

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Геометрія дотичного розшарування  
афіннозв'язного простору, яка індукована інваріантною  
теорією наближень базового простору»

«Geometry of tangent bundles of affinely connected space which induced by the invariant theory of approximations of the base space»

Виконала: студентка денної форми навчання  
спеціальності 111 Математика  
Ніколайчук Анна Олександрівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Покась С. М.  
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Курбатова І. М.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>		3
<b>1 Простори афінної зв'язності</b>		4
1.1	Тензорний аналіз . . . . .	4
1.2	Абсолютний паралелізм . . . . .	7
1.3	Рекурентне тензорне поле . . . . .	10
1.4	Локально плоский простір . . . . .	13
1.5	Афінне відображення . . . . .	14
1.6	Афінорна структура . . . . .	16
1.7	Похідна Лі . . . . .	17
<b>2 Наближення першого порядку для афіннозв'язного простору</b>		20
2.1	Деякі геометричні об'єкти простору $\tilde{A}_n$ . . . . .	20
2.2	Нескінченно малі рухи в $\tilde{A}_n$ . . . . .	22
2.3	Індуковані відображення для наближення афінних просторів	30
<b>Список літератури</b>		32

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Розглянемо простір афінної зв'язності без скруту  $A_n$ , віднесений до довільної системи координат  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , з об'єктом зв'язності  $\Gamma_{ij}^h(x)$ ;  $M_0(x_0^h) \in A_n$ . Побудуємо новий простір  $\tilde{A}_n$ , віднесений до координат  $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ , зі своїм об'єктом зв'язності  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ , який задається співвідношенням

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = -\frac{1}{3}R_{0.(ij)l}^h y^l, \text{ де } R_{0.ijl}^h = R_{.ijl}^h(M_0).$$

Якщо система координат у вихідному просторі  $A_n$  є канонічною з початком у точці  $M_0$ , то об'єкт зв'язності  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h$  реалізує наближення першого порядку для  $\Gamma_{ij}^h$  вихідного простору і тому відображає геометричні властивості  $A_n$  з деяким ступенем точності [11, 12].

Зазначимо, що наближені методи досліджень для вирішення різноманітних задач розробляються й ефективно застосовують у різних розділах математики: в теорії диференціальних рівнянь [6, 7]; в крайових задачах і рівняннях математичної фізики [1, 4]; в нелінійній механіці та механіці суцільного середовища [10, 20]; в деяких областях теоретичної фізики: прикладній астрономії і оптиці атмосфери [8]; теорії перенесення випромінювань [14], динаміці космічних апаратів, загальній теорії відносності [9].

**Мета та завдання роботи.** Метою роботи є вивчення наближення для простору афінної зв'язності та деяких його геометричних властивостей.

**Структура та обсяг роботи.** Дипломна робота складається зі змісту, вступу, двох розділів та списку літератури. Текст роботи викладено на 33 сторінках. Список літератури містить 20 найменувань.

## РОЗДІЛ 1

### ПРОСТОРИ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

#### 1.1. Тензорний аналіз

Розглянемо  $n$ -мірний дійсний диференційований многовид  $X_n$  класу  $C^r$  ( $r > 1$ ). Його елементи будемо називати точками і позначати  $M, N, M_1$  тощо.

Кожна точка многовида  $X_n$ , як відомо, належить принаймні одній його координатній області  $\Omega$ . Нехай поточна точка  $M \in \Omega$  має у ній локальні координати  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Вони можуть набувати довільних значень у деякій області зміни  $D$ :

$$x_0^k < x^k < x_1^k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Коли точка  $M \in \Omega$  фіксована, ми будемо називати іноді область типу  $D$ , якій належать її координати, околom точки  $M$ .

У області  $\Omega$  або у перетині її з іншою координатною областю  $\Omega'$  завжди можливий перехід від однієї локальної системи координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  до іншої  $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$  за формулами виду

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

Функції  $x'^1(x^1, x^2, \dots, x^n), x'^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, x'^n(x^1, x^2, \dots, x^n)$  тут вважаються такими, що належать класу  $C^r$ , тобто мають неперервні частинні похідні за всіма аргументами до порядку  $r$  включно, а якобіан їх відмінний від нуля в кожній точці:

$$\det \left\| \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \right\| \neq 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

Внаслідок цього закон перетворення (1.1) локальної системи координат в околі кожної точки однозначно оборотний, тобто припускає еквівалентне подання у формі

$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n), \quad (1.3)$$

яка розв'язна відносно початкових координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  точки  $M$  як функцій нових її координат  $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$ . Надалі зазначені системи локальних координат ми називатимемо припустимими.

