

УДК 517.938

М. С. Таїрова, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра оптимального управління та економічної кібернетики

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: mason@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-5609-2552>

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНИХ МНОЖИН ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З Н-ОПУКЛИМИ ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

У статті досліджується задача побудови оптимальних множин практичної стійкості лінійних однорідних і неоднорідних дискретних систем за наявності H -опуклих фазових обмежень. Подібні задачі виникають у математичному моделюванні динамічних процесів та в задачах керування системами з обмеженнями на фазові змінні. Для досліджуваних систем отримано аналітичні представлення функції Мінковського та оберненої функції Мінковського оптимальної множини практичної стійкості. Встановлено умови побудови максимальної множини початкових станів, для яких траєкторії системи не виходять за межі заданих фазових обмежень протягом скінченного проміжку часу. Розглянуто випадок фазових обмежень, заданих у вигляді багатокутників та політопів, що є важливим підкласом H -опуклих множин. Доведено теореми про H -опуклість оптимальних множин практичної стійкості та практичної напівстійкості. Отримані результати можуть бути використані для аналізу дискретних динамічних систем та розробки алгоритмів перевірки практичної стійкості за наявності фазових обмежень.

MSC: 39A30, 93D20, 52A27.

Ключові слова: H -опуклість, практична стійкість, практична напівстійкість, дискретні системи, оптимальна множина практичної стійкості, функція Мінковського, обернена функція Мінковського, фазові обмеження.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1\(47\).364556](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2026.1(47).364556)

Стаття надійшла до редакції: 05.05.2026. Затверджена до друку: 15.05.2026.

Опублікована: 15.09.2026.



Ця стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



Вступ

Обмеження на фазові змінні є характерною особливістю багатьох математичних моделей реальних динамічних систем. Такі обмеження виникають у задачах керування технічними, економічними та біологічними системами і відображають фізичні, технологічні або ресурсні межі функціонування об'єкта. Наявність фазових обмежень істотно впливає на поведінку розв'язків та потребує спеціальних методів дослідження, оскільки класичні підходи до аналізу стійкості не завжди забезпечують виконання умов допустимості траєкторій.

Одним із ефективних підходів до дослідження систем із фазовими обмеженнями є теорія практичної стійкості [1; 9]. Використання ідей другого методу Ляпунова дозволяє отримувати критерії практичної стійкості для широких класів диференціальних та дискретних систем [1; 3–6; 9]. У межах цього підходу важливе значення має задача побудови множини початкових умов, для яких траєкторії системи залишаються в заданій допустимій області протягом усього часу спостереження [7–9]. Найбільшу за включенням множину таких початкових умов називають оптимальною множиною практичної стійкості. Її визначення є складною обчислювальною задачею, складність якої суттєво зростає зі збільшенням розмірності фазового простору.

Для лінійних систем з опуклими фазовими обмеженнями оптимальні множини практичної стійкості є опуклими компактами, що створює можливість застосування методів опуклого аналізу. Зокрема, для їх опису можуть бути використані функція Мінковського, обернена функція Мінковського та опорна функція опуклої множини.

У даній роботі розглядаються задачі практичної стійкості лінійних однорідних та неоднорідних дискретних систем за умови H -опуклих фазових обмежень. До класу H -опуклих множин належать, зокрема, опуклі політопи та багатокутники, які широко застосовуються при математичному моделюванні та в задачах керування [11]. Метою роботи є побудова оптимальних множин практичної стійкості та практичної напівстійкості для зазначеного класу систем. Для досягнення цієї мети отримано аналітичні представлення функції Мінковського та оберненої функції Мінковського оптимальних множин, а також доведено теореми про їх H -опуклість.

В статті використовуються такі позначення: $\mathbb{R}^n$ – n -вимірний евклідов простір зі скалярним добутком $\langle x, y \rangle$ і нормою $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\overline{k, m} = \{k, k+1, \dots, m\}$; M^T – транспонування матриці (вектора) M ; ∂A , $\text{int} A$ – границя і внутрішність множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $c(A, \psi) = \sup_{x \in A} \langle x, \psi \rangle$ – опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ [12; 13]; $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

1. Основні означення.

