним простором U^m . Елементи множини M^n (набори предикатів) називаються **предикатними векторами**. Предикатний простір є двоповерховою конструкцією: на першому поверсі перебувають предмети, на другому – предикати. Будь-яка функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y$, що відображає множину M^n у множину M , називається **предикатною операцією**. Утворимо множину R всіх предикатних операцій. **Алгеброю предикатних операцій** над R називається будь-яка алгебра, задана на носії R . У класичному математичному аналізі предметам алгебри предикатних операцій відповідають числа, предикатам – функції, предикатним операціям – оператори, відносинам другого порядку, що зв'язують предикати, – функціональні рівняння (зокрема, диференціальні та інтегральні) [7].

Нехай $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y$ – предикатна операція, що відображає множину M^n у множину M . Тут x_1, x_2, \dots, x_n – предикатні змінні, що виступають в ролі аргументів операції F ; Y – предикатна змінна, що є значенням операції F .

Запереченням $\neg F = \bar{F}$ предикатної операції F називається така предикатна операція, значення якої визначаються за правилом

$$(\neg F)(X_1, X_2, \dots, X_n) = \neg(F(X_1, X_2, \dots, X_n)) \quad (3.1)$$

для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$. Нехай F і G – предикатні операції, що відображають M^n у M .

Диз'юнкцією $F \vee G$ предикатних операцій F і G називається предикатна операція, значення якої визначаються за правилом

$$(F \vee G)(X_1, X_2, \dots, X_n) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \vee G(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.2)$$

для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$.

Кон'юнкцією $F \wedge G$ предикатних операцій F і G називається предикатна операція, значення якої визначаються за правилом

$$(F \wedge G)(X_1, X_2, \dots, X_n) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \wedge G(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.3)$$

для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$.

У виразах (3.1) – (3.3) ліворуч від знаку рівності фігурують операції заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції над предикатними операціями, а праворуч знаки \neg , \vee і \wedge позначають операції над предикатами.

Булевою алгеброю предикатних операцій називається будь-яка алгебра предикатних операцій з базисом операцій, що складається із заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції. Варто звернути увагу на те, що базисні операції булевої алгебри предикатних операцій не є предикатними операціями, вони є операціями над предикатними операціями, тобто операціями наступного, більш високого рівня. Аналогом цих операцій у числовій математиці може бути, наприклад, операція додавання лінійних операторів, розглянута в курсі функціонального аналізу. Є багато різних булевих алгебр предикатних операцій. Це обумовлено тим, що у визначенні даного поняття не вказуються конкретні базисні елементи, які в булевій алгебрі можуть бути обрані по-різному. Їхній вибір і визначає конкретну булеву алгебру предикатних операцій. У ролі базисних елементів у булевій алгебрі предикатних операцій виступають деякі фіксовані предикатні операції.

Тотожною предикатною операцією по змінній X_i , $i = \overline{1, n}$ називається операція зі значеннями $F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = X_i$ при будь-яких $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n \in M$. Будемо позначати її через X_i . Кожній предикатній змінній взаємно однозначно відповідає своя тотожна предикатна операція. Проте, тотожні предикатні операції варто відрізнити від відповідних предикатних змінних. Усього є n різних тотожних предикатних операцій. **Константною предикатною операцією** називається будь-яка операція зі значенням $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = P$ при будь-яких $X_1, X_2, \dots, X_n \in M$. Тут P – фіксований предикат із M . Позначимо цю операцію через P . Кожному предикату $P \in M$ відповідає своя константна предикатна операція P . Усього є $|M|$ константних предикатних операцій, де $|M|$ – потужність множини M [45].

Алгеброю предикатних операцій з константами та змінними називається булева алгебра предикатних операцій, у якій базисними елементами є всілякі тотожні та константні предикатні операції. Тотожні предикатні операції називаються **змінними алгебри предикатних операцій**. Предикатні ж змінні – це просто необхідний будівельний матеріал, що використовується для отримання тих або інших предикатних операцій, зокрема, – предикатних операцій вигляду X_i і X_i^P ($i = \overline{1, n}, P \in M$) (про операції вигляду X_i^P мова буде йти нижче). Константні предикатні операції називаються **константами алгебри предикатних операцій**. Константні ж предикати – це, суворо кажучи, щось інше. Вони використовуються в алгебрі предикатів.

Прикладом формули алгебри предикатних операцій із константами та змінними, що має предметні змінні x , y , предикатні змінні X , Y та універсум предметів $U = \{a, b, c\}$, може служити наступна формула:

$$(x^a \vee x^b) X \vee \overline{x^a y^c Y}. \quad (3.4)$$

Підформули $x^a \vee x^b$ і $x^a y^c$, що в ній фігурують, виражають константи даної алгебри. Формула (3.4), узята в цілому, виражає деяку предикатну операцію $F(X, Y) = Z$, що перетворює довільні предикати X та Y у предикат Z . Візьмемо, наприклад, в якості X предикат $x^a y^b$, а в якості Y – предикат $x^a \vee x^b$ і знайдемо предикат $Z = F(X, Y)$. За формулою (3.4) знаходимо:

$$\begin{aligned}
Z &= (x^a \vee x^b) x^a x^b \vee \overline{x^a y^c (x^a \vee y^b)} = x^a y^b \vee \overline{x^a y^c} = \\
&= x^a y^b \vee \overline{x^a} \vee \overline{y^c} = x^a y^b \vee x^b \vee x^c \vee y^a \vee y^b = x^b \vee x^c \vee y^a \vee y^b = \\
&= \overline{x^a} \vee \overline{y^c} = \overline{x^a y^c}.
\end{aligned}$$

Отже, операція $F(X, Y) = Z$, що характеризується формулою (3.4), ставить у відповідність предикатам $X = x^a y^b$ і $Y = x^a \vee x^b$ предикат $Z = \overline{x^a y^c}$.

3.2. ПОВНОТА АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

Теорема 3.1 (про неповноту алгебри предикатних операцій з константами та змінними). Формулювання. При будь-яких m і n алгебра предикатних операцій з константами та змінними, в універсумі предметів U якої міститься більше, ніж один елемент, є неповною.

Доведення. Розглянемо предикатну операцію

$$F(X_i) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } X_i = \mathbf{0}; \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } X_i \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Припустимо, що операція F виражається формулою алгебри, зазначеної в умові теореми (позначимо для стислості цю алгебру символом A). У цьому випадку операція F виражається формулою з однією єдиною змінною X_1 . Оскільки $X_1 \vee X_1 = X_1$ та $X_1 \wedge \overline{X_1} = \mathbf{0}$, то будь-яка формула алгебри A з однією змінною X_1 після розкриття дужок і спрощень набуває вигляду $A X_1 \vee B \overline{X_1} \vee C$ де $A, B, \text{ і } C$ – предикатні константи. Отже, знайдуться такі A, B і C , що

$$F(X_1) = A X_1 \vee B \overline{X_1} \vee C. \quad (3.6)$$

Підставляючи в (3.4) замість X_1 нульовий та одиничний предикати, отримуємо:

$$F(\mathbf{0}) = A \cdot \mathbf{0} \vee B \cdot \mathbf{1} \vee C = B \vee C, \quad (3.7)$$

$$F(\mathbf{1}) = A \cdot \mathbf{1} \vee B \cdot \mathbf{0} \vee C = A \vee C. \quad (3.8)$$

Згідно з формулою (3.5),

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \quad (3.9)$$

$$F(\mathbf{1}) = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Використовуючи формули (3.6) – (3.10), отримуємо:

$$\begin{aligned}
F(X_1) &= A X_1 \vee B \overline{X_1} \vee C = A X_1 \vee B \overline{X_1} \vee C (X_1 \vee \overline{X_1}) = \\
&= (A \vee C) X_1 \vee (B \vee C) \overline{X_1} = F(\mathbf{1}) X_1 \vee F(\mathbf{0}) \overline{X_1} = \mathbf{0} \cdot X_1 \vee \mathbf{1} \cdot \overline{X_1} = \overline{X_1}.
\end{aligned}$$

Отриманий результат $F(X_1) = \overline{X_1}$ суперечить визначенню (3.5), тому що при $|U| > 1$ множина всіх предикатів містить не лише предикати $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$. Тому знайдена операція $F(X_1) = \overline{X_1}$, всупереч визначенню, приймає не два, а більшу кількість значень. Отже, предикатна операція F не виражається формулами алгебри A . Інакше кажучи, алгебра A є неповною. **Теорему доведено.**

Цією теоремою встановлюється наступний факт. Алгебра предикатних операцій з константами та змінними побудована самим природним способом, що зазвичай використовується в класичній математиці: ввели константи, змінні, а також всі необхідні операції, і проте алгебра вийшла неповноцінною. Із цього треба зробити висновок, що при

конструюванні повноцінної алгебри предикатних операцій треба діяти якимось іншим, нетрадиційним способом.

Універсум предикатів M складається із двох предикатів 0 і 1 лише в тому випадку, якщо універсум предметів U містить усього лише один елемент. Дійсно, нехай $U = \{a\}$. Тоді існує всього дві можливості: або $P(a, a, \dots, a) = 0$, або $P(a, a, \dots, a) = 1$ (у наборі елемент a зустрічається m раз). У випадку, коли $M = \{0, 1\}$, алгебра предикатних операцій з константами та змінними називається **алгеброю n -місних булевих функцій**. Кожна її функція має вигляд $F(X_1, X_2, \dots, X_n) = Y$, де X_1, X_2, \dots, X_n, Y – двійкові змінні, визначені на двоелементній булевій множині $\{0, 1\}$. У цій алгебрі є n змінних X_1, X_2, \dots, X_n і всього дві константи – предикати 0 і 1 .

Теорема 3.2 (про повноту алгебри булевих функцій). *Формулювання.* Алгебра булевих функцій при будь-якому n є повною. Будь-яка її функція може бути подана формулою

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}} F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \dots X_n^{\sigma_n},$$

що називається **досконалою диз'юнктивною нормальною формою** (ДДНФ) булевої функції. Тут $X_i^1 = X_i, X_i^0 = \bar{X}_i$.

Доведення є очевидним. Якщо цю теорему вирвати з контексту даного розділу, то її цілком можна було б ототожнити з відомою теоремою про повноту алгебри булевих функцій [2]. Насправді ж різниця є, і вона полягає в тому, що тепер мова йде не про алгебру двійкових знаків, розглянуту ізольовано від інших алгебр, а про особливий випадок алгебри предикатних операцій з константами та змінними. Лише в цьому випадку має місце повнота алгебри. Саме наявністю властивості повноти можна пояснити той факт, що із усіляких алгебр предикатних операцій з константами та змінними лише алгебра булевих функцій набула широкого застосування на практиці.

Отже, побудувати повноцінну алгебру предикатних операцій, використовуючи тотожні предикатні операції в якості її базисних елементів, не вдається. Отже, необхідно піти по іншому, нестандартному, шляху та спробувати побудувати алгебру предикатних операцій подібно до диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів [6].

Предикатною операцією упізнання предиката P по змінній X_i ($i = \overline{1, n}$) називається операція

$$F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_i = P; \\ 0, & \text{якщо } X_i \neq P. \end{cases} \quad (3.11)$$

Залежністю (3.11) вводяться саме ті предикатні операції (серед них міститься і операція (3.5)), яких не вистачало в базисі алгебри предикатних операцій з константами та змінними для набуття цією алгеброю властивості повноти. Будемо позначати операцію (3.11) через X_i^P . Усі аргументи цієї операції, крім X_i , є несуттєвими. Кожній парі – предикату $P \in M$ та змінній X_i ($i = \overline{1, n}$) – взаємно однозначно відповідає своя операція: предикат упізнання предиката X_i^P .

Диз'юнктивно-кон'юнктивною алгеброю предикатних операцій називається така алгебра предикатних операцій, у якій базисними операціями є диз'юнкція та кон'юнкція, а базисними елементами – всілякі константи $P \in M$ і предикати упізнання предиката X_i^P ($i = \overline{1, n}, P \in M$).

Важливо підкреслити, що серед базисних елементів диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій немає тотожних предикатних операцій, незважаючи на те, що

символ X_i , фігурує у виразі X_i^P . Цей символ є одним із двох елементів (поряд із символом P), що утворюють ім'я X_i^P базисного елемента алгебри предикатних операцій. У складі предикатної операції X_i^P змінна X_i є лише предикатною змінною, але не тотожною предикатною операцією. Тому диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатних операцій не може бути віднесена до класу алгебр, що будуються в традиційний спосіб з використанням змінних алгебри в якості її базисних елементів. Якби операції X_i^P ($i = \overline{1, n}$, $P \in M$) були переведені з розряду предикатних операцій у розряд базисних операцій алгебри, тоді з'явилася б можливість розглядати змінні X_i як тотожні предикатні операції. Але зараз цим (третім) шляхом неможливо піти, оскільки метою в цьому випадку є отримання такої алгебри предикатних операцій, що могла б служити надбудовою (розширенням) диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів [6]. Цього можна досягти, лише рухаючись другим шляхом (тобто використовуючи операції X_i^P не в ролі базисних операцій, а лише в ролі її базисних елементів).

Як приклад формули диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій розглянемо наступну формулу:

$$X^{(x^a)}y^b \vee x^a, \quad (3.12)$$

маючи на увазі, що $U = \{a, b\}$, $m = n = 1$. Вираз x^a , що входить до складу імені предиката упізнавання предиката X^{x^a} , не є константою алгебри, він виражає фіксований предикат, що виконує роль показника в імені базисної предикатної операції. Цей предикат ми будемо записувати у вигляді формули диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів. Навпроти, підформули y^b і x^a , що входять далі у формулу (3.12), є константами алгебри, що виражають деякі з базисних предикатних операцій. Ці константи також записуються формулами диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів. Формула (3.12) виражає цілком визначену предикатну операцію $F(X) = Y$, що перетворює довільно взятий предикат X у предикат Y . Візьмемо, наприклад, у ролі X предикат x^b і знайдемо предикат $Y = F(X)$. За формулою (3.12) знаходимо:

$$Y = (x^b)^{(x^a)} y^b \vee x^a = 0 \cdot y^b \vee x^a = x^a.$$

Отже, операція $F(X) = Y$, що характеризується формулою (3.12), ставить у відповідність предикату $X = x^b$ предикат $Y = x^a$. За результатами подібних обчислень можна побудувати наступну таблицю, що характеризує предикатну операцію $Y = F(X)$.

X	0	x^a	x^b	1
Y	x^a	1	x^a	x^a

Слід зазначити, що табличне подання предикатних операцій на практиці є можливим лише в найпростіших випадках, подібних тому, що розглянутий в наведеному прикладі. У більш складних випадках таблиця предикатних операцій стає незоро великою, тому залишається лише один ефективний спосіб подання предикатних операцій – їхнє подання за допомогою формул.

Теорема 3.3 (про повноту диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій). Формулювання. При будь-яких U , m і n диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатних операцій є повною. При цьому будь-яка предикатна операція в ній виражається формулою

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigvee_{P_1, P_2, \dots, P_n \in M} F(P_1, P_2, \dots, P_n) X_1^{P_1} X_2^{P_2} \dots X_n^{P_n}, \quad (3.13)$$

що називається ДДНФ предикатної операції F .

Доведення є очевидним. Логічне підсумовування в ДДНФ ведеться по всіх предикатних векторах $(P_1, P_2, \dots, P_n) \in M^n$. Через $F(P_1, P_2, \dots, P_n)$ позначено константу, що є значенням функції F від вектора (P_1, P_2, \dots, P_n) . Варто звернути увагу на те, що в формулі (3.13) символи X_1, X_2, \dots, X_n вжито лише як предикатні змінні, але не як предикатні операції, а символ F позначає фіксовану предикатну операцію.

Запишемо в якості прикладу ДДНФ предикатної операції, представленої щойно наведеною в прикладі таблицею:

$$x^a X^0 \vee 1 \cdot X^{(x^a)} \vee x^a X^{(x^b)} \vee x^a X^1. \quad (3.14)$$

У диз'юнктивно-кон'юнктивній алгебрі предикатних операцій не обов'язково мати в якості базисних елементів усі константи. У базисі елементів досить зберегти із переліку констант лише предикат 0 і всі предикати упізнання предмета x_i^a ($i = \overline{1, m}, a \in U$). Всі інші предикати виражаються засобами диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів [6]. Предикати 0 і x_i^a тут розглядаються в ролі константних предикатних операцій, а операції диз'юнкції та кон'юнкції – в ролі операцій, що діють на предикатні операції. Фундаментальною алгеброю називається алгебра предикатних операцій, у якій базисними операціями є диз'юнкція та кон'юнкція, а базисними елементами – предикат 0 і всілякі предикати упізнання предметів x_i^a ($i = \overline{1, m}, a \in U$) і предикати упізнання предикатів X_j^P ($j = \overline{1, n}, P \in M$). Фундаментальну алгебру можна розглядати як скорочений (але, в той же час, повний) варіант диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій [7].

Теорема 3.4 (про повноту фундаментальної алгебри). Формулювання. Фундаментальна алгебра при будь-яких U, m і n є повною.

Доведення є очевидним. В якості прикладу формули фундаментальної алгебри може служити формула (3.12).

Будь-яка підмножина B носія A алгебри A називається замкненням в алгебрі A , якщо результат кожної базисної операції алгебри A , виконаної над довільними елементами множини B , знову належить множині B . У цьому випадку говорять, що множина B є замкненою щодо кожної з базисних операцій алгебри A . Якщо множина B є замкненою, то вона, разом з базисними операціями (дія яких тепер обмежена лише множиною B) і базисними елементами (лише тими, що містяться в множині B) алгебри A , теж утворюють алгебру. Позначимо цю алгебру буквою B . Побудовану в такий спосіб алгебру B називають підалгеброю алгебри A . Виділимо в множині A всіх предикатних операцій підмножину B всіх константних предикатних операцій. Всі їх можна розглядати просто як предикати. З базисних елементів фундаментальної алгебри в множині B залишилися лише предикати упізнання предмета x_i^a ($i = \overline{1, m}, a \in U$). Зберігаємо операції диз'юнкції та кон'юнкції. Є очевидним, що результатом цих операцій, застосованих до предикатів, знову будуть предикати. Таким чином, отримано диз'юнктивно-кон'юнктивну алгебру предикатів. Отже, диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатів є підалгеброю фундаментальної алгебри. Диз'юнктивно-кон'юнктивну алгебру предикатів можна отримати з фундаментальної алгебри, якщо з її базису виключити всі предикати упізнання предикатів X_j^P ($j = \overline{1, n}, P \in M$).

Диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатів, розглянута як алгебра предикатних операцій, є неповною. За допомогою її засобів можна виразити лише всі константні предикатні операції. З цієї точки зору диз'юнктивно-кон'юнктивну алгебру предикатів можна розглядати як фрагмент фундаментальної алгебри. Однак, можлива й інша точка зору, при якій фундаментальну алгебру можна розглядати як усічений варіант диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів [1], визначеної на розширеному універсумі предметів. У цьому випадку предикатні змінні переводяться в ранг предметних змінних, визначених на спеціальних множинах елементів з булевою структурою. У ролі значень цих предметних змінних тепер виступають імена предикатів. При такому підході алгебра предикатних операцій редукується в алгебру предикатів. Проблема редукції алгебри предикатних операцій в алгебру предикатів, у свою чергу, породжує багато інших задач [7].

3.3. ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

Консервативно розширимо фундаментальну алгебру, вводячи в ній базисну операцію заперечення та базисний елемент **1**. Перераховані нижче закони називаються **основними тотожностями фундаментальної алгебри** [7]:

закони ідемпотентності

$$X \vee X = X, \quad X \wedge X = X;$$

закони комутативності

$$X \vee Y = Y \vee X, \quad X \wedge Y = Y \wedge X;$$

закони асоціативності

$$(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z), \quad (X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z);$$

закони дистрибутивності

$$(X \vee Y) \wedge Z = X \wedge Z \vee Y \wedge Z, \quad X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z);$$

закони елімінації

$$X \vee X \wedge Y = X, \quad X \wedge (X \vee Y) = X;$$

закони згортання (згортки)

$$X \vee Y \bar{Y} = X, \quad X \wedge (Y \vee \bar{Y}) = X;$$

закони де Моргана

$$\overline{X \vee Y} = \bar{X} \bar{Y}, \quad \overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y};$$

закон подвійного заперечення

$$\overline{\bar{X}} = X;$$

закон протиріччя

$$X \bar{X} = 0;$$

закон виключеного третього

$$X \vee \bar{X} = 1;$$

закони для предикатних операцій 0 і 1

$$X \vee 0 = X, \quad X \cdot 0 = 0, \quad X \vee 1 = 1, \quad X \cdot 1 = X.$$

Символами X, Y, Z тут позначені довільні предикатні операції на множині R . Наведені нижче закони зв'язують предметні та предикатні змінні:

закон заперечення для предиката упізнання предмета

$$\bar{x}_i^a = \bigvee_{\substack{b \in U \\ b \neq a}} x_i^b, \quad (i = \overline{1, m});$$

закон заперечення для предикатів упізнання предиката

$$\bar{X}_j^P = \bigvee_{\substack{Q \in M \\ Q \neq P}} X_j^Q, \quad (j = \overline{1, n});$$

закон істинності для предикатів упізнання предмета

$$\bigvee_{a \in U} x_i^a = 1, \quad (i = \overline{1, m});$$

закон істинності для предикатів упізнання предиката

$$\bigvee_{P \in M} \bar{X}_j^P = 1, \quad (j = \overline{1, n});$$

закон хибності для предикатів упізнання предмета, якщо $a \neq b$ ($a, b \in U$):

$$x_i^a x_i^b = 0;$$

закон хибності для предикатів упізнання предиката, якщо $P \neq Q$ ($P, Q \in M$)

$$X_j^P X_j^Q = 0.$$

Базисну операцію заперечення можна виразити явно (тобто у вигляді прямого визначення) у базисі фундаментальної алгебри за допомогою законів заперечення та законів де Моргана [6], а базисний елемент 1 – за допомогою закону істинності. Операцію заперечення можна, крім того, задати неявно (тобто у вигляді непрямого визначення) законами протиріччя та виключеного третього.

Теорема 3.5 (про повноту системи основних тотожностей фундаментальної алгебри). Формулювання. Система основних тотожностей фундаментальної алгебри є повною при будь-яких U, m і n .

Доведення є аналогічним доведенню теореми про повноту системи основних тотожностей диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів [1].

Систему основних тотожностей фундаментальної алгебри можна скоротити: деякі закони з неї можна виключити без втрати нею властивості повноти. Встановимо, наприклад, тотожність формул (3.12) і (3.14) фундаментальної алгебри з універсумом $U = \{a, b\}$,

використовуючи наведену для цього прикладу таблицю. Відповідно до законів істинності для предикатів упізнання предмета й предиката маємо:

$$\begin{aligned}
 & x^a X^0 \vee 1 \cdot X^{(x^a)} \vee x^a X^{(x^b)} \vee x^a X^1 = \\
 & = x^a X^0 \vee (x^a \vee x^b) X^{(x^a)} \vee x^a X^{(x^b)} \vee x^a X^1 = \\
 & = x^a X^0 \vee x^a X^{(x^a)} \vee x^b X^{(x^a)} \vee x^a X^{(x^b)} \vee x^a X^1 = \\
 & = x^b X^{(x^a)} \vee x^a (X^0 \vee X^{(x^a)} \vee X^{(x^b)} \vee X^1) = \\
 & = x^b X^{(x^a)} \vee x^a \cdot 1 = x^b X^{(x^a)} \vee x^a.
 \end{aligned}$$

3.4. ДОДАТКОВІ ОПЕРАЦІЇ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

Фундаментальна алгебра – це поки що єдина з відомих алгебр предикатних операцій, щодо якої доведено її повноту. Ця повнота означає, що за допомогою формул фундаментальної алгебри можна подати будь-яку предикатну операцію, що міститься в її носії. Крім того, для фундаментальної алгебри відома повна система законів, що дозволяють вирішити питання, чи відображають дві довільно обрані формули одну й ту ж саму предикатну операцію. Ці властивості фундаментальної алгебри роблять її незамінною для теоретичних досліджень в галузі логічної математики. Разом з тим, для практичного застосування фундаментальна алгебра не завжди є зручною, тому що її формули занадто громіздкі. Тому виникає потреба в створенні інших алгебр предикатних операцій, більш зручних з практичної точки зору [46].

Із повноти фундаментальної алгебри випливає її універсальність в тому сенсі, що її засобами можна подати будь-які операції над предикатами. Зокрема, мовою фундаментальної алгебри можна подати операції заміни та перестановки аргументів предиката та операції підстановки якогось предмета на місце одного з аргументів предиката. Зазвичай ці операції сприймаються як дії над формулами, однак ніщо не заважає розглядати їх також як операції над предикатами, що подані цими формулами.

Заміною змінної x_i на змінну x_j називається операція

$$x_i / x_j (P) = Q,$$

яка кожному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ставить у відповідність предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за наступним правилом: для будь-яких $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$\begin{aligned}
 & Q(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m) = \\
 & = P(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_m).
 \end{aligned}$$

Предикат, що отриманий із предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ заміною змінної x_i на змінну x_j записується у вигляді $P(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_m)$. Наприклад, результатом заміни змінної y на змінну x в предикаті $P(x, y)$ буде предикат $P(x, x)$. Тут x та y позначають деякі із аргументів x_1, x_2, \dots, x_m . При цьому мається на увазі, що решта аргументів предиката $P(x, y)$ є несуттєвими.

Приклад 3.1. Нехай предикат заданий формулою

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee x_1^2 x_3^1.$$

Виконати операцію заміни змінної x_1 на змінну x_2 для цього предиката.

Розв'язання

$$x_1/x_2(P) = x_2^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1 = 0 \vee x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1 = x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1.$$

Відповідь. $x_1/x_2(P) = x_2^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1.$

Предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається зворотним до предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за аргументами x_i і x_j , якщо для будь-яких $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m) = P(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_m).$$

Предикат, зворотний до предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ за змінними x_i і x_j , записується у вигляді $P(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_m)$. Наприклад, предикатом, зворотним до предиката $P(x, y, z)$ за змінними x і z , буде предикат $P(z, y, x)$.

Операція

$$x_i | x_j(P) = Q,$$

яка дозволяє отримати предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_m)$ із предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m)$ називається обертанням предиката P за змінними x_i і x_j або перестановкою його аргументів x_i і x_j .

Приклад 3.2. Для предиката із прикладу 3.1 виконати перестановку аргументів x_1 і x_2 .

Розв'язання

$$x_1 | x_2(P) = x_2^1 x_1^2 \vee x_1^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1.$$

Відповідь. $x_1 | x_2(P) = x_2^1 x_1^2 \vee x_1^3 x_3^3 \vee x_2^2 x_3^1.$

Підстановкою

$$x_i/a(P) = Q$$

значення a на місце змінної x_i називається операція, яка кожному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ставить у відповідність предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_m)$ за наступним правилом: для будь-яких $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m) = P(a_1, a_2, \dots, a, \dots, a_m).$$

Предикат, що отриманий із предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$ підстановкою значення a на місце змінної x_i , записується у вигляді

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

При цьому змінна x_i у предиката Q є несуттєвою. Наприклад, результатом підстановки значення a на місце змінної u в предикаті $P(x, y, z)$ буде предикат $Q(x, y, z) = P(x, a, z)$.

Приклад 3.3. В предикаті із прикладу 3.1 виконати підстановку значення 1 на місце змінної x_1 .

Розв'язання

$$x_i/1(P) = 1^1 x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee 1^2 x_3^1 = 1 \cdot x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3 \vee 0 \cdot x_3^1 = x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3.$$

Відповідь. $x_i/1(P) = x_2^2 \vee x_2^3 x_3^3.$

Зазначені операції можна також подати засобами фундаментальної алгебри предикатних операцій. Так, для заміни змінної предиката маємо формулу

$$x_i / x_j(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)}. \quad (3.15)$$

Під символом X при цьому мається на увазі будь-яка із змінних X_l ($l = \overline{1, n}$).

Для перестановки змінних предиката маємо формулу

$$x_i | x_j(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_m)}. \quad (3.16)$$

Операція підстановки подається формулою

$$x_i / a(X) = \bigvee_{P \in M} P(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_m) \cdot X^{P(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)}. \quad (3.17)$$

Залежності (3.15) – (3.17) було отримано методом підбору. В якості показників предикатів упізнавання предиката було взято значення змінної X досліджуваної операції (заміни, перестановки або підстановки). В якості множників при цьому в кожному випадку підбирається потрібний результат операції [46]. Отримані формули мають досить громіздкий вигляд, але в даному випадку важливим є сам факт того, що ці операції можуть бути подані засобами фундаментальної алгебри предикатних операцій.

Заміну, перестановку та підстановку можна розуміти не лише як предикатні операції, але й як операції над предикатними операціями. З такої точки зору вони визначаються в наступний спосіб:

$$x_i / x_j(F(X_1, X_2, \dots, X_n)) = F(x_i / x_j(X_1), x_i / x_j(X_2), \dots, x_i / x_j(X_n)); \quad (3.18)$$

$$x_i | x_j(F(X_1, X_2, \dots, X_n)) = F(x_i | x_j(X_1), x_i | x_j(X_2), \dots, x_i | x_j(X_n)); \quad (3.19)$$

$$x_i / a(F(X_1, X_2, \dots, X_n)) = F(x_i / a(X_1), x_i / a(X_2), \dots, x_i / a(X_n)); \quad (3.20)$$

В лівій частині рівностей (3.18) – (3.20) символ F позначає предикатну операцію. В правій частині той же самий символ позначає ту ж саму операцію, яка в той же час стає вже операцією над предикатними операціями. Рівності (3.18) – (3.20) відображають наступне правило: операції заміни, перестановки та підстановки, а також операцію F в їх суперпозиції можна міняти місцями.

Математична практика свідчить про те, що операції заміни, перестановки та підстановки треба здійснювати не лише над предикатами, але також і над предикатними операціями. Це відбувається за рахунок заміни місцями операцій в їх суперпозиції. Наприклад, операція заміни змінної, що виконується над диз'юнкцією предикатів, здійснюється за допомогою зміни черговості виконання операцій x/y в їх суперпозиції:

$$x/y(P(x) \vee Q(x)) = x/y(P(x)) \vee x/y(Q(x)) = P(y) \vee Q(y).$$

Із цього та подібних до нього фактів індуктивно виводиться загальне правило (3.18). В аналогічний спосіб виводяться також і правила (3.19) і (3.20). Наприклад, коли виконується підстановка x/a в якійсь формулі, то в кожній її частині шукаємо входження змінної x та скрізь замінюємо її на предмет a . При цьому операція підстановки, що спочатку була зовнішньою відносно формули, тепер проникає всередину у відповідності з правилом (3.20). Слід звернути

увагу на те, що символи X_1, X_2, \dots, X_n у виразах (3.15) – (3.17) є предикатними змінними алгебри, вони ще не є предикатними операціями. Операції X^P ($P \in M$), що містяться у виразах (3.15) – (3.17), – це предикатні операції, але не операції алгебри. У виразах (3.15) – (3.17) і в правій частині рівностей (3.18) – (3.20) символи x_i/x_j , $x_i|x_j$ та x_i/a позначають предикатні операції.

3.5. КВАНТОРИ ЗАГАЛЬНОСТІ ТА ІСНУВАННЯ

Квантор загальності, як відомо, визначається в наступний спосіб: якщо $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то

$$\forall x: P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_k) = \bigwedge_{i=1}^k P(a_i).$$

В загальному випадку:

$$\forall x_i(X) = \bigwedge_{a \in U} x_i/a(X). \quad (3.21)$$

В аналогічний спосіб визначається **квантор існування**: якщо $U = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, то

$$\exists x: P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_k) = \bigvee_{i=1}^k P(a_i).$$

І в загальному випадку:

$$\exists x_i(X) = \bigvee_{a \in U} x_i/a(X). \quad (3.22)$$

Залежності (3.21) і (3.22) можна застосовувати не лише до скінченного, а й до нескінченного універсуму U . Квантори загальності та існування можна інтерпретувати не лише як предикатні операції, але й як операції над предикатними операціями. В цьому випадку вони визначаються виразами (3.21) і (3.22), але під символом X при цьому маєтсья на увазі довільна предикатна операція.

У випадку, коли значення предметної змінної обмежені множиною $A \subseteq U$, квантори загальності та існування визначаються наступними формулами:

$$\forall x \in A: P(x) \Leftrightarrow \forall x: (A(x) \supset P(x));$$

$$\exists x \in A: P(x) \Leftrightarrow \exists x: (A(x) \wedge P(x)).$$

Визначимо квантори по предикатній змінній:

$$\forall P: F(P) = \bigwedge_{P \in M} F(P); \quad (3.23)$$

$$\exists P: F(P) = \bigvee_{P \in M} F(P). \quad (3.24)$$

В цих формулах $F(P)$ – довільно обрана предикатна операція, що діє на предикат P , а M – універсум предикатів [7].

Визначимо квантори по набору предметних змінних $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$:

$$\forall \xi P(\xi) \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m: P(x_1, x_2, \dots, x_m); \quad (3.25)$$

$$\exists \xi P(\xi) \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_m: P(x_1, x_2, \dots, x_m); \quad (3.26)$$

За допомогою цих формул можна виразити квантори по предикатній змінній P , значення якої обмежені предикатами, що входять до складу фіксованого предиката M :

$$\forall P \subseteq M: F(P) = \bigwedge_{P \in M} (\forall \xi : (P(\xi) \supset M(\xi)) \supset F(P)); \quad (3.27)$$

$$\exists P \subseteq M: F(P) = \bigvee_{P \in M} (\forall \xi : (P(\xi) \supset M(\xi)) \wedge F(P)). \quad (3.28)$$

Ці залежності можна узагальнити в наступний спосіб:

$$\forall P \subseteq M: F(P, M) = \bigwedge_{P \in M} (\forall \xi : (P(\xi) \supset M(\xi)) \supset F(P, M)); \quad (3.29)$$

$$\exists P \subseteq M: F(P, M) = \bigvee_{P \in M} (\forall \xi : (P(\xi) \supset M(\xi)) \wedge F(P, M)). \quad (3.30)$$

Тут мається на увазі, що $F(P, M)$ – це довільно обрана предикатна операція, що діє на предикати P і M . Слід зазначити, що вирази (3.23), (3.24) і (3.27)–(3.30) не виводять дослідження за межі класу формул фундаментальної алгебри. Предикатні операції $F(P)$ і $F(P, M)$ подаються мовою фундаментальної алгебри, тому що це не змінні, а фіксовані операції. Разом з тим, ці вирази неможна зарахувати ані до формул класичного логічного обчислення першого порядку, ані до формул інших широко відомих логік [46].