Якщо  $r = \infty$ , функції (1.1) і (1.3) мають неперервні частинні похідні скільки завгодно високого порядку за всіма змінними в околі кожної точки. При  $r = \omega$  вони за означенням вважаються дійсними і аналітичними, тобто припускають у деякому околі кожної точки подання у формі степеневих рядів.

У подальшому ми будемо припускати існування і неперервність всіх тих похідних функцій, які використовуються в міркуваннях, не обумовлюючи цього щоразу спеціально. Як правило, будемо працювати у дійсному диференційованому многовиді  $X_n$  кінцевого класу  $C^r$  і притому локально, тобто в деякому околі довільної його точки.

У багатьох задачах виникає необхідність вивчення на диференційованому многовиді  $X_n$  і складніших, ніж тензори, геометричних об'єктів. Одним з таких є так званий об'єкт афінної зв'язності  $\Gamma_{ij}^k(k, i, j = 1, 2, \dots, n)$ , який характеризується наступним законом перетворення при зміні системи координат виду (1.1), (1.3) :

$$\Gamma'_{ij}{}^k(x') = \left( \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x(x')) \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^i} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^j} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^i \partial x'^j} \right) \frac{\partial x'^k}{\partial x^{\alpha}}(x(x')). \quad (1.4)$$

Тут  $\Gamma_{ij}^k(x)$  — компоненти об'єкта афінної зв'язності у вихідній системі координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$ ;  $\Gamma'_{ij}{}^k(x')$  — у новій  $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$ ;  $\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$  — частинні похідні від функцій (1.1),  $\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}$  — від зворотних до них функцій (1.3). Праворуч у (1.4) за  $\alpha, \beta, \gamma$  передбачається підсумовування від 1 до  $n$  незалежно один від одного. Об'єкт зв'язності на  $X_n$  класу  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) у подальшому вважатимемо симетричним, тобто таким, який задовольняє умовам

$$\Gamma_{ij}^k(x) \equiv \Gamma_{ji}^k(x). \quad (1.5)$$

Вони, слідуючи з (1.4), мають інваріантний характер щодо вибору системи координат. Відповідно до (1.4) об'єкт афінної зв'язності є лінійним, але не однорідним геометричним об'єктом другого порядку.

**Означення 1.1.** Простором  $A_n$  афінної зв'язності  $n$  вимірювань називається дійсний диференційований многовид  $X_n$  класу  $C^r$ , в якому визначено об'єкт афінної зв'язності  $\Gamma$ .

Це означає, що у кожній локальній системі координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  на  $X_n$  задана сукупність функцій  $\Gamma_{ij}^k(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , яка задовольняє умовам (1.5) і змінюється при будь-якому перетворенні координат виду (1.1), (1.3) за законом (1.4).

**Означення 1.2.** Тензор Рімана зв'язності  $\Gamma$ , що визначається формулами

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h(x) + \Gamma_{ik}^\alpha(x) \Gamma_{j\alpha}^h(x) - \partial_k \Gamma_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^\alpha(x) \Gamma_{k\alpha}^h(x), \quad (1.6)$$

називають тензором кривини простору  $A_n$ .

У силу своєї конструкції тензор кривини простору  $A_n$  (1.6) має наступні алгебраїчні властивості:

$$R_{ijk}^h(x) + R_{ikj}^h(x) \equiv 0, \quad (1.7)$$

$$R_{(ijk)}^h(x) = R_{ijk}^h(x) + R_{jki}^h(x) + R_{kij}^h(x) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Для тензора кривини (1.6) має місце диференціальна тотожність Біанки:

$$R_{i(jk,l)}^h(x) = R_{ijk,l}^h(x) + R_{ikl,j}^h(x) + R_{ilj,k}^h(x) \equiv 0. \quad (1.9)$$

Тут  $R_{ijk,l}^h$  — коваріантна похідна тензора Рімана зв'язності  $\Gamma$  за тією самою зв'язністю.