Розглянемо лінійну дискретну систему вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + b(t), \quad (1)$$

де $A(t)$ – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $b(t)$ – вектор розмірності n , $t \in \overline{0, N-1}$. Позначимо як $x(t, x_0)$ розв’язок системи (1) з умовою Коші $x(0) = x_0$, $t \in \overline{0, N}$. Запишемо загальний розв’язок (1) у вигляді

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t), t \in \overline{1, N},$$

де $\Theta(t, s) = A(t-1)A(t-2) \dots A(s) = \prod_{s \leq i \leq t-1} A(i)$ – невироджена матриця, $\Theta(t) = \Theta(t, 0)$, $y(t) = \sum_{0 \leq i \leq t-1} \Theta(t, i+1)b(i)$, $\Theta(s, s) = I$ – одинична матриця, $s \in \overline{1, t}$, $t \in \overline{1, N}$, зокрема $\Theta(0) = I$, $y(0) = 0$.

Фазові обмеження задають багатозначним відображенням з $H(t)$ -опуклими компактними значеннями $\Phi : \overline{0, N} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $t \in \overline{0, N}$ [11]. Це означає, що

$$\Phi(t) = \bigcap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \quad (2)$$

Тут $H(t)$ є замкнутою підмножиною одиничної сфери S . Розв’язок $y(t) = x(t, 0)$ системи (1), який відповідає нульовій початковій умові, будемо називати незбуреним, тобто таким, який досліджується на відповідний вид практичної стійкості. При цьому $y(t) \in \text{int} \Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$.

Нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in G_0$. Наведемо такі означення [1; 7; 9].

Означення 1. Незбурений розв’язок системи (1) називають $\{G_0, \Phi(t), 0, N\}$ -стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ розв’язок

$$x(t, x_0) \in \Phi(t)$$

для всіх $t \in \overline{0, N}$.

Означення 2. Множина $G_* \subset \mathbb{R}^n$ називається максимальною множиною практичної стійкості, яка визначається фазовими обмеженнями $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$, $t \in \overline{0, N}$, якщо:

1. незбурений розв'язок системи (1) $\in \{G_*, \Phi(t), 0, N\}$ -стійким;
2. множина $G_0 \subset \mathbb{R}^n$ міститься в G_* , якщо має місце $\{G_0, \Phi(t), 0, N\}$ -стійкість незбуреного розв'язку системи (1).

Множина G_* є опуклим компактом, $0 \in \text{int}G_*$ [7; 9].

2. Випадок однорідної системи.

Розглянемо систему (1) за умови $b(t) = 0$, $t \in \overline{0, N-1}$. Тоді $y(t) = 0$, $t \in \overline{0, N}$ і $0 \in \text{int}\Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$.

Теорема 1. *Функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) \leq 1\}, \quad \partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) = 1\},$$

$$\text{int}G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) < 1\}.$$

Доведення.

За означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, то $\Theta(t)\frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(t)$ для всіх $t \in \overline{0, N}$. За властивостями опорних функцій маємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

для всіх $\psi \in S$ та $t \in \overline{0, N}$.

Враховуючи умову $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13], одержуємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}. \quad (4)$$

Оскільки $0 \in \text{int}\Phi(t)$, то $c(\Phi(t), \psi) > 0$ для всіх $\psi \in H(t)$. Тому з (4) маємо

$$\lambda \geq \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \geq \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}.$$

Тоді за означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Обґрунтуємо другу частину теореми. Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}$$

і знайдеться такий момент $s_0 \in \overline{0, N}$, що

$$\Theta(s_0)x_0 \in \partial\Phi(s_0).$$

Звідси з властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

але існує вектор $\psi_0 \in H(t)$ такий, що

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0).$$

Тому при $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ має місце нерівність

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} \leq 1,$$

але

$$\frac{\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle}{c(\Phi(s_0), \psi_0)} = 1.$$

Остаточно одержуємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} = 1.$$

Точка $x_0 \in \text{int}G_*$ тоді і тільки тоді, коли виконується [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 \in \text{int}\Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ маємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle < c(\Phi(t), \psi),$$

як наслідок,

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} < 1.$$

Звідси, враховуючи неперервність опорної функції маємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} < 1.$$

Теорема 2. *Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_* &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : d(x_0) \geq 1\} = \\ &= \cup_{e \in S} L(e), \quad L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, d(e)]\} = [0, d(e)]e. \end{aligned}$$

Доведення. Запишемо обернену функцію Мінковського множини G_*

$$d(x_0) = \sup \{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Точка $\lambda x_0 \in G_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції

$$\langle \lambda \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle},$$

для всіх $\psi \in S$ за умови $\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0$.

Остаточно

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}.$$

Тут $P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}$.