3.6. ПРИКЛАДНА АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНИХ ОПЕРАЦІЙ

Прикладною алгеброю предикатних операцій називається алгебра з базисом операцій, створеною із підстановок вигляду $x_i/a(X)$ ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$), а також операцій заперечення та диз'юнкції і з базисом елементів, створеним із предикатів рівності вигляду $D(x_1, x_i)$ ($i = \overline{2, m}$) (тут вони є константними предикатними операціями), і предикатних змінних X_i ($i = \overline{1, n}$) (в даному випадку вони є тотожними предикатними операціями). Кількість елементів в базисі прикладної алгебри є набагато меншою, ніж в базисі фундаментальної алгебри. Однак, з іншого боку, кількість базисних операцій в ній різко збільшується. Алгебри називаються **рівносильними**, якщо за допомогою їх засобів описується одна й та ж сама множина об'єктів.

Теорема 3.6. Формулювання. Фундаментальна і прикладна алгебри предикатних операцій, що мають один і той самий носій, є рівносильними.

Доведення. Рівносильність фундаментальної та прикладної алгебри можна довести, якщо вдасться базисні елементи і операції фундаментальної алгебри подати через базисні елементи і операції прикладної алгебри, і навпаки.

Виразимо базис фундаментальної алгебри через базис прикладної алгебри.

Почнемо з *базисних операцій*. Для диз'юнкції та заперечення формули вже є. Треба виразити кон'юнкцію через диз'юнкцію та заперечення. Це можна зробити з урахуванням законів де Моргана:

$$X \wedge Y = \overline{\overline{X} \vee \overline{Y}}.$$

Для базисних елементів з урахуванням наявності змінної X_1 маємо:

$$0 = X_1 \wedge X_i.$$

Для предикатів упізнання предметів маємо для $a \in U$:

$$x_1^a = D(x_1, a) = x_2/a(D(x_1, x_2)).$$

У випадку, коли $i = \overline{2, m}$, маємо

$$x_i^a = D(a, x_i) = x_1/a(D(x_1, x_i)).$$

Підстановні операції та предикати рівності також вже є. Виразимо предикати упізнання предиката:

$$X_j^P = \forall \xi: (X_j(\xi) \sim P(\xi)),$$

де $j = \overline{2, n}$, $P \in M$. Якщо предикатна змінна X_j міститься в фундаментальній алгебрі, то вона також міститься і в прикладній алгебрі, оскільки носії обох алгебр збігаються. Будь-який фіксований предикат P подається формулою диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатів за допомогою операцій диз'юнкції та кон'юнкції, застосованих до предикатів упізнання предмету x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$), які вже виражено. Квантор загальності по набору предметних змінних виражається через квантори по одній змінній залежності (3.25). В свою чергу, квантори загальності по одній змінній виражаються через підстановні операції та кон'юнкцію за формулою (3.21). Таким чином, весь базис фундаментальної алгебри виражений через базис прикладної алгебри.

Виразимо базис прикладної алгебри через базис фундаментальної алгебри. Спочатку виразимо базисні операції. Підстановні операції виражаються за формулами (3.17) і (3.20). В зв'язку з тим, що фундаментальна алгебра є повною, в ній можна виразити формулу для будь-якої предикатної операції. Заперечення виражається за допомогою законів де Моргана та законів заперечення упізнання предметів та предикатів, а диз'юнкцію вже виражено.

Тепер виразимо базисні елементи. Предикат рівності виражається залежністю [28]

$$D(x, y) = \exists a \in U: x^a y^a.$$

Тотожна предикатна операція виражається формулою

$$X_i = \bigvee_{P \in M} P X_i^P.$$

В цьому виразі праворуч від знаку рівності символ X_i виражає лише предикатну змінну, а ліворуч – той самий символ X_i вже є тотожною предикатною операцією.

Таким чином, весь базис прикладної алгебри виражений через базис фундаментальної алгебри. Отже фундаментальна та прикладна алгебри є рівносильними. **Теорему доведено.**

Із цієї теореми безпосередньо випливає теорема про повноту прикладної алгебри.

Теорема 3.7. Формулювання. Прикладна алгебра є повною при будь-яких U , m і n .

Доведення. Виразимо усі предикати рівності в базисі прикладної алгебри. Рівності $D(x_1, x_i)$ ($i = \overline{2, n}$) вже містяться в самому базисі прикладної алгебри. Якщо $i = \overline{2, n}$ і $j = \overline{2, n}$, то предикати рівності виражаються в наступний спосіб:

$$D(x_i, x_j) = \exists x_1: (D(x_1, x_i) \wedge D(x_1, x_j)). \quad (3.31)$$

Для подання кванторів мовою прикладної алгебри вже наведені формули (3.23) – (3.30). Для $i = 1$ або $j = 1$ формулу (3.31) застосовувати неможна, бо виникає колізія змінних. Квантор існування в формулі (3.31) змінну x_1 прибирає (робить її несуттєвою). Справедливість формули (3.31) впливає із симетричності та транзитивності предиката рівності. Якщо ж $i = 1$ та $j = \overline{2, n}$, то вважаючи справедливим $D(x_1, x_j)$, отримуємо базисні рівності. Коли ж $j = 1$ та $i = \overline{2, n}$, то вважаючи справедливим рівність $D(x_i, x_j) = D(x_1, x_i)$, знов таки отримуємо базисні рівності. Для єдиного випадку, що залишився, тобто коли $i = j = 1$, вважаємо справедливим $D(x_1, x_1) = 1$, використовуючи рефлексивність рівності. Одиничний предикат засобами прикладної алгебри подається як

$$1 = X_1 \vee \overline{X_1}.$$

Таким чином, всі рівності подано через базисні. **Теорему доведено.**

Приклад 3.4. Нехай $U = \{a, b\}$. Знайти рівність $D(x_2, x_3)$ із базисних рівностей прикладної алгебри за допомогою формул (3.31).

Розв'язання. Маємо:

$$D(x_1, x_2) = x_1^a x_2^a \vee x_1^b x_2^b ;$$

$$D(x_1, x_3) = x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b .$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{aligned} D(x_2, x_3) &= x_1/a ((x_1^a x_2^a \vee x_1^b x_2^b) (x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b)) \vee \\ &\quad \vee x_1/b ((x_1^a x_2^a \vee x_1^b x_2^b) (x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b)) = \\ &= x_2^a x_3^a \vee x_2^b x_3^b. \end{aligned}$$

Відповідь. $D(x_2, x_3) = x_2^a x_3^a \vee x_2^b x_3^b.$

Операція заміни аргументів предиката в прикладній алгебрі виражається в наступний спосіб:

$$x_i / x_j (P) = \exists \sigma: (x_i / \sigma (D_{ij} \wedge P), (i = \overline{1, m})). \quad (3.32)$$

Предикат рівності тут діє в напрямку, зворотному до підстановки. Він відновлює змінну, що зникла із формули в результаті підстановки.

Приклад 3.5. Нехай $U = \{a, b, c\}$, $P(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^a$. Виразити заміну аргументів предиката за формулою (3.32).

Розв'язання

$$\begin{aligned} x_1 / x_3 (P) &= \exists \sigma: (x_1 / \sigma (D_{13} \wedge P) = \\ &= x_1/a (D_{13} \wedge P) \vee x_1/b (D_{13} \wedge P) \vee x_1/c (D_{13} \wedge P) = \\ &= (x_1/a (D_{13}) \wedge x_1/a (P)) \vee (x_1/b (D_{13}) \wedge x_1/b (P)) \vee (x_1/c (D_{13}) \wedge x_1/c (P)) . \end{aligned}$$

Далі маємо:

$$x_1/a (D_{13}) = x_1/a (x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b \vee x_1^c x_3^c) = x_3^a ;$$

$$x_1/b (D_{13}) = x_1/b (x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b \vee x_1^c x_3^c) = x_3^b ;$$

$$\begin{aligned}x_1/c (D_{13}) &= x_1/c (x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_3^b \vee x_1^c x_3^c) = x_3^c ; \\x_1/a (P) &= x_1/a (x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^a) = x_2^b ; \\x_1/b (P) &= x_1/b (x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^a) = x_2^a ; \\x_1/c (P) &= x_1/c (x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^a) = 0 .\end{aligned}$$

Звідси випливає:

$$x_1/x_3 (P) = x_3^a x_2^b \vee x_3^b x_2^a \vee x_3^c \cdot 0 = x_3^a x_2^b \vee x_3^b x_2^a .$$

З наведених розрахунків можна побачити, що в результаті застосування правила (3.32) в формулі предиката $P(x_1, x_2)$ відбулася заміна змінної x_1 на змінну x_3 .

Відповідь. $x_1/x_3 (P) = x_3^a x_2^b \vee x_3^b x_2^a .$

Операція перестановки аргументів предиката виражається через заміни аргументів предиката в наступний спосіб:

$$x_i | x_j (P) = (x_k/x_j (x_j/x_i (x_i/x_k (P)))) . \quad (3.33)$$

Тут в якості x_k використовується якійсь із несуттєвих аргументів предиката P .

Приклад 3.6. Нехай $U = \{a, b\}$, $P(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \vee x_1^b$. Виразити перестановку аргументів в предикаті $P(x_1, x_2)$ із застосуванням формули (3.33).

Розв'язання. Використовуючи в якості несуттєвої змінну x_3 , маємо:

$$x_1 | x_2 (P) = (x_3/x_2 (x_2/x_1 (x_1/x_3 (x_1^a x_2^b \vee x_1^b)))) .$$

Тепер виконуємо покрокові заміни аргументів:

$$\begin{aligned}x_1/x_3 (x_1^a x_2^b \vee x_1^b) &= x_3^a x_2^b \vee x_3^b ; \\x_2/x_1 (x_3^a x_2^b \vee x_3^b) &= x_3^a x_1^b \vee x_3^b ; \\x_3/x_2 (x_3^a x_1^b \vee x_3^b) &= x_2^a x_1^b \vee x_2^b .\end{aligned}$$

Таким чином,

$$x_1 | x_2 (P) = x_2^a x_1^b \vee x_2^b ,$$

тобто відбулася перестановка аргументів x_1 та x_2 в початковій формулі для предиката P .

Відповідь. $x_1 | x_2 (P) = x_2^a x_1^b \vee x_2^b .$

3.7. Контрольні запитання

1. Коли використовуються предикатні операції?
2. Як визначається предикатний простір розмірності n над предметним простором U^m ?
3. Які операції визначені в алгебрі предикатних операцій?
4. В чому полягає особливість базисних операцій булевої алгебри предикатних операцій?
5. Яка булева алгебра предикатних операцій називається алгеброю предикатних операцій з константами й змінними?

6. Який факт встановлюється теоремою про неповноту алгебри предикатних операцій з константами й змінними?
7. У якому випадку універсум предикатів M складається із двох предикатів: $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$?
8. У якому випадку алгебра предикатних операцій з константами та змінними називається алгеброю n -місних булевих функцій?
9. Як записується досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) булевої функції?
10. Яка алгебра предикатних операцій називається диз'юнктивно-кон'юнктивною алгеброю предикатних операцій?
11. Які тотожні предикатні операції є серед базисних елементів диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій?
12. Наведіть приклад формули диз'юнктивно-кон'юнктивної алгебри предикатних операцій.
13. Яка формула називається ДДНФ предикатної операції F ?
14. Яка алгебра предикатних операцій є фундаментальною?
15. Наведіть приклад формули фундаментальної алгебри.
16. Покажіть, що диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатів є підалгеброю фундаментальної алгебри.
17. Чи є повною диз'юнктивно-кон'юнктивна алгебра предикатів, розглянута як алгебра предикатних операцій?
18. За рахунок чого можна консервативно розширити фундаментальну алгебру?
19. Назвіть основні тотожності фундаментальної алгебри.
20. Чи є повною система основних тотожностей фундаментальної алгебри? Вона є надлишковою чи нескоротною?
21. Які додаткові операції фундаментальної алгебри предикатних операцій вводяться для утворення прикладної алгебри?
22. Якою формулою фундаментальної алгебри предикатних операцій подається квантор загальності?
23. Якою формулою фундаментальної алгебри предикатних операцій подається квантор існування?
24. Яка алгебра предикатних операцій називається прикладною?
25. Якій алгебрі є рівносильною прикладна алгебра предикатних операцій?
26. Чи є повною прикладна алгебра предикатних операцій?

4. АЛГЕБРА ІДЕЙ

4.1. ПОНЯТТЯ ІДЕЇ

При формальному описі закономірностей інтелектуальної діяльності засобами алгебри скінченних предикатів виявляється, що окрім цієї алгебри потрібний ще якийсь її абстрактний еквівалент, що називається **алгеброю ідей** [8]. Вибір такої назви обумовлений тим, що елементи множини – носія алгебри ідей – природним образом інтерпретуються як ідеї або думки інтелекту, а операції алгебри ідей над цими елементами – як дії інтелекту над думками. Алгебра ідей визначається в такий спосіб, щоб вона задавала клас усіх конкретних алгебр, ізоморфних до алгебри скінченних предикатів.

Конструктивно задана (тобто конкретна) алгебра скінченних предикатів замінюється відповідною їй абстрактно визначеною алгеброю ідей. Це досягається шляхом перекладу основних понять і законів алгебри скінченних предикатів на мову абстрактного опису. Паралельно з розвитком алгебри ідей буде просуватися вперед і справа формального опису закономірностей інтелектуальної діяльності людини. Це досягається за допомогою психологічної інтерпретації понять і законів алгебри ідей. Правомірність такої інтерпретації має улаштовуватися в кожному конкретному випадку шляхом експериментального вивчення відповідних властивостей поведінки випробуваного. Під **випробуванням** розуміється та конкретна людина, інтелектуальна діяльність якої піддається формалізації.

У ролі прототипу алгебри ідей використовується алгебра одномісних k -ічних предикатів першого порядку [1]. Слід зазначити, що в ролі прототипу алгебри ідей приймається не самий загальний варіант алгебри скінченних предикатів, як, здавалося б, треба зробити, а, навпаки, досить окремий її випадок. Справа в тому, що при переході від конкретної алгебри до її абстрактного еквівалента окреме та загальне міняються місцями. Тому найбільш окремий варіант алгебри скінченних предикатів породжує алгебру ідей самого загального вигляду. Виявляється, що саме алгебра одномісних k -ічних предикатів першого порядку призводить до потрібного нам гранично загального визначення алгебри ідей. Абстрактні аналоги більш загальних алгебр скінченних предикатів (багатомісних і алгебр довільного порядку) отримують за рахунок деталізації вихідної алгебри ідей.

Побудова алгебри ідей починається із введення її **носія** – множини всіх ідей [8]. Позначаємо символом S_k множину, що складається з 2^k різних елементів $S_0, S_1, \dots, S_{2^k-1}$. Множина S_k приймається за **носія алгебри ідей розмірності k** . Елементи множини S_k називаються **ідеями розмірності k** . Прототипами елементів множини S_k є одномісні k -ічні предикати першого порядку. Кількість елементів 2^k множини S_k обрано з таким розрахунком, щоб вона збіглася з кількістю всіх одномісних k -ічних предикатів першого порядку. Множина S_k називається **k -мірним простором ідей**. Питання про конкретне значення числа k залишається відкритим. Поки ж будемо вважати, що в ролі k може бути обране будь-яке натуральне число $k = 1, 2, \dots$. Варто помітити, що при будь-якому значенні k множина S_k не є порожньою. У деяких задачах нас буде цікавити не вся множина S_k , а лише якась її частина N . Кількість елементів у множині N може бути довільною, але вона має бути меншою за 2^k . Множина N називається **неповною множиною ідей**, а множина S_k – **повною множиною ідей**.

Уведемо бієкцію $\Phi: S_k \rightarrow M_k$, що встановлює взаємно-однозначну відповідність між усіма ідеями розмірності k і всіма k -їчними предикатами, заданими на множині M_k . Це завжди можна зробити, оскільки множини S_k і M_k містять однакову кількість елементів. Бієкцію Φ можна обирати навіть багатьма способами. Усього існує $2^k!$ різних варіантів вибору бієкцій Φ , заданих на множині S_k , що відповідає кількості всіх перестановок із 2^k різних елементів. Наприклад, при $k = 3$ існує $2^3! = 40320$ різних варіантів вибору бієкцій Φ . Предикат $P = \Phi(X)$ називається предикатом, що відповідає ідеї X , а ідея $X = \Phi^{-1}(P)$ – ідеєю, що відповідає предикатові P . У таблицях 4.1 і 4.2 наведені два прикладу бієкцій Φ' і Φ'' .

Таблиця 4.1

x'	S'_0	S'_1	S'_2	S'_3	S'_4	S'_5	S'_6	S'_7
$\Phi'(x')$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7

Таблиця 4.2

x''	S''_0	S''_1	S''_2	S''_3	S''_4	S''_5	S''_6	S''_7
$\Phi''(x'')$	P_4	P_5	P_7	P_1	P_6	P_0	P_3	P_2

Бієкція $\Phi': S'_k \rightarrow M_k$ визначена на тривимірному просторі ідей $S'_3 = \{S'_0, S'_1, \dots, S'_7\}$, бієкція $\Phi'': S''_k \rightarrow M_k$ – на просторі $S''_3 = \{S''_0, S''_1, \dots, S''_7\}$ тієї ж самої розмірності. Символ x' означає змінну, задану на множині S'_3 , а символ x'' – змінну, задану на множині S''_3 . Множини S'_3 і S''_3 можна розглядати як різні системи позначень для тих самих тривимірних ідей.

Елементи множини S_k будемо психологічно інтерпретувати як думки якої-небудь конкретної людини, яку надалі будемо називати випробуванним. Людину, що вивчає інтелектуальну діяльність випробуваного, будемо називати дослідником. Проводячи досліди, дослідник по своєму бажанню формує в розумі випробуваного ту або іншу думку. Дослідник не має можливості сформулювати в розумі випробуваного необхідну думку безпосередньо (якщо він не має телепатичних здібностей). Але він зможе це зробити, пред'являючи випробуваному для сприйняття спеціально підібраний фізичний сигнал, що виконує в даному випадку роль імені думки. Думка, породжена яким-небудь ім'ям, називається змістом цього імені. Таким чином, між думкою дослідника і збуджуваною нею думкою випробуваного завжди є неминучий посередник – деякий фізичний сигнал, що позначає думку дослідника і є разом з тим ім'ям думки випробуваного.

Думки від однієї людини до іншої передаються за допомогою висловлювань. Будь-яке висловлювання має вигляд оповідального речення або послідовності оповідальних речень – тексту. Приклади висловлювань: «*Йде дощ*», «*Світить сонце*», «*Не йде дощ, і світить сонце*», «*Йде дощ, або світить сонце*» Думка, вкладена в те або інше висловлювання, називається змістом висловлювання. Висловлювання відіграє роль імені думки. Будь-яке оповідальне речення, що є ім'ям деякої думки, вважається висловлюванням. Ім'ям думки може бути не лише висловлювання, але і будь-який інший фізичний сигнал. Наприклад, червоне світло світлофору передає водієві думку «*Рух заборонений*». Проте, висловлення як засіб передачі думок у деякому змісті незамінне: людина не може зрозуміти зміст немовного сигналу доти,

поки хтось їй не пояснить його за допомогою висловлень. Так, водій має бути попередньо навчений тому, що червоне світло світлофору означає заборону руху. Якщо цього не зробити, то червоне світло світлофору не буде збуджувати в розумі водія потрібної думки. Як засіб передачі думок висловлювання універсальні. Будь-яку думку кожна психічно здорова людина зможе сформулювати у вигляді висловлювання. Висловлювань більше, ніж думок. Ту саму думку можна виразити різними висловлюваннями. Висловлювання, що виражають ту саму думку, називаються **тотожними**.

Не кожне оповідальне речення може бути висловлюванням. Наприклад, фраза, написана на незрозумілій для випробуваного мові, не несе йому ніякої думки. Щоб оповідальне речення могло збудити в розумі випробуваного якусь думку, воно має бути їм зрозуміле. Те саме речення для одного випробуваного може бути зрозумілим, а для іншого – незрозумілим. Текст, узятий з посібника з незнайомої галузі знань, буде випробуваному незрозумілий. Але після того, як випробуваний опанує цю галузь знань, той же самий текст стане йому зрозумілим. Таким чином, питання про те, чи визнати дану фразу висловлюванням, чи ні, вирішується щоразу стосовно конкретного випробуваного, який при цьому знаходиться на цілком визначеній стадії розвитку. Можна говорити, що дане речення є висловлюванням щодо цілої групи осіб, але лише в тому випадку, якщо усі вони розуміють зміст цього речення, причому розуміють однаково. Речення може не нести ніякого змісту, навіть якщо воно записане або вимовлене мовою, якою володіє випробуваний. Це трапляється, якщо речення має неправильну граматичну структуру, або в ньому зустрічається незрозумілі для випробуваного слова. Речення може не нести ніякої думки в силу своєї суперечливості. Наприклад, суперечливим є речення «*Це речення є помилковим*». Дійсно, якщо припустити, що це речення є істинним, то воно виявиться помилковим. Якщо ж припустити, що воно є хибним, то звідси впливає його істинність.

У дослідника немає прямого способу упевнитися в тому, що думка випробуваного збігається з його власною думкою. Ця обставина може послужити причиною неправильного розуміння дослідника випробуваним. Пред'являючи фразу, дослідник розраховує, що вона збудить у розумі випробуваного саме ту думку, що він у неї вклав. Але випробуваний цілком може розшифрувати фразу як зовсім іншу думку або як думку, що не цілком збігається з тою, яку мав на увазі дослідник. Про те, що таке можливо, свідчать випадки неточної передачі думок від людини до людини, що постійно зустрічаються в житті та викликають непорозуміння. Одна й та сама фраза, у залежності від мінливих побічних обставин, може бути сприйнята випробуваним по-різному. Так, цитата, вирвана з контексту і вставлена в інший текст, найчастіше набуває зовсім іншого змісту. Це явище може порушити стабільність формування дослідником думок у розумі випробуваного.

Здійснюючи експеримент на випробуваному, дослідник зобов'язаний подбати про те, щоб збуджувані в розумі випробуваного думки завжди однозначно визначалися пропонованими йому висловлюваннями. Зміст імені завжди має однозначно відповідати імені. Виконання цієї вимоги, що називається **умовою повторюваності**, є обов'язковим для достовірності дослідів. Експеримент не постраждає, якщо дослідник викликає в розумі випробуваного не ту думку, що він мав намір отримати, аби повторне пред'явлення висловлювання породжувало у свідомості випробуваного ту ж думку. Але дослід не буде вдалим, якщо при його проведенні не буде забезпечена повторюваність при формуванні думок, тобто якщо при різних пред'явленнях того ж самого висловлювання у свідомості випробуваного будуть виникати різні думки. Вимога повторюваності висувається не лише до

описуваних тут психофізичних експериментів, її виконання є необхідним також і в будь-якому грамотному фізичному експерименті. Якщо умова повторюваності в експерименті порушується, то думки, пропоновані випробуваному, стають неконтрольованими, і сказати, про що ж саме був даний дослід і які його результати, не є можливим.

Для боротьби з нестабільністю думок дослідник має ретельно враховувати всі обставини, що супроводжують висловлювання у момент їхнього пред'явлення випробуваному, і виявляти ті з них, що призводять до перекручування думок. Допомогу дослідникові в цій справі може надати сам випробуваний, указуючи випадки зміни змісту висловлювання з появою тієї або іншої обставини. Наприклад, випробуваний легко виявляє зміну змісту фрази, викликану зміною контексту, що супроводжує цю фразу. Фактори, що впливають на зміст висловлювання, мають виключатися з умов досліду або ж стабілізуватися. Так, фразу можна пред'явити, не пов'язуючи її з жодним контекстом. Якщо ж це в силу певних обставин є неможливим, то кожне пред'явлення даної фрази варто супроводжувати тим самим контекстом. Обставини, що стабілізуються в досліді, необхідно включати в характеристику висловлювання, яке ці обставини супроводжують. Так, у протоколі іспиту треба вказувати не лише саму пред'явлену фразу, але також і контекст, що її супроводжує.

Ідея, що відповідає тотожно хибному предикатові $\mathbf{0}$, називається **неправдою** і позначається тим самим символом $\mathbf{0}$. Ідея, що відповідає тотожно істинному предикатові $\mathbf{1}$, називається **істиною** і позначається символом $\mathbf{1}$. Таким чином, $\Phi^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Варто звернути увагу на омографічність знаків $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$. У ролі аргументів функції Φ^{-1} вони позначають предикати, тобто елементи множини M_k , а в ролі значень функції Φ^{-1} вони позначають ідеї, тобто елементи множини S_k . Ця обставина, однак, не призводить до непорозуміння, тому що справжній зміст знаків $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$ легко визначається за контекстом. В якості **прикладу**, знайдемо по таблицях 4.1 і 4.2 ідеї $\mathbf{0}$ і $\mathbf{1}$ у множинах S'_3 і S''_3 . В обох таблицях роль предиката $\mathbf{0}$ відіграє предикат P_0 , а роль предиката $\mathbf{1}$ – предикат P_7 . За таблицею 4.1 знаходимо

$$(\Phi')^{-1}(P_0) = S'_0,$$

$$(\Phi')^{-1}(P_7) = S'_7.$$

Отже, для множини S'_3 маємо $\mathbf{0} = S'_0$, $\mathbf{1} = S'_7$.

За таблицею 4.2 знаходимо

$$(\Phi'')^{-1}(P_0) = S''_5,$$

$$(\Phi'')^{-1}(P_7) = S''_2.$$

Отже, для множини S''_3 маємо $\mathbf{0} = S''_5$, $\mathbf{1} = S''_2$.

Ідею $\mathbf{0}$ психологічно інтерпретують як **суперечливу думку**. Висловлювання, що містить суперечливу думку, називається **суперечливим висловлюванням**. Приклад суперечливого висловлення: «*Йде дощ, і не йде дощ*». Інший приклад суперечливого висловлення: «З висловлення «*Йде дощ*» логічно випливає висловлювання «Світить сонце»». Це ж висловлювання можна записати і в більш компактній формі: «*Якщо йде дощ, то світить сонце*». Тут слова «*якщо...,то*» позначають логічне походження висловлень. Варто звернути увагу на те, що було б неправильним стверджувати, що суперечливому висловлюванню не відповідає ніякої думки. Суперечливе висловлювання виражає цілком визначену думку, а саме – суперечливу думку. Суперечливе висловлювання варто відрізнити від **суперечливого**

речення, що взагалі не є висловлюванням. Прикладом суперечливого речення може служити речення: «*Це речення є хибним*». Такого роду речення не виражають ніякої думки. Ідею **1**, в свою чергу, інтерпретують як **тавтологічну думку**. Висловлювання, що виражає тавтологічну думку, називається **тавтологічним висловлюванням**. Прикладами тавтологічних висловлювань можуть служити висловлювання: «*Йде дощ, або не йде дощ*», «*Якщо йде дощ, і світить сонце, то йде дощ*».

4.2. ІЗОМОРФІЗМ АЛГЕБР ІДЕЙ

Для позначення n -мірних ідей алгебри L_n уведемо формули алгебри ідей L_n . Формули будемо будувати із символів $\mathbf{0}, e_1, e_2, \dots, e_n$, що позначають ідеї алгебри L_n , з яких вона утворюється, а також символу \vee , що позначає операцію диз'юнкції ідей алгебри L_n , і двох допоміжних символів – дужок (i) . Символи $\mathbf{0}, e_1, e_2, \dots, e_n$ будемо називати **утворюючими символами алгебри L_n** , а символи e_1, e_2, \dots, e_n – **базисними символами алгебри L_n** . Будь-які скінченні послідовності введених символів будемо називати **виразами алгебри L_n** .

Поняття **формули** визначаємо індуктивно за допомогою породжуючої процедури, заснованої на наступних двох правилах [9]:

- 1) всі утворюючі символи вважаються формулами алгебри L_n ;
- 2) якщо вирази A і B – формули алгебри L_n , то вираз $(A \vee B)$ називається формулою алгебри L_n .

Будемо вважати, що формула $(A \vee B)$ позначає ідею, яку отримано в результаті диз'юнкції ідей, виражених формулами A і B . Легко побачити, що диз'юнкції ідей, уведені формулами, є графічним зображенням всіляких способів отримання ідей в алгебрі L_n . З аксіоми n -мірності випливає, що для кожної ідеї алгебри L_n знайдеться хоча б одна формула, що її позначає. Це означає, що мова формул алгебри логічного типу L_n при будь-якому $n \in \{1, 2, \dots\}$ є повною. Слід зазначити, що вирази і формули алгебри ідей L_n є разом з тим виразами і формулами будь-яких алгебр ідей L_{n+1}, L_{n+2}, \dots тощо більшої розмірності.

Приклад 4.1. Нехай є деяка тривимірна алгебра ідей. В ній в якості символів e_1, e_2, e_3 використовуються букви a, b, c . Утворити з них якісь формули алгебри ідей.

Розв'язання. За правилом 1) утворюються формули $\mathbf{0}, b, c$.

За правилом 2):

- з формул $\mathbf{0}$ і b утворюється формула $(\mathbf{0} \vee b)$,
- із c і $(\mathbf{0} \vee b)$ – формула $(c \vee (\mathbf{0} \vee b))$,
- із $(\mathbf{0} \vee b)$ і b – формула $((\mathbf{0} \vee b) \vee b)$,
- із $(c \vee (\mathbf{0} \vee b))$ і $((\mathbf{0} \vee b) \vee b)$ – формула $((c \vee (\mathbf{0} \vee b)) \vee ((\mathbf{0} \vee b) \vee b))$.

Відповідь. Отже, побудовано низку формул, що стають все довшими: $\mathbf{0}, b, c, (\mathbf{0} \vee b), (c \vee (\mathbf{0} \vee b)), ((\mathbf{0} \vee b) \vee b), ((c \vee (\mathbf{0} \vee b)) \vee ((\mathbf{0} \vee b) \vee b))$.

Формули, що позначають одну й ту саму ідею, називаються **тотожними формулами**. З аксіоми асоціативності випливає, що усі формули, що відрізняються одна від іншої лише розташуванням наявних у них дужок, є тотожними. Наприклад, формули

$$((c \vee (\mathbf{0} \vee b)) \vee ((\mathbf{0} \vee b) \vee b)),$$

$$(((c \vee \mathbf{0}) \vee b) \vee \mathbf{0}) \vee (b \vee b)),$$

$$((c \vee 0) \vee (((b \vee 0) \vee b) \vee b))$$

є тотожними одна одній. У зв'язку з цим з'являється можливість прибрати з формул усі дужки і записувати будь-які ідеї у вигляді виразів більш простих, ніж формули. Вирази, отримані з формул шляхом прибирання усіх дужок, називаються **бездужковими формами**. Так, усім трьома щойно записаним формулам відповідає одна й та сама бездужкова форма

$$c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b.$$

Далі, з аксіоми комутативності впливає можливість звзунти клас бездужкових форм для позначення всіх ідей, залишивши лише ті з них, у яких утворюючі символи йдуть в наступному порядку $0, e_1, e_2, \dots, e_n$. Наприклад, одну й ту саму ідею, подану трьома різними бездужковими формами

$$c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b,$$

$$b \vee b \vee 0 \vee b \vee 0 \vee c,$$

$$0 \vee c \vee 0 \vee b \vee b \vee b$$

можна записати єдиною формою $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$. Крім того, ґрунтуючись на аксіомі ідемпотентності, можна спростити запис ідеї, залишаючи в бездужковій формі, що визначає її, лише по одному входженню кожного утворюючого символу. Наприклад, ідею, записану у зазначеній формі $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$, можна подати більш короткою бездужковою формою $0 \vee b \vee c$. Нарешті, з аксіоми нуля впливає можливість подальшого спрощення подання ідей: з будь-якої бездужкової форми, окрім формули 0 , можна виключити символ 0 , якщо він там є. Так, ідея, подана формою $0 \vee b \vee c$, після прибирання з цієї форми символу 0 запишеться в більш короткій бездужковій формі $b \vee c$.

Формулу 0 і всі бездужкові форми, у які не входить символ 0 , а базисні символи входять не більш, ніж по одному разу, і розташовані в порядку росту їхніх номерів, називають **стандартними формами ідей**. Формула 0 називається **нульовою стандартною формою**.

Теорема 4.1 (про стандартну форму). *Формулювання.* Для кожної ідеї алгебри L_n ($n = 1, 2, \dots$) існує єдина стандартна форма.

Доведення. Існування. Кожна ненульова стандартна форма алгебри L_n має вигляд

$$e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_p, \quad p \leq n.$$

Як вже було зазначено, для кожної ідеї алгебри L_n знайдеться хоча б одна формула, що її позначає. Разом з тим, щойно було встановлено, що для кожної формули A алгебри ідей L_n існує стандартна форма, що позначає ту ж саму ідею, що і формула A . Таким чином, будь-яку ідею алгебри L_n можна подати в стандартній формі.

Одиничність. Нехай $A = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ – довільно обрана ненульова стандартна форма. Множина $E_A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\}$ усіх базисних символів, що є присутніми у формі A , називається **ядром ненульової стандартної форми A** . **Ядром нульової стандартної форми** називається порожня множина \emptyset . Ядро кожної стандартної форми є одним з підмножин множини $B_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Кожній підмножині множини B_n відповідає своя стандартна форма. Таким чином, між стандартними формами і підмножинами множини B_n має місце взаємно-однозначна відповідність. Як впливає з теореми про потужність булеану [45], усього існує 2^n підмножин множини B_n . Отже, усього існує 2^n різних стандартних форм. З іншого

боку, множина S_n складається з 2^n різних ідей алгебри L_n . Таким чином, кожній ідеї алгебри L_n відповідає єдина стандартна форма. **Теорему доведено.**

Теорема 4.2 (про ізоморфізм алгебр ідей). *Формулювання.* Усі алгебри ідей розмірності n ($n \in \{1, 2, \dots\}$) є ізоморфними одна одній.

Доведення. Щойно було доведено, що кожній стандартній формі та її ядру відповідає своя ідея алгебри L_n . Отже, кожній ідеї $x \in S_n$ відповідає своя підмножина E_x базису B_n . Множина E_x називається **ядром ідеї x** . Позначимо через C_n систему всіх підмножин базису B_n . Існує бієкція $\Omega: S_n \rightarrow C_n$, що ставить у відповідність кожній ідеї $x \in S_n$ її ядро $E_x \in C_n$, так що $E_x = \Omega(x)$.