Результат згортання тензора Рімана  $R_{ijk}^h(x)$  простору  $A_n$  за індексами  $h$  та  $k$  позначається через  $R_{ij}(x)$ :

$$R_{ij}(x) = R_{ij\alpha}^\alpha(x) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.10)$$

Він є тензором типу  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , який називається тензором Річчі простору  $A_n$ .

За умови

$$R_{ij}(x) \equiv R_{ji}(x) \quad (1.11)$$

простір  $A_n$  називається еквіафінним. У просторі афінної зв'язності  $A_n$  вводиться коваріантне диференціювання тензорів відносно його об'єкта зв'язності. На основі цього в  $A_n$  будується інваріантна теорія паралельного перенесення векторів та тензорів уздовж даної кривої.

## 1.2. Абсолютний паралелізм

**Означення 1.3.** Поле контраваріантного вектора  $\varphi^h(t)$ , що визначено на кривій  $L$ , яка задана в параметричній формі

$$x^h = x^h(t) \quad (T_0 < t < T_1; \quad h = 1, 2, \dots, n), \quad (1.12)$$

називається паралельним уздовж неї у просторі  $A_n$ , якщо

$$\varphi_{,\alpha}^h \lambda^\alpha \equiv \frac{d\varphi^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \lambda^\alpha \varphi^\beta = 0 \quad (h, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n). \quad (1.13)$$

Тут  $\lambda^h$  — дотичний вектор кривої  $L$ ;  $\Gamma(x)$  — об'єкт зв'язності  $A_n$ , у компоненти якого підставлені функції (1.12) параметра  $t$ . При цьому рівняння (1.13) повинні мати тотожний відносно  $t$  характер.

Легко бачити, що в результаті (1.4) властивість паралельності векторного поля  $\varphi^h(t)$  вздовж кривої  $L$  інваріантна щодо вибору системи координат у просторі  $A_n$  та параметра  $t$  на кривій. Справа в тому, що рівняння (1.13) висловлюють вимогу рівності нулю коваріантної похідної векторного поля  $\varphi^h(t)$  у напрямку дотичного вектора  $\lambda^h$  кривої  $L$  (або вздовж неї).

Очевидно, якщо векторні поля  $\varphi^h(t)$  і  $\xi^h(t)$  паралельні в  $A_n$  вздовж однієї кривої  $L$ , то й поле вектора  $a\varphi^h(t) + b\xi^h(t)$  при довільних постійних  $a$  і  $b$  також паралельне вздовж  $L$ .

Тепер візьмемо точку  $M_0$  кривої  $L$ , яка відповідає значенню параметра  $t_0$ , та вектор паралельного вздовж неї векторного поля  $\varphi^h(t)$  у цій точці  $\varphi_0^h = \varphi^h(t_0)$ . Тоді вектор поля  $\varphi^h(t)$ , взятий у будь-якій іншій її точці, наприклад  $M_1$ , яка відповідає значенню параметра  $t_1$ ,  $\varphi_1^h = \varphi^h(t_1)$ , прийнято називати результатом паралельного перенесення вектора  $\varphi_0^h$  в  $A_n$  вздовж кривої  $L$  з точки  $M_0$  в точку  $M_1$ . Очевидно, у просторі  $A_n$  будь-який вектор

$\varphi_0^h$ , заданий у деякій точці  $M_0(t_0)$  даної кривої  $L$ , можна і притому єдиним чином перенести паралельно вздовж  $L$  у будь-яку іншу близьку до неї точку  $M_1(t_1)$ . Справді, система звичайних диференціальних рівнянь (1.13) відносно  $\varphi^h$  на околі точки  $M_0(t_0)$  в просторі  $A_n$  класу  $C^r$  ( $r > 2$ ) має єдине рішення  $\varphi^h(t)$ , яке відповідає початковим значенням Коші  $\varphi^h(t_0) = \varphi_0^h$ .

Отже, вектор  $\varphi_1^h = \varphi^h(t_1)$ , який є результатом паралельного перенесення вектора  $\varphi_0^h$  з точки  $M_0$  в точку  $M_1$ , визначено і до того ж однозначно.