Наслідок 1. Нехай фазові обмеження мають вигляд

$$\Phi(t) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : |x_k| \leq r_k, k = 1, 2, \dots, n\},$$

де $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in [0, N]} \max_{k=1,2,\dots,n} \frac{|(\Theta(t)x_0)_k|}{r_k},$$

а обернена функція Мінковського множини G_* записується так

$$d(x_0) = \min_{t \in [0, N]} \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{|(\Theta(t)x_0)_k|}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$I(t) = \{k = 1, 2, \dots, n : (\Theta(t)x_0)_k \neq 0\}.$$

Доведення. Розглянемо

$$H(t) = \{e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}, -e_{(1)}, -e_{(2)}, \dots, -e_{(n)}\},$$

де $e_{(1)}, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}$ – стандартний ортонормований базис в $\mathbb{R}^n$. Тоді

$$\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_{(k)} \rangle \leq r_k, \langle x, -e_{(k)} \rangle \leq r_k, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

За означенням опорної функції [12; 13]

$$c(\Phi(t), e_{(k)}) = c(\Phi(t), -e_{(k)}) = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \cap_{k=1,2,\dots,n} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, e_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), e_{(k)}), \langle x, -e_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), -e_{(k)})\} = \\ &= \cap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \end{aligned}$$

Робимо висновок, що множина $\Phi(t)$ є $H(t)$ -опуклою [11]. Помітимо, що

$$\begin{aligned} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} &= \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\langle \Theta(t)x_0, e_{(k)} \rangle}{r_k}, \frac{\langle \Theta(t)x_0, -e_{(k)} \rangle}{r_k} \right\} = \\ &= \max_{k=1,2,\dots,n} \frac{|(\Theta(t)x_0)_k|}{r_k}. \end{aligned}$$

Аналогічно показуємо, що

$$\min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle} = \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{|(\Theta(t)x_0)_k|}.$$

За теорем 1, 2 випливає твердження наслідку.

Наслідок 2. Нехай фазові обмеження мають вигляд

$$\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle h_{(k)}, x \rangle \leq r_k, k = 1, 2, \dots, M\},$$

де $h_{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $\|h_{(k)}\| = 1$, $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, M$. Тоді функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{k=1,2,\dots,M} \frac{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}{r_k},$$

а обернена функція Мінковського множини G_* записується так

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}} \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$I(t) = \{k = 1, 2, \dots, M : \langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle > 0\}.$$

Доведення. Розглянемо

$$H(t) = \{h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(M)}\}.$$

Тоді за означенням опорної функції [12; 13]

$$c(\Phi(t), h_{(k)}) = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \cap_{k=1,2,\dots,M} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, h_{(k)} \rangle \leq c(\Phi(t), h_{(k)})\} = \\ &= \cap_{\psi \in H(t)} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi)\}. \end{aligned}$$

Робимо висновок, що множина $\Phi(t)$ є $H(t)$ -опуклою [11]. Далі

$$\max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi)} = \max_{k=1,2,\dots,M} \frac{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}{r_k}.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\min_{\psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi)}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle} = \min_{k \in I(t)} \frac{r_k}{\langle \Theta(t)x_0, h_{(k)} \rangle}.$$

З теорем 1, 2 випливає твердження наслідку.

Теорема 3. Множина G_* є H -опуклим компактом, де

$$H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t),$$

$$R(t) = \left\{ \xi \in S : \xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|}, \psi \in H(t) \right\}, t \in \overline{0, N}.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in G_*$. За означенням 2 маємо

$$x(t) = \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

Тоді за умовою $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13]

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, \Theta^T(t)\psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Зафіксуємо $t \in \overline{0, N}$. Оскільки фундаментальна матриця $\Theta(t)$ є невиродженою, то для довільного $\psi \in H(t)$ знайдеться таке $p \in \mathbb{R}^n$, що $p = \Theta^T(t)\psi$ і

$$\langle x_0, p \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}p).$$

Позначимо $\xi = \frac{p}{\|p\|}$. Тоді, враховуючи додатну однорідність опорної функції [12]

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi).$$

При цьому

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|} \in R(t) \subseteq S.$$

Оскільки $t \in \overline{0, N}$ є довільною точкою, то

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq \min_{t \in \overline{0, N}} c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) = F(\xi),$$

де

$$\xi \in H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t) \subseteq S.$$

Отже,

$$G_* \subseteq \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

Разом з тим, якщо для деякої точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ має місце

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq F(\xi), \xi \in H,$$

то для всіх $t \in \overline{0, N}$ виконується

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi)$$

для всіх $\xi \in H$, зокрема і для $\xi \in R(t)$. Підставляємо в останній вираз

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|},$$

одержуємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Це означає, що

$$x(t) = \Theta(t)x_0 \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

За означенням 2 маємо $x_0 \in G_*$. Отже,

$$G_* = \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

З означення опорної функції випливає, що при фіксованих $\xi \in H$ значення $c(G_*, \xi)$ співпадає з $F(\xi)$, разом з тим $c(G_*, \xi) = \overline{co}F(\xi)$, $\xi \in S$, де $\overline{co}F(\psi)$ – опукле замикання функції $F(\psi)$ [9].