Доведемо, що будь-яка алгебра ідей L_n розмірності n є ізоморфною канонічній алгебрі ідей L_n^{can} тієї ж самої розмірності. Усі символи, що відносяться до алгебри L_n , будемо записувати звичайним шрифтом, а символи, що відносяться до канонічної алгебри L_n – з позначкою «*can*». Уведемо бієкцію $\Phi: S_n \rightarrow S_n^{can}$, визначивши її в наступний спосіб:

$$\Phi(0) = 0^{can},$$

$$\Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can}.$$

Таким чином, маємо:

$$\Phi(0 \vee 0) = \Phi(0) = 0^{can} = 0^{can} \vee 0^{can} = \Phi(0) \vee \Phi(0),$$

$$\begin{aligned} \Phi(0 \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p})) &= \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \\ &= e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} = 0^{can} \vee e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} = \\ &= \Phi(0) \vee \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee 0) &= \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \\ &= e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} \vee 0^{can} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee \Phi(0). \end{aligned}$$

В алгебрі L_n логічна сума $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_r}$ будь-яких ненульових ідей $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ і $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_q}$ може бути визначена, відповідно до аксіом ідемпотентності, комутативності й асоціативності, наступним правилом:

$$\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_r}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q}\}. \quad (4.1)$$

Для отримання логічної суми $z = x \vee y$ за цим правилом можна обрати зі стандартних форм обох доданків $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ і $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_q}$ усі базисні символи $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_q}$, що в них містяться, і скласти з них стандартну форму $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_r}$, не припускаючи при цьому повторень базисних символів і розташовуючи останні в порядку зростання їхніх номерів. Як відомо, аналогічне правило використовується і для утворення логічної суми в алгебрі L_n^{can} .

Із всього сказаного випливає, що

$$\begin{aligned} \Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_q})) &= \Phi(e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_r}) = \\ &= e_{k_1}^{can} e_{k_2}^{can} \dots e_{k_r}^{can} = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} \vee e_{j_1}^{can} e_{j_2}^{can} \dots e_{j_q}^{can} = \\ &= \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee \Phi(e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_q}). \end{aligned}$$

Отже, при $x, y \in S_n$ маємо $\Phi(x \vee y) = \Phi(x) \vee \Phi(y)$. Це означає, що будь-яка алгебра ідей L_n ізоморфна канонічній алгебрі ідей L_n^{can} . Звідси безпосередньо випливає, що усі алгебри ідей розмірності n є ізоморфними одна одній. **Теорему доведено.**

Зміст теореми 4.2 зводиться до того, що раніше введеному поняттю алгебри ідей розмірності n задовольняє єдиний абстрактний математичний об'єкт. Це означає, що всі можливі алгебри ідей розмірності n відрізняються одна від одної лише використовуваними в них позначеннями. Власне кажучи, тобто в абстрактному змісті, усі такі алгебри є нерозрізненими.

Поєднуючи теореми про існування та ізоморфізм алгебр ідей, можна стверджувати, що для алгебри ідей кожної розмірності n ($n \in \{1, 2, \dots\}$) існує, до того ж єдина (з точністю до ізоморфізму) стандартна форма.

4.3. КОН'ЮНКЦІЯ ТА ЗАПЕРЕЧЕННЯ В АЛГЕБРИ ІДЕЙ

Визначимо операцію **кон'юнкції** в алгебрі ідей наступними аксіомами [25]:

- 1) $e_i \wedge e_j = \mathbf{0}$, якщо $i \neq j$, ($i, j = \overline{0, n}$);
- 2) $e_i \wedge e_j = e_i$, якщо $i = j$, ($i, j = \overline{0, n}$);
- 3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x, y, z \in S_n$,

де $e_0 = \mathbf{0}$, S_n – множина-носіє алгебри L_n .

Теорема 4.3. Формулювання. Алгебра ідей L_n з операціями диз'юнкції та кон'юнкції існує при будь-якому n ($n \in \{1, 2, \dots\}$).

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Визначимо алгебру $L_1 \cdot S_1 = \{\mathbf{0}, e_1\}$. Операцію диз'юнкції задано в наступний спосіб:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \vee \mathbf{0} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \vee e_1 = e_1 \vee \mathbf{0} &= e_1 \vee e_1 = e_1. \end{aligned}$$

Задамо також операцію кон'юнкції:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \wedge e_1 = e_1 \wedge \mathbf{0} &= \mathbf{0}, \\ e_1 \wedge e_1 &= e_1. \end{aligned}$$

Перевіримо виконання аксіом 1) – 3).

Аксіоми 1) – 2) виконуються: $\mathbf{0} \wedge e_1 = \mathbf{0}$, $e_1 \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, тобто $e_i \wedge e_j = \mathbf{0}$, якщо $i \neq j$, ($i, j = \overline{0, n}$); $\mathbf{0} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $e_1 \wedge e_1 = e_1$, тобто $e_i \wedge e_j = e_i$, якщо $i = j$, ($i, j = \overline{0, n}$).

Аксіома 3) також виконується. Якщо $x = \mathbf{0}$, то

$$x(y \vee z) = \mathbf{0}(y \vee z) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{0} = y \cdot \mathbf{0} \vee z \cdot \mathbf{0} = yx \vee zx.$$

Якщо $x = e_1$, то

$$\begin{aligned} e_1(\mathbf{0} \vee \mathbf{0}) &= e_1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot e_1 \vee \mathbf{0} \cdot e_1; \\ e_1(\mathbf{0} \vee e_1) &= e_1(e_1 \vee \mathbf{0}) = e_1(e_1 \vee e_1) = e_1 e_1 = e_1 = \\ &= \mathbf{0} \cdot e_1 \vee e_1 e_1 = e_1 e_1 \vee \mathbf{0} \cdot e_1 = e_1 e_1 \vee e_1 e_1. \end{aligned}$$

Нехай аксіоми 1) – 3) виконуються для алгебри L_{k-1} , заданої на множині S_{k-1} . Визначимо алгебру L_k . Множину S_k отримуємо, додавши до S_{k-1} усі елементи вигляду (x, e_k) , де $x \in S_{k-1}$, $e_k \notin S_{k-1}$ – фіксований елемент. Базисні елементи алгебри L_k : $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, (0, e_k)$. Операції диз'юнкції та кон'юнкції вводимо в наступний спосіб:

$$(x, e_k) \vee p = p \vee (x, e_k) = (p \vee x, e_k), \quad (4.2)$$

$$(x, e_k) \vee (p, e_k) = (x \vee p, e_k), \quad (4.3)$$

$$(x, e_k) \wedge p = p \wedge (x, e_k) = x \wedge p, \quad (4.4)$$

$$(x, e_k) \wedge (p, e_k) = (x \wedge p, e_k), \quad (4.5)$$

де $x, p \in S_{k-1}$.

Перевіримо виконання аксіом 1) – 2):

$$e_i \wedge (0, e_k) = (0, e_k) \wedge e_i = 0 \wedge e_i = 0, \quad (i = \overline{0, k-1});$$

$$(0, e_k) \wedge (0, e_k) = (0 \cdot 0, e_k) = (0, e_k).$$

Позначимо $(0, e_k) = e_k$, тоді $e_i \wedge e_j = 0$, якщо $i \neq j$ і $e_i \wedge e_j = e_i$, якщо $i = j$, ($i, j = \overline{0, k}$). Тобто аксіоми 1) – 2) виконуються.

Перевіримо виконання аксіоми 3):

$$\begin{aligned} x (y \vee (z, e_k)) &= x ((y, e_k) \vee z) = x((y, e_k) \vee (z, e_k)) = x (y \vee z, e_k) = \\ &= x (y \vee z) = y x \vee z x = y x \vee (z, e_k) \wedge x = (y, e_k) \cdot x \vee z x = (y, e_k) \cdot x \vee (z, e_k) \cdot x; \end{aligned}$$

$$(x, e_k) \wedge (y \vee z) = x (y \vee z) = y \cdot (x, e_k) \vee z \cdot (x, e_k);$$

$$\begin{aligned} (x, e_k) \wedge (y \vee (z, e_k)) &= (x, e_k) \wedge ((y, e_k) \vee z) = (x, e_k) \wedge ((y, e_k) \vee (z, e_k)) = \\ &= (x, e_k) \wedge (y \vee z, e_k) = (x (y \vee z), e_k) = (y x \vee z x, e_k) = y \cdot (x, e_k) \vee (z, e_k) \cdot (x, e_k) = \\ &= (y, e_k) \cdot (x, e_k) \vee z \cdot (x, e_k) = (y, e_k) \cdot (x, e_k) \vee (z, e_k) \cdot (x, e_k). \end{aligned}$$

Таким чином, в алгебрі L_n будь-якої розмірності n аксіоми кон'юнкції та диз'юнкції виконуються. **Теорему доведено.**

Із аксіом 1) – 3) виводяться деякі властивості кон'юнкції. Із аксіом 1) – 2) випливає *комутативність* для базисних елементів. Якщо $i \neq j$, ($i, j = \overline{0, n}$), то $e_i e_j = 0 = e_j e_i$. Якщо $i = j$, ($i, j = \overline{0, n}$), то $e_i e_j = e_i = e_j e_i$. Із аксіом 1) – 3) виводимо закон *кон'юнкції з нулем*. Нехай $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0 \cdot (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_{p-1}}) \cdot 0 \vee e_{i_p} \cdot 0 = \\ &= (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_{p-1}}) \cdot (0 \vee 0) \vee 0 = \\ &= 0 \cdot ((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_{p-2}}) \vee e_{i_{p-1}}) \vee 0 \cdot ((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_{p-2}}) \vee e_{i_{p-1}}) = \\ &= \dots = 0 \cdot e_{i_1} \vee 0 \cdot e_{i_2} = 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

Із аксіоми 3) і щойно доведеного правила $0 \cdot x = 0$ виводимо комутативність для довільних елементів $x, y \in S_n$:

$$x y = x (y \vee 0) = y x \vee 0 \cdot x = y x.$$

Виведемо закон дистрибутивності $x(y \vee z) = yx \vee zx = xy \vee xz$. Тепер визначимо, чому дорівнює логічний добуток двох довільних елементів $x, y \in S_n$. Нехай $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$, $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}$, $z = e_{f_1} \vee e_{f_2} \vee \dots \vee e_{f_r}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} xy &= x(e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}) = x e_{j_1} \vee \dots \vee x e_{j_m} = \\ &= e_{j_1}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee e_{j_2}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee \dots \vee e_{j_m}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \\ &= e_{j_1} e_{i_1} \vee e_{j_1} e_{i_2} \vee \dots \vee e_{j_1} e_{i_p} \vee \dots \vee e_{j_m} e_{i_1} \vee \dots \vee e_{j_m} e_{i_p} = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_s}. \end{aligned}$$

Більшість кон'юнкцій базисних елементів обернеться в нуль. Залишаться лише ті, у яких номери елементів збігаються. Тому для кон'юнкції виконується правило

$$xy = (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \wedge (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}) = (e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_s}), \quad (4.6)$$

де $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_s}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}\}$. В аналогічний спосіб отримуємо:

$$\begin{aligned} xz &= x(e_{f_1} \vee e_{f_2} \vee \dots \vee e_{f_r}) = x e_{f_1} \vee \dots \vee x e_{f_r} = \\ &= e_{f_1}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee e_{f_2}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee \dots \vee e_{f_r}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \\ &= e_{f_1} e_{i_1} \vee e_{f_1} e_{i_2} \vee \dots \vee e_{f_1} e_{i_p} \vee \dots \vee e_{f_r} e_{i_1} \vee \dots \vee e_{f_r} e_{i_p} = e_{t_1} \vee e_{t_2} \vee \dots \vee e_{t_s}. \end{aligned}$$

де $\{e_{t_1}, e_{t_2}, \dots, e_{t_s}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap \{e_{f_1}, e_{f_2}, \dots, e_{f_r}\}$. Таким чином, з урахуванням формули (4.1), згідно з властивостями операцій над множинами [45] маємо для $xy \vee xz$:

$$\begin{aligned} &(\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}\}) \cup (\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap \{e_{f_1}, e_{f_2}, \dots, e_{f_r}\}) = \\ &= \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap (\{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}\} \cup \{e_{f_1}, e_{f_2}, \dots, e_{f_r}\}). \end{aligned}$$

Це свідчить про те, що множина базисних елементів для $xy \vee xz$ збігається зі множиною базисних елементів для $x(y \vee z)$. Це доводить зазначений закон дистрибутивності.

Покажемо тепер, що у введеній алгебрі L_n виконуються усі закони абстрактної алгебри скінченних предикатів [1]. Закони комутативності, нуля і перший закон дистрибутивності вже доведено. Доведемо ідемпотентність. Нехай $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} x \wedge x &= x(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = \\ &= (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) e_{i_1} \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) e_{i_2} \vee \dots \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) e_{i_p} = \\ &= e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p} = x. \end{aligned}$$

Доведемо асоціативність. Для базисних елементів є справедливою рівність [25] $(e_i \wedge e_j) e_f = e_i (e_j \wedge e_f)$. Дійсно, якщо $e_i = e_j = e_f$, то згідно з аксіомою 2) отримуємо

$$(e_i \wedge e_j) e_f = e_i \wedge e_f = e_i = e_i (e_j \wedge e_f).$$

Якщо хоча б два елементи розрізняються, то

$$(e_i \wedge e_j) e_f = 0 = e_i (e_j \wedge e_f).$$

Нехай $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}$, $z = e_{f_1} \vee e_{f_2} \vee \dots \vee e_{f_r}$. Тоді для будь-яких x, y, z отримуємо:

$$\begin{aligned} (x \wedge y) z &= ((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \cdot (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m})) \wedge (e_{f_1} \vee e_{f_2} \vee \dots \vee e_{f_r}) = \\ &= (e_{i_1} \cdot e_{j_1}) e_{f_1} \vee (e_{i_1} \cdot e_{j_1}) e_{f_2} \vee \dots \vee (e_{i_p} \cdot e_{j_m}) e_{f_r} = \end{aligned}$$

$$= e_{i_1}(e_{j_1} \cdot e_{f_1}) \vee e_{i_1}(e_{j_1} \cdot e_{f_2}) \vee \dots \vee e_{i_p}(e_{j_m} \cdot e_{f_r}) = x (y \wedge z).$$

Введемо визначення одиниці $\mathbf{1} = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} x \cdot \mathbf{1} &= (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p})(e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n) = \\ &= e_{i_1}(e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n) \vee \dots \vee e_{i_p}(e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n) = \dots = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p} = x. \end{aligned}$$

Рівність $x \cdot \mathbf{1} = x$ – це правило кон'юнкції з одиницею. Легко отримати і правило диз'юнкції з одиницею $x \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Доведемо закони поглинання:

$$\begin{aligned} x \vee x y &= x \cdot \mathbf{1} \vee x y = x (\mathbf{1} \vee y) = x \cdot \mathbf{1} = x; \\ x (x \vee y) &= x x \vee y x = x \vee y x = x. \end{aligned}$$

Доведемо другий закон дистрибутивності:

$$(x \vee y) (x \vee z) = x (x \vee y) \vee z (x \vee y) = x \vee x z \vee y z = x \vee y z.$$

Таким чином, показано, що алгебра ідей є ізоморфною абстрактній алгебрі скінченних предикатів. Доведемо, що усі алгебри, що задовольняють аксіомам алгебри ідей, ізоморфні одна одній. Для цього доповнимо канонічну алгебру ідей [9] операцією кон'юнкції. Вона задається правилом (4.6). Надалі усі позначення, що стосуються алгебри ідей, будемо позначати зверху символом «*can*».

Теорема 4.4. Формулювання. Усі алгебри ідей розмірності n ($n \in \{1, 2, \dots\}$) є ізоморфними одна одній.

Доведення. В силу того, що для алгебр L_n з операцією диз'юнкції ізоморфізм доведено, то необхідно довести, що та ж сама бієкція $\Phi: S_n \rightarrow S_n^{can}$ задає ізоморфізм і для операції кон'юнкції, тобто усі алгебри ідей відображає в канонічну алгебру L_n^{can} . Скористаємось методом математичної індукції.

Нехай при $n = 1$ задано бієкцію $\Phi_1: S_1 \rightarrow S_1^{can}$. $S_1 = \{0, e_1\}$, $S_1^{can} = \{0^{can}, e_1^{can}\}$. $\Phi_1(0) = 0^{can}$, $\Phi_1(e_1) = e_1^{can}$.

$$\Phi_1(0 \cdot 0) = \Phi_1(0) = 0^{can} = 0^{can} \wedge 0^{can} = \Phi_1(0) \wedge \Phi_1^{can}(0),$$

$$\Phi_1(e_1 \cdot e_1) = \Phi_1(e_1) = e_1^{can} \wedge e_1^{can} = \Phi_1(e_1) \wedge \Phi_1^{can}(e_1),$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(0 \cdot e_1) = \Phi_1(e_1 \cdot 0) &= \Phi_1(0) = 0^{can} = e_1^{can} \wedge 0^{can} = \\ &= \Phi_1(e_1) \wedge \Phi_1^{can}(0) = \Phi_1(0) \wedge \Phi_1^{can}(e_1). \end{aligned}$$

Таким чином, при $n = 1$ ізоморфізм встановлений.

Нехай при $n = k - 1$ введено бієкцію $\Phi_{k-1}: S_{k-1} \rightarrow S_{k-1}^{can}$ в такий спосіб, що

$$\Phi_{k-1}(x y) = \Phi_{k-1}(x) \wedge \Phi_{k-1}^{can}(y), \quad x, y \in S_{k-1}.$$

Задамо алгебру L_k , додавши до множини S_{k-1} елементи вигляду (x, e_k) , де $x \in S_{k-1}$, $e_k \notin S_{k-1}$ – якийсь символ, і розповсюдивши операції диз'юнкції та кон'юнкції з S_{k-1} на S_k правилами (4.1) – (4.4).

Вводимо бієкцію $\Phi_k: S_k \rightarrow S_k^{can}$ в наступний спосіб: $\Phi_k((x, e_k)) = \Phi_{k-1}(x) e_k^{can}$, де $x \in S_{k-1}$. Бієкція Φ_{k-1} задається правилом

$$\Phi_{k-1}(x) = \Phi_{k-1}(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can}.$$

Нехай

$$\begin{aligned}x &= e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}, \\y &= e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}, \\z = x y &= (e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \dots \vee e_{k_s}),\end{aligned}$$

де $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_s}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}\} \cap \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}\}$.

Перевіримо, чи задає бієкція $\Phi_k: S_k \rightarrow S_k^{can}$ ізоморфізм $\Phi_k(x y) = \Phi_{k-1}(x y) = \Phi_{k-1}(x) \wedge \Phi_{k-1}^{can}(y)$.

$$\begin{aligned}\Phi_k(x \wedge (y, e_k)) &= \Phi_k(x y) = \Phi_{k-1}(x y) = e_{k_1}^{can} e_{k_2}^{can} \dots e_{k_s}^{can} = \\&= e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} \wedge e_{j_1}^{can} e_{j_2}^{can} \dots e_{j_m}^{can} = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} \wedge e_{j_1}^{can} e_{j_2}^{can} \dots e_{j_m}^{can} \wedge e_k^{can} = \\&= \Phi_{k-1}(x) \wedge (\Phi_{k-1}^{can}(y) \wedge e_k^{can}) = \Phi_k(x) \wedge \Phi_k^{can}((y, e_k)).\end{aligned}$$

В силу того, що в алгебрі ідей має місце властивість комутативності, то $\Phi_k((y, e_k) \wedge x) = \Phi_k((y, e_k)) \wedge \Phi_k^{can}(x)$. Таким чином, маємо [25]:

$$\begin{aligned}\Phi_k((x, e_k) \wedge (y, e_k)) &= \Phi_k((x y, e_k)) = \Phi_{k-1}(x y) e_k^{can} = \\&= e_{k_1}^{can} e_{k_2}^{can} \dots e_{k_s}^{can} e_k^{can} = e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} \wedge e_{j_1}^{can} e_{j_2}^{can} \dots e_{j_m}^{can} \wedge e_k^{can} = \\&= \Phi_{k-1}(x) e_k^{can} \wedge \Phi_{k-1}^{can}(y) e_k^{can} = \Phi_k((x, e_k)) \wedge \Phi_k^{can}((y, e_k)).\end{aligned}$$

Це означає, що для будь-яких $z, p \in S_k$, виконується $\Phi_k(z p) = \Phi_k(z) \wedge \Phi_k^{can}(p)$, тобто будь-яка алгебра розмірності $k \in \mathbb{N}$ ізоморфна канонічній алгебрі розмірності k .

Отже, усі алгебри ідей однакової розмірності n ізоморфні одна одній. **Теорему доведено.**

Введемо операцію заперечення, позначувану як $\bar{}$ або \bar{x} , за допомогою двох аксіом:

- 4) $x \vee \bar{x} = 1$;
- 5) $x \wedge \bar{x} = 0$,

де $x \in S_n$, $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$, $1 = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n$.

Будь-яка операція, що задана в алгебрі L_n за допомогою аксіом 4) – 5), називається **операцією заперечення вектора x** , або просто **запереченням**. Припустимо, що аксіоми не суперечливі, та вивчимо властивості цієї операції. Для цього введемо правила знаходження \bar{x} і перевіримо, чи задовольняють вони аксіомам 4) – 5). Першим правилом задамо заперечення для базисних елементів, а другим – для довільних елементів:

$$\bar{e}_j = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_{j-1} \vee e_{j+1} \vee \dots \vee e_n, \quad (4.7)$$

$$\bar{x} = \bar{e}_{i_1} \wedge \bar{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_p}, \quad (4.8)$$

де $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$, $(j, p = \overline{0, n}, i = \overline{1, 2^n})$. Очевидно, що для \bar{e}_j аксіоми 4) – 5) виконуються:

$$e_j \vee \bar{e}_j = e_j \vee e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_{j-1} \vee e_{j+1} \vee \dots \vee e_n = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n = 1.$$

$$\begin{aligned}e_j \wedge \bar{e}_j &= e_j \wedge (e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_{j-1} \vee e_{j+1} \vee \dots \vee e_n) = \\&= e_j e_1 \vee e_j e_2 \vee \dots \vee e_j e_{j-1} \vee e_j e_{j+1} \vee \dots \vee e_j e_n = 0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Знайдемо, чому дорівнює

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \wedge \bar{x} &= \bar{e}_{i_1} \wedge \bar{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_p} = \\
 &= (e_{i_2} \vee e_{i_3} \vee \dots \vee e_{i_p} \vee \dots \vee e_{i_n}) (e_{i_1} \vee e_{i_3} \vee e_{i_4} \vee \dots \vee e_{i_p} \vee \dots \vee e_{i_n}) \wedge \dots \\
 &\quad \dots \wedge (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_{p-1}} \vee e_{i_{p+1}} \vee \dots \vee e_{i_n}) = \\
 &= e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_n}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 x \vee \bar{x} &= (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee (e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_n}) = \mathbf{1}, \\
 x \wedge \bar{x} &= (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \wedge (e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_n}) = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Отже, аксіоми **4)** - **5)** виконуються для будь-яких x і правилами (4.7) – (4.8) можна користуватися для з'ясування властивостей операції заперечення.

Із правил (4.7) – (4.8) безпосередньо випливає $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{1}}$, $\mathbf{1} = \bar{\mathbf{0}}$.

Має місце і закон подвійного заперечення: $\bar{\bar{x}} = x$. Дійсно,

$$\bar{\bar{x}} = \bar{(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p})} = \bar{(e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_n})} = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p} = x.$$

Виконуються і закони, аналогічні законам де Моргана в алгебрі логіки:

$$\begin{aligned}
 \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} &= \overline{(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m})} = \\
 &= (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{i_2} \vee \dots \vee \bar{e}_{i_p}) \wedge (\bar{e}_{j_1} \vee \bar{e}_{j_2} \vee \dots \vee \bar{e}_{j_m}) = \bar{x} \wedge \bar{y}.
 \end{aligned}$$

Перевіримо тепер справедливість рівності $\overline{e_i \wedge e_j} = \bar{e}_i \vee \bar{e}_j$. Якщо $i = j$, то

$$\overline{e_i \wedge e_j} = \overline{e_i \wedge e_i} = \bar{e}_i = \bar{e}_i \vee \bar{e}_i = \bar{e}_i \vee \bar{e}_j.$$

Якщо $i \neq j$, то маємо

$$\overline{e_i \wedge e_j} = \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1} = e_1 \vee e_2 \vee \dots \vee e_n = \bar{e}_i \vee \bar{e}_j.$$

Тепер можна довести другий закон де Моргана, використовуючи закони поглинання:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \bar{y} &= \bar{((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}) (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_m}))} = \\
 &= \bar{(e_{i_1} e_{j_1} \vee e_{i_1} e_{j_2} \vee \dots \vee e_{i_p} e_{j_m})} = \overline{e_{i_1} e_{j_1}} \wedge \overline{e_{i_1} e_{j_2}} \wedge \dots \wedge \overline{e_{i_p} e_{j_m}} = \\
 &= (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{j_1}) \wedge (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{j_2}) \wedge \dots \wedge (\bar{e}_{i_p} \vee \bar{e}_{j_m}) = \\
 &= (\bar{e}_{i_1} \bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{i_1} \bar{e}_{j_2} \vee \bar{e}_{j_1} \bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{j_1} \bar{e}_{j_2}) \wedge (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{j_3}) \wedge \dots \wedge (\bar{e}_{i_p} \vee \bar{e}_{j_m}) = \\
 &= (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{j_1} \bar{e}_{j_2}) \wedge \dots \wedge (\bar{e}_{i_p} \vee \bar{e}_{j_m}) = \\
 &= (\bar{e}_{i_1} \vee \bar{e}_{i_2} \vee \dots \vee \bar{e}_{i_p}) \vee (\bar{e}_{j_1} \vee \bar{e}_{j_2} \vee \dots \vee \bar{e}_{j_m}) = \bar{x} \vee \bar{y}.
 \end{aligned}$$

Показавши справедливість законів для логічних констант і законів де Моргана, ми довели, що операція заперечення, яку в такий спосіб введено в алгебрі L_n , задовольняє законам булевої алгебри. Отже, ці операції є ізоморфними.

В канонічній алгебрі ідей L_n^{can} операція заперечення задається правилом

$$\bar{x} = \overline{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}} = e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_n}.$$

Аксиомам 4) – 5) це правило не суперечить. Але для точного завдання операції заперечення в алгебрі ідей необхідно довести повноту і несуперечливість аксіом 4) – 5) для будь-якого n .

Теорема 4.5. Формулювання. В алгебрі L_n з операціями диз'юнкції і кон'юнкції завжди можна ввести операцію заперечення, причому в єдиний спосіб, для будь-якої розмірності n , ($n \in \{1, 2, \dots\}$).

Доведення. Нехай є алгебра L_1 . Задамо заперечення: $\bar{0} = e_1$, $\bar{e}_1 = 0$. Аксиоми 4) – 5) виконуються:

$$\begin{aligned} 0 \vee \bar{0} &= 0 \vee e_1 = e_1 = 1_1, \\ 0 \cdot \bar{0} &= 0 \cdot e_1 = 0, \\ e_1 \vee \bar{e}_1 &= e_1 \vee 0 = e_1 = 1_1, \\ e_1 \cdot \bar{e}_1 &= e_1 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

де нижній індекс при одиниці вказує на розмірність алгебри.

Перевіримо, чи встановлює бієкція $\Phi_1: S_1 \rightarrow S_1^{can}$ ізоморфізм між довільною алгеброю L_1 і канонічною алгеброю L_1^{can} .

$$\begin{aligned} \Phi_1(\bar{0}) &= \Phi_1(e_1) = e_1^{can} = \lceil 0^{can} = \lceil \Phi_1^{can}(0), \\ \Phi_1(\bar{e}_1) &= \Phi_1(0) = 0^{can} = \lceil e_1^{can} = \lceil \Phi_1^{can}(e_1). \end{aligned}$$

Ізоморфізм встановлено.

Нехай є алгебра L_{k-1} на множині S_{k-1} . Встановлено, що аксіоми 4) – 5) мають місце і $\Phi_{k-1}: S_{k-1} \rightarrow S_{k-1}^{can}$ задає ізоморфізм. Нехай $x \in S_{k-1}$, $(x, e_k) \in S_k$, де $e_k \notin S_{k-1}$, \bar{x} – заперечення в алгебрі L_{k-1} , $\bar{k}(x)$ – заперечення в алгебрі L_k . Задамо заперечення в алгебрі L_k правилами

$$\begin{aligned} \bar{k}(x) &= \bar{x} \vee (0, e_k); \\ \bar{k}(x, e_k) &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Перевіримо аксіоми 4) і 5).

$$\begin{aligned} x \vee \bar{k}(x) &= x \vee \bar{x} \vee (0, e_k) = 1_{k-1} \vee (0, e_k) = 1_k \cdot x \cdot \bar{k}(x) = \\ &= x (\bar{x} \vee (0, e_k)) = x \bar{x} \vee x (0, e_k) = 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

$$(x, e_k) \vee \bar{k}(x, e_k) = (x, e_k) \vee \bar{x} = (x \vee \bar{x}, e_k) = (1_{k-1}, e_k) = (0, e_k) \vee 1_{k-1} = 1_k.$$

$$(x, e_k) \bar{k}(x, e_k) = (x, e_k) \bar{x} = 0.$$

Отже, аксіоми 4) – 5) виконуються для $\forall y \in S_k$.

Перевіримо, чи встановлює бієкція $\Phi_k: S_k \rightarrow S_k^{can}$ ізоморфізм. Задаємо

$$\Phi_k(x) = \Phi_{k-1}(x),$$

$$\begin{aligned} \Phi_k((x, e_k)) &= \Phi_{k-1}(x) \cdot e_k^{can} \cdot \Phi_k(\bar{k}(x)) = \Phi_k(\bar{x} \vee (0, e_k)) = \Phi_k(\bar{x}) \vee \Phi_k^{can}((0, e_k)) = \\ &= \Phi_{k-1}(e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_{k-1}}) \vee e_k^{can} = e_{i_{p+1}}^{can} e_{i_{p+2}}^{can} \dots e_{i_{k-1}}^{can} \vee e_k^{can} = \\ &= \overline{k^{can}}(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}) = \overline{k^{can}} \Phi_{k-1}(x) = \overline{k^{can}} \Phi_k(x) \Phi_k(\bar{k}(x, e_k)) = \\ &= \Phi_k(\bar{x}) = \Phi_{k-1}(e_{i_{p+1}} \vee e_{i_{p+2}} \vee \dots \vee e_{i_{k-1}}) = e_{i_{p+1}}^{can} e_{i_{p+2}}^{can} \dots e_{i_{k-1}}^{can} = \\ &= \overline{k^{can}}(e_{i_1}^{can} e_{i_2}^{can} \dots e_{i_p}^{can} e_k^{can}) = \overline{k^{can}} \Phi_{k-1}(x) e_k = \overline{k^{can}} \Phi_k((x, e_k)). \end{aligned}$$

Таким чином, встановлений ізоморфізм для $\forall y \in S_k$. Отже, теорема виконується для будь-якого n , ($n \in \{1, 2, \dots\}$). **Теорему доведено.**

Таким чином, алгебра L_n з операціями диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення задовольняє усім аксіомам булевої алгебри:

$$\begin{aligned} a \vee a &= a; \\ a \vee b &= b \vee a; \\ a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c, & a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c); \\ \bar{\bar{a}} &= a; \\ \overline{a \vee b} &= \bar{a} \wedge \bar{b}, & \overline{a \wedge b} &= \bar{a} \vee \bar{b}; \\ (a \vee \bar{a}) \wedge b &= b. \end{aligned}$$

Отже, на множині S_n введено булеву алгебру з усіма притаманними їй властивостями. Роль нуля та одиниці виконують в алгебрі ідей відповідно вектори $\mathbf{0} = \mathbf{e}_0$ та $\mathbf{1} = \mathbf{e}_1 \vee \mathbf{e}_2 \vee \dots \vee \mathbf{e}_n$. Розглянемо множину N_m усіх різноманітних m -місних функцій вигляду $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, де $y, x_1, x_2, \dots, x_m \in S_n$. В силу того, що аргументи і значення цих функцій є векторами, то елементи множини N_m в подальшому будемо називати **вектор-функціями**. Виникає питання: чи можливо будь-яку вектор-функцію записати мовою щойно введеної алгебри. Виявляється, що неможливо. Це доведено теоремою про неповноту алгебри ідей.

Теорема 4.6. Формулювання. Якщо $n > 1$, то при будь-якому $m > 0$ знайдеться вектор-функція, яку неможливо подати у вигляді суперпозиції операцій заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції алгебри L_n .

З цієї теореми випливає, що для повноти алгебри ідей L_n до неї необхідно ввести, принаймні, ще одну операцію.

4.4. ДЕЯКІ МОЖЛИВІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ АЛГЕБРИ ІДЕЙ РОЗМІРНОСТІ n

1. **Алгебра множин.** В якості *носія* S_n алгебри ідей L_n при теоретико-множинній інтерпретації можна взяти систему T_n усіх підмножин множини $R_n = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ яких-небудь символів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. У ролі елементів множини S_n виступають підмножини системи T_n . Роль *нульової ідеї* алгебри L_n відіграє порожня множина \emptyset . У ролі *базисних ідей* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ в алгебрі множин виступають одноелементні множини $\{\mathbf{a}_1\}, \{\mathbf{a}_2\}, \dots, \{\mathbf{a}_n\}$. Під *елементом* $\mathbf{e}_{i_1} \vee \mathbf{e}_{i_2} \vee \dots \vee \mathbf{e}_{i_p}$ в алгебрі множин розуміється множина $\{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_p}\}$. Роль операції *диз'юнкції ідей* в алгебрі множин виконує операція об'єднання множин. Операції *кон'юнкції ідей* відповідає операція перетину множин [45]. Легко перевірити, що всі аксіоми алгебри ідей L_n в алгебрі множин виконуються.

2. **Алгебра двійкових наборів.** У ролі *ідей* алгебри L_n при двійково-кодівій інтерпретації беремо n -компонентні набори $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ двійкових цифр $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. У ролі *носія* S_n алгебри L_n в алгебрі двійкових кодів приймаємо n -й декартовий ступінь множини $\{0, 1\}$. *Нульовою ідеєю* алгебри L_n при такій інтерпретації служить набір $(0, 0, \dots, 0)$, складений із самих нулів. У ролі *базисних ідей* використовуються всілякі двійкові набори, до складу яких входить по одній одиниці: $(1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, \dots , $(0, 0, 0, \dots, 0, 1)$. Під

елементом $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ в алгебрі двійкових наборів мається на увазі набір, у якого на i_1, i_2, \dots, i_p -х місцях розташовані одиниці, а на решті місць – нулі. Диз'юнкція ідей при двійково-кодовій інтерпретації визначається як покомпонентна диз'юнкція двійкових наборів:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \vee (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2, \dots, \alpha_n \vee \beta_n).$$

Кон'юнкція ідей визначається як покомпонентна кон'юнкція двійкових наборів [2]:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_2, \dots, \alpha_n \wedge \beta_n),$$

де $\alpha_i \wedge \beta_i = 1$, якщо $\alpha_i = \beta_i = 1$, і $\alpha_i \wedge \beta_i = 0$ в решті випадках. Неважко переконатися, що всі аксіоми алгебри ідей L_n в алгебрі n -компонентних двійкових наборів виконуються.