У загальному випадку результат паралельного перенесення вектора з однієї точки простору  $A_n$  в іншу його точку суттєво залежить від шляху. Інакше кажучи, в  $A_n$  при паралельному перенесенні вектора  $\varphi_0^h$  з точки  $M_0$  в точку  $M_1$  вздовж однієї кривої  $L$  ми отримуємо в  $M_1$  один вектор  $\varphi_1^h$ , а при паралельному перенесенні  $\varphi_0^h$  з  $M_0$  в  $M_1$  вздовж іншої кривої  $\tilde{L}$  ми отримуємо в  $M_1$ , взагалі кажучи, інший вектор  $\tilde{\varphi}_1^h$ .

Проте існують спеціальні простори афінної зв'язності  $A_n$ , в яких є поля контраваріантних векторів, що мають так звану властивість абсолютного паралелізму.

**Означення 1.4.** Векторне поле  $\varphi^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , яке визначено у деякій області  $D$  простору  $A_n$ , називається абсолютно паралельним у  $D$ , якщо воно паралельно в  $A_n$  уздовж будь-якої кривої  $L$ , що належить цій області. З (1.13) випливає, що необхідна та достатня умови абсолютної паралельності векторного поля має вигляд:

$$\varphi_{,i}^h(x) \equiv \frac{\partial \varphi^h(x)}{\partial x^i} + \Gamma_{i\alpha}^h(x) \varphi^\alpha(x) \equiv 0 \quad (h, i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.14)$$

Аналогічно, умовами

$$\mu_{i,\alpha} \lambda^\alpha \equiv \frac{d\mu_i}{dt} - \Gamma_{\beta i}^\alpha \mu_\beta \lambda^\alpha \equiv 0 \quad (1.15)$$

вводиться поняття паралельності вздовж кривої  $L$ , яку задано у параметричному вигляді (1.12), у просторі  $A_n$  поля коваріантного вектора  $\mu_i(t)$  та паралельного перенесення коваріантного вектора  $\mu_i$  з точки  $M_0$  в точку  $M$  вздовж кривої  $L$ . Вони мають інваріантний характер щодо вибору системи координат у просторі  $A_n$  і параметра  $t$  на кривій  $L$ , а також володі-

ють зазначеними вище властивостями у випадку контраваріантних векторів. Умова абсолютної паралельності поля коваріантного вектора  $\mu_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$  у просторі  $A_n$  має вигляд

$$\mu_{i,j}(x) \equiv \frac{\partial \mu_i(x)}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^\alpha(x) \mu_\alpha(x) \equiv 0. \quad (1.16)$$

Нарешті, умовою

$$\begin{aligned} S_{j_1 j_2 \dots j_q, \alpha}^{i_1 i_2 \dots i_p} \lambda^\alpha &= \frac{dS_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(t)}{dt} + \lambda^\beta \left( \Gamma_{\beta \alpha}^{i_1} S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(t) + \dots + \Gamma_{\beta \alpha}^{i_p} S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{\beta j_1}^\alpha S_{\alpha j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(t) - \dots - \Gamma_{\beta j_q}^\alpha S_{j_1 \dots j_{q-1} \alpha}^{i_1 i_2 \dots i_p}(t) \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

у  $A_n$  вводиться поняття паралельності вздовж кривої  $L$ , заданої у вигляді

(1.12), поля тензора  $S(t)$  довільного типу  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ . Воно інваріантне щодо

вибору системи координат у  $A_n$  та параметра  $t$  на кривій  $L$ . Подібно до того, як і у випадку векторів, за допомогою умови (1.17) визначається паралельне

перенесення тензора  $S_0 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  вздовж кривої  $L$  з точки  $M_0$  в будь-яку іншу

(близьку) точку  $M_1$ , вводиться поняття та виникають умови абсолютної паралельності тензорного поля  $S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , які мають вигляд

$$S_{j_1 j_2 \dots j_q, k}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \equiv 0. \quad (1.18)$$

Зліва тут стоїть коваріантна похідна даного тензорного поля у просторі  $A_n$ . До речі, абсолютно паралельні тензори нерідко називають на підставі (1.18) коваріантно постійними.

**Означення 1.5.** Простір афінної зв'язності  $A_n$  називається локально симетричним, якщо тензор Рімана у ньому абсолютно паралельний [15, 18].

Таким чином, симетричні простори  $A_n$  характеризуються умовою

$$R_{ijk,l}^h(x) \equiv 0. \quad (1.19)$$

Вона, будучи тензорною, має інваріантний характер щодо вибору системи координат.

### 1.3. Рекурентне тензорне поле

Більш загальним є поняття рекурентного векторного або тензорного поля вздовж кривої