3. Випадок неоднорідної лінійної дискретної системи.

Розглянемо систему (1) за умови, що існує $t \in \overline{0, N-1}$, для якого $b(t) \neq 0$. Тоді незбурений розв'язок $y(t)$, $t \in \overline{0, N}$ системи (1) не дорівнює тотожно нулеві. У цьому випадку умову $y(t) \in \text{int}\Phi(t)$, $t \in \overline{0, N}$ можемо записати так

$$c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle > 0, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Теорема 4. Функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді

$$G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) \leq 1\}, \quad \partial G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) = 1\},$$

$$\text{int}G_* = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : m(x_0) < 1\}.$$

Доведення.

За означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, то $\Theta(t)\frac{x_0}{\lambda} \in \Phi(t)$ для всіх $t \in \overline{0, N}$. За властивостями опорних функцій маємо

$$\left\langle \Theta(t)\frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

для всіх $\psi \in S$ та $t \in \overline{0, N}$.

Враховуючи умову $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13], одержуємо

$$\left\langle \Theta(t) \frac{x_0}{\lambda}, \psi \right\rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}. \quad (6)$$

Для всіх $\psi \in H(t)$, враховуючи що $c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle > 0$ з (6) маємо

$$\lambda \geq \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \geq \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}.$$

Тоді за означенням функції Мінковського

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}, \psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Обґрунтуємо другу частину теореми. Точка $x_0 \in \partial G_*$ тоді і тільки тоді, коли [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}$$

і знайдеться такий момент $s_0 \in \overline{0, N}$, що

$$\Theta(s_0)x_0 + y(s_0) \in \partial\Phi(s_0).$$

Звідси з властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi),$$

але існує вектор $\psi_0 \in H(t)$ такий, що

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle + \langle y(s_0), \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0),$$

$$\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle = c(\Phi(s_0), \psi_0) - \langle y(s_0), \psi_0 \rangle.$$

Тому при $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ має місце нерівність

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} \leq 1,$$

але

$$\frac{\langle \Theta(s_0)x_0, \psi_0 \rangle}{c(\Phi(s_0), \psi_0) - \langle y(s_0), \psi_0 \rangle} = 1.$$

Остаточно одержуємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} = 1.$$

Точка $x_0 \in \text{int}G_*$ тоді і тільки тоді, коли виконується [7; 9]

$$\Theta(t)x_0 + y(t) \in \text{int}\Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції випливає, що для будь-яких $\psi \in H(t)$, $t \in \overline{0, N}$ маємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle < c(\Phi(t), \psi),$$

як наслідок,

$$\frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} < 1.$$

Звідси, враховуючи неперервність опорної функції маємо

$$m(x_0) = \max_{t \in \overline{0, N}} \max_{\psi \in H(t)} \frac{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle} < 1.$$

Теорема 5. *Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд*

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$P(t) = \{\psi \in H(t) : \langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} G_* &= \{x_0 \in \mathbb{R}^n : d(x_0) \geq 1\} = \\ &= \cup_{e \in S} L(e), \quad L(e) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ke, k \in [0, d(e)]\} = [0, d(e)]e. \end{aligned}$$

Доведення. Запишемо обернену функцію Мінковського множини G_*

$$d(x_0) = \sup \{\lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_*\},$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Точка $\lambda x_0 \in G_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), \quad t \in \overline{0, N}.$$

З властивостей опорної функції

$$\langle \lambda \Theta(t)x_0, \psi \rangle + \langle y(t), \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi), \quad \psi \in S, \quad t \in \overline{0, N}.$$

Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle},$$

для всіх $\psi \in S$ за умови $\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle > 0$.