Між алгеброю множин і алгеброю двійкових наборів існує наступний взаємо-однозначний зв'язок. Нехай A – довільно обраний елемент алгебри множин, а $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – відповідний йому елемент алгебри двійкових наборів. Тоді: якщо $a_i \in A$, то $\alpha_i = 1$; якщо $a_i \notin A$, то $\alpha_i = 0$. І зворотно: якщо $\alpha_i = 1$, то $a_i \in A$; якщо $\alpha_i = 0$, то $a_i \notin A$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Наприклад, елементові $\{a_2, a_3, a_5\}$ шестивимірної алгебри множин відповідає елемент $(0, 1, 1, 0, 1, 0)$ шестивимірної алгебри двійкових наборів. Елементові $(1, 0, 0, 0, 1, 1)$ алгебри двійкових наборів відповідає елемент $\{a_1, a_5, a_6\}$ алгебри множин.

3. Алгебра одномісних предикатів першого порядку. Ідеями в n -мірній алгебрі одномісних предикатів першого порядку служать усілякі предикати $P(x)$, задані на множині $R_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ букв a_1, a_2, \dots, a_n . Нульовою ідеєю тут служить тотожно хибний предикат. У ролі базисних ідей використовуються предикати впізнання букв $x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}$, що звертаються в одиницю відповідно при $x = a_1, x = a_2, \dots, x = a_n$ і в нуль – при інших значеннях змінної x . Ідеєю $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \dots \vee e_{i_p}$ в алгебрі одномісних предикатів першого порядку є предикат $P(x)$, що обертається в одиницю при $x \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}$ і в нуль – при всіх інших значеннях змінної x . Роль диз'юнкцій ідей виконує операція диз'юнкції предикатів, а роль кон'юнкції ідей – операція кон'юнкції предикатів. Аксіоми 1) – 5) в алгебрі одномісних предикатів першого порядку виконуються. Усього існує 2^n одномісних предикатів першого порядку.

Між алгеброю множин і алгеброю двійкових наборів, з одного боку, і алгеброю одномісних предикатів першого порядку, з іншого, мають місце наступні зв'язки. Нехай $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}\}$ – довільно обраний елемент алгебри множин. Йому взаємо-однозначно відповідає елемент $x^{a_{i_1}} \vee x^{a_{i_2}} \vee \dots \vee x^{a_{i_p}}$ алгебри одномісних предикатів першого порядку. Нульовому елементові \emptyset алгебри множин відповідає тотожно хибний предикат 0 . Елементові $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ алгебри двійкових наборів взаємо-однозначно відповідає елемент $\alpha_1 x^{a_1} \vee \alpha_2 x^{a_2} \vee \dots \vee \alpha_n x^{a_n}$ алгебри одномісних предикатів.

4. Алгебра багатомісних предикатів першого порядку. Розглянемо множину N усіляких предикатів вигляду $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$, заданих на декартовому добутку $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$ множин $M_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n_i}}\}$, де $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Множина N приймається в ролі носія алгебри ідей L_n . Усього в області M існує $n = n_1 n_2 \dots n_m$ наборів. У множині N міститься усього $2^{n_1 n_2 \dots n_m}$ предикатів. Розмірністю алгебри багатомісних предикатів першого порядку служать число n . Диз'юнкцією ідей в алгебрі багатомісних предикатів першого порядку служать операція диз'юнкції предикатів, а кон'юнкцією ідей –

кон'юнкція предикатів. Нульовою ідеєю служить предикат $\mathbf{0}$, що тотожно дорівнює нулю. В алгебрі багатомісних предикатів першого порядку існує n базисних ідей. У їхній ролі виступають усілякі предикати P_j ($j = 1, 2, \dots, n$), що обертаються в одиницю на єдиному наборі значень аргументів (S_1, S_2, \dots, S_m) :

$$P_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } (x_1, x_2, \dots, x_m) = (S_1, S_2, \dots, S_m), \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } (x_1, x_2, \dots, x_m) \neq (S_1, S_2, \dots, S_m). \end{cases}$$

Неважко перевірити, що всі аксіоми алгебри ідей розмірності n в алгебрі багатомісних предикатів першого порядку виконуються.

У теоретико-множинній інтерпретації алгебрі багатомісних предикатів першого порядку відповідає алгебра всіх підмножин декартового добутку $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$. Якщо P та (S_1, S_2, \dots, S_m) – відповідні один одному елементи алгебри багатомісних предикатів першого порядку та алгебри підмножин декартового добутку $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$, то взаємо-однозначний зв'язок між ними визначається правилом $P(S_1, S_2, \dots, S_m) = \mathbf{1}$ у тому й лише у тому випадку, коли $(S_1, S_2, \dots, S_m) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_m$. У двійково-кодovій інтерпретації алгебрі багатомісних предикатів першого порядку відповідає алгебра двійкових кодів довжини $n = n_1 n_2 \dots n_m$. Зв'язок між багатомісним предикатом першого порядку і відповідним йому двійковим кодом довжини n може бути встановлений в наступний спосіб. Двійковому кодові $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ взаємо-однозначно відповідає предикат

$$P_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = \bigvee_{(S_1, S_2, \dots, S_m)} \alpha_i x_1^{S_1} x_2^{S_2} \dots x_m^{S_m},$$

де i – номер набору (S_1, S_2, \dots, S_m) .

5. Алгебра предикатів довільного порядку. У ній роль ідей алгебри L_n виконують усілякі предикати p -го порядку вигляду

$$f = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m_0}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, \dots, x_{p-1,m_{p-1}}),$$

задані на декартовому добутку $M_0^{m_0} \times M_1^{m_1} \times \dots \times M_{p-1}^{m_{p-1}}$. Множину M_i ($i = 1, 2, \dots, p-1$) утворено з усіх предикатів i -го порядку. Алгебра предикатів p -го порядку має розмірність $n = 2^{n_0 n_1 \dots n_{p-1}}$. Числа n_1, n_2, \dots, n_{p-1} визначаються за наступною рекурентною формулою

$$n_i = 2^{n_0 n_1 \dots n_{i-1}},$$

де n_0 – кількість елементів у множині M_0 . В решті аспектів алгебра предикатів довільного порядку розглядається аналогічно алгебрі багатомісних предикатів першого порядку.

6. Алгебра булевих функцій. До алгебри булевих функцій приходимо, приймаючи в алгебрі ідей L_n у ролі носія S_n множину усіх m -місних булевих функцій. Розмірністю алгебри ідей у цьому випадку служить число $n = 2^m$. Усього в множині S_n міститься 2^{2^m} векторів. Нульовою ідеєю служить m -місна булева функція, що тотожно дорівнює нулю. У ролі базисних ідей виступають усілякі булеві функції, що обертаються в одиницю лише на одному наборі значень аргументів. Усього в алгебрі m -місних булевих функцій є 2^m різних базисних ідей. У ролі операції диз'юнкції ідей у даному випадку виступає операція диз'юнкції m -місних булевих функцій, а у ролі кон'юнкції ідей – операція кон'юнкції m -місних булевих функцій. При $n = 1$ отримуємо алгебру логіки. У цьому випадку в ролі операції диз'юнкції ідей виступає

диз'юнкція двійкових знаків $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$, у ролі кон'юнкції ідей – кон'юнкція двійкових знаків $1 \wedge 1 = 1$, $0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$. Нульовою ідеєю служить знак 0 , єдиною базисною ідеєю – знак 1 .

4.5. Контрольні запитання

1. Яка алгебра використовується у ролі прототипу алгебри ідей?
2. В який спосіб будується алгебра ідей?
3. В чому полягає суть описаного в розділі експерименту?
4. Як будуються формули алгебри ідей L_n ?
5. Наведіть приклади утворення формул алгебри ідей.
6. Які формули називають стандартними формами ідей? Сформулюйте теорему про стандартну форму.
7. Що називається ядром ненульової і ядром нульової стандартної форми A ?
8. Сформулюйте теорему про ізоморфізм алгебр ідей. До чого зводиться зміст цієї теореми?
9. Як визначаються операції кон'юнкції та заперечення в алгебрі ідей?
10. Які властивості притаманні цим операціям в алгебрі ідей?
11. Чи є повною описана алгебра ідей?
12. Наведіть приклади можливих інтерпретацій алгебри ідей розмірності n .

5. ВЕКТОРНА ЛОГІЧНА АЛГЕБРА

5.1 МАТРИЧНЕ ПОДАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЛОГІЧНОГО ПОЛЯ

5.1.1. Поле логічних скалярів та його можлива графічна інтерпретація

Логічним полем [10] називається непорожня множина елементів G (логічних скалярів), на якій визначені операції диз'юнкції $\alpha \vee \beta$, кон'юнкції $\alpha \wedge \beta = \alpha \beta$ і заперечення $\neg \alpha = \bar{\alpha}$. Ці операції підкоряються наступним законам:

ідемпотентності

$$\alpha \vee \alpha = \alpha, \quad \alpha \alpha = \alpha;$$

комутативності

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \quad \alpha \beta = \beta \alpha;$$

асоціативності

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma), \quad (\alpha \beta) \gamma = \alpha (\beta \gamma);$$

дистрибутивності

$$(\alpha \vee \beta) \gamma = \alpha \gamma \vee \beta \gamma, \quad \alpha \beta \vee \gamma = (\alpha \vee \gamma) (\beta \vee \gamma);$$

елімінації

$$\alpha \vee \alpha \beta = \alpha, \quad \alpha (\alpha \vee \beta) = \alpha;$$

згортання

$$\alpha \vee \beta \bar{\beta} = \alpha, \quad \alpha (\beta \vee \bar{\beta}) = \alpha;$$

де Моргана

$$\overline{\alpha \vee \beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \vee \bar{\beta};$$

виключення третього

$$\alpha \vee \bar{\alpha} = 1.$$

закони нуля: існує єдиний елемент 0 , для якого

$$\alpha \vee 0 = \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0;$$

закони одиниці: існує єдиний елемент 1 , для якого

$$\alpha \vee 1 = 1, \quad \alpha \cdot 1 = \alpha;$$

протиріччя

$$\alpha \bar{\alpha} = 0;$$

заперечення нуля

$$\bar{0} = 1;$$

заперечення одиниці

$$\bar{1} = 0.$$

Елемент **0** при цьому називається **логічним нулем**, елемент **1** – **логічною одиницею**. Перелічені закони називаються **аксіомами логічного поля**, вони виконуються для будь-яких $\alpha, \beta \in G$. **Прикладами** логічних полів можуть служити:

- 1) алгебра логіки: $G = \{0, 1\}$, \vee – диз'юнкція, \wedge – кон'юнкція, \neg – заперечення на G ;
- 2) алгебра множин: G – система всіх підмножин деякого універсуму U , \vee – об'єднання множин, \wedge – перетин множин, \neg – доповнення множини, 0 – порожня множина \emptyset , 1 – універсум U ;
- 3) алгебра предикатів [1];
- 4) алгебра предикатних операцій [7].

Розглянемо випадок алгебри предикатів. Будь-який скінченний n -місний предикат, заданий на декартовій множині $K = K_1 \times \dots \times K_n$, $|K_i| = k_i$ символів, можна подати як елемент якогось поля логічних скалярів. Кожен елемент такого поля подається гіперкубом розмірності n . **Наприклад**, розглянемо тримісний предикат $R(x, y, z)$ над декартовим добутком $K^3 = \{0, 1\}^3$, тобто $k_1 = k_2 = k_3 = k = 2$. Графічно його можна зобразити, як це показано на рис. 5.1в, де кожній вершині відповідає значення предиката при утворюючих цю вершину значеннях аргументів x, y, z [47, 48].

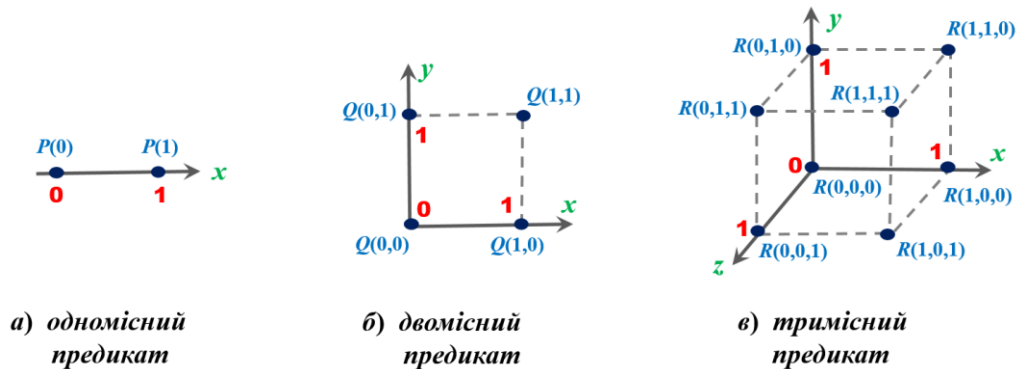


Рис. 5.1. Графічне подання предикатних логічних скалярів

В ролі одиничного елемента поля скалярів виступає предикат, що дорівнює одиниці при всіх значеннях наборів аргументів, а у ролі нульового елемента поля скалярів – предикат, що дорівнює нулю при всіх значеннях наборів аргументів. Графічно одиничний елемент поданий у вигляді гіперкуба, всім вершинам якого відповідають одиниці (рис. 5.2а), а нульовий – гіперкубом, всім вершинам якого відповідають нулі (рис. 5.2б) [48].

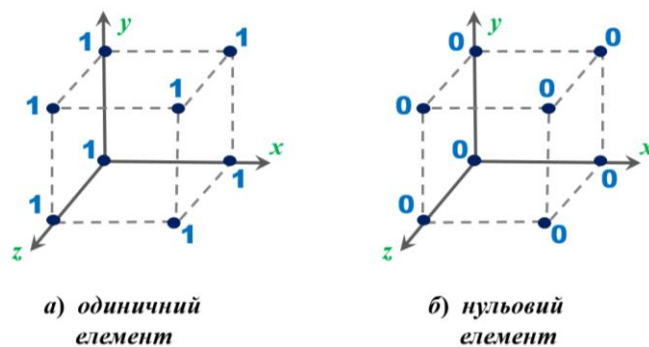


Рис. 5.2. Графічне подання одиничного та нульового елементів поля логічних скалярів для випадку тримісних предикатів

Відповідно до визначень предикатних операцій [1, 6, 11], всі дії над такими елементами поля логічних скалярів виконуються порозрядно. Під **розрядом** розуміється значення розглянутого предиката на одному з можливих наборів значень аргументів. Таким чином, бінарні операції (диз'юнкція та кон'юнкція) припускають, що їхнім результатом буде елемент, кожному розряду якого відповідає значення виконаної бінарної операції над однойменними розрядами предикатів, що беруть участь в операції. Під **однойменними розрядами** розуміються значення цих предикатів від однакових наборів аргументів. Операція заперечення також проводиться порозрядно. Ці операції будуть обчислюватися за наступними правилами [48]:

$$(P_i \vee P_j)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee P_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(P_i \wedge P_j)(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge P_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\overline{P_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Графічно операцію диз'юнкції подано на рис. 5.3,

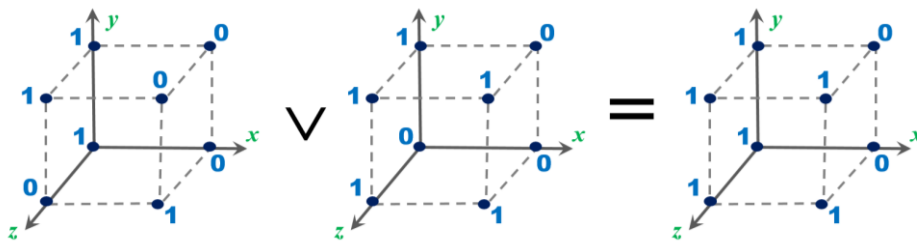


Рис. 5.3. Графічне подання диз'юнкції логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

операцію кон'юнкції – на рис. 5.4,

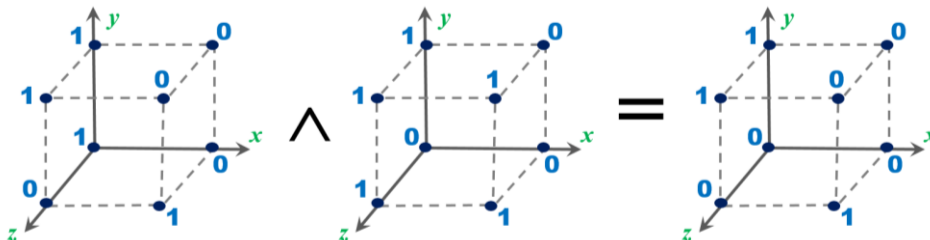


Рис. 5.4. Графічне подання кон'юнкції логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

і заперечення – на рис. 5.5 [47].

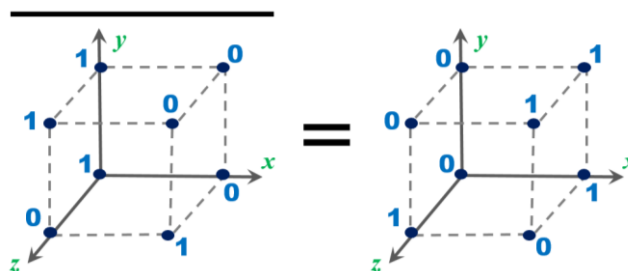


Рис. 5.5. Графічне подання заперечення логічних скалярів у випадку тримісних предикатів

5.1.2. *Поняття логічної матриці*

Позначимо через G множину логічних скалярів. Довільна система елементів множини G , подана у вигляді прямокутної таблиці, що містить r рядків та s стовпців, називається логічною (r, s) -матрицею над G або просто **логічною матрицею**. Щоб записати матрицю, виписуються позначення її елементів, а потім отримана таблиця береться в дужки або обмежується подвійними рисами [12].

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{array} \right\|.$$

Логічна матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається **квадратною**. Для квадратної логічної матриці кількість її рядків (або стовпців) називається **порядком квадратної логічної матриці**. Квадратна логічна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а інші елементи – нулю, називається **одичною логічною матрицею** та позначається символом E . Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою логічною матрицею** та позначається символом O . Логічні матриці називаються **рівними**, якщо кількості рядків і стовпців у них відповідно є рівними та якщо логічні скаляри, що розташовані на відповідних місцях цих матриць, також дорівнюють один одному. Таким чином, одна рівність між двома (r, s) -матрицями рівносильна системі rs рівностей між їхніми елементами. Логічна матриця, що складається лише з одного рядка, називається **логічним рядком**, а кількість її елементів – **довжиною рядка**. Логічна матриця, що складається лише з одного стовпця, називається **логічним стовпцем**, а кількість його елементів – **висотою стовпця**.

5.1.3. *Операції над логічними матрицями*

Основними операціями над логічними матрицями є логічний добуток скаляра на матрицю або матриці на скаляр, диз'юнкція, кон'юнкція двох матриць, заперечення матриць, добуток логічних матриць. Щоб помножити логічний скаляр α на логічну матрицю A , необхідно помножити на α всі елементи матриці A :

$$\alpha \wedge A = \alpha \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \wedge a_{11} & \alpha \wedge a_{12} & \dots & \alpha \wedge a_{1s} \\ \alpha \wedge a_{21} & \alpha \wedge a_{22} & \dots & \alpha \wedge a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \wedge a_{r1} & \alpha \wedge a_{r2} & \dots & \alpha \wedge a_{rs} \end{pmatrix},$$

$$A \wedge \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \wedge \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \wedge \alpha & a_{12} \wedge \alpha & \dots & a_{1s} \wedge \alpha \\ a_{21} \wedge \alpha & a_{22} \wedge \alpha & \dots & a_{2s} \wedge \alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \wedge \alpha & a_{r2} \wedge \alpha & \dots & a_{rs} \wedge \alpha \end{pmatrix}.$$

Наприклад, в якості поля логічних скалярів візьмемо множину одномісних предикатів $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, де $x \in \{0, 1\}$. Цю множину задано таблицею 5.1.

Таблиця 5.1

Множина одномісних предикатів, заданих на алфавіті $K=\{0, 1\}$

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Далі одномісні предикати подаються рядками $P = (P(0), P(1))$. Тоді $P_0=(0,0)$, $P_1=(0,1)$, $P_2=(1,0)$, $P_3=(1,1)$. Позначимо це скалярне поле через P . Тоді, наприклад,

$$\begin{aligned}
 P_1 \wedge \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} &= (0,1) \wedge \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (0,1) \wedge (0,1) & (0,1) \wedge (1,0) & (0,1) \wedge (0,1) \\ (0,1) \wedge (0,0) & (0,1) \wedge (1,1) & (0,1) \wedge (0,1) \\ (0,1) \wedge (1,0) & (0,1) \wedge (0,0) & (0,1) \wedge (1,1) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,1) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

В силу того, що для логічного поля має місце аксіома комутативності [10], є справедливою рівність $\alpha A = A \alpha$. Для будь-якої логічної матриці над G і для будь-яких логічних скалярів $\alpha, \beta \in G$ мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 1 \wedge A &= A, \\
 0 \wedge A &= O, \\
 \alpha \wedge O &= O, \\
 \alpha (\beta \wedge A) &= (\alpha\beta) \wedge A.
 \end{aligned}$$

Диз'юнкцією двох логічних матриць A і B над скалярним полем G , що мають відповідно рівну кількість рядків та стовпців, називається матриця, що має ту ж саму кількість рядків та стовпців, і елементи якої дорівнюють диз'юнкціям відповідних елементів матриць A і B :

$$\begin{aligned}
 C = A \vee B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \vee b_{11} & a_{12} \vee b_{12} & \dots & a_{1s} \vee b_{1s} \\ a_{21} \vee b_{21} & a_{22} \vee b_{22} & \dots & a_{2s} \vee b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \vee b_{r1} & a_{r2} \vee b_{r2} & \dots & a_{rs} \vee b_{rs} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Наприклад, якщо розглянути дві матриці над скалярним полем одномісних предикатів

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

то їх диз'юнкцією буде матриця

$$\begin{aligned}
 C = A \vee B &= \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 1) \\ (1, 0) & (0, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 1) & (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 1) & (1, 0) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 1) & (1, 1) & (1, 1) \\ (1, 0) & (0, 1) & (1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

З означення диз'юнкції логічних матриць випливають наступні співвідношення:

комутативність диз'юнкції матриць

$$A \vee B = B \vee A;$$

асоціативність диз'юнкції матриць

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C;$$

дистрибутивність диз'юнкції матриць щодо добутку на скаляр

$$\alpha (A \vee B) = \alpha A \vee \alpha B;$$

дистрибутивність добутку матриці на скаляр щодо диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta) A = \alpha A \vee \beta A;$$

закон нуля

$$A \vee O = O \vee A = A;$$

закон ідемпотентності диз'юнкції матриць

$$A \vee A = A.$$

Кон'юнкцією двох логічних матриць A і B над скалярним полем G , що мають відповідно рівну кількість рядків та стовпців, називається така логічна матриця над G , що має таку ж саму кількість рядків та стовпців, і елементи якої дорівнюють кон'юнкціям відповідних елементів матриць A і B :

$$\begin{aligned}
 C = A \wedge B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \wedge b_{11} & a_{12} \wedge b_{12} & \dots & a_{1s} \wedge b_{1s} \\ a_{21} \wedge b_{21} & a_{22} \wedge b_{22} & \dots & a_{2s} \wedge b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} \wedge b_{r1} & a_{r2} \wedge b_{r2} & \dots & a_{rs} \wedge b_{rs} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для наведених вище матриць A і B їх кон'юнкцією буде матриця

$$C = A \wedge B = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Для кон'юнкції матриць виконуються наступні співвідношення:

комутативність кон'юнкції матриць

$$A \wedge B = B \wedge A;$$

асоціативність кон'юнкції матриць

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C);$$

асоціативність кон'юнкції матриць щодо добутку на скаляр

$$\alpha (A \wedge B) = (\alpha A) \wedge B;$$

дистрибутивність

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C);$$

елімінації

$$A \vee (A \wedge B) = A, \quad A \wedge (A \vee B) = A;$$

ідемпотентність кон'юнкції матриць

$$A \wedge A = A;$$

закон нуля

$$A \wedge O = O.$$

Запереченням матриці \bar{A} називається матриця, елементи якої дорівнюють \bar{a}_{ij} , тобто

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1s} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{r1} & \bar{a}_{r2} & \dots & \bar{a}_{rs} \end{pmatrix}.$$

Для наведеної вище матриці A її запереченням буде наступна матриця:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 & \bar{P}_1 \\ \bar{P}_0 & \bar{P}_3 & \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 & \bar{P}_0 & \bar{P}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для заперечення матриць виконуються наступні рівності:

закон протиріччя

$$A \wedge \bar{A} = \mathbf{0};$$

закон подвійного заперечення

$$\bar{\bar{A}} = A;$$

закон виключення третього

$$A \vee \bar{A} = \mathbf{1};$$

закони згортання

$$A \vee (B \wedge \bar{B}) = A, \quad A \wedge (B \vee \bar{B}) = A;$$

закони де Моргана

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}, \quad \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

На відміну від перелічених вище операцій з матрицями, операція логічного добутку однієї логічної матриці на іншу визначається трохи складніше. Нехай є дві логічні матриці A і B , причому кількість стовпців першої з них збігається з кількістю рядків другої. Тільки за цієї умови операція добутку однієї логічної матриці на іншу має сенс. У протилежному випадку її виконати неможливо. **Правило добутку логічних матриць**: щоб отримати елемент, що розташований в i -тому рядку та j -тому стовпці матриці, отриманої в результаті добутку, потрібно виконати кон'юнкцію елементів i -того рядка першої матриці з відповідними елементами j -го стовпця другої матриці і з отриманими результатами виконати диз'юнкцію. Тобто, якщо в нас матриці $A = \|a_{ij}\|_{r \times s}$ і $B = \|b_{ij}\|_{s \times t}$, то елементи матриці $C = A B$ будуть визначатися за формулою

$$c_{if} = a_{i1}b_{1f} \vee a_{i2}b_{2f} \vee \dots \vee a_{is}b_{sf},$$

де $i = \overline{1, r}, f = \overline{1, t}, j = \overline{1, s}$.

Наприклад, для булевих матриць [13, 14],

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 1 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Добуток двох матриць в загальному випадку не є комутативним. Він залежить від порядку множників. Якщо в наведеному прикладі ми поміняємо порядок матриць, для яких виконується добуток, то результат буде іншим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 1 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Якщо розглядати матриці не квадратні, то може трапитися так, що в одному порядку операція їхнього добутку має сенс, а у зворотному – ні. Розглянемо тепер основні властивості добутку матриць:

$$\alpha \wedge (A B) = (\alpha \wedge A) B, \quad (5.1)$$

$$A (\alpha \wedge B) = (A \wedge \alpha) B, \quad (5.2)$$

$$(A B) \wedge \alpha = A (B \wedge \alpha). \quad (5.3)$$

$$(A \vee B) C = A C \vee B C, \quad (5.4)$$

$$C (A \vee B) = C A \vee C B. \quad (5.5)$$

Із властивостей (5.4 – 5.5) безпосередньо випливає наступне правило: щоб помножити диз'юнкцію логічних матриць на диз'юнкцію, необхідно кожену матрицю першої диз'юнкції помножити на кожену матрицю другої і для отриманих результатів виконати диз'юнкцію. Для добутку логічних матриць виконується властивість асоціативності:

$$A (B C) = (A B) C. \quad (5.6)$$

В силу того, що операції диз'юнкції, кон'юнкції та добутку можна застосовувати не до будь-яких матриць, а тільки до тих, кількість рядків і стовпців яких задовольняє зазначеним вище умовам, співвідношення (5.4 – 5.6) слід розуміти таким чином, що якщо дії, зазначені по один бік від знаку рівності, мають сенс, то також мають сенс і дії, зазначені по інший його бік, а результати в обох випадках збігаються. Сукупність елементів $a_{ii}, i = \overline{1, n}$ квадратної логічної матриці A називається її головною діагоналлю [15, 16]. Елементи, що належать головній діагоналі, називаються діагональними, а решта елементи матриці – позадіагональними. Квадратна логічна матриця називається діагональною, якщо всі її позадіагональні елементи дорівнюють нулю. Розглянемо довільну логічну матрицю A . Якщо в ній виконати заміну рядків стовпцями, то отримана матриця буде називатися транспонованою стосовно A і позначатися символом A^T :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1s} & a_{2s} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

Для довільних логічних матриць A і B та логічних скалярів α і β мають місце наступні правила транспонування:

$$((\alpha \wedge A) \vee (\beta \wedge B))^T = (\alpha \wedge A^T) \vee (\beta \wedge B^T), \quad (5.8)$$

$$\overline{A^T} = \overline{A}^T, \quad (5.9)$$

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (5.10)$$

$$((\alpha \wedge A) \wedge (\beta \wedge B))^T = (\alpha \wedge A^T) \wedge (\beta \wedge B^T). \quad (5.11)$$

Нехай A – довільна квадратна матриця над полем G . Тоді якщо виконується співвідношення $A^T = A$, то така матриця називається симетричною [17]. Із правил транспонування диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення матриць безпосередньо випливає, що диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення симетричних матриць є матрицями симетричними. Результат добутку симетричних матриць в загальному випадку може й не бути симетричною матрицею. Довільна квадратна логічна матриця A над скалярним полем G називається

оборотною, якщо існує квадратна матриця B над G , що задовольняє наступному співвідношенню:

$$A B = B A = E. \quad (5.12)$$

Якщо деяка матриця B задовольняє цьому співвідношенню, то вона називається **матрицею, зворотною до A** , або **обертанням матриці A** . Якщо матриця A є оборотною, то існує лише єдине її обертання. Якщо обертання матриці A існує, то воно позначається символом A^{-1} . Таким чином,

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E. \quad (5.13)$$

В умову (5.12) матриці A і B входять симетрично. У силу цього, якщо для A зворотною є матриця B , то для B зворотною є матриця A . Іншими словами, $(A^{-1})^{-1} = A$. Якщо для квадратних матриць D, F, H одного порядку існує обертання, то результат їхнього логічного добутку також є оборотним, причому:

$$(D F H)^{-1} = H^{-1} F^{-1} D^{-1}.$$

Логічні матриці над G , для яких виконується умова $A B = B A$, називаються **комутуючими** або **перестановочними**. Якщо матриці A і B є оборотними та перестановочними, то

$$(A B)^T = A^T B^T.$$

Розглянемо зв'язок операцій транспонування та обертання. Застосовуючи правило транспонування результату добутку логічних матриць (5.10) до співвідношень (5.13), отримуємо:

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = E,$$

тобто результат транспонування оборотної логічної матриці A є також оборотною логічною матрицею: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Квадратну логічну матрицю A називають **ортогональною**, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка та диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку та кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю. Наприклад, логічна матриця A над полем P одномісних предикатів

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) \end{pmatrix}$$

є ортогональною, а матриця

$$B = \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 1) & (1, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) & (0, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix} -$$

ні, тому що, наприклад,

$$a_{12} \wedge a_{13} = P_3 \wedge P_2 = (1, 1) \wedge (1, 0) = (1, 0) \neq 0.$$

Теорема 5.1. *Формулювання.* Щоб для квадратних логічних матриць A і B над полем логічних скалярів $G = \{0, 1\}$ або полем скінченних предикатів довільної арності виконувалася

рівність $AB = E$, необхідно та достатньо, щоб A і B були ортогональними матрицями та підкорялися умові $B = A^T$ [18, 48].

Доведення. Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля, над яким задані матриці A і B , деякий індекс $v = 1, \dots, (k_1 k_2 \dots k_n)$, де n – арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а $k_i, i=1, n$, – кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент x_i цих предикатів. Таким чином, матриці A і B розпадаються на $(k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n)$ матриць над булевою множиною $G=\{0, 1\}$

$$A^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & \dots & a_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}^v & \dots & a_{ss}^v \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B^v = \begin{pmatrix} b_{11}^v & \dots & b_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1}^v & \dots & b_{ss}^v \end{pmatrix},$$

складених з v -тих розрядів елементів матриць A і B . Отже, якщо твердження є справедливим для матриць над булевым полем скалярів $G=\{0, 1\}$, то воно також є справедливим і для матриць, елементами яких є предикати довільної арності. У силу цього досить довести твердження для випадку скалярного поля $G=\{0, 1\}$ [18]. Нехай розмірність матриць A^v і B^v складає $s \times s$. Виберемо довільно ціле число $t, 1 \leq t \leq s$. Якщо t -тий рядок матриці A^v є нульовим, то і t -тий рядок матриці $(AB)^v$ також буде нульовим. Тому в кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, і цій одиниці відповідає деяка одиниця в матриці B^v (нехай це буде елемент $a_{tj}^v = 1$, якому відповідає елемент b_{jt}^v). При $f \neq t$ ($1 \leq f \leq s$) маємо $a_{fj}^v = 0$, тому що інакше $(AB)_{ft}^v = a_{fj}^v b_{jt}^v = 1$, тобто $(AB)^v \neq E$. Аналогічно, у матриці B^v всі елементи рядка j , за винятком b_{jt}^v , дорівнюють нулю. Таким чином, у кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, причому всі ці одиниці розташовані в різних стовпцях. Тому матриця A^v є ортогональною. Аналогічно, ортогональною є і матриця B^v . Рівність $B^v = (A^v)^T$ тепер є очевидною (кожному елементу $a_{tj}^v = 1$ відповідає $b_{jt}^v = 1$). **Теорему доведено.**

Розглянемо в якості прикладу наведену вище ортогональну матрицю A . Згідно з щойно доведеною теоремою, зворотною до неї буде її транспонована матриця A^T :

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (1, 1) \\ (1, 0) & (0, 1) & (0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, що матриця A^T також є ортогональною. Обчислимо тепер добуток ортогональної матриці A на її транспоновану матрицю:

$$\begin{aligned} A A^T &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) & (1, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (1, 1) \\ (1, 0) & (0, 1) & (0, 0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (0, 1) \wedge (0, 1) \vee (0, 0) \wedge (0, 0) \vee (1, 0) \wedge (1, 0) \\ (1, 0) \wedge (0, 1) \vee (0, 0) \wedge (0, 0) \vee (0, 1) \wedge (1, 0) \\ (0, 0) \wedge (0, 1) \vee (1, 1) \wedge (0, 0) \vee (0, 0) \wedge (1, 0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(1,0) \vee (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \\ (1,0)\wedge(1,0) \vee (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \\ (0,0)\wedge(1,0) \vee (1,1)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(0,1) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(1,1) \vee (1,0)\wedge(0,0) \\ (1,0)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(1,1) \vee (0,1)\wedge(0,0) \\ (0,0)\wedge(0,0) \vee (1,1)\wedge(1,1) \vee (0,0)\wedge(0,0) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_0 & P_0 \\ P_0 & P_3 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} = E.
\end{aligned}$$

Для наведеної вище матриці B операцію обертання виконати неможливо, тобто для цієї матриці не існує зворотної до неї матриці. З цього випливає, що наведене правило обчислення зворотної матриці для матриці B не виконується:

$$\begin{aligned}
B B^T &= \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}^T = \\
&= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}^T = \\
&= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(0,1) \vee (1,1)\wedge(1,1) \vee (1,0)\wedge(1,0) \\ (0,0)\wedge(0,1) \vee (0,1)\wedge(1,1) \vee (0,0)\wedge(1,0) \\ (1,0)\wedge(0,1) \vee (0,0)\wedge(1,1) \vee (0,1)\wedge(1,0) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(0,0) \vee (1,1)\wedge(0,1) \vee (1,0)\wedge(0,0) \\ (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \vee (0,0)\wedge(0,0) \\ (1,0)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(0,1) \vee (0,1)\wedge(0,0) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} (0,1)\wedge(1,0) \vee (1,1)\wedge(0,0) \vee (1,0)\wedge(0,1) \\ (0,0)\wedge(1,0) \vee (0,1)\wedge(0,0) \vee (0,0)\wedge(0,1) \\ (1,0)\wedge(1,0) \vee (0,0)\wedge(0,0) \vee (0,1)\wedge(0,1) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & P_0 \\ P_1 & P_1 & P_0 \\ P_0 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \neq E.
\end{aligned}$$

Теорема 5.2. Формулювання. Результат добутку довільної логічної матриці на її транспоновану матрицю є матрицею симетричною [18].

Доведення. Нехай є логічна матриця A та її транспонована матриця A^T . Тоді

$$(A A^T)^T = (A^T)^T A^T = A A^T,$$

тому що $(A^T)^T = A$. Теорему доведено.

5.2 БУЛЕВА ТА ПРЕДИКАТНА МОДЕЛІ ВЕКТОРНИХ ЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ

5.2.1. Поняття векторного логічного простору. Можлива його графічна інтерпретація

Довільна непорожня множина елементів L називається **векторним логічним простором** над деяким логічним полем скалярів G [10], якщо виконуються наступні умови:

- а) задане правило, відповідно до якого для будь-якої пари елементів (**логічних векторів**) $l, g \in L$ в L міститься новий елемент, що називається **диз'юнкцією** $l \vee g$ векторів l і g ;
- б) задане правило, відповідно до якого для будь-якого числа (логічного скаляра) $\alpha \in G$ і будь-якого елемента (логічного вектору) $l \in L$ в L міститься новий елемент, що називається **добутком** αl скаляра α на вектор l ;
- в) операції диз'юнкції та добутку скаляра на вектор задовольняють наступним законам:

ідемпотентності диз'юнкції векторів

$$l \vee l = l;$$

комутативності диз'юнкції векторів

$$l \vee g = g \vee l;$$

асоціативності диз'юнкції векторів

$$(l \vee g) \vee h = l \vee (g \vee h);$$

асоціативності відносно кон'юнкції скалярів

$$\alpha (\beta l) = (\alpha \beta) l;$$

дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta) l = \alpha l \vee \beta l;$$

дистрибутивності щодо диз'юнкції векторів

$$\alpha (l \vee g) = \alpha l \vee \alpha g;$$

нуля існує єдиний нульовий вектор $\vec{0} \in L$ такий, що для будь-якого $l \in L$

$$\vec{0} \vee l = l, \quad \vec{0} \wedge l = \vec{0};$$

одиниці існує єдиний одиничний вектор $\vec{1} \in L$ такий, що для будь-якого $l \in L$

$$\vec{1} \vee l = \vec{1}, \quad \vec{1} \wedge l = l.$$

Перелічені закони називаються **аксіомами логічного простору** та виконуються для будь-яких $l, g, h \in L, \alpha, \beta \in G$. З аксіом випливає наступна тотожність: для кожного $\alpha \in G$

$$\alpha \wedge \vec{0} = \vec{0}.$$

Будемо розглядати два види векторних логічних просторів. Візьмемо в якості поля логічних скалярів множину $G = \{0, 1\}$. В якості логічних векторів розглянемо множину конститuent одиниці по m змінним [19]. Такий логічний простір будемо називати **булевым**. У

той же час, систему всіх скінченних предикатів арності m , заданих на декартовому добутку $K = K_1 \times \dots \times K_m$, $|K_i| = k_i$, можна розглядати як логічний простір. Множина K_i є алфавітом, на якому заданий аргумент x_i розглянутих предикатів. Полем логічних скалярів для такого простору може бути будь-яка система всіх скінченних предикатів арності $n < m$. Однак алфавітами і для аргументів предикатів поля скалярів, і для аргументів предикатів множини векторів такого логічного простору мають виступати ті ж самі множини. Побудований в такий спосіб простір називається **предикатним логічним простором** або **простором m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів** [20]. Визначимо операції над елементами такого простору. Диз'юнкція векторів такого простору буде обчислюватися за правилом, аналогічному тому, що було введено для предикатів – елементів поля логічних скалярів, тобто

$$(Q_i \vee Q_j)(x_1, \dots, x_m) = Q_i(x_1, \dots, x_m) \vee Q_j(x_1, \dots, x_m).$$

Розглянемо тепер поле логічних скалярів, що є множиною n -місних предикатів $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, де $i_t \neq i_s$, $t, s = \overline{1, n}$. Причому множина індексів $\{i_1, \dots, i_n\}$ є підмножиною множини індексів $\{1, \dots, m\}$. В зв'язку з тим, що всі простори m -місних предикатів, аргументами предикатів скалярного поля для яких є усілякі підмножини $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, улаштовані однаково з точки зору операції добутку вектору на скаляр, будемо вважати, що предикати-скаляри задані на множині перших n елементів множини $\{x_1, \dots, x_m\}$, тобто є n -місними предикатами $P(x_1, \dots, x_n)$. Операція добутку вектора на скаляр у предикатних просторах буде виконуватися за наступним правилом:

$$(P \wedge Q)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = P(x_1, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Випадок, коли полем логічних скалярів є множина двомісних предикатів $Q(x, y)$, поданий на рис. 5.6.

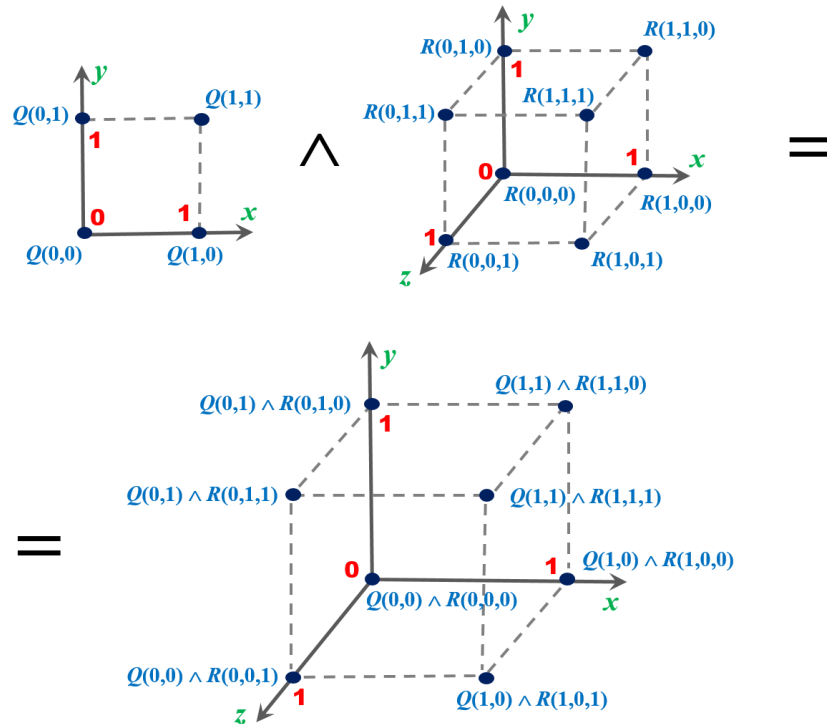


Рис. 5.6. Добуток логічного вектору, поданого тримісним предикатом $R(x, y, z)$, і логічного скаляру, поданого двомісним предикатом $Q(x, y)$

Вирази вигляду

$$\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^s \alpha_i l_i,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – логічні скаляри, називаються **лінійними комбінаціями логічних векторів** $l_1, l_2, \dots, l_s \in L$. Якщо вектор $l \in L$ можна подати лінійною комбінацією

$$l = \alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_s l_s = \bigvee_{i=1}^s \alpha_i l_i,$$

то говорять, що l **залежить** від l_1, l_2, \dots, l_s або l **виражається** через l_1, l_2, \dots, l_s . Якщо вектор l неможливо виразити через l_1, l_2, \dots, l_s , то говорять, що l **не залежить** від l_1, l_2, \dots, l_s . Система векторів l_1, l_2, \dots, l_s називається **незалежною**, якщо кожний з векторів цієї системи не залежить від інших. У протилежному випадку скінченна система векторів називається **залежною**.

Розглянемо **приклад** логічного простору. В якості поля логічних скалярів візьмемо множину P всіх одномісних предикатів $P_i(x)$, ($i = \overline{0, 3}$), визначених на множині $K = \{0, 1\}$. Множину таких предикатів задано таблицею 5.1. В якості простору логічних векторів візьмемо множину двомісних предикатів $Q_j(x, y)$, $j = \overline{0, 15}$, визначених на декартовому добутку $K^2 = \{0, 1\}^2$. Множина таких векторів, задана таблицею 5.2, записується у вигляді матриць

$$Q_j = \begin{pmatrix} Q_j(0, 0) & Q_j(1, 0) \\ Q_j(0, 1) & Q_j(1, 1) \end{pmatrix}.$$

Таблиця 5.2

Множина двомісних предикатів, заданих на декартовому добутку $K^2 = \{0, 1\}^2$

x	y	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	Q_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Відповідно до визначення операції диз'юнкції векторів та операції добутку вектору на скаляр, для векторів такого простору

$$Q_i \vee Q_j = \begin{pmatrix} Q_i(0, 0) \vee Q_j(0, 0) & Q_i(1, 0) \vee Q_j(1, 0) \\ Q_i(0, 1) \vee Q_j(0, 1) & Q_i(1, 1) \vee Q_j(1, 1) \end{pmatrix},$$

$$P_i Q_j = \begin{pmatrix} P_i(0) \wedge Q_j(0, 0) & P_i(1) \wedge Q_j(1, 0) \\ P_i(0) \wedge Q_j(0, 1) & P_i(1) \wedge Q_j(1, 1) \end{pmatrix}.$$

Нульові та одиничні елементи в цьому випадку мають вигляд: $\mathbf{0} = P_0$, $\vec{\mathbf{0}} = Q_0$, $\mathbf{1} = P_3$, $\vec{\mathbf{1}} = Q_{15}$. Позначимо цей простір через Q . В цьому просторі прикладом лінійної комбінації векторів Q_1 і Q_5 може бути лінійна комбінація

$$\begin{aligned}
P_0 Q_1 \vee P_2 Q_5 &= (0, 0) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 0 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 1 & 0 \wedge 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_4,
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
P_2 Q_1 \vee P_1 Q_5 &= (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vee (0, 1) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 0 \\ 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \wedge 0 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1,
\end{aligned}$$

тощо.

5.2.2. Базис логічного простору. Координатне подання векторів логічного простору

Нехай M – множина, що складається з векторів логічного простору L . Система векторів l_1, l_2, \dots цієї множини називається **системою утворюючих** для M , якщо будь-який вектор із M може бути виражений через якусь скінченну кількість векторів цієї системи. Логічний простір L називається **скінченновимірним**, якщо в ньому існує скінченна система утворюючих. Будь-який простір, що містить скінченну кількість векторів, є скінченновимірним. Мінімальна (за кількістю, з яких вона складається) система утворюючих логічного простору називається **базисом** цього простору. Нехай a_1, a_2, \dots, a_p – базис логічного простору L . Тоді подання логічного вектора $l \in L$ у вигляді лінійної комбінації

$$l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$$

називається **розкладанням вектора l за базисом a_1, a_2, \dots, a_p** , а логічні скаляри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ називаються **координатами вектора l** у цьому базисі. Для простору Q базисом є системи векторів $\{Q_6, Q_9\}$ і $\{Q_5, Q_{10}\}$ [20].

Приклад 5.1. Розкласти вектор Q_{14} за базисом $\{Q_6, Q_9\}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned}
Q_{14} &= (\xi_1(0), \xi_1(1)) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (\xi_2(0), \xi_2(1)) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \xi_1(0) \wedge 0 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & \xi_1(1) \wedge 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & \xi_2(1) \wedge 0 \\ \xi_2(0) \wedge 0 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & 0 \\ 0 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \vee \xi_2(0) \cdot 1 & \xi_1(1) \cdot 1 \vee 0 \\ \xi_1(0) \cdot 1 \vee 0 & 0 \vee \xi_2(1) \cdot 1 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_2(0) \wedge 1 & \xi_1(1) \wedge 1 \\ \xi_1(0) \wedge 1 & \xi_2(1) \wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси випиває система рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_1(0) \wedge 1 = 1, \\ \xi_1(1) \wedge 1 = 1, \\ \xi_2(0) \wedge 1 = 1, \\ \xi_2(1) \wedge 1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1(0) = 1, \\ \xi_1(1) = 1, \\ \xi_2(0) = 1, \\ \xi_2(1) = 0. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\xi_1 = (\xi_1(0), \xi_1(1)) = (1, 1) = P_3,$$

$$\xi_2 = (\xi_2(0), \xi_2(1)) = (1, 0) = P_2.$$

Таким чином, маємо

$$Q_{14} = (1, 1) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3 Q_6 \vee P_2 Q_9.$$

Відповідь. $Q_{14} = P_3 Q_6 \vee P_2 Q_9$.

В розглянутому прикладі P_3 і P_2 є координатами вектора Q_{14} у базисі $\{Q_6, Q_9\}$. Координати кожного вектора l логічного простору L щодо заданого базису a_1, a_2, \dots, a_p визначають цей вектор однозначно. Зворотнє, загалом кажучи, невірно. Не в будь-якому логічному просторі розкладання вектора за базисом є єдиним. Логічний простір, у якому немає єдиного розкладання кожного його вектора за базисом, називається **недосконалим**. Якщо ж єдиничність розкладання має місце для кожного вектора, то простір називається **досконалим** [21]. У досконалomu логічному просторі нульовий вектор (і лише він) має всі координати, що дорівнюють нулю.

Теорема 5.3. *Формулювання.* При диз'юнкції двох будь-яких векторів будь-якого логічного простору для їхніх координат (щодо заданого базису простору L) виконується диз'юнкція; при добутку довільного вектора на будь-який скаляр α для всіх координати цього вектора виконується їх кон'юнкція з α .

У недосконалomu логічному просторі за описаним вище алгоритмом виходить якийсь один із можливих наборів координат вектора $l \vee g$ (відповідно, αl).

5.2.3. Заміна базису логічного простору. Матриця переходу до нового базису

Будь-який базис логічного простору L , вектори якого беруться в певній послідовності, називається **координатною системою** в L . Нехай $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$. Логічні скаляри $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ називаються **координатами вектора l у системі координат $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$** . Стівпець $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$, складений з координат вектора l , узятих у певному порядку, називається **координатним стівпцем** і позначається як $[l]$. Отже, якщо в просторі обрано певну координатну систему, то кожному вектору відповідає координатний стівпець. Зворотнє: для кожного стівпця довжини p формула $l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p$ задає певний вектор l , що має цей стівпець своїм координатним стівпцем.

Нехай вектор l має координатний стовпець $(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$, а вектор g – координатний стовпець $(\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T$ у системі координат $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, тобто

$$l = \xi_1 a_1 \vee \xi_2 a_2 \vee \dots \vee \xi_p a_p,$$

$$g = \eta_1 a_1 \vee \eta_2 a_2 \vee \dots \vee \eta_p a_p.$$

Тоді операції добутку вектора на скаляр і диз'юнкції векторів можна описати, використовуючи дії зі стовпцями [16, 17]. Маємо:

$$\alpha l = (\alpha \xi_1) a_1 \vee (\alpha \xi_2) a_2 \vee \dots \vee (\alpha \xi_p) a_p = \bigvee_{i=1}^p (\alpha \xi_i) a_i, \quad (5.14)$$

$$l \vee g = (\xi_1 \vee \eta_1) a_1 \vee (\xi_2 \vee \eta_2) a_2 \vee \dots \vee (\xi_p \vee \eta_p) a_p = \bigvee_{i=1}^p (\xi_i \vee \eta_i) a_i. \quad (5.15)$$

Скориставшись правилами дій зі стовпцями

$$\alpha (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T = (\alpha \xi_1 \ \alpha \xi_2 \ \dots \ \alpha \xi_p)^T,$$

$$(\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T \vee (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T = (\xi_1 \vee \eta_1 \ \xi_2 \vee \eta_2 \ \dots \ \xi_p \vee \eta_p)^T,$$

запишемо рівності (5.14) і (5.15) у наступному вигляді:

$$[\alpha l] = \alpha [l],$$

$$[l \vee g] = [l] \vee [g].$$

Отже, координатний стовпець диз'юнкції векторів дорівнює диз'юнкції координатних стовпців цих векторів, а координатний стовпець добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на координатний стовпець вектора.

Нехай задано досконалий логічний простір L розмірності p над логічним скалярним полем G . Позначимо через L_p простір рядків довжини p з елементами із G . Оберемо в L певну координатну систему та поставимо кожному вектору з L у відповідність його координатний стовпець. Ця відповідність є ізоморфізмом між L і L_p . Отже, незалежні вектори мають незалежні координатні стовпці та кожна залежність між заданими векторами має місце також і між їхніми координатними стовпцями.

Розглянемо приклад. Нехай L – предикатний логічний простір Q , заданий над скалярним полем P , L_2 – простір рядків довжини 2 із елементами із G , а $\{Q_6, Q_9\}$ – координатна система в Q . Кожному вектору $Q_j(x, y)$, $j = \overline{0, 15}$ із Q поставимо у відповідність його координатний стовпець із L_2 . Наприклад, вектору Q_{14} , як було показано в прикладі 5.1, відповідає координатний стовпець $(P_3, P_2)^T$. В аналогічний спосіб можна показати, що вектору Q_2 відповідає координатний стовпець $(P_1, P_0)^T$, вектору Q_{13} – координатний стовпець $(P_2, P_3)^T$ тощо. Ця відповідність є ізоморфізмом між Q і L_2 .

У тому самому логічному просторі L існують різні координатні системи. Визначимо, як зміняться координати вектора, якщо від однієї координатної системи перейти до іншої. Оберемо в L якісь дві координатні системи $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ та $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$. В силу того, що вектори a_1, a_2, \dots, a_p є базисом простору L , то a'_1, a'_2, \dots, a'_p мають виражатися через a_1, a_2, \dots, a_p . Нехай ці вирази будуть:

то отриманий результат можна розповсюдити також і на предикатні матриці, задані над скалярним полем, елементами якого є скінченні предикати довільної арності. **Теорему доведено.**

Наслідком з теореми 5.4 є той факт, що в досконалому логічному просторі існують єдині матриця переходу A і матриця зворотного переходу B , причому вони є ортогональними і виконується співвідношення $B = A^T$.

5.2.4. Розмірність досконалого логічного простору

У силу ізоморфізму алгебри ідей та алгебри булевих функцій [9], в булевому векторному логічному просторі існує єдине розкладання кожного його вектора за базисом, тобто повний булевий простір є досконалим. Доведемо досконалість довільного повного предикатного простору.

Теорема 5.5. Формулювання. Повний [21] простір m -місних предикатів, заданий над скалярним полем n -місних предикатів, $n < m$, є досконалим.

Доведення. Позначимо множини m - і n -місних предикатів через L і G відповідно. Складемо множину X із усіляких наборів аргументів x_{n+1}, \dots, x_m :

$$X = \{(x_{n+1}, \dots, x_m), x_i \in K_i, n+1 \leq i \leq m\},$$

де K_i – алфавіт, над яким заданий аргумент x_i розглянутих предикатів. Для стислості запису елементи множини X будемо позначати через v . Тепер побудуємо базис простору L . В якості базисних векторів візьмемо предикати вигляду

$$Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = \begin{cases} 1, & (x_{n+1}, \dots, x_m) = v; \\ 0, & (x_{n+1}, \dots, x_m) \neq v; \end{cases} \quad v \in X,$$

тобто у базисному векторі всі розряди, у яких зафіксовані значення останніх $(m - n)$ змінних, дорівнюють одиниці, а інші розряди дорівнюють нулю. Індексом v базисного вектора при цьому є набір зафіксованих значень змінних (x_{n+1}, \dots, x_m) .

Розглянемо тепер довільний вектор $l(x_1, \dots, x_m) \in L$. Його можна подати у вигляді наступної лінійної комбінації базисних векторів:

$$l(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} l(x_1, \dots, x_n, v) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m), \quad (5.23)$$

де $l(x_1, \dots, x_n, v) \in G$ є n -місним предикатом, тобто елементом $P_v(x_1, \dots, x_n)$ скалярного поля G . Таким чином, рівність (5.23) можна записати у вигляді

$$l(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{v \in X} P_v(x_1, \dots, x_n) Q_v(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m),$$

що є розкладанням вектора l за побудованим у вищеописаний спосіб базисом. Очевидно, що розкладання будь-якого вектора за цим базисом є єдиним. Позначимо вектори цього базису через a_1, a_2, \dots, a_p .

Розглянемо будь-який інший базис $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$ простору L , розкладання векторів якого за базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ запишеться у вигляді (5.16). Тоді матриця, що має вигляд (5.17), є матрицею переходу від базису $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ до базису $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$. Ця матриця визначена однозначно в силу єдиничності розкладання будь-якого вектора простору L за

базисом $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$. Згідно з теоремою 5.4, матриця A є ортогональною, а отже, і оборотною. У силу того, що для будь-якої оборотної логічної матриці існує лише одна зворотна, то матриця B зворотного переходу від базису $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_p\}$ до базису $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ також визначена однозначно, причому $B = A^T$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \dots & \alpha_{pp} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо довільний вектор $l \in L$, що має в базисі $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ координатний стовпець $[l] = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$. Позначимо координатний стовпець вектора l у базисі $\{\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \dots, \mathbf{a}'_p\}$ через $[l]' = (\xi'_1 \ \xi'_2 \ \dots \ \xi'_p)^T$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1p} & \dots & \alpha_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix}.$$

В силу того, що і ξ_i , і α_{ij} , $i, j = \overline{1, p}$, визначені однозначно, то і ξ'_i також будуть визначені однозначно. Отже, вектор l буде мати єдине розкладання в будь-якому базисі простору L . Це означає, що простір L є досконалим. **Теорему доведено.**

Кількість елементів базису називається **розмірністю** логічного простору. Обчислимо розмірність p описаного вище досконалого предикатного простору. Множина логічних скалярів для описаного предикатного простору буде мати потужність $2^{k_1 k_2 \dots k_n}$, а кількість векторів, що складають розглянутий предикатний простір, буде дорівнювати $2^{k_1 k_2 \dots k_m}$ [9, 21]. Відповідно до означення, будь-який вектор досконалого логічного простору можна в єдиний спосіб подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів. Загальна кількість таких комбінацій буде дорівнювати $(2^{k_1 k_2 \dots k_n})^p$. З іншого боку, як було сказано вище, це число дорівнює $2^{k_1 k_2 \dots k_m}$. Отже, має місце рівність

$$2^{k_1 k_2 \dots k_m} = (2^{k_1 k_2 \dots k_n})^p.$$

Логарифмуємо обидві частини цієї рівності за основою 2:

$$\log_2 2^{k_1 k_2 \dots k_m} = \log_2 (2^{k_1 k_2 \dots k_n})^p;$$

$$\log_2 2^{k_1 k_2 \dots k_m} = p \log_2 2^{k_1 k_2 \dots k_n};$$

$$k_1 k_2 \dots k_m = p k_1 k_2 \dots k_n.$$

Звідси знаходимо кількість базисних векторів описаного вище досконалого предикатного простору:

$$p = \frac{k_1 k_2 \dots k_m}{k_1 k_2 \dots k_n} = k_{n+1} k_{n+2} \dots k_m. \quad (5.24)$$

Якщо ж $|K_1| = \dots = |K_m| = k$, то

$$p = k^{m-n}. \quad (5.25)$$

Розглянемо предикатний простір Q . Алфавітом у зазначеному просторі є множина $K = \{0, 1\}$. Очевидно, що $k = 2$, $n = 1$, $m = 2$. Кількість логічних скалярів у цьому прикладі дорівнює чотирьом, а векторів – шістнадцяти. Розмірність цього простору дорівнює $2^{2-1} = 2$.

У силу того, що вектори булевого простору можна розуміти як множину конститuent одиниці за m змінними [19], кількість векторів булевого простору дорівнює 2^m . Поле логічних скалярів для булевого простору містить два елементи: нуль та одиницю. Отже, справедливим є співвідношення $2^p = 2^m$, де p – розмірність булевого простору, тобто кількість його базисних векторів. Очевидно, що

$$p = m, \quad (5.26)$$

тобто для булевого логічного простору його розмірність збігається з кількістю змінних. Слід зазначити, що в булевому просторі існує єдиний з точністю до перестановки набір векторів, що може бути базисом обраного простору [22], тоді як у предикатному логічному просторі це не так.

5.2.5. Операції кон'юнкції, згортки та заперечення векторів досконалого логічного простору

Кон'юнкцією векторів l і g логічного простору L називається такий вектор цього простору, координатами якого є кон'юнкції відповідних координат векторів l і g [21].

Приклад 5.2. Для векторів Q_7 і Q_{10} предикатного простору Q знайти розкладання їх кон'юнкції за базисом $\{Q_6, Q_9\}$.

Розв'язання. Розкладання векторів Q_7 і Q_{10} за базисом $\{Q_6, Q_9\}$ буде наступним:

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3 Q_6 \vee P_1 Q_9,$$

$$Q_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1 Q_6 \vee P_2 Q_9.$$

Отже, координатними стовпцями векторів Q_7 і Q_{10} у базисі $\{Q_6, Q_9\}$ будуть стовпці

$$Q_7 = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1) \\ (0, 1) \end{pmatrix}, \quad Q_{10} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) \\ (1, 0) \end{pmatrix},$$

а їх кон'юнкція буде мати наступний вигляд:

$$Q_7 \wedge Q_{10} = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 \wedge P_1 \\ P_1 \wedge P_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1, 1) \wedge (0, 1) \\ (0, 1) \wedge (1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) \\ (0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_0 \end{pmatrix}.$$

Отже, кон'юнкцією векторів Q_7 і Q_{10} буде вектор

$$Q_7 \wedge Q_{10} = P_1 Q_6 \vee P_0 Q_9 = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_2.$$

Відповідь. $Q_7 \wedge Q_{10} = Q_2 = (P_1 \ P_0)^T$

Теорема 5.6. Формулювання. Кон'юнкція будь-яких векторів досконалого логічного простору є інваріантною щодо вибору базису.

Доведення. Нехай у базисі $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ вектори l і g мають координатні стовпці $[l] = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$ і $[g] = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T$, а в базисі $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$ – координатні стовпці $[l]' = (\xi'_1 \ \xi'_2 \ \dots \ \xi'_p)^T$ і $[g]' = (\eta'_1 \ \eta'_2 \ \dots \ \eta'_p)^T$ відповідно, а матриця вигляду (5.17) є матрицею переходу від базису $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ до базису $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$. Очевидно, що

$$A [l \wedge g]' = [l \wedge g], \quad (5.27)$$

$$[l \wedge g] = [l] \wedge [g], \quad (5.28)$$

$$[l] \wedge [g] = A [l]' \wedge A [g]'. \quad (5.29)$$

В силу того, що $[l] = A [l]'$ і $[g] = A [g]'$, можна записати наступні співвідношення:

$$\xi_i = \alpha_{i1} \xi'_1 \vee \dots \vee \alpha_{ip} \xi'_p, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\eta_i = \alpha_{i1} \eta'_1 \vee \dots \vee \alpha_{ip} \eta'_p, \quad i = \overline{1, p}.$$

З огляду на (5.29), маємо

$$\xi_i \eta_i = (\alpha_{i1} \xi'_1 \vee \dots \vee \alpha_{ip} \xi'_p) \wedge (\alpha_{i1} \eta'_1 \vee \dots \vee \alpha_{ip} \eta'_p), \quad i = \overline{1, p}. \quad (5.30)$$

Згідно з теоремою 4.4, матриця переходу A є ортогональною. Це означає, що кон'юнкція будь-яких двох елементів кожного її рядка дорівнює нулю. Отже, рівність (5.30) набуває вигляду

$$\xi_i \eta_i = \alpha_{i1} \xi'_1 \eta'_1 \vee \alpha_{i2} \xi'_2 \eta'_2 \vee \dots \vee \alpha_{ip} \xi'_p \eta'_p, \quad i = \overline{1, p},$$

що в матричній формі запишеться як

$$[l \wedge g] = A ([l]' \wedge [g]'),$$

звідки, з урахуванням (5.27) і (5.28), випливає, що

$$A [l \wedge g]' = A ([l]' \wedge [g]'),$$

тобто кон'юнкція будь-яких двох векторів досконалого логічного простору є інваріантною щодо вибору базису. **Теорему доведено.**

У силу теореми 5.6, кон'юнкція векторів предикатного логічного простору обчислюється за правилом, аналогічним тому, що було введено для елементів поля скалярів такого простору, тобто

$$(Q_i \wedge Q_j)(x_1, \dots, x_m) = Q_i(x_1, \dots, x_m) \wedge Q_j(x_1, \dots, x_m).$$

Для будь-яких логічних векторів $l, g, h \in L$ виконуються властивості

комутативності кон'юнкції

$$l \wedge g = g \wedge l,$$

дистрибутивності

$$(l \vee g) h = l h \vee g h, \quad l g \vee h = (l \vee h) (g \vee h),$$

елімінації

$$l \vee l g = l, \quad l (l \vee g) = l,$$

ідемпотентності кон'юнкції

$$l \wedge l = l.$$

Згорткою $\langle l, g \rangle$ двох векторів l і g логічного простору L називається диз'юнкція координат кон'юнкції цих векторів. Тобто якщо $[l] = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$ і $[g] = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_p)^T$, то

$$\langle l, g \rangle = \xi_1 \eta_1 \vee \xi_2 \eta_2 \vee \dots \vee \xi_p \eta_p.$$

Згортка векторів досконалого логічного простору має наступні властивості, аналогічні властивостям скалярного добутку векторів у лінійній алгебрі [15, 16]:

$$\langle l, g \rangle = \langle g, l \rangle, \quad (5.31)$$

$$\langle \alpha l \vee \beta g, h \rangle = \alpha \langle l, h \rangle \vee \beta \langle g, h \rangle, \quad (5.32)$$

$$\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0, \quad (5.33)$$

$$\langle l, l \rangle \neq 0, \text{ якщо } l \neq 0. \quad (5.34)$$

Вектори $l, g \in L$ називаються **ортогональними**, якщо їхня згортка дорівнює нулю [22, 23]. Систему векторів називають **ортогональною**, якщо вона містить або лише один вектор, або вектори, що входять до її складу, є попарно ортогональними. З виразу (5.31) випливає властивість симетричності відношення ортогональності логічних векторів: якщо вектор l є ортогональним до вектора g , то вектор g , в свою чергу, є ортогональним до вектора l [27, 31]. Єдиним вектором, ортогональним до всіх векторів логічного простору, є нульовий вектор. У предикатному просторі Q ортогональними є, наприклад, системи векторів $\{Q_3, Q_{12}\}$, і $\{Q_1, Q_{14}\}$.

Теорема 4.8. Формулювання. Система векторів, що складається з ненульових взаємно ортогональних векторів $\{l_1, \dots, l_t\}$, є незалежною [24].

З означення операції згортки логічних векторів випливає, що вона дорівнює диз'юнкції координат кон'юнкції цих векторів, що може дорівнювати нулю тоді й лише тоді, коли кожний з диз'юнктив є тотожним нулем, тобто якщо всі координати кон'юнкції дорівнюють нулю. Отже, можна дати інше означення ортогональності логічних векторів: вектори $l, g \in L$ є **ортогональними**, якщо їхня кон'юнкція є нульовим вектором.

Запереченням вектора $l \in L$, $[l] = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p)^T$, називається вектор $[\bar{l}] = (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \dots \bar{\xi}_p)^T$ [21, 23]. Операцію заперечення логічного вектора, як і операцію кон'юнкції логічних векторів, також можна увести лише в досконалому логічному просторі.

Теорема 5.9. Формулювання. Заперечення будь-якого вектора досконалого логічного простору інваріантне щодо вибору базису.

Доведення. Нехай матриця вигляду (5.17) є матрицею переходу від базису $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ до базису $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$, а вектор l має координатні стовпці $[l] = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_p)^T$ і $[l]' = (\xi'_1 \xi'_2 \dots \xi'_p)^T$ у базисах $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ і $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_p\}$ відповідно. За означенням заперечення вектора, $[\bar{l}] = (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \dots \bar{\xi}_p)^T$. З іншого боку, відповідно до означення заперечення логічних матриць, $[\bar{l}] = (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 \dots \bar{\xi}_p)^T$, звідки випливає, що

$$[\bar{l}] = \overline{[l]}. \quad (5.35)$$

Очевидно, що $[\bar{l}] = A [\bar{l}]'$, $[\bar{l}] = \overline{A [l]'}$, звідки, з урахуванням (5.35), випливає, що $A [\bar{l}]' = \overline{A [l]'}$. Іншими словами, переходячи до нового координатного подання вектора \bar{l} або виконуючи операцію заперечення над вектором l вже в новому базисі, у результаті отримуємо той самий вектор, що й доводить інваріантність заперечення векторів логічного простору щодо вибору базису. **Теорему доведено.**

В силу теореми 5.9, заперечення векторів досконалого предикатного логічного простору обчислюється за правилом, аналогічним до того, що було введено для елементів поля скалярів такого простору, тобто

$$\overline{Q_i(x_1, \dots, x_m)} = \overline{Q_i(x_1, \dots, x_m)}.$$

Для будь-яких логічних векторів $l, g \in L$, виконуються наступні властивості:

згортання

$$l \vee h \overline{g} = l, \quad l (h \vee \overline{g}) = l;$$

де Моргана

$$\overline{l \vee g} = \overline{l} \overline{g}, \quad \overline{l g} = \overline{l} \vee \overline{g};$$

подвійного заперечення

$$\overline{\overline{l}} = l;$$

виключення третього

$$l \vee \overline{l} = \overline{\overline{l}};$$

протиріччя

$$l \overline{l} = \overline{\overline{l}},$$

заперечення нуля

$$\overline{\overline{0}} = \overline{\overline{1}},$$

заперечення одиниці

$$\overline{\overline{1}} = \overline{\overline{0}}.$$

Із цих властивостей, а також із властивостей ідемпотентності, комутативності та асоціативності диз'юнкції та кон'юнкції логічних векторів, властивостей дистрибутивності, елімінації, законів нуля та одиниці випливає, що множину логічних векторів так само, як і множину логічних скалярів, можна розглядати як логічне поле.