Остаточно

$$d(x_0) = \min_{t \in \overline{0, N}, \psi \in P(t)} \frac{c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle}{\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle}.$$

Теорема 6. Множина G_* є H -опуклим компактом, де

$$H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t),$$

$$R(t) = \left\{ \xi \in S : \xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|}, \psi \in H(t) \right\}, t \in \overline{0, N}.$$

Доведення. Виберемо довільну точку $x_0 \in G_*$. За означенням 2 маємо

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

Тоді за умовою $H(t)$ -опуклості $\Phi(t)$, а також властивості опорної функції [12; 13]

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, \Theta^T(t)\psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Зафіксуємо $t \in \overline{0, N}$. Оскільки фундаментальна матриця $\Theta(t)$ є невиродженою, то для довільного $\psi \in H(t)$ знайдеться таке $p \in \mathbb{R}^n$, що $p = \Theta^T(t)\psi$ і

$$\langle x_0, p \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}p) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}p \rangle.$$

Позначимо $\xi = \frac{p}{\|p\|}$. Тоді, враховуючи додатну однорідність опорної функції [12].

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle.$$

При цьому

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|} \in R(t) \subseteq S.$$

Оскільки $t \in \overline{0, N}$ є довільною точкою, то

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq \min_{t \in \overline{0, N}} (c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle) = F(\xi),$$

де

$$\xi \in H = \cup_{t \in \overline{0, N}} R(t) \subseteq S.$$

Отже,

$$G_* \subseteq \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

Разом з тим, якщо для деякої точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ має місце

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq F(\xi), \xi \in H,$$

то для всіх $t \in \overline{0, N}$ виконується

$$\langle x_0, \xi \rangle \leq c(\Phi(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi) - \langle y(t), (\Theta^T(t))^{-1}\xi \rangle$$

для всіх $\xi \in H$, зокрема і для $\xi \in R(t)$. Підставляємо в останній вираз

$$\xi = \frac{\Theta^T(t)\psi}{\|\Theta^T(t)\psi\|},$$

одержуємо

$$\langle \Theta(t)x_0, \psi \rangle \leq c(\Phi(t), \psi) - \langle y(t), \psi \rangle, \psi \in H(t), t \in \overline{0, N}.$$

Це означає, що

$$x(t) = \Theta(t)x_0 + y(t) \in \Phi(t), t \in \overline{0, N}.$$

За означенням 2 маємо $x_0 \in G_*$. Отже,

$$G_* = \cap_{\xi \in H} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi \rangle \leq F(\xi)\}.$$

З означення опорної функції випливає, що при фіксованих $\xi \in H$ значення $c(G_*, \xi)$ співпадає з $F(\xi)$, разом з тим $c(G_*, \xi) = \overline{co}F(\xi)$, $\xi \in S$, де $\overline{co}F(\psi)$ – опукле замикання функції $F(\psi)$ [9].

Висновки

Стаття висвітлює побудову максимальної множини практичної стійкості лінійної дискретної системи з H -опуклими фазовими обмеженнями. Знайдено функцію Мінковського і обернену функцію Мінковського таких множин. Як наслідок, наведено випадок фазових обмежень у формі багатокутників. Обґрунтовано теорему про H -опуклість оптимальної множини практичної стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гаращенко, Ф. Г., & Бублик, Б. М. (2000). Розвиток методів практичної стійкості та їх використання для аналізу, оцінки і оптимізації динаміки пучків. *Вісник Київського університету. Кібернетика*, (1), 4–17.
2. LaSalle, J., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press.
3. Bashnyakov, O. M., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2012). Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions. *System Research and Information Technologies*, (3), 125–133.
4. Grippo, L., & Lampariello, F. (1976). Practical stability of discrete-time systems. *Journal of the Franklin Institute*, 302(3), 213–224.
5. Lakshmikantham, V., Leela, S., & Martynyuk, A. A. (1990). *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific.
6. Pichkur, V. V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 22(5), 1977–1986.
7. Башняков, О. М., Гаращенко, Ф. Г., & Пічкур, В. В. (2008). *Практична стійкість, оцінки та оптимізація*. Київський університет.
8. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(5), 1–12.
9. Пічкур, В. В., Капустян, О. В., & Собчук, В. В. (2023). *Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь*. ВПЦ «Київський університет».
10. Pichkur, V. V. (2019). Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions. In *Modern mathematics and mechanics* (pp. 397–410). Springer.
11. Ostapenko, V. (2008). Convexity in differential games. In *Pareto optimality, game theory and equilibria* (pp. 307–348). Springer.
12. Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*. Princeton University Press.
13. Chikrii, A. A. (2013). *Conflict-controlled processes*. Springer.
14. Bashnyakov, A. N., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2011). On maximal initial data set in problems of practical stability of discrete systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 43(3), 1–8.
15. Galor, O. (2007). *Discrete dynamical systems*. Springer.
16. Pichkur, V. V., & Linder, Ya. M. (2021). Practical stability of discrete systems: Maximum sets of initial conditions concept. In *Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics* (pp. 381–394). Springer.
17. Pichkur, V. V., Linder, Ya. M., & Tairova, M. S. (2021). On the practical stability of discrete inclusions with spatial components. *Journal of Mathematical Sciences*, 254(2), 280–286.