Якщо вектор належить якомусь базису простору L , то його заперечення можна подати як диз'юнкцію інших векторів, що входять у той же базис [25]:

$$\overline{a_i} = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_p. \quad (5.36)$$

Наприклад, у предикатному просторі Q для базиса $\{Q_6, Q_9\}$ маємо:

$$\overline{Q_6} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_9,$$

$$\overline{Q_9} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q_6.$$

Очевидно, що

$$\langle l, \overline{l} \rangle = 0. \quad (5.37)$$

Отже, будь-який логічний вектор завжди ортогональний своєму запереченню. Наслідком з теореми 5.9 і властивості (5.37) є той факт, що система ненульових векторів, що складається із довільного логічного вектора та його заперечення, є незалежною. Наприклад, система векторів $\{Q_7, Q_8\}$ в просторі Q є незалежною.

У силу рівностей (5.36) і (5.37) можна записати наступне:

$$\langle \mathbf{a}_i, \bar{\mathbf{a}}_i \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1 \vee \mathbf{a}_2 \vee \dots \vee \mathbf{a}_{i-1} \vee \mathbf{a}_{i+1} \vee \dots \vee \mathbf{a}_p \rangle = \mathbf{0}. \quad (5.38)$$

Із (5.38) та (5.32) випливає, що

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1 \rangle \vee \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_2 \rangle \vee \dots \vee \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i-1} \rangle \vee \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1} \rangle \vee \dots \vee \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_p \rangle = \mathbf{0},$$

що є справедливим лише в тому випадку, коли кожний з диз'юнктив цього виразу дорівнює нулю. Отже, для будь-якого базису досконалого логічного простору $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{0}$, $i \neq j$. Це означає, що будь-який базис досконалого логічного простору є ортогональною системою.

5.3. ЛОГІЧНІ ОПЕРАТОРИ

5.3.1. Поняття логічного оператора

Розглянемо логічні простори L і D над деяким полем логічних скалярів. **Логічним оператором** [26], що відображає простір L у простір D , називається такий закон, що кожному вектору із простору L ставить у відповідність вектор із простору D . Позначимо логічні оператори буквами \mathbf{A} , \mathbf{B} тощо і запишемо як $\mathbf{A}: L \rightarrow D$. Якщо l – вектор із логічного простору L , то вектор із простору D , що отримується із l за допомогою впливу на нього логічним оператором \mathbf{A} , позначається через $\mathbf{A}l$. Вектор $\mathbf{A}l$ називається **образом** вектора l при операторі \mathbf{A} , а вектор l називається **прообразом** вектора $\mathbf{A}l$ [12]. Сукупність всіх векторів $l \in L$ таких, що $\mathbf{A}l = d$, називається **повним прообразом** вектора d у просторі L щодо оператора \mathbf{A} [27]. Сукупність всіх векторів $d \in D$ таких, що $\mathbf{A}l = d$, називається **повним образом** вектора l у просторі D щодо оператора \mathbf{A} [28]. Логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ називається **взаємоднозначним**, якщо кожен вектор $d \in D$ має один і лише один прообраз $l \in L$. Оператори \mathbf{A} і \mathbf{B} називаються **рівними**, якщо для будь-якого вектора $l \in L$ виконується рівність $\mathbf{A}l = \mathbf{B}l$.

Нехай є логічні оператори \mathbf{A} і \mathbf{B} такі, що $\mathbf{A}: L \rightarrow D$, $\mathbf{B}: D \rightarrow V$. Оператор \mathbf{A} переводить довільний логічний вектор $l \in L$ у вектор $\mathbf{A}l$. Якщо отриманий вектор перетворити за допомогою оператора \mathbf{B} , то отримаємо вектор $\mathbf{B}(\mathbf{A}l)$. Оператор, що переводить вектор l безпосередньо у вектор $\mathbf{B}(\mathbf{A}l)$, називається **добутком** \mathbf{A} і \mathbf{B} і позначається як \mathbf{BA} [12, 29]. Таким чином, з означення випливає, що $(\mathbf{BA})l = \mathbf{B}(\mathbf{A}l)$. Якщо $\mathbf{A}, \mathbf{B}: L \rightarrow L$ і до вектора l спочатку застосувати оператор \mathbf{B} , а потім \mathbf{A} , то отриманий вектор $\mathbf{A}(\mathbf{B}l)$ може й не збігатися з вектором $\mathbf{B}(\mathbf{A}l)$. Інакше кажучи, добуток логічних операторів залежить від порядку співмножників. Нехай $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – довільні логічні оператори $\mathbf{A}: L \rightarrow D$, $\mathbf{B}: D \rightarrow V$, $\mathbf{C}: V \rightarrow W$, а l – вектор із простору L . Тоді, відповідно до означення, маємо:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}(\mathbf{BA}))l &= \mathbf{C}((\mathbf{BA})l) = \mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{A}l)), \\ ((\mathbf{CB})\mathbf{A})l &= (\mathbf{CB})(\mathbf{A}l) = \mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{A}l)), \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\mathbf{C}(\mathbf{BA}) = (\mathbf{CB})\mathbf{A},$$

тобто виконується властивість асоціативності добутку операторів. Добуток r співмножників, що дорівнюють операторові $\mathbf{A}: L \rightarrow L$, називається r -тим ступенем оператора \mathbf{A} і позначається через \mathbf{A}^r . Дії зі ступенями підкоряються звичайним правилам. Якщо деякий логічний оператор кожному вектору ставить у відповідність той же самий вектор, то такий оператор називається одиничним [23] і позначається через \mathbf{E} . Отже, для будь-якого логічного вектора $l \in L$ має місце співвідношення $\mathbf{E}l = l$. Нехай $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ – деякий логічний оператор. З того, що

$$(\mathbf{A} \mathbf{E})l = \mathbf{A}(\mathbf{E}l) = \mathbf{A}l,$$

$$(\mathbf{E} \mathbf{A})l = \mathbf{E}(\mathbf{A}l) = \mathbf{A}l$$

впливає, що

$$\mathbf{E} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{E} = \mathbf{A}.$$

Якщо для логічного оператора $\mathbf{A}: L \rightarrow L$ існує такий логічний оператор $\mathbf{B}: L \rightarrow L$, що

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (5.39)$$

то \mathbf{B} називається зворотним стосовно \mathbf{A} , а сам оператор \mathbf{A} називається оборотним. Будь-який оборотний логічний оператор логічного простору L має лише один зворотний.

Логічний оператор, зворотний стосовно \mathbf{A} , будемо позначати \mathbf{A}^{-1} . У виразі (5.39) оператори \mathbf{A} і \mathbf{B} входять симетрично. Отже, якщо \mathbf{B} є зворотним стосовно \mathbf{A} , то \mathbf{A} є зворотним стосовно \mathbf{B} , тобто $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. За домовленістю вважається за означенням, що

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}^{-s} = (\mathbf{A}^{-1})^s, \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ називається лінійним, якщо він добуток логічного вектора $l \in L$ на логічний скаляр α переводить у добуток того ж самого скаляра на відповідний вектор $\mathbf{A}l \in D$, а диз'юнкцію векторів із простору L переводить у диз'юнкцію відповідних їм векторів із простору D . Іншими словами, логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ є лінійним, якщо для будь-яких векторів $l, g \in L$ і будь-якого логічного скаляра α виконуються

властивість однорідності

$$\mathbf{A}(\alpha l) = \alpha (\mathbf{A}l),$$

властивість адитивності [30, 31]

$$\mathbf{A}(l \vee g) = \mathbf{A}l \vee \mathbf{A}g.$$

Якщо для властивості однорідності прийняти $\alpha = \mathbf{0}$, то отримаємо $\mathbf{A}\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$. Іншими словами, будь-який лінійний логічний оператор переводить нульовий вектор у нульовий. Із властивостей однорідності та адитивності випливає наступна властивість лінійних логічних операторів: якщо \mathbf{A} – лінійний логічний оператор, то

$$\mathbf{A}(\alpha_1 l_1 \vee \alpha_2 l_2 \vee \dots \vee \alpha_t l_t) = \alpha_1 (\mathbf{A}l_1) \vee \alpha_2 (\mathbf{A}l_2) \vee \dots \vee \alpha_t (\mathbf{A}l_t),$$

де $l_1, l_2, \dots, l_t \in L$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ – довільні елементи поля логічних скалярів. Для пари векторів l, g логічного простору L справедлива рівність

$$\mathbf{E}(\alpha l \vee \beta g) = \alpha l \vee \beta g = \alpha (\mathbf{E}l) \vee \beta (\mathbf{E}g),$$

звідки випливає, що одиничний оператор над логічним простором L є лінійним. Оператор, що переводить кожен вектор простору L у нульовий, називається **нульовим** і позначається через \mathbf{O} . Якщо лінійний оператор \mathbf{A} є взаємо-однозначним, то він називається **ізоморфізмом**, а простір образів D і простір прообразів L називаються **ізоморфними**.

Теорема 5.10. Формулювання. Нехай $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ – якийсь базис досконалого логічного простору L . Візьмемо в просторі D довільні вектори b_1, b_2, \dots, b_p . Тоді існує один і лише один лінійний логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$, що переводить вектори a_1, a_2, \dots, a_p у вектори b_1, b_2, \dots, b_p відповідно.

5.3.2. Матриці лінійних логічних операторів

Побудуємо матрицю лінійного логічного оператора $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ [12, 15]. Для цього в просторі D візьмемо q базисних векторів d_1, d_2, \dots, d_q і розкладемо образи векторів a_1, a_2, \dots, a_p за базисом у просторі D :

$$\mathbf{A} a_1 = \alpha_{11} d_1 \vee \dots \vee \alpha_{q1} d_q,$$

.....

$$\mathbf{A} a_p = \alpha_{1p} d_1 \vee \dots \vee \alpha_{qp} d_q.$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \dots & \alpha_{qp} \end{pmatrix},$$

що складається з координатних стовпців векторів $\mathbf{A} a_1, \dots, \mathbf{A} a_p$, називається **матрицею оператора \mathbf{A}** у базисах $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ $\{d_1, d_2, \dots, d_q\}$. Отже, у заданих базисах кожному лінійному логічному оператору відповідає певна матриця. Ця відповідність є взаємо-однозначною лише в тому випадку, якщо розглянутий логічний простір образів є досконалим. У недосконалому логічному просторі немає одиничності розкладання векторів за базисом, а це призводить до того, що оператору \mathbf{A} може відповідати кілька матриць. Будемо розглядати саме досконалі логічні простори. У цьому випадку, знаючи матрицю A , можна знайти вектори b_1, b_2, \dots, b_p , а потім у силу того, що існує лише єдиний лінійний логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$, що переводить базис простору L у базис простору D , побудувати лінійний логічний оператор \mathbf{A} , що переводить вектори a_1, a_2, \dots, a_p у вектори b_1, b_2, \dots, b_p відповідно. Цей оператор єдиний, звідки випливає взаємо-однозначність відповідності лінійного логічного оператора \mathbf{A} і матриці A , що йому відповідає. Отже, лінійний логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ однозначно визначається сукупністю образів якого-небудь базису досконалого простору L .

Приклад 5.4. Розглянемо описаний вище предикатний простір Q . Для обраного простору, як вже було показано, базисом є набір векторів $\{Q_6, Q_9\}$. Побудувати матрицю оператора \mathbf{A} , що перетворює базисні вектори за якимось обраним правилом.

Розв'язання. Нехай оператор \mathbf{A} перетворює базисні вектори за наступним правилом:

$$\mathbf{A}Q_6 = P_2Q_6 \vee P_1Q_9 = (1,0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = Q_5,$$

$$\mathbf{A}Q_9 = P_1Q_6 \vee P_2Q_9 = (0,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee (1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_{10}.$$

Тоді матриця

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

є матрицею оператора \mathbf{A} у базисі $\{Q_6, Q_9\}$.

Відповідь. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}.$

У силу рівності (5.26), для булевих просторів будь-якій матриці над полем $\mathbf{G} = \{0, 1\}$ відповідає деякий лінійний логічний оператор. Для предикатних просторів це не так. У випадку таких просторів на розмірність матриць, що відповідають лінійним логічним операторам, накладається наступне обмеження. Припустимо, що деяка логічна матриця $\mathbf{A}_{q \times p}$ над полем логічних скалярів, елементами якого є скінченні предикати арності n , є матрицею деякого логічного оператора \mathbf{A} , що переводить вектори предикатного простору \mathbf{W} розмірності p у вектори предикатного простору \mathbf{V} розмірності q . У силу рівності (5.24), для p і q мають виконуватися наступні співвідношення:

$$p = k_{m_p-n} \cdot \dots \cdot k_{m_p}, \quad (5.40)$$

$$q = k_{m_q-n} \cdot \dots \cdot k_{m_q}, \quad (5.41)$$

де m_p і m_q – арності предикатів, що є векторами просторів \mathbf{W} і \mathbf{V} відповідно. Отже, множина \mathbf{M}_A матриць лінійних логічних операторів у предикатному просторі є підмножиною множини всіх логічних матриць над предикатним скалярним полем. Потужність цієї підмножини для кожних конкретних простору прообразів \mathbf{W} і простору образів \mathbf{V} дорівнює

$$|\mathbf{M}_A| = (2^{k_1 k_2 \dots k_n})^{pq},$$

де p і q – розмірності просторів \mathbf{W} і \mathbf{V} відповідно. У випадку, коли $k_1 = \dots = k_n = k$, як випливає з (5.25), співвідношення (5.40) і (5.41) набувають вигляду

$$p = k^{m_p-n}, \quad (5.42)$$

$$q = k^{m_q-n}, \quad (5.43)$$

тобто у випадку, коли потужності алфавітів, над якими задані аргументи предикатів, що є елементами розглянутого логічного простору, дорівнюють одна одній, вищевказана логічна матриця $\mathbf{A}_{q \times p}$ є матрицею описаного лінійного логічного оператора в тому й лише в тому випадку, коли кількість її рядків і кількість її стовпців є деяким цілим ступенем числа k . Потужність множини матриць лінійних логічних операторів у цьому випадку дорівнює

$$|\mathbf{M}_A| = (2^{(k^n)})^{pq}.$$

Нульовий оператор має нульову матрицю, одиничному оператору відповідає одинична матриця.

Нехай в обраному базисі $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ довільний вектор $l \in L$ має координати $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, а елементами матриці A , що відповідає лінійному логічному оператору \mathbf{A} , є логічні скаляри α_{ji} ($i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$). Тоді можна записати наступні рівності:

$$\begin{aligned} l &= \xi_1 a_1 \vee \dots \vee \xi_p a_p, \\ \mathbf{A}l &= \xi_1 (\mathbf{A} a_1) \vee \dots \vee \xi_p (\mathbf{A} a_p). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Нехай b_1, b_2, \dots, b_q – базис простору D . Тоді маємо:

$$A a_i = \alpha_{1i} b_1 \vee \dots \vee \alpha_{qi} b_q, \quad (i = \overline{1, p}). \quad (5.45)$$

Підставляючи рівності (5.45) у вираз (5.44), отримуємо

$$\mathbf{A}l = (\xi_1 \alpha_{11} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{p1}) b_1 \vee \dots \vee (\xi_1 \alpha_{q1} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{qp}) b_q,$$

звідки випливає, що координатний стовпець вектора $\mathbf{A}l$ буде мати вигляд

$$[\mathbf{A}l] = ((\xi_1 \alpha_{11} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{p1}) \dots (\xi_1 \alpha_{q1} \vee \dots \vee \xi_p \alpha_{qp}))^T = A [l],$$

де $A [l]$ є добутком логічної матриці A на координатний стовпець вектора l , тобто $[\mathbf{A}l] = A [l]$. Для булевих просторів цей результат можна сформулювати як теорему про загальний вигляд лінійного логічного оператора [23, 32].

Теорема 5.11. Формулювання. Будь-який лінійний логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ можна подати у вигляді

$$[\mathbf{A}l]_j = \exists i \in I: \alpha_{ji} \xi_i, \quad I = \{1, \dots, p\}, \quad J = \{1, \dots, q\}, \quad j \in J,$$

де $[l] = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_p)^T$ – довільний вектор простору L , $[\mathbf{A}l]_j$ – j -а координата вектора $\mathbf{A}l$ у базисі простору D .

5.3.3. Деякі види лінійних логічних операторів

Лінійний логічний оператор $\mathbf{A}: L \rightarrow L$ називається **оператором добутку вектора на скаляр**, якщо він кожен вектор $l \in L$ переводить у вектор $\lambda l \in L$, де λ – довільний елемент із поля логічних скалярів [24]. Для поля $G = \{0, 1\}$ операторами добутку вектора на скаляр є лише одиничний та нульовий оператори, які переводять вектор $l \in L$ у той же самий вектор $l \in L$ ($\lambda = 1$) і в нульовий вектор ($\lambda = 0$) відповідно. У випадку предикатного простору Q ситуація ускладнюється. Візьмемо, наприклад, $\lambda = P_1 = (0, 1)$. Образами базисних векторів Q_6 і Q_9 будуть вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{A} Q_6 &= (0, 1) \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_2, \\ \mathbf{A} Q_9 &= (0, 1) \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1, \end{aligned}$$

а матриця оператора \mathbf{A} запишеться у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix}.$$

У силу лінійності операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} мають місце співвідношення:

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}(\alpha l \vee \beta g)) = \mathbf{B}(\alpha(\mathbf{A}l) \vee \beta(\mathbf{A}g)) = \mathbf{B}(\alpha \mathbf{A}l) \vee \mathbf{B}(\beta \mathbf{A}g).$$

Іншими словами,

$$(\mathbf{B}\mathbf{A})(\alpha l \vee \beta g) = \alpha(\mathbf{B}\mathbf{A})l \vee \beta(\mathbf{B}\mathbf{A})g,$$

звідки випливає, що добуток лінійних логічних операторів також є лінійним оператором. Позначимо через \mathbf{C} матрицю добутку лінійних логічних операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} . Вона буде дорівнювати добутку матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} , що відповідають операторам \mathbf{A} і \mathbf{B} відповідно, тобто $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$.

Розглянемо тепер оборотний логічний оператор \mathbf{A} і зворотний стосовно нього логічний оператор \mathbf{A}^{-1} . У випадку лінійного логічного оператора $\mathbf{A}: L \rightarrow L$ логічний оператор $\mathbf{A}^{-1}: L \rightarrow L$ також є лінійним. Для доведення цього твердження покладемо $\mathbf{A}^{-1}a = l$, $\mathbf{A}^{-1}b = d$, де a і b – деякі довільні вектори. У силу того, що логічний оператор \mathbf{A} є лінійним, має місце рівність

$$\mathbf{A}(\alpha l \vee \beta d) = \alpha \mathbf{A}l \vee \beta \mathbf{A}d = \alpha a \vee \beta b,$$

звідки випливає, що

$$\mathbf{A}^{-1}(\alpha a \vee \beta b) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\alpha l \vee \beta d) = \alpha l \vee \beta d = \alpha \mathbf{A}^{-1}a \vee \beta \mathbf{A}^{-1}b,$$

тобто оператор \mathbf{A}^{-1} є лінійним. Якщо оператору \mathbf{A} відповідає матриця \mathbf{A} , а зворотному йому оператору \mathbf{A}^{-1} – деяка логічна матриця \mathbf{B} , то зі співвідношення $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ безпосередньо випливає, що $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, а це означає, що $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Іншими словами, матриця, що відповідає логічному оператору, зворотному до оператора \mathbf{A} , є зворотною стосовно матриці \mathbf{A} . У силу того, що оборотними є лише ортогональні логічні матриці, логічний оператор буде мати зворотний у тому й лише в тому випадку, коли йому відповідає ортогональна матриця. Візьмемо в логічному просторі L довільний вектор l і застосуємо до нього оператор \mathbf{A} , а потім отриманий новий вектор помножимо на логічний скаляр α , отримавши в результаті деякий вектор d . Оператор, що переводить вектор l у вектор d , називається добутком логічного скаляра α на логічний оператор \mathbf{A} і позначається через $\alpha \mathbf{A}$. Матриця, що відповідає добутку логічного скаляра α на лінійний логічний оператор \mathbf{A} , дорівнює добутку цього скаляра на матрицю, що відповідає цьому логічному операторові. Для добутку логічного скаляра на лінійний логічний оператор виконуються наступні співвідношення:

$$0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta) \mathbf{A},$$

$$\alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}).$$

Візьмемо деякі оператори \mathbf{A} і \mathbf{B} логічного простору L і кожному вектору $l \in L$ поставимо у відповідність вектор $\mathbf{A}l \vee \mathbf{B}l$. Логічний оператор, що переводить вектор l у вектор $\mathbf{A}l \vee \mathbf{B}l$,

називається диз'юнкцією логічних операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} і позначається через $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Отже, відповідно до означення,

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})l = \mathbf{A}l \vee \mathbf{B}l.$$

Диз'юнкція двох лінійних логічних операторів також є лінійним логічним оператором. Матриці диз'юнкції лінійних логічних операторів відповідає диз'юнкція матриць, що відповідають операторам, що беруть участь в зазначеній операції диз'юнкції. Для диз'юнкції лінійних логічних операторів мають місце наступні співвідношення:

комутативності

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{B} \vee \mathbf{A},$$

асоціативності

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C} = \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}),$$

дистрибутивності щодо добутку на скаляр

$$\alpha (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} \vee \alpha \mathbf{B},$$

дистрибутивності щодо диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} \vee \beta \mathbf{A},$$

закон нуля

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = \mathbf{A},$$

закон ідемпотентності

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

закони лівої та правої дистрибутивності

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} \vee \mathbf{A} \mathbf{C},$$

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} \vee \mathbf{B} \mathbf{C}.$$

5.4. МОЖЛИВІ АЛГЕБРАЇЧНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ БУЛЕВОЇ І ПРЕДИКАТНОЇ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНИХ ЛОГІЧНИХ ПРОСТОРІВ ТА ЇХНЕ ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ

Одним з окремих випадків логічної алгебри є алгебра двійкових кодів. При такій інтерпретації логічної алгебри беремо p -компонентні набори $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ цифр із двоелементної множини $G = \{0, 1\}$. Їм відповідають вектори булевого простору розмірності p . При цьому нульовому векторові відповідає нульовий набір $(0, \dots, 0)$, а одиничному – одиничний набір $(1, \dots, 1)$. У ролі базисних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ використовуються всілякі двійкові набори, до складу яких входить по одній одиниці: $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$ [9]. Під диз'юнкцією базисних векторів $\mathbf{a}_{i_1} \vee \mathbf{a}_{i_2} \vee \dots \vee \mathbf{a}_{i_t}$ в алгебрі двійкових кодів розуміється набір, у якого на i_1, i_2, \dots, i_t -их місцях розташовані одиниці, а на всіх інших місцях – нулі. Таким чином, кожен двійковий код можна в єдиний спосіб подати у вигляді

лінійної комбінації базисних кодів. Диз'юнкція векторів булевого простору відповідає диз'юнкції відповідних двійкових кодів:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \vee (\beta_1, \dots, \beta_p) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \dots, \alpha_p \vee \beta_p).$$

Кон'юнкції векторів при двійково-кодівій інтерпретації логічної алгебри відповідає кон'юнкція двійкових наборів:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \wedge (\beta_1, \dots, \beta_p) = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \dots, \alpha_p \wedge \beta_p),$$

а запереченню вектора – заперечення відповідного набору:

$$\overline{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_p).$$

Роль *скалярного поля*, над яким задано розглянутий простір, грає двоелементна множина $G = \{0, 1\}$. Легко переконатися, що всі аксіоми логічної алгебри в алгебрі p -компонентних двійкових кодів виконуються.

До *алгебри булевих функцій приходимо*, розглядаючи простір m -місних предикатів на алфавіті $K^m = \{0, 1\}^m$, заданий над скалярним полем $G = \{0, 1\}$. Усього при цьому алгебра булевих функцій містить 2^{2^m} векторів. Нульовому вектору відповідає m -місна булева функція, що тотожно дорівнює нулю, а одиничному – m -місна булева функція, що тотожно дорівнює одиниці. Очевидно, що *розмірністю* логічного простору при такій його інтерпретації є число 2^m . У ролі *базисних векторів* виступають різні булеві функції від m змінних, що обертаються в одиницю лише на одному наборі значень аргументів. Очевидно, що будь-яку булеву функцію можна в єдиний спосіб подати у вигляді лінійної комбінації базисних функцій. Усього в алгебрі m -місних булевих функцій міститься 2^m різних базисних векторів [9]. У ролі операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення векторів виступають операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення булевих функцій [37].

Розглянемо тепер *алгебру множин*. У цьому випадку роль векторного простору грає множина усіх підмножин деякого універсуму U . Роль нульового вектора грає порожня множина \emptyset , а роль одиничного – універсум U . В якості *базисних векторів* можна взяти систему всіх одноелементних підмножин U_i універсуму. *Скалярним полем* є двоелементна множина $G = \{0, 1\}$, причому $0 \cdot U_i = \emptyset$, $1 \cdot U_i = U_i$. Роль диз'юнкції векторів при теоретико-множинній інтерпретації логічної алгебри грає об'єднання множин, роль кон'юнкції – перетин множин, роль заперечення – доповнення множини до універсуму U . Очевидно, що *розмірність* простору при цьому буде дорівнювати потужності універсуму U [38, 39, 40].

Алгеброю логічного типу є також *алгебра ідей* [8]. В якості простору векторів можна взяти простір m -місних предикатів, заданих на декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_m$. Множина векторів такого простору служить носієм алгебри ідей L . В якості *скалярного поля*, над яким заданий розглянутий простір, виступає двоелементна множина $G = \{0, 1\}$. Нульова ідея відповідає предикатові, що тотожно дорівнює нулю, тобто нульовому вектору, а одинична ідея – предикату, що тотожно дорівнює одиниці, тобто одиничному вектору. Кількість базисних ідей, тобто *розмірність* логічного простору в цьому випадку буде дорівнювати

$$p = k_1 \cdot \dots \cdot k_m,$$

де k_i – потужність множини K_i . Іншими словами, у ролі *базисних ідей* виступають предикати, що обертаються в одиницю лише в одному розряді, тобто при єдиному наборі v значень аргументів [9]:

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \mathbf{1}, & (x_1, \dots, x_m) = v; \\ \mathbf{0}, & (x_1, \dots, x_m) \neq v. \end{cases}$$

Диз'юнкції, кон'юнкції та запереченню векторів такого логічного простору відповідають операції диз'юнкції [9], кон'юнкції та заперечення ідей [25].

Алгеброю логічного типу є також реляційна алгебра. В якості простору векторів можна розглядати безліч усіх m -арних відносин R_m , заданих на деякому декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_m$. Одиничний вектор при цьому відповідає універсальному відношенню U_m , а нульовий вектор – нульовому відношенню O_m [41]. Диз'юнкції, кон'юнкції та запереченню векторів відповідає об'єднання та перетин сумісних відносин [40] і доповнення відношення відповідно. При побудові реляційної моделі даних відносини задаються таблично [42, 43]. Кортжежами при цьому служать ті набори значень аргументів, при яких значення відповідного розглянутому відношенню m -місного предиката дорівнює одиниці. В якості скалярного поля, над яким заданий розглянутий простір m -арних відносин, можна взяти безліч усіх n -арних відносин, $n < m$.

Принцип побудови базису для такого простору той же самий, що й для побудови базису простору m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів. У випадку простору відносин фіксуються значення останніх $m - n$ атрибутів, і в таблиці відносин записуються відповідні кортежі й лише вони. Побудовані в такий спосіб відносини приймаються як базисні вектори простору. Аналогом операції добутку вектора на скаляр у реляційній алгебрі служить операція вибору, що дозволяє будувати «горизонтальну» підмножину відносини, тобто підмножину кортежів усередині відношення, що володіють заданою властивістю, тобто задовольняючих визначеному предикату [40, 42]. Очевидно, що при такому виборі базису будь-яке відношення R_m може бути в єдиний спосіб подане у вигляді лінійної комбінації базисних відносин. Очевидно, що розмірністю такого логічного простору m -арних відносин є число $p = k_{n+1} \dots k_m$, де $k_i = |K_i|$, $i = \overline{1, m}$.

Алгеброю логічного типу є також алгебра скінченних предикатів довільного порядку [5]. В якості логічних векторів розглянемо множину усіляких скінченних предикатів m -го порядку $Q(x_{01}, \dots, x_{0t_0}, x_{11}, \dots, x_{1t_1}, \dots, x_{m-1,1}, \dots, x_{m-1,t_{m-1}})$, заданих на декартовому добутку $K_0^{t_0} \times K_1^{t_1} \times \dots \times K_{m-1}^{t_{m-1}}$. Потужність множини K_i позначимо через k_i . Нульовому вектору відповідає предикат, що тотожно дорівнює нулю, а одиничному вектору – предикат, що тотожно дорівнює одиниці. Диз'юнкції, кон'юнкції та запереченню векторів відповідають операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення відповідних предикатів m -го порядку. Скалярне поле, над яким заданий розглянутий простір, є повним набором скінченних предикатів n -го порядку, причому $n < m$, заданих на декартовому добутку $K_0^{t_0} \times K_1^{t_1} \times \dots \times K_{n-1}^{t_{n-1}}$. Операція добутку вектора на скаляр для заданого в такий спосіб логічного простору проводиться за тим же правилом, що і для логічних просторів m -місних предикатів першого порядку, заданих над скалярним полем n -місних предикатів першого порядку.

Кількість векторів розглянутого простору дорівнює $2^{k_0^{t_0} k_1^{t_1} \dots k_{m-1}^{t_{m-1}}}$, а кількість елементів скалярного поля – $2^{k_0^{t_0} k_1^{t_1} \dots k_{n-1}^{t_{n-1}}}$. Отже, з урахуванням формули (5.24), розмірність розглянутого простору буде дорівнювати

$$p = k_n^{t_n} k_{n+1}^{t_{n+1}} \dots k_{m-1}^{t_{m-1}}.$$

У якості базисних беруться предикати, що підкоряються умові, аналогічній тій, яку було

введено для базисних векторів простору предикатів першого порядку з тією різницею, що у випадку простору предикатів m -го порядку при побудові базисних векторів фіксується не довільне число змінних, а всі змінні з деякої множини рівнів змінних $J = \{t_0, \dots, t_{m-1}\}$, тобто всі змінні деяких рівнів, кількість яких, тобто потужність множини J , дорівнює $(m - n)$. Очевидно, що при такому виборі базису будь-який предикат m -го порядку може бути в єдиний спосіб поданий у вигляді лінійної комбінації базисних предикатів.

Розглянемо тепер алгебру предикатних операцій. В якості простору векторів розглянемо простір предикатних операцій M^m розмірності m [7]. Предикатними змінними при цьому служать t -місні предикати $X_j(x_1, \dots, x_t)$, $i = \overline{1, m}$, задані на декартовому добутку $K_1 \times \dots \times K_t$, де $|K_i| = k_i, j = \overline{1, t}$. Потужністю універсума предикатів служить число $2^{k_1 \dots k_t}$. Однак, з іншого боку, універсум предикатів є алфавітом, над яким задані вектори розглянутого простору. У ролі операцій диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення векторів виступають операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення відповідних предикатних операцій. Роль нульового вектора грає константна предикатна операція, значенням якої є предикат $P(x_1, \dots, x_t) \equiv 0$, що тотожно дорівнює нулю, а роль одиничного вектора – константна предикатна операція, значенням якої є предикат $P(x_1, \dots, x_t) \equiv 1$, що тотожно дорівнює одиниці. В якості скалярного поля можна взяти простір предикатних операцій M^n розмірності $n, n < m$.

Кількість векторів розглянутого логічного простору дорівнюватиме $2^{(2^{k_1 k_2 \dots k_t})^m}$. Кількість елементів скалярного поля дорівнюватиме $2^{(2^{k_1 k_2 \dots k_t})^n}$. Отже, розмірність побудованого в такий спосіб логічного простору дорівнюватиме

$$p = (2^{k_1 k_2 \dots k_t})^{m-n}.$$

Операція добутку вектора на скаляр у такому просторі проводиться за правилом, аналогічним тому, що було введено для простору m -місних предикатів, заданого над скалярним полем n -місних предикатів. Умова, якій підкоряються базисні предикатні операції, у такому логічному просторі аналогічна тій, якій підкорялися базисні вектори в просторі m -місних предикатів, з тією різницею, що фіксуються конкретні значення не предметних змінних, а конкретні значення деяких $(m - n)$ предикатних змінних. Будь-яка предикатна операція при такому виборі базису може бути в єдиний спосіб поданою у вигляді лінійної комбінації базисних предикатних операцій.

З усього вищесказаного випливає, що логічна алгебра є абстрактним еквівалентом розглянутих алгебр. Отже, незалежно від того, у вигляді елементів якої саме з розглянутих алгебр подано інформацію про програмне забезпечення, що моделюється, її можна розглядати як подану елементами булевої або предикатної моделей векторних логічних просторів і, отже, обробляти засобами логічної алгебри [44].

5.5. МАТЕМАТИЧНА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТЕКСТІВ ПРИРОДНОЇ МОВИ

5.5.1. Математичний опис змісту текстів природної мови

Розглянемо, *наприклад*, висловлення

$$\langle\langle x + y = z \rangle\rangle, \quad (5.57)$$

де x, y, z – предметні змінні, під якими в цьому випадку розуміються змінні, визначені на множині $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ всіх додатних цілих чисел. У такому вигляді висловлювання (5.57) не є ані істинним, ані хибним. Але якщо підставити в нього замість змінних x, y, z якісь їхні конкретні значення із множини N , то висловлювання (5.57) вже стає або істинним, або хибним. Нехай, наприклад, $x = 2, y = 3, z = 5$. Тоді висловлювання (5.57) стає *тавтологією* $2 + 3 = 5$ і автоматично є істинним. Якщо ж прийняти $x = 0, y = 1, z = 2$, то це ж саме висловлювання перетворюється на *протиріччя* $0 + 1 = 2$. У цьому випадку воно є хибним. Отже, висловлювання (5.57) містить у собі деяку функцію $\xi = f(x, y, z)$, що є відображенням множини N^3 у множину Σ . Функції із двійковими значеннями, що залежать від значень довільних аргументів, називаються **функціями істинності** або **предикатами**. Отже, змістом математичного речення (висловлення) є предикат $\xi = f(x_1, \dots, x_m)$, що є залежністю істинності змінної ξ від предметних змінних x_1, \dots, x_m цього висловлення [49]. Будь-яке математичне твердження є рівнянням вигляду $f(x_1, \dots, x_m) = 1$, що задає цілком визначене відношення, що зв'язує між собою предметні змінні x_1, \dots, x_m [50]. Важливо відзначити, що таке трактування змісту висловлювання в математиці є загальноприйнятим, ніяких сумнівів у його правильності ні в кого не виникає. Математик розглядає кожне висловлювання як формулу, а будь-яка формула завжди виражає якусь функцію й нічого більше. Саме для вираження функцій і були створені формули математиками. Висловлювання ж завжди виражає деяку функцію із двійковими значеннями, таким чином, його змістом (значенням) служить цілком визначений предикат.

Ми розглянули, чим є зміст математичного речення. Тепер, керуючись гіпотезою про близьке споріднення природної й математичної мов, припустимо, що таке трактування змісту може бути застосоване й до речень природної мови. Іншими словами, будемо виходити з того, що змістом кожного речення природної мови служить деякий предикат. А якщо це так, то до кожного речення природної мови має бути застосоване поняття істинності змінної з її двома значеннями «істинно» та «хибно». Перевіримо цей висновок на практиці. Беремо якесь речення природної мови, наприклад, «*На столі лежить книга*». Узятє саме по собі, воно не є ані істинним, ані хибним. Але якщо його співвіднести з якоюсь реальною ситуацією, то речення стає істинним або хибним.

Справедливість останнього твердження можна продемонструвати наступним експериментом. Дослідник, звертаючись до випробуваного, вимовляє речення: «*На столі лежить книга*». У ролі випробуваного може виступати будь-яка людина, що володіє природною мовою, на якій було вимовлене речення. У той момент, коли дослідник вимовляє слово «*стіл*», він указує на деякий предмет (назвемо його першим); коли ж вимовляє слово «*книга*», указує на другий предмет. Предмети обираються дослідником довільно: вони не обов'язково мають бути столом і книгою. Дослідник просить випробуваного визначити, відповідає зміст речення фактичному положенню справи чи ні; інакше кажучи, він пропонує йому встановити, істинним або хибним в даній конкретній ситуації є пред'явлене речення. Якщо перший предмет є саме столом, а другий – саме книгою, і другий, до того ж, лежить на першому, то випробуваний дасть позитивну відповідь. Якщо ж хоча б одна із цих умов не виконується (наприклад, другий предмет – це зошит, або ж – книга, але вона не лежить на столі, а покладена в шафу), тоді випробуваний відреагує негативною відповіддю. Отже, є очевидним, що в даному питанні гіпотеза про близьке споріднення природної й математичної мов себе виправдовує: виявляється, що поняття істинності змінної може бути застосоване до речень природної мови, подібно тому, як воно застосовується до речень мови математичної.

Якщо змістом речення природної мови, дійсно, служить предикат, то в реченнях мають бути присутніми не лише істинності, але також і предметні змінні. Перевіряємо, чи так це є насправді. Беремо речення *«На столі лежить книга»*. Шукаємо в ньому предметні змінні. Предметних змінних у тексті речення немає. Але текст речення – це ще не саме речення, а лише його запис. Речення характеризується не лише текстом, але й своїм змістом, воно виражає деяку думку. А думка перебуває в розумі людини. Відомо, що в текстах природної мови дуже широко використовуються скорочення (до них належать, наприклад, еліпсис, анафора й омографія). Математичні вирази теж пишуться в скороченій формі [50]. Не виключено, що в тексті речення предметні змінні просто, для стислості, опущені. А в думці, що виражає речення, предметні змінні напевно присутні.

Швидше за все, їх варто шукати в думці, що відповідає реченню *«На столі лежить книга»*. Фактично ними ми вже оперували, коли розглядали експеримент на випробуваному. У ньому дослідник указував на два предмети, причому кожний з них він обирав довільно. Тобто, насправді, там мова йшла не тільки про предмети, але й про предметні змінні. Позначимо ці предметні змінні символами x і y . Коли дослідник вказує випробуваному конкретні предмети (наприклад, якийсь стіл і якусь книгу), він приписує змінним x і y певні значення. Виявляється, що можна записати речення в більш розгорнутій формі в такий спосіб, щоб у ньому з'явилися предметні змінні. Виглядати тепер воно буде таким чином: *«Предмет x є стіл, предмет y є книга, предмет y лежить на предметі x »*. Очевидно, що в такому, більше докладному, записі речення виражає ту ж саму думку, що і його короткий вихідний запис. Очевидно, що кожна людина, що встановлює, істинним або хибним є деяке речення, для вирішення цього питання буде змушена звернутися до предметних змінних цього речення і замістити їх конкретними предметами з деякої цілком визначеної ситуації. Текст речення природної мови можна розглядати як формулу, записану в скороченій формі, що виражає деякий предикат. За нею людина обчислює істинностне значення речення при заданих значеннях його предметних змінних.

Таким чином, гіпотеза про тісне споріднення природної та математичної мов знову підтверджується. З її допомогою можна легко виявити в реченні природної мови не лише істинностну змінну, але також і предметні змінні. У результаті підтвердилося припущення, що речення природної мови є, як і математичне висловлювання, носієм деякого предиката, що є залежністю істинностної змінної речення від його предметних змінних. Цей предикат ми й приймемо як формальний еквівалент змісту речення природної мови. Таким чином, можна дійти висновку, що зміст кожного речення подається лише предикатом, значення якого визначаються значеннями його предметних змінних. Речення природної мови, як і математичні твердження, у змістовному плані є відношеннями.

Твердження про те, що зміст будь-якого речення природної мови й тексту, утвореного із речень, можна вичерпним чином формально виразити деяким цілком визначеним предикатом, породжує масу заперечень і запитань. Одне з головних заперечень полягає в наступному. Якщо кожне речення має свій єдиний змістовий предикат, то залишається незрозумілим, як можуть існувати багатозначні речення, що мають два змістових значення? Відповідь, по суті, дуже проста: багатозначність речення виникає винятково через те, що його текст записаний у занадто скороченій, а тому й неповній, формі. Візьмемо, *наприклад*, математичне висловлення (5.57) і «скоротимо» його, виключивши з його запису знак $+$. У результаті отримаємо запис *« x y = z »* із пропущеним знаком операції. Його можна розуміти по-різному: як колишнє висловлення, як *« x y = z »* або *« x – y = z »*, або ще якимось іншим чином. З математичної точки

зору прийняти такий скорочений запис за саме висловлювання неможна. Ця неможливість пов'язана з тим, що запис висловлювання є багатозначним через свою неповноту, тому неможливо встановити точно, що це за висловлювання. Можна лише говорити про його можливі варіанти. Зміст висловлювання можна буде визначити однозначно лише після уточнення його тексту.

Правильний підхід до вивчення проблеми багатозначності змісту речення природної мови складається в чіткому розмежуванні двох понять: тексту речення й думки (або думок), що виражені ним. Текст речення може бути багатозначним, але кожна з думок, що виражені ним, завжди єдинична. Іноді трапляється, що багатозначність у текст речення вводять навмисно. Це означає, що таким реченням хочуть виразити одночасно кілька думок. Таким чином, стає очевидним, що кожному реченню відповідає, загалом кажучи, не одна думка, а ціла їхня множина (зокрема, якщо речення розуміється однозначно, то ця множина буде одноелементною, якщо ж воно взагалі не має змісту, те порожньою). Будемо речення, що розуміють однозначно, і тексти надалі називати **висловлюваннями**, запозичаючи цей термін з математики (кожне математичне висловлювання розуміється однозначно). Прикладом мовленнєвого висловлювання може служити речення, що використовувалося раніше: **«Предмет x є стіл, предмет y є книга, предмет z лежить на предметі x »**.

Візьмемо фразу **«На столі лежить книга»**. Вона містить у собі багато змістових варіантів. Один з них ми вже розглянули раніше. Розглянемо інший варіант. Він відрізняється від першого тим, що тепер дослідник, пред'являючи випробуваному ту ж саму фразу, вказує йому лише на перший предмет. Якщо цей предмет не стіл, то випробуваний відреагує негативною відповіддю, а якщо стіл, то подивиться, чи лежить на ньому хоча б одна книга. Якщо так, він скаже, що висловлювання є істинним, а якщо ж ні, то хибним. Повний змістовий переклад фрази тепер виходить трохи іншим: **«Предмет x є стіл, та існує предмет y такий, що предмет y є книга, і предмет z лежить на предметі x »**. Є й третій варіант, коли дослідник вказує лише на другий предмет. Повний зміст фрази в цьому випадку запишеться у вигляді: **«Предмет y є книга, і існує предмет x , такий, що предмет x є стіл, і предмет z лежить на предметі x »**. Якщо ж дослідник, пред'являючи все ще ту ж саму фразу, не вказує жодного із предметів, тоді випробуваний буде змушений звернутися до четвертого значеннєвого варіанта: **«Існують предмети x та y такі, що предмет x є стіл, предмет y є книга, і предмет z лежить на предметі x »**. Щоб визначити істинностне значення цього висловлення, випробуваний має оглянути ситуацію. Наприклад, кімнату, у якій проводиться експеримент (дослідник ще до початку експериментів зобов'язаний чітко окреслити ситуацію, у якій буде діяти випробуваний). Потім він має виявити всі наявні в ній столи, і, якщо хоча б на одному з них лежить принаймні одна книга, відреагувати позитивною відповіддю, у протилежному випадку – негативною. Отже, речення **«На столі лежить книга»** містить у собі чотири різних висловлювання. Це речення відіграє роль *неповного запису* для даних висловлень. Кожне із цих висловлювань виражає єдину вкладену в нього думку і є її *повним записом*, який відображається окремим для кожного висловлювання предикатом. Крім таких відомих у мовознавстві причин багатозначності речення, як еліпсис, анафора й омографія, є й ще одна – відсутність предметних змінних у тексті речення.

Таким чином, можна записувати **мовленнєві висловлювання**, тобто однозначні в змістовному відношенні тексти природної мови. Цього вдалося досягти введенням у текст речення предметних змінних. Але в тому вигляді, у якому тексти висловлень нам вдавалося дотепер записувати, вони мають серйозний недолік: їм ще дуже далеко до повної формалізації,

оскільки записуються вони все ще тією ж природною мовою. Правда, у текстах висловлювань з'явилися вкраплення математичної символіки у вигляді предметних змінних. Такі тексти розуміє людина, але не зможе зрозуміти машина (слово «зрозуміти» у цьому випадку означає: виразити змістовий предикат висловлювання у вигляді чисто математичної формули без використання в ній якихось мовленнєвих одиниць).

Рухатися в напрямку повної формалізації запису висловлювання можна, поступово замінюючи в ньому елементи природної мови на математичні вирази. Процес цей не може тривати нескінченно, колись він має вичерпатися. І тоді ми отримаємо повністю формалізований запис висловлювання, що буде доступний розумінню машини. Для цього розглянемо висловлювання: *«Предмет x є стіл, предмет y є книга, предмет y лежить на предметі x »*. Воно легко розчленовується на три висловлювання: *«Предмет x є стіл»*, *«Предмет y є книга»*, *«Предмет y лежить на предметі x »*. Кожне з цих висловлювань має свій зміст, а це означає, що і свій предикат. Позначимо предикат першого висловлювання символом $\text{стіл}(x)$, другого – $\text{книга}(y)$, третього – $\text{лежить на}(y, x)$. Записи «стіл», «книга», «лежить на» тепер виступають у ролі імен якихось предикатів, а яких саме – поки невідомо. Очевидно, що предикат вихідного висловлювання можна подати у вигляді кон'юнкції цих трьох предикатів. Зміст вихідного висловлювання тепер запишеться у вигляді $\text{стіл}(x) \wedge \text{книга}(y) \wedge \text{лежить на}(y, x)$. Хоча до повної формалізації тексту цього висловлювання все ще далеко, проте, деяке просування вперед є. Останній запис вже схожий на формулу: видно, що нею виражається якийсь предикат. Разом з тим, вона легко сприймається і як саме висловлювання: по ній можна без напруги відновити вихідний текст висловлювання. Слід також зазначити, що запис висловлювання в результаті переходу до слів-предикатів істотно скоротився: тепер він став лише трохи довший за первісну фразу *«На столі лежить книга»*. Він, на відміну від останнього запису, має єдиний сенс. Повної формалізації даного тексту висловлювання буде досягнуто, якщо вдасться позбутися в ньому словесного матеріалу «стіл», «книга» і «лежить на», замінивши його математичними виразами.

Але це не межа того, що можна легко зробити вже зараз для формалізації тексту. Предикат $\text{лежить на}(y, x)$ можна піддати подальшому розчленуванню. Уведемо предикат $\text{лежить}(y)$, що розуміється в сенсі *«Предмет y лежить»*, і предикат $\text{на}(y, x)$, що відповідає висловлюванню *«Предмет y розташований на предметі x »*. Очевидно, що предикати $\text{лежить на}(y, x)$ і $\text{лежить}(y) \wedge \text{на}(y, x)$ збігаються. Припускає подальше розщеплення й предикат $\text{лежить}(y)$. Його можна подати у вигляді кон'юнкції предикатів *теперішній час*(y) і *лежати*(y). Перший предикат означає: *«Предмет y спостерігається в сучасний момент часу»*, другий: – *«Предмету y властивий стан лежання»* (безвідносно до часу). Поєднуючи кон'юнкцією всі введені предикати, записуємо розглянуте висловлення у вигляді:

$$\text{стіл}(x) \wedge \text{книга}(y) \wedge \text{теперішній час}(y) \wedge \text{лежати}(y) \wedge \text{на}(y, x).$$

Рухатися далі в аналізі змістової структури даного висловлювання ми поки не будемо. Щоб це здійснити, треба буде проникнути в значеннєву структуру слів «стіл», «книга», «теперішній час», «лежати» й «на». Для цього можна звернутися до тлумачного словника, виразивши зміст кожного із цих слів за допомогою наведених у ньому визначень, у ролі яких виступають словосполучення, складені з інших слів. Коли цей процес обірветься, потрібно зібрати слова, що залишилися невираженими, і зв'язати їх одне з одним системою висловлювань, що сприймаються носіями природної мови як істинні. Ця система висловлювань відіграє роль аналога системи аксіом, що визначають первинні поняття

математики. А в мові вона абстрактно визначає зміст слів, які не вдається виразити за допомогою прямих визначень через інші слова.

5.5.2. Формалізація простих словосполучень логіко-алгебраїчними засобами

Фрагмент тексту складається із речень, а кожне речення komponується із висловлювань, що можуть містити «підвисловлювання» і, врешті решт, складаються із слів [49]. Граматика визначає спосіб, у відповідності з яким слова і висловлювання можуть об'єднуватися в речення.

Розглянемо речення з точки зору логічної алгебри [51]. В якості прикладу візьмемо об'єкт «квітка», якому притаманна якість «синя». Нехай об'єкту «квітка» відповідає вектор l деякого логічного простору L , а якості «синій» – скаляр α [20]. Тоді висловлюванню «синя квітка» відповідає добуток вектору l на скаляр α . Тобто це висловлювання формалізується виразом αl . Перевіримо виконання аксіом логічної алгебри для обраного векторного простору та обраного скалярного поля. В даному прикладі в якості векторного простору взято множину усіх об'єктів, а в якості скалярного поля – множину усіх якостей об'єктів. На множині векторів задано булеві операції заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції. Тоді

$$\langle \text{не квітка} \rangle = \overline{\langle \text{квітка} \rangle} = \bar{l}.$$

Нехай об'єкту «хустка» відповідає деякий вектор $g \in L$. Тоді

$$\langle \text{квітка} \text{ або хустка} \rangle = \langle \text{квітка} \rangle \vee \langle \text{хустка} \rangle = l \vee g,$$

$$\langle \text{квітка} \text{ та хустка} \rangle = \langle \text{квітка} \rangle \wedge \langle \text{хустка} \rangle = l \wedge g.$$

На множині елементів скалярного поля задані ті ж самі булеві операції. Тоді

$$\langle \text{не синій} \rangle = \overline{\langle \text{синій} \rangle} = \bar{\alpha}.$$

Нехай якості «великий» відповідає логічний скаляр β . Тоді

$$\langle \text{синій} \text{ або великий} \rangle = \langle \text{синій} \rangle \vee \langle \text{великий} \rangle = \alpha \vee \beta,$$

$$\langle \text{синій} \text{ та великий} \rangle = \langle \text{синій} \rangle \wedge \langle \text{великий} \rangle = \alpha \wedge \beta.$$

Таким чином, в такий спосіб задані операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення об'єктів і якостей задовольняють усім аксіомам логічного поля [52]. Сентенційні зв'язки є назвами відповідних операцій. Сполучник «або» розглядається як ім'я операції диз'юнкції, сполучник «і (й, та)» – як ім'я операції кон'юнкції, а частка «не» – як ім'я операції заперечення [53].

Очевидно, що виконуються також і аксіоми, що пов'язують добуток логічних скалярів і логічних векторів. А саме:

асоціативність

$$(\alpha \beta) l = \langle (\text{синя} \text{ та велика}) \text{ квітка} \rangle = \langle \text{синя} \rangle \text{ та } (\langle \text{велика квітка} \rangle) = \alpha (\beta l);$$

дистрибутивність відносно диз'юнкції скалярів

$$(\alpha \vee \beta) l = \langle (\text{синя} \text{ або велика}) \text{ квітка} \rangle = \langle \text{синя квітка} \rangle \text{ або } \langle \text{велика квітка} \rangle = \alpha l \vee \beta l;$$

дистрибутивність відносно диз'юнкції векторів

$$\alpha (l \vee g) = \text{«синя (квітка або хустка)»} = \text{«синя квітка»} \text{ або } \text{«синя хустка»} = \alpha l \vee \alpha g.$$

Таким чином, множину об'єктів можна розглядати як векторний логічний простір, що заданий над скалярним полем, елементами якого є якості об'єктів.

Якщо в якості скалярного поля взяти множину об'єктів, а в якості заданого над ним простору векторів – множину якостей об'єктів, то, вочевидь, усі аксіоми логічного простору також будуть виконуватися. Тобто множину якостей об'єктів також можна розглядати як векторний логічний простір над скалярним полем, елементами якого є об'єкти. Розглянутий приклад ілюструє випадок, коли залежним словом в словосполученні є прикметник. Однак, для дієприкметників, присвійних займенників, порядкових числівників і кількісних числівників у непрямих відмінках, що також можуть бути залежними словами в словосполученнях з таким видом зв'язку, як узгодження, усі аксіоми логічного простору також виконуються. Таким чином, такий вид зв'язку слів у словосполученнях, як узгодження, може бути формалізований за допомогою математичного апарату векторних логічних просторів.

Розглянемо тепер словосполучення як частину речення, маючи на увазі, що словосполучення є результатом розчленування речення на одиниці, яким притаманна деяка змістовна цілісність. В останній час саме цей напрямок завоював популярність в лінгвістиці. Існує алгоритм виділення головних членів речення [54]. Кожне речення описує деяке відношення, що подається присудком. Підмет може бути виражений іменником, займенником або іншим словом, що відмінюється (прикметником або дієприкметником), в називному відмінку та визначає предмет, тобто деякий об'єкт реального світу в прийнятій вище класифікації. Присудок при цьому виражає деяку ознаку (дію, стан, властивість, якість) предмета, що описаний підметом. Якщо за присудок взятий дієприкметник або прикметник («Квітка зрізана.», «Дівчина красива.»), то такий присудок є властивістю або якістю підмета. Тобто в цьому випадку зв'язок між підметом і присудком може бути формалізований аналогічно узгодженню.

Найбільш поширеною формою присудка є дієслівний присудок. Розглянемо простий дієслівний присудок. Він може бути виражений

- формами дійсного, умовного і наказового способів («Розглянемо приклад.», «Подивіться уважно.», «Побачив би відразу.»);
- інфінітивом, що підкреслює інтенсивний початок дії («Він задачу – розв'язувати.»);
- дієслівним вигуком («Він туди – глядь.»).

Розглянемо розповсюджені двоскладові речення. Розіб'ємо групу присудка на прості словосполучення і візьмемо ті з них, в яких головним словом є присудок, а залежними – іменники, займенники-іменники та субстантивовані слова. Типом зв'язку в таких словосполученнях є управління. Покажемо, що й такі словосполучення можуть бути формалізовані за допомогою апарата логічної алгебри.

В якості скалярного поля візьмемо множину дієслів-присудків, тобто відношень, а в якості простору векторів – множину залежних слів у вказаних словосполученнях. Нехай, наприклад, дієсловом «взяти» і «подарувати» відповідають логічні скаляри γ і λ . Тоді

$$\text{«не взяти»} = \overline{\text{«взяти»}} = \bar{\gamma},$$

$$\text{«взяти або подарувати»} = \text{«взяти»} \vee \text{«подарувати»} = \gamma \vee \lambda,$$

$$\text{«взяти та подарувати»} = \text{«взяти»} \wedge \text{«подарувати»} = \gamma \wedge \lambda.$$

Таким чином, для обраних в такий спосіб елементів задані булеві операції. Тобто цю множину елементів дійсно можна розглядати як логічне поле. Залежні слова в цих словосполученнях є в прийнятій класифікації об'єктами. Можливість їх розглядання в якості логічного поля вже була доведена вище.

Перевіримо тепер виконання аксіом, що пов'язують логічні вектори і логічні скаляри. Вочевидь, що

$$(\gamma \lambda) l = \langle\langle \text{взяти та подарувати} \rangle \rangle \text{квітку} = \langle\langle \text{взяти} \rangle \rangle \text{та} \langle\langle \text{подарувати} \rangle \rangle \text{квітку} = \gamma (\lambda l);$$

$$\begin{aligned} (\gamma \vee \lambda) l &= \langle\langle \text{взяти або подарувати} \rangle \rangle \text{квітку} = \\ &= \langle\langle \text{взяти} \rangle \rangle \text{квітку} \text{ або} \langle\langle \text{подарувати} \rangle \rangle \text{квітку} = \gamma l \vee \lambda l; \end{aligned}$$

$$\gamma (l \vee g) = \langle\langle \text{взяти (квітку або хустку)} \rangle \rangle = \langle\langle \text{взяти} \rangle \rangle \text{квітку} \text{ або} \langle\langle \text{взяти} \rangle \rangle \text{хустку} = \gamma l \vee \gamma g.$$

Тобто виконуються усі аксіоми логічної алгебри. Отже, такий вид зв'язку слів у словосполученнях як керування із головним словом, що подане дієсловом, також може бути формалізований засобами логічної алгебри. Вочевидь, що якщо в словосполученнях за логічні вектори взяти присудки, а за скаляри – залежні від них слова, то аксіоми логічної алгебри також будуть виконуватися. Отже, при формалізації керування з дієсловом в якості головного слова напрямок формалізації за допомогою векторних логічних просторів несуттєвий.

Розглянемо тепер зв'язок підмета і простого дієслівного присудка. Множиною слів, що можуть бути підметом, є множина «об'єктів». Вона є логічним полем, як і множина слів, що можуть бути простим дієслівним присудком. Нехай об'єктам «хлопчик» і «дівчинка» відповідають вектори h і d , а дієсловам «грає» та «малює» – скаляри μ і τ . Тоді, вочевидь,

$$(\mu \tau) l = \langle\langle \text{грає та малює} \rangle \rangle \text{хлопчик} = \langle\langle \text{грає} \rangle \rangle \text{та} \langle\langle \text{малює} \rangle \rangle \text{хлопчик} = \mu (\tau l);$$

$$(\mu \vee \tau) l = \langle\langle \text{грає або малює} \rangle \rangle \text{хлопчик} = \langle\langle \text{грає} \rangle \rangle \text{хлопчик} \text{ або} \langle\langle \text{малює} \rangle \rangle \text{хлопчик} = \mu l \vee \tau l;$$

$$\mu (l \vee g) = \langle\langle \text{грає (хлопчик або дівчинка)} \rangle \rangle = \langle\langle \text{грає} \rangle \rangle \text{хлопчик} \text{ або} \langle\langle \text{грає} \rangle \rangle \text{дівчинка} = \mu l \vee \mu g.$$

Отже, всі аксіоми логічної алгебри в цьому випадку також виконуються. Тобто зв'язок підмета і простого дієслівного присудка може бути формалізований в такий самий спосіб, що і керування з дієсловом в якості головного слова. Аналогічно, якщо за вектори взяти присудки, а за елементи скалярного поля – підмети, то і в цьому випадку аксіоми логічного простору будуть виконуватися. Отже, зв'язок підмета і простого дієслівного присудка також може бути формалізований в будь-якому напрямку.

Керуючим словом також може бути іменник. В цьому випадку і головне, і залежне слова у словосполученні є «об'єктами» в обраній класифікації. Як було показано, множину об'єктів можна розглядати і як векторний логічний простір над деяким скалярним полем, і як скалярне поле, над яким заданий деякий векторний логічний простір. Покажемо, що воно може бути одночасно і тим, і іншим. Нехай об'єкту «листок» відповідає вектор w , а об'єктам «троянда» та «лілія» – скаляри ϕ і ψ . Тоді, вочевидь,

$$(\phi \psi) l = \langle\langle \text{квітка (троянди та лілії)} \rangle \rangle = \langle\langle \text{квітка} \rangle \rangle \text{лілії} \text{ та} \langle\langle \text{троянди} \rangle \rangle = \phi (\psi l);$$

$$(\phi \vee \psi) l = \langle\langle \text{квітка (троянди або лілії)} \rangle \rangle = \langle\langle \text{квітка} \rangle \rangle \text{троянди} \text{ або} \langle\langle \text{квітка} \rangle \rangle \text{лілії} = \phi l \vee \psi l;$$

$$\begin{aligned} \phi (l \vee w) &= \langle\langle \text{квітка або листок} \rangle \rangle \text{троянди} = \\ &= \langle\langle \text{квітка} \rangle \rangle \text{троянди} \text{ або} \langle\langle \text{листок} \rangle \rangle \text{троянди} = \phi l \vee \phi w. \end{aligned}$$

Отже, виконуються усі аксіоми логічної алгебри. Очевидно, що, як і в раніше розглянутих випадках, напрямок формалізації не є суттєвим. Таким чином, і такий вид керування, де керуюче слово подане іменником, може бути формалізований в будь-якому напрямку за допомогою векторних логічних просторів. При цьому залежне слово у словосполученні можна розглядати як деяку властивість або якість керуючого слова [52].

Розглянемо тепер присудок, що виражений іменником. Такий присудок можна інтерпретувати як деяку ознаку, притаманну підмету, і, таким чином, зв'язок між підметом і присудком також можна формалізувати як керування, в якому головним словом є іменник. Такий присудок може бути приєднаний до підмета за допомогою порівняльних сполучників «*як*», «*що*», «*точно*», «*все одно, що*» («*Слово – як зброя.*», «*Він що телень.*», «*Вона точно красуня.*», «*Старі все одно, що діти.*») або за допомогою частки «*це*» («*Пісня – це радість.*»).

Наступним різновидом керуючого слова може бути прикметник, дієприкметник або порядковий числівник. Як вже було зазначено, множину таких слів можна розглядати як логічне поле. Нехай керуючим словам «*зрозумілий*» і «*доступний*» відповідають логічні вектори r і s , а залежним словам «*школяр*» і «*студент*» – скаляри ρ і π . Тоді, вочевидь,

$$\begin{aligned}(\rho \pi) r &= \langle \text{зрозумілий (школяру та студенту)} \rangle = \\ &= \langle \text{зрозумілий студенту} \rangle \text{ та } \langle \text{школяру} \rangle = \rho (\pi r); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho \vee \pi) r &= \langle \text{зрозумілий (школяру або студенту)} \rangle = \\ &= \langle \text{зрозумілий школяру} \rangle \text{ або } \langle \text{зрозумілий студенту} \rangle = \rho r \vee \pi r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho (r \vee s) &= \langle \text{зрозумілий або доступний школяру} \rangle = \\ &= \langle \text{зрозумілий школяру} \rangle \text{ або } \langle \text{доступний школяру} \rangle = \rho r \vee \rho s. \end{aligned}$$

Тобто виконуються усі аксіоми логічної алгебри. Причому, як і раніше, неважливо, яку саме з цих множин брати в якості логічного простору, а яку – за скалярне поле, над яким цей простір заданий. Отже, керування з головним словом у вигляді прикметника, дієприкметника або порядкового числівника також в будь-якому напрямку може бути формалізоване векторними логічними просторами.

Останнім різновидом зв'язку слів у словосполученні є прилягання. Якщо це порівняльний ступінь прикметника або прикметник, що не змінюється, то він може прилягати лише до іменника. Таким чином, такі словосполучення можна формалізувати аналогічно узгодженню («*колір синій або беже*», «*будинок вищий або нижчий*», «*будинок або двері вищі*» тощо). До іменника також може прилягати інфінітив. Тоді формалізацію можна проводити в той же спосіб, що й для керування з дієсловом в якості головного слова («*бажання або вміння працювати*», «*бажання відпочивати або працювати*» тощо). Якщо до іменника прилягає прислівник, то таке прилягання також підкорюється законам логічної алгебри. Нехай прислівникам «*нішки*» та «*вдвох*» відповідають логічні скаляри χ і ξ . Тоді

$$\begin{aligned}\langle \text{не нішки} \rangle &= \overline{\langle \text{нішки} \rangle} = \bar{\chi}, \\ \langle \text{нішки або вдвох} \rangle &= \langle \text{нішки} \rangle \vee \langle \text{вдвох} \rangle = \chi \vee \xi, \\ \langle \text{нішки та вдвох} \rangle &= \langle \text{нішки} \rangle \wedge \langle \text{вдвох} \rangle = \chi \wedge \xi. \end{aligned}$$

Тобто множину прислівників можна розглядати як логічне поле.

Нехай іменникам «*прогулянка*» та «*подорож*» відповідають логічні вектори t і f . Тоді, вочевидь [52],

$$\begin{aligned}
(\chi \xi) t &= \langle \text{прогулянка (нішки та вдвох)} \rangle = (\langle \text{прогулянка вдвох} \rangle) \text{ та } \langle \text{нішки} \rangle = \chi (\xi t); \\
(\chi \vee \xi) t &= \langle \text{прогулянка (нішки або вдвох)} \rangle = \\
&= \langle \text{прогулянка нішки} \rangle \text{ або } \langle \text{прогулянка вдвох} \rangle = \chi t \vee \xi t; \\
\chi (t \vee f) &= \langle \text{прогулянка або подорож нішки} \rangle = \\
&= \langle \text{прогулянка нішки} \rangle \text{ або } \langle \text{подорож нішки} \rangle = \chi t \vee \chi f.
\end{aligned}$$

Отже, і в цьому випадку усі аксіоми логічної алгебри виконані, і такий вид словосполучень також може бути формалізований за допомогою векторних логічних просторів. З цього випливає, що якщо присудок у двоскладовому реченні поданий прислівником, то зв'язок підмета і присудка можна формалізувати в той же спосіб, що й розглянутий вид прилягання. Причому, як і в попередніх випадках, не має значення напрямок формалізації.

Прислівники можуть прилягати до дієслова. Як було зазначено вище, і множина прислівників, і множина дієслів є логічними полями. Нехай дієсловом «писати» і «читати» відповідають вектори a і b , а прислівникам «швидко» і «правильно» – скаляри δ і ω . Тоді

$$\begin{aligned}
(\delta \omega) l &= \langle \text{швидко та правильно писати} \rangle = \langle \text{швидко} \rangle \text{ та } (\langle \text{правильно писати} \rangle) = \delta (\omega a); \\
(\delta \vee \omega) a &= \langle \text{швидко або правильно писати} \rangle = \\
&= \langle \text{швидко писати} \rangle \text{ або } \langle \text{правильно писати} \rangle = \delta a \vee \omega a; \\
\delta (a \vee b) &= \langle \text{швидко (писати або читати)} \rangle = \\
&= \langle \text{швидко писати} \rangle \text{ або } \langle \text{швидко читати} \rangle = \delta a \vee \delta b.
\end{aligned}$$

Якщо ж дієслова розглядати як логічні скаляри, а прислівники – як логічні вектори, то виконання цих аксіом не порушиться. Отже, прилягання з головним словом у вигляді дієслова і залежним – у вигляді прислівника можна в будь-якому напрямку формалізувати засобами логічної алгебри. Цей висновок можна розповсюдити на той випадок, коли залежним словом є дієприслівник, тому що йому притаманні усі граматичні ознаки прислівника.

Прислівник також може прилягати до прислівника. Нехай вектори c і v відповідають прислівникам «донизу» і «догори». Вочевидь, що

$$\begin{aligned}
(\chi \xi) l &= \langle \text{нішки та вдвох донизу} \rangle = \langle \text{нішки} \rangle \text{ та } (\langle \text{вдвох донизу} \rangle) = \chi (\xi c); \\
(\chi \vee \xi) c &= \langle \text{нішки або вдвох донизу} \rangle = \langle \text{нішки донизу} \rangle \text{ або } \langle \text{вдвох донизу} \rangle = \chi c \vee \xi c; \\
\chi (c \vee v) &= \langle \text{нішки (донизу або догори)} \rangle = \langle \text{нішки донизу} \rangle \text{ або } \langle \text{нішки догори} \rangle = \chi c \vee \chi v.
\end{aligned}$$

Отже, і такий вид словосполучень може бути формалізований засобами логічної алгебри, причому також в будь-якому напрямку.

Прислівники можуть прилягати до прикметника, дієприкметника та числівника. Нехай прислівникам «дуже» і «екзотично» відповідають скаляри σ і ϵ , а логічні вектори p і q – прикметникам «красивий» та «яскравий». Тоді

$$\begin{aligned}
(\sigma \epsilon) p &= \langle \text{дуже та екзотично красивий} \rangle = \\
&= \langle \text{дуже} \rangle \text{ та } (\langle \text{екзотично красивий} \rangle) = \sigma (\epsilon p); \\
(\sigma \vee \epsilon) p &= \langle \text{дуже або екзотично красивий} \rangle = \\
&= \langle \text{дуже красивий} \rangle \text{ або } \langle \text{екзотично красивий} \rangle = \sigma p \vee \epsilon p; \\
\sigma (p \vee q) &= \langle \text{дуже (красивий або яскравий)} \rangle =
\end{aligned}$$

$$= \text{«дуже красивий» або «дуже яскравий»} = \sigma p \vee \sigma q.$$

Отже, і такий вид зв'язку слів у словосполученнях може бути формалізований засобами логічної алгебри, причому, вочевидь, також в будь-якому напрямку.