-
18. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.

Tairova M. S.

CONSTRUCTION OF OPTIMAL SETS OF PRACTICAL STABILITY FOR LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH H -CONVEX PHASE CONSTRAINTS

Summary

The paper investigates the problem of constructing optimal sets of practical stability for linear homogeneous and nonhomogeneous discrete systems under H -convex phase constraints. Such problems arise in the mathematical modeling of dynamical processes and in control problems with state constraints. Analytical representations of the Minkowski function and the inverse Minkowski function of the optimal practical stability set are obtained. Conditions for constructing the maximal set of initial states whose trajectories remain within the prescribed phase constraints over a finite time interval are established. Particular attention is paid to phase constraints represented by polygons and polytopes, which form an important subclass of H -convex sets. The H -convexity of optimal practical stability and practical semistability sets is proved. The obtained results can be applied to the analysis of discrete dynamical systems and to the development of computational methods for verifying practical stability under phase constraints.

Keywords: H -convexity, practical stability, practical semistability, discrete systems, optimal practical stability set, Minkowski function, inverse Minkowski function, phase constraints.

REFERENCES

1. Garashchenko, F. G., & Bublyk, B. M. (2000). Rozvytok metodiv praktychnoi stiikosti ta yikh vykorystannia dlia analizu, otsinky i optymizatsii dynamiky puchkiv [Development of methods of practical stability and their application to analysis, estimation and optimization of bundle dynamics]. *Visnyk Kyivskoho Universytetu. Kibernetyka*, (1), 4–17. [in Ukrainian].
2. LaSalle, J., & Lefschetz, S. (1961). *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press.
3. Bashnyakov, O. M., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2012). Conditions of practical stability of discrete systems and Lyapunov functions. *System Research and Information Technologies*, (3), 125–133.

4. Grippo, L., & Lampariello, F. (1976). Practical stability of discrete-time systems. *Journal of the Franklin Institute*, 302(3), 213–224.
5. Lakshmikantham, V., Leela, S., & Martynyuk, A. A. (1990). *Practical stability of nonlinear systems*. World Scientific.
6. Pichkur, V. V. (2017). On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 22(5), 1977–1986.
7. Bashnyakov, O. M., Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (2008). *Praktychna stiikist, otsinky ta optymizatsiia* [Practical stability, estimates and optimization]. Kyivskyi Universytet. [in Ukrainian].
8. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (1999). On optimal sets of practical stability. *Journal of Automation and Information Sciences*, 31(5), 1–12.
9. Pichkur, V. V., Kapustian, O. V., & Sobchuk, V. V. (2023). *Stiikist ta atraktory evoliutsiinykh rivnian* [Stability and attractors of evolution equations]. Kyivskyi Universytet.
10. Pichkur, V. V. (2019). Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions. In *Modern mathematics and mechanics* (pp. 397–410). Springer.
11. Ostapenko, V. (2008). Convexity in differential games. In *Pareto optimality, game theory and equilibria* (pp. 307–348). Springer.
12. Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*. Princeton University Press.
13. Chikrii, A. A. (2013). *Conflict-controlled processes*. Springer.
14. Bashnyakov, A. N., Pichkur, V. V., & Khitko, I. V. (2011). On maximal initial data set in problems of practical stability of discrete systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 43(3), 1–8.
15. Galor, O. (2007). *Discrete dynamical systems*. Springer.
16. Pichkur, V. V., & Linder, Ya. M. (2021). Practical stability of discrete systems: Maximum sets of initial conditions concept. In *Contemporary approaches and methods in fundamental mathematics and mechanics* (pp. 381–394). Springer.
17. Pichkur, V. V., Linder, Ya. M., & Tairova, M. S. (2021). On the practical stability of discrete inclusions with spatial components. *Journal of Mathematical Sciences*, 254(2), 280–286.
18. Haddad, W. M., & Chellaboina, V. (2008). *Nonlinear dynamical systems and control: A Lyapunov-based approach*. Princeton University Press.