Інфінітив, крім іменника, може також пояснювати і дієслово. Тоді, якщо дієсловом «*попросити*» та «*вмовити*» відповідають вектори k і u , то [52]

$$\begin{aligned} (\gamma \lambda) k &= \text{«попросити (взяти та подарувати)»} = \\ &= (\text{«попросити подарувати»}) \text{ та «взяти»} = \gamma (\lambda k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma \vee \lambda) k &= \text{«попросити (взяти або подарувати)»} = \\ &= \text{«попросити взяти»} \text{ або «попросити подарувати»} = \gamma k \vee \lambda k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma (k \vee u) &= \text{«(попросити або вмовити) взяти»} = \\ &= \text{«попросити взяти»} \text{ або «вмовити взяти»} = \gamma k \vee \gamma u. \end{aligned}$$

Тобто і в цьому випадку можна формалізувати зв'язок слів у будь-якому напрямку засобами логічної алгебри.

Якщо ж інфінітив пояснює прикметник або дієприкметник то при відповідності, наприклад, дієприкметникам «*бажаючий*» та «*благаючий*» логічних векторів e і o , маємо

$$\begin{aligned} (\gamma \lambda) e &= \text{«бажаючий (взяти та подарувати)»} = \\ &= (\text{«бажаючий (подарувати)»}) \text{ та «взяти»} = \gamma (\lambda e); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma \vee \lambda) e &= \text{«бажаючий (взяти або подарувати)»} = \\ &= \text{«бажаючий взяти»} \text{ або «бажаючий подарувати»} = \gamma e \vee \lambda e; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma (e \vee o) &= \text{«(бажаючий або благаючий) взяти»} = \\ &= \text{«бажаючий взяти»} \text{ або «благаючий взяти»} = \gamma e \vee \gamma o. \end{aligned}$$

Отже, і цей різновид прилягання може бути формалізований математичним апаратом векторних логічних просторів. Причому напрямок формалізації знову не відіграє ніякої ролі.

Зі всього, що сказано, випливає, що будь-яке словосполучення природної мови може бути в будь-якому напрямку формалізоване засобами логічної алгебри.

5.5.3. Формалізація складних словосполучень та речень логіко-алгебраїчними засобами

Розглянемо тепер складне словосполучення. Наприклад, «*дуже велика яскраво синя квітка*». Позначимо його через S . Побудуємо схему зв'язків слів в цьому словосполученні, вказавши стрілками напрямок зв'язку від залежного слова до головного (рис. 5.7).



Рис. 5.7. Схема зв'язків слів у складному словосполученні

На схемі цифрою «2» позначений другий, а цифрою «1» – перший рівень зв'язку. Тобто, вочевидь, природна мова має ієрархічну структуру [55]. При запису виразу для математичної реалізації цього словосполучення будемо рухатися за схемою від залежного слова до головного, розділивши для цього словосполучення на декілька простіших в такий спосіб, щоб

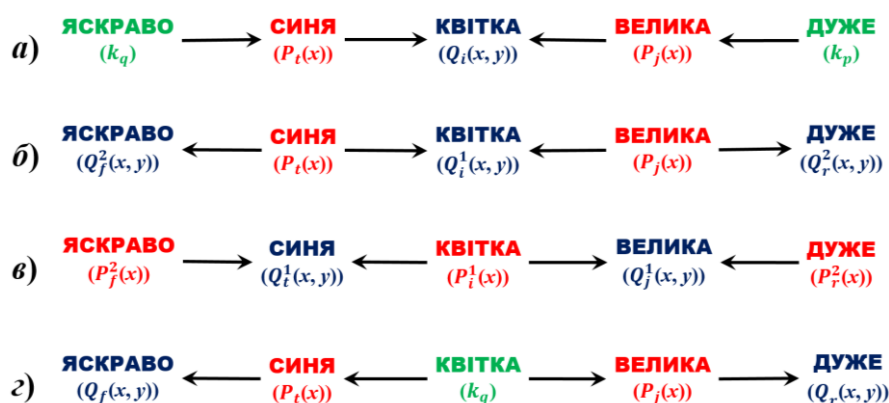
головне слово кожного наступного рівня було залежним словом попереднього рівня. Таким чином, отримуємо наступні словосполучення: «*яскраво* → *синя*», «*синя* → *квітка*», «*дуже* → *велика*», «*велика* → *квітка*».

Розглянемо перший рівень зв'язку. Як вже було зазначено, висловлювання «*яскрава синя квітка*» формально можна записати як $\alpha \beta l$. Нехай вектор l є деяким вектором $Q_i^1(x, y)$, $i = \overline{0, 15}$ простору Q^1 двомісних предикатів над скалярним полем P одномісних предикатів. Тоді скалярам α і β відповідають деякі одномісні предикати $P_j(x)$ і $P_t(x)$, $j, t = \overline{0, 3}$. Розглянемо тепер прості словосполучення «*яскраво* → *синя*» і «*дуже* → *велика*». Якщо прислівникам «*дуже*» і «*яскраво*» поставити у відповідність скаляри k_p і k_q із двоелементної множини $K = \{0, 1\}$, то предикати $P_j(x)$ і $P_t(x)$ можна розглядати як вектори логічного простору, що заданий над скалярним полем K . Тобто це словосполучення формалізується як інша алгебра, але також логічного типу [56, 57]. Цей варіант формалізації поданий на рис. 5.8а).

Однак, з урахуванням того, що формалізацію можна проводити в будь-якому напрямку [52], при формалізації словосполучень «*яскраво* → *синя*» і «*дуже* → *велика*» предикати $P_j(x)$ і $P_t(x)$ можна розглядати як елементи скалярного поля, над яким заданий простір Q^2 двомісних предикатів, вектори якого $Q_r^2(x, y)$ і $Q_f^2(x, y)$, $r, f = \overline{0, 15}$ якого відповідають прислівникам «*дуже*» і «*яскраво*». Цей варіант формалізації поданий на рис. 5.8б).

В той же час, існує третій варіант формалізації словосполучення S . Якщо формалізувати 2-й рівень зв'язку в напрямку від залежного слова до головного, а 1-й рівень – в зворотному напрямку, то об'єкту «*квітка*» можна поставити у відповідність одномісний предикат $P_i^1(x)$, що є елементом скалярного поля P^1 , над яким заданий логічний простір Q двомісних предикатів, вектори $Q_j(x, y)$ і $Q_f(x, y)$, $j, f = \overline{0, 15}$ якого відповідають прикметникам «*велика*» і «*синя*». Але набір векторів Q можна також розглядати як логічний простір над скалярним полем одномісних предикатів P^2 , елементи якого $P_r^2(x)$ і $P_t^2(x)$, $r, t = \overline{0, 3}$ відповідають прислівникам «*дуже*» і «*яскраво*». Цей варіант формалізації поданий на рис. 5.8в).

Останній варіант формалізації словосполучення S передбачає формалізацію усіх рівнів зв'язку в напрямку від головного слова до залежного. В цьому випадку об'єкту «*квітка*» можна поставити у відповідність елемент k_p із двоелементного поля скалярів $K = \{0, 1\}$, над яким заданий простір одномісних предикатів P , вектори якого $P_j(x)$ і $P_i(x)$, $i, j = \overline{0, 3}$ відповідають прикметникам «*велика*» і «*синя*». В той же час, множини P можна розглядати як скалярне поле, над яким заданий простір двомісних предикатів Q , вектори $Q_t(x, y)$ і $Q_r(x, y)$, $t, r = \overline{0, 15}$ якого відповідають прислівникам «*дуже*» і «*яскраво*». Цей варіант формалізації поданий на рис. 5.8г).

Рис. 5.8. Варіанти формалізації складного словосполучення S

Стрілками на рис. 5.8а) – 5.8г) зображений напрямок формалізації. Аналогічно словосполученню S , будь-яке словосполучення може мати декілька варіантів формалізації.

Згідно з класифікацією за певним набором апріорних ознак, серед дієслів розрізняють групи дієслів руху, буття, свідомості, трудової діяльності тощо [58]. В залежності від приналежності до однієї з виділених груп дієслів, в словосполученні може брати участь різна кількість слів, тобто дієслова можна класифікувати за синтагматичним принципом, що заснований на підрахунку кількості та семантичного змісту дієслівних валентностей [59]. Дія, позначена дієсловом будь-якої з цих груп, передбачає наявність суб'єкта, що виконує вказану дію (розглядаємо лише двоскладові речення). В реченні цю роль зазвичай виконує підмет. Дієслова деяких груп передбачають також наявність об'єкта, що виконує дію, інструмента дії тощо. Вони описуються такими другорядними членами речення, як додаток і обставина, і є групою присудка.

Розглянемо тепер словосполучення $S' = \text{«обережно зрізає ножицями велику синю квітку»}$. Вочевидь, воно є групою присудка деякого речення T . Схему зв'язків слів в цьому словосполученні подано на рис. 5.9.

Рис. 5.9. Схема зв'язків слів у складному словосполученні S'

Розіб'ємо S' на синтагми в указаний спосіб. В результаті отримуємо прості словосполучення «синя → квітка», «велика → квітка», «зрізає ← обережно» і «зрізає ← ножицями». Оберемо такий варіант формалізації словосполучення S' , при якому керування з головним словом у вигляді дієслова формалізується у напрямку, зворотному зв'язку від головного слова до залежного. Переорієнтуємо напрямки зв'язків слів в S' згідно з обраним напрямком формалізації, як це показано на рис. 5.10.

Рис. 5.10. Напрямок формалізації зв'язків слів у складному словосполученні S'

Як можна побачити із рис. 5.10, змінилися й рівні зв'язків. Розглянемо тепер словосполучення S' у складі речення $T_1 = \text{«Дівчинка обережно зрізає ножицями велику синю квітку»}$. Воно відрізняється від S' наявністю підмета. Будемо формалізувати зв'язок підмета і присудка у напрямку від присудка до підмета. За цієї умови підмет і присудок утворюють синтагму $\text{«дівчинка} \leftarrow \text{зрізає»}$, що відповідає 1-му рівню зв'язку.

Розглянемо присудок з точки зору його валентностей. Синтаксичними валентностями є кількість і характер підмета і додатків, що залежать від підмета і реально присутні в тексті речення. Семантичними валентностями є кількість і характер актантів ситуації, що позначена даним присудком. Актанти ситуації визначаються семантичним аналізом ситуації, тобто лексикографічним тлумаченням слова [59]. В нашому прикладі кількості семантичних і синтаксичних валентностей присудка «зрізає» збігаються і дорівнюють трьом. Нехай присудку відповідає деякий одномісний предикат $P_i^1(x)$, $i = \overline{0, 3}$, що є елементом логічного поля P^1 . Однак, іменникам «дівчинка» , «квітка» і «ножицями» , якими він керує, неможна ставити у відповідність вектори одного й того ж логічного простору. Це пояснюється тим, що вони характеризують різні актанти ситуації, що описується, або різні ролі, тобто семантичні відмінки. Отже, їм відповідають вектори $Q_j^1(x, y) \in Q^1$, $Q_t^2(x, y) \in Q^2$, $Q_f^3(x, y) \in Q^3$, $j, t, f = \overline{0, 15}$ різних просторів двомісних предикатів Q^1, Q^2, Q^3 , що задані над одним і тим же самим скалярним полем P^1 .

Згідно з обраним напрямком формалізації, прислівнику «обережно» відповідає елемент k_p , $p = \overline{0, 1}$, із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$, що є скалярним полем, над яким заданий простір одномісних предикатів P^1 . Розглянемо тепер об'єкт «квітка» , якому відповідає вектор $Q_j^1(x, y) \in Q^1$. Крім присудка «зрізає» , він характеризується ще двома ознаками – «синя» і «велика» , з якими синтаксично пов'язаний за допомогою узгодження. Однак, ці словосполучення формалізуються вже за допомогою логічної алгебри, що відрізняється від тієї, за допомогою якої формалізувалося словосполучення $\text{«зрізає} \rightarrow \text{квітку»}$. Отже, при реалізації словосполучень $\text{«синя} \rightarrow \text{квітка»}$ і $\text{«велика} \rightarrow \text{квітка»}$ простір Q^1 вже заданий над іншим скалярним полем одномісних предикатів P^2 , елементи якого $P_r^2(x)$ і $P_q^2(x)$, $r, q = \overline{0, 3}$, відповідають ознакам «синя» і «велика» . Цей варіант формалізації речення T_1 подано на рис. 5.11.

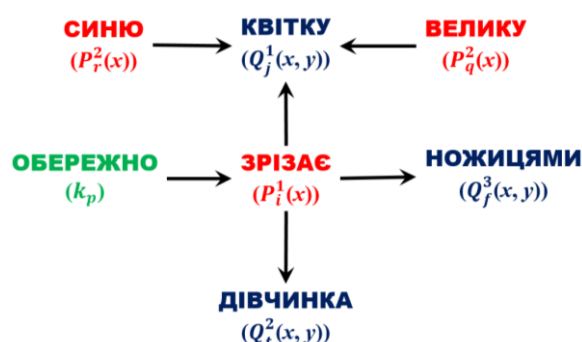


Рис. 5.11. Можливий варіант формалізації речення T_1

Решту варіантів формалізації речення T_1 розглядати не будемо, тому що наведений варіант повністю ілюструє принцип, згідно з яким необхідно проводити формалізацію двоскладових розповідних речень [59]. Таким чином, формалізація будь-якого речення описаного виду відбувається за схемою, поданою на рис. 5.12.

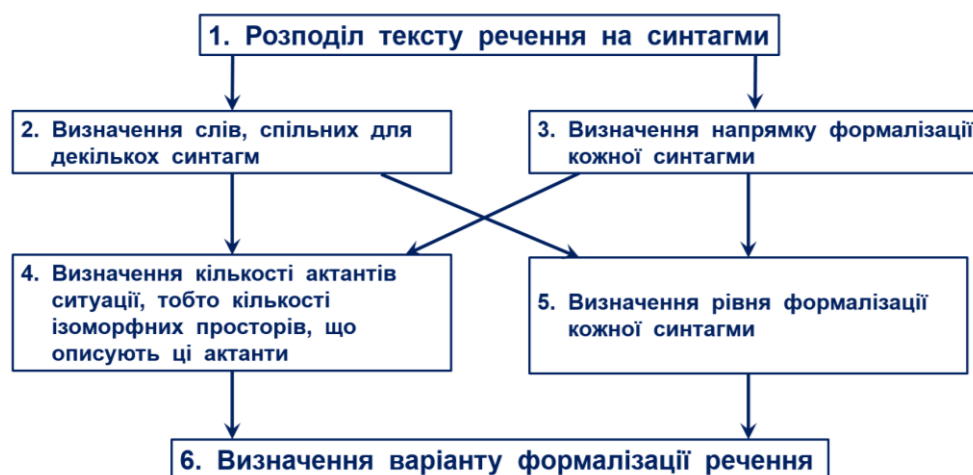


Рис. 5.12. Схема методики алгебраїчного синтезу простих словосполучень в розповсюджені розповідні речення природної мови

Розглянутий приклад наочно демонструє, що, формалізувавши кожну окрему синтагму за допомогою математичного апарату векторних логічних просторів, записати все речення у вигляді формули єдиної логічної алгебри неможливо. Таким чином, можна дійти висновку, що речення природної мови може бути записане як формула деякої лінгвістичної алгебри, що є ієрархічною системою, яка дозволяє поєднати декілька логічних просторів в межах однієї системи.

5.5.4. Графічне подання формалізації синтаксичної структури речень і текстів природної мови

Графічно розглянутий варіант формалізації речення T_1 можна подати деяким орієнтованим графом, вершинам якого відповідають слова і, відповідно, скаляри або вектори потрібних для цієї конкретної формалізації логічних просторів [56]. Ребра цього графа відображають напрямки формалізації відповідних словосполучень речення T_1 (рис. 5.13).

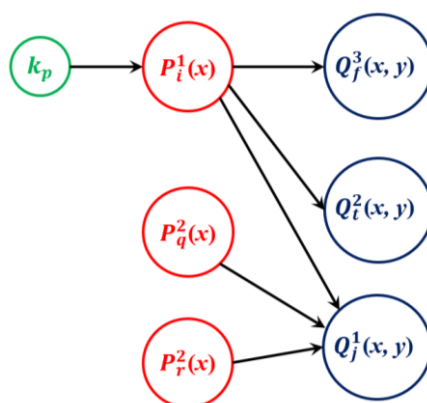


Рис. 5.13. Граф формалізації речення T_1

З урахуванням того, що кожне словосполучення в реченні можна формалізувати в будь-якому напрямку, в досліджуваному реченні формалізацію словосполучень «синя квітка» і «велика квітка» можна проводити в протилежному напрямку, тобто «синя ← квітка» і «велика ← квітка». Тоді граф формалізації речення T_1 набуває властивостей дерева [41], як

це показано на рис. 5.14. Але при цьому з'являється 3-й рівень формалізації, тому що при такому варіанті формалізації об'єкт «квітка» є елементом скалярного поля Q^1 , над яким заданий логічний простір R . Вектори цього простору $R_n(x, y, z)$ і $R_m(x, y, z)$ відповідають якостям «синій» і «великий». В попередньому варіанті формалізації ці якості були відображені елементами скалярного поля P^2 .

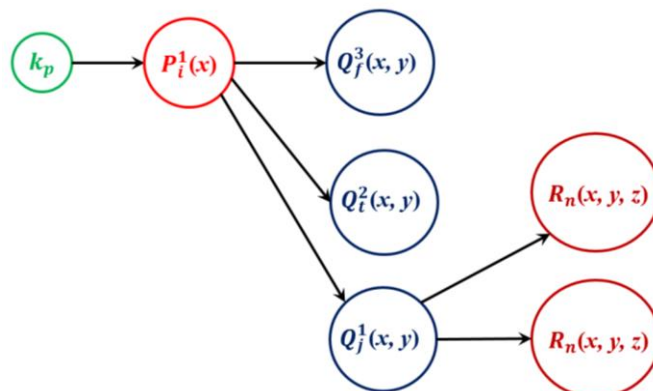


Рис. 5.14. Дерево формалізації речення T_1

Таким чином, для будь-якого розповсюдженого речення природної мови можна обрати варіант формалізації, найбільш придатний для конкретних цілей вирішуваної задачі і можливостей наявних засобів її вирішення.

Тепер розглянемо речення $T_2 = \langle \text{«Ножіці дуже гострі»}$. З реченням T_1 його пов'язує слово «ножіці». Таким чином, апріорі йому відповідає двомісний предикат $Q_f^3(x, y) \in Q^3$, $f = \overline{0, 15}$, простору двомісних предикатів Q^3 . Принцип формалізації для речення T_2 той же самий, що і для речення T_1 . Ознаку «гострі» можна розглядати як одномісний предикат $P_m^2(x)$, $m = \overline{0, 3}$ скалярного поля одномісних предикатів P^2 , тому що ця ознака характеризує об'єкт «ножіці» з того ж самого боку, що й ознаки «велика» і «синя» характеризують об'єкт «квітка». Тобто усі вони є прикметниками. Прислівник «дуже» відноситься до ознаки «гострі», а не до присудка речення T_1 «зрізає» як прислівник «обережно», що заданий скаляром k_p^1 , $p = \overline{0, 1}$, із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$. Тому про різні актанти ситуації говорити немає сенсу. Однак, прислівник «дуже» виражає обставину ступеня, тому повинен бути заданий скаляром k_s^2 , $s = \overline{0, 1}$, із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$, яка в даному випадку є скалярним полем K^2 . Отже, речення T_2 можна формалізувати в спосіб, поданий на рис. 5.15 [57].

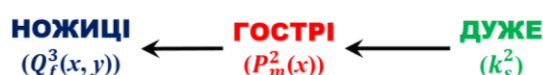


Рис. 5.15. Можливий варіант формалізації речення T_2

Тепер розглянемо речення $T_3 = \langle \text{«Дівчинка може порізатися»}$. З реченням T_1 воно пов'язане словом «дівчинка», якому, отже, апріорі відповідає двомісний предикат $Q_j^1(x, y) \in Q^1$, $j = \overline{0, 15}$ простору двомісних предикатів Q^1 . Якщо формалізацію словосполучення «дівчинка може» проводити в тому ж самому напрямку, що й зв'язок підмета і присудка в реченні T_1 , тобто «дівчинка \leftarrow може», то дієслово «може» можна

розглядати як одномісний предикат $P_l^1(x)$, $l = \overline{0, 3}$, що є елементом логічного поля P^1 , що, в свою чергу, є скалярним полем для простору Q^1 , тому що «*може*» і «*зрізає*» являють собою один і той же самий семантичний відмінок об'єкту «*дівчинка*». Якщо подальшу формалізацію проводити в напрямку «*може* ← *порізатися*», то дієслово «*порізатися*» можна розглядати як елемент k_d^3 , $d = \overline{0, 1}$, із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$, що в даному випадку є скалярним полем K^3 , над яким заданий простір одномісних предикатів P^1 . Таким чином, речення T_3 можна формалізувати в спосіб, поданий на рис. 5.16.



Рис. 5.16. Можливий варіант формалізації речення T_3

Графи формалізації речень T_2 і T_3 подані на рис. 5.17а) і рис. 5.17б) відповідно.

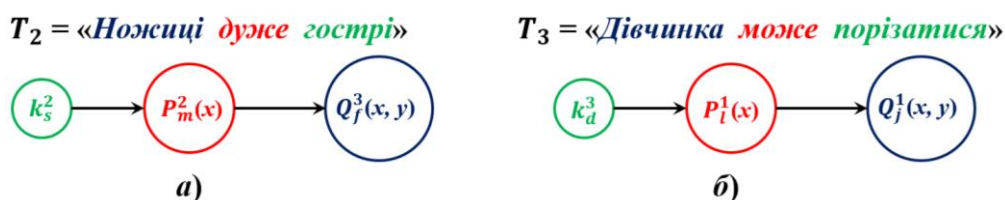


Рис. 5.17. Графи формалізації речень T_2 і T_3

Із наведених графів можна побачити, що їх можна розглядати як підграфи деякого надграфа, що відповідає всьому тексту. Цей надграф буде зв'язним, тому що всі слова тексту семантично пов'язані. Цим зв'язкам відповідають ребра графа. Вочевидь, що вершини, які відповідають тим спільним словам, що об'єднують речення за змістом, будуть точками зчленування для цього графа, тому що при їх видаленні текст перетвориться в набір речень, що ніяк не пов'язані між собою. Також є очевидним, що граф, який відповідає деякому тексту, буде сепарабельним [41]. Граф, що відповідає тексту H , який складається з речень T_1 , T_2 і T_3 , подано на рис. 5.18.

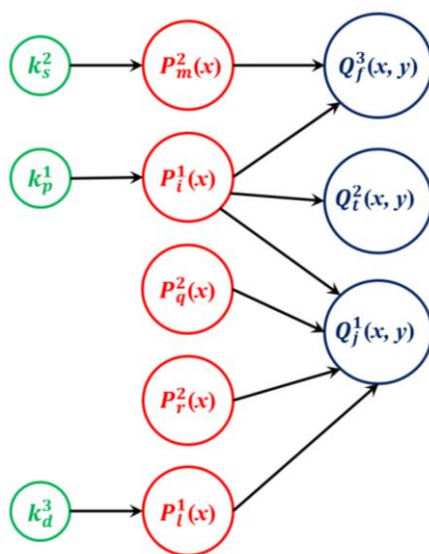


Рис. 5.18. Граф формалізації тексту H

5.5. Контрольні запитання

1. Що таке логічне поле? Наведіть приклади логічних полів.
2. Як виконуються всі дії над елементами поля логічних скалярів, поданих графічно?
3. Дайте означення логічної матриці та основних понять, з нею пов'язаних.
4. Перелічіть основні операції над логічними матрицями.
5. Які властивості повинні мати логічні матриці для того, щоб над ними можна було проводити перелічені операції?
6. Наведіть правила транспонування логічних матриць.
7. Яка логічна матриця є ортогональною?
8. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування зворотної логічної матриці. Чому дорівнює зворотна логічна матриця за умови її існування?
9. Якою матрицею є результат множення довільної логічної матриці на її транспоновану матрицю?
10. За яких умов довільна непуста множина елементів L називається векторним логічним простором над деяким логічним полем скалярів G ?
11. Яким законам задовольняють операції диз'юнкції та добутку скаляра на вектор?
12. В який спосіб будується предикатний логічний простір або простір m -місних предикатів над скалярним полем n -місних предикатів?
13. Які операції було введено для елементів логічного простору?
14. Які вирази називаються лінійними комбінаціями логічних векторів?
15. Наведіть приклад предикатного логічного простору.
16. Що називається базисом логічного простору?
17. Що є визначальною особливістю досконалого і недосконалого логічних просторів?
18. Який вигляд мають матриця переходу до нового базису і матриця зворотного переходу?
19. Який зв'язок існує між матрицею переходу до нового базису і матрицею зворотного переходу?
20. Яким є повний простір m -місних предикатів, заданий над скалярним полем n -місних предикатів, $n < m$?
21. Побудуйте базис довільного предикатного логічного простору L .
22. Яку розмірність має досконалий булевий і предикатний логічний простір?
23. Для яких логічних просторів можна ввести операції кон'юнкції, заперечення та згортки логічних векторів і чому? Наведіть приклади цих операцій для предикатного логічного простору.
24. Що можна стверджувати відносно цих операцій щодо вибору базису?
25. Які властивості щодо цих операцій виконуються для будь-яких логічних векторів $l, g, h \in L$?
26. Як можна подати заперечення базисного вектора логічного простору за допомогою решти базисних векторів цього простору?
27. Дайте означення логічного оператора і понять, з ним пов'язаних.
28. За яких умов є взаємо-однозначна відповідність між лінійним логічним оператором і матрицею, що йому відповідає?
29. Яке обмеження накладається на розмірність матриць, що відповідають лінійним логічним операторам предикатного логічного простору?

30. Що таке гомоморфізм?
31. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, щоб лінійний логічний оператор був гомоморфізмом.
32. Від якої вимоги до оператора можна відмовитися, не порушуючи його приналежності до гомоморфізмів і чому?
33. Перелічіть дії, які можна проводити над лінійними логічними операторами.
34. Які матриці відповідають результатам цих дій над лінійними логічними операторами?
35. Наведіть можливі алгебраїчні інтерпретації булевої і предикатної моделей векторних логічних просторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шабанов-Кушнарєнко Ю. П. Теорія інтелекту. Математичні засоби. – Харків: Вища школа, 1984. – 144 с.
2. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 2. Булеві функції: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 126 с.
3. Вечірська І. Д., Гончаров І. Є., Шепілов С. І. Дослідження логіки скінченних предикатів як композиційно-номінативної логіки // Біоніка інтелекта. – 2014. – Вип. 2 (83). С. 53 – 60.
4. Гончаров С. В., Каніщева О. В. Алгебра скінченних предикатів як складова інформаційних технологій. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – 67 с.
5. Шабанов-Кушнарєнко Ю. П. Теорія інтелекту. Проблеми та перспективи. – Харків: Вища школа, 1987. – 160 с.
6. Dudar Z. V., Melnikova R. V, Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Relations as objects of formulaic description. // ACS and automation devices. 1998. Vol. 107. P. 68 – 77.
7. Dudar Z. V., Kravetz N. S., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On fundamental algebra of predicative operations. // Problems of bionic. 1998. Vol. 49. P. 3 – 13.
8. Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On the concept of idea. // ACS and automation devices. 1990. Vol. 96. P. 65 – 71.
9. Koltzov V. P., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On the isomorphism of algebras of ideas. // ACS and automation devices. 1990. Vol. 96. P. 71 – 77.
10. Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Logical algebra// Problems of bionic. 1991. Vol. 46. P. 3 – 10.
11. Гончаров С. В., Борисова Н. В. Створення та поповнення електронних галузевих термінологічних словників. – Херсон: ХНТУ, 2009. – № 1 (34). – С. 204 – 206.
12. Зиков. О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
13. Лещинський В. О., Лещинська І. О. Про формульний опис змінних складних висловлювань// Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2016. – № 3. – С. 92 – 95.
14. Лещинський В. О. Про теореми обчислення висловлювань // Системи обробки інформації. – 2016. – № 9. – С. 97 – 100.
15. Халецька З. П., Наратовий В. В. Математична логіка та теорія алгоритмів: Навчальний посібник. – Кропивницький: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2017. – 128 с.
16. Літнарівич Р. К. Алгебра матриць. Курс лекцій. – Рівне: МЕРУ, 2007. – 112 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць. – Київ: Надруковано в Україні, 2010. – 560 с.
18. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On logical matrices. // Problems of bionic. 1998. Vol. 48. P. 12 – 22.
19. Лещинська І. О. Про властивості предиката рівності понять// Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава: ПНТУ, 2017. – Т. 1 (41). – С. 92 - 95.
20. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On logical spaces// ACS and automation devices. 1997. Vol. 106. P. 21 – 30.
21. Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Incomplete and complete logical spaces// Problems of bionic. 1991. Vol.46. P. 10 – 17.
22. Шкільняк С. С. Математична логіка; основи теорії алгоритмів: навч. посіб. – К.: ДП «Вид. дім «Персонал»», 2009. – 280 с.

23. Вечірська І. Д. Аналіз методу побудови та принципів роботи реляційної мережі як багаторівневої структури паралельної дії// Біоніка інтелекта. – 2013. № 2 (81). – С. 15–21.
24. Лещинська І. О. Контроль однозначності понять та їх формування за методом порівняння// Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава: ПНТУ, 2017. – Т. 2 (42). – С. 92 - 95.
25. Dukarev M. Yu., Koltzov A. V., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Multiplication and inversion in the algebra of ideas// ACS and automation devices. 1992. Vol. 98. P. 10 – 17.
26. Gvozdinskaya N. A. On the logical operators // Problems of bionic. 1998. Vol. 49. P. 90 – 94.
27. Дементьєва В. І. Лінійна алгебра: Конспект лекцій. – Одеса: «Астропринт», 1999. – 256 с.
28. Dudar Z. V., Samuilik I. G., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Mappings as objects of formulaic description // Radioelectronics and computer science. 1998. Vol. 1(02). P. 56 – 61.
29. Булитко В. К. Елементи теорії дискретних систем. – Одеса: «Астропринт», 1997. – 80 с.
30. Poslavskiy S. A., Pokhodenko V. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Comparator identification of finite-dimensional linear processes. // Problems of bionic. 1998. Vol. 48. P. 64 – 69.
31. Будигін В. В., Алексєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. – Київ: ТВіМС, 2011. – 224 с.
32. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On the matrices of linear logical operators // Problems of bionic. 1999. Vol. 50. P. 25 – 29.
33. Федорова Т. М. Алгебро-логічні моделі та метод побудови ланцюгів лексичних одиниць в системах штучного інтелекту: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 20 с.
34. Хайрова Н. Ф. Розробка математичного і лінгвістичного забезпечення автоматизованих інформаційно-бібліотечних систем: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2000. – 20 с.
35. Gvozdinskaya N. A. Some types of linear logical operators // ACS and automation devices. 1999. Vol. 109. P. 12 – 19.
36. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Poslavskiy S. A., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On the actions with linear logical operators// Radioelectronics and computer science. 1998. Vol. 3(04). P. 128 – 130.
37. Шабанов-Кушнарєнко Ю. П. Теорія інтелекту. Технічні засоби. – Харків: Вища школа, 1986. – 136 с.
38. Безущак О., Ганюшкін О. Математична логіка : навч. посіб. – Київ : ВПЦ "Київський університет". – 2023. – 143 с.
39. Трохименко В. С. Конспект лекцій з математичної логіки та теорії алгоритмів. – Вінниця, 2007. – 85 с.
40. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
41. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів: курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2022. – 102 с.
42. Кокорева Л. В., Перевозчикова О. Л., Ющенко Е. Л. Діалогові системи та подання знань. – Київ: Наукова думка, 1993. – 446 с.
43. Доценко С. І. Організація та системи керування базами даних: Навчальний посібник. - Харків: УкрДУЗТ, 2023. – 117 с.

44. Gvozdinskiy A. N., Yakimova N. A. Logical-algebraic models of knowledge representation systems// ACS and automation devices. 2003. Vol. 124. P. 43 – 47.
45. Якімова Н. А. Елементи теорії множин: навчально-методичний посібник. - Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. – 84 с.
46. Dudar Z. V., Kravetz N. S., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On applied algebra of predicative operations// Problems of bionic. 1998. Vol. 49. P. 14 – 22.
47. Yakimova N. A. Operations on predicate logic matrices // The modern vector of the development of science. Proceedings of the XV international scientific conference. Philadelphia. USA. 15 – 16.08.2024.
48. Якімова Н. А. Предикатні логічні матриці // Вісник Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова. Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Том 24. – Випуск 2 (34) – С. 67 – 74.
49. Gvozdinskaya N. A., Dudar Z. V., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On mathematical description of sense of natural-language texts// Problems of bionic. 1998. Vol. 48. P. 141 – 149.
50. Bondarenko M. F., Dudar Z. V., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. Relationships as a subject of formulaic description// ACS and automation devices. 1998. Vol. 107. P. 94 – 103.
51. Якімова Н. А. Логічна алгебра: методичний посібник. – Одеса: «Освіта України». – 2019.– 40 с.
52. Yakimova N. A. Simple word-combination of natural language as a logical algebra formula // Problems of bionic. 2000. Vol. 52. P. 111 – 115.
53. Koltzov V. P., Shabanov-Kushnarenko Yu. P. On the meaningful interpretation of the algebra of ideas // Problems of bionic. 1990. Vol. 45. P. 10 – 17.
54. Korneychuk T. B., Chudina A. F. Data system for text analysis in the field of determining the main members of the sentence // ACS and automation devices. 1992. Vol. 98. P. 76 – 83.
55. Четвериков Г. Г. Синтез просторових структур мовних систем (на прикладі української мови) // Проблеми біоніки. - 1999. - Вип. 50. - С. 112 - 119.
56. Якімова Н. А. Варіанти формалізації речень природної мови та їх графічне подання // Записки з загальної лінгвістики. – 2008. – Вип. 8 – 9. – С. 302 – 308.
57. Якімова Н. А. Графічне подання текстів природної мови // Записки з загальної лінгвістики. – 2010. – Вип. 10 – 11. – С. 305 – 311.
58. Osyka A. F., Kravetz O. A. On the formalization of the semantics of word-combinations with instrumental meaning // Problems of bionic. 1990. Vol. 45. P. 3 – 10.
59. Yakimova N. A. Algebraic synthesis of simple word-combinations to the phrase of natural language // ACS and automation devices. 2000. Vol. 111. P. 22 – 27.

Навчальне видання

Якімова Наталія Анатоліївна

АЛГЕБРА СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТИВ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для здобувачів спеціальності 111 Математика

Електронне видання мережевого використання

В авторській редакції

Затвердж. авт. 27.01.2025. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 2,8 МБ. Зам. № 2921.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
вул. Університетська, 12, м. Одеса, 65082, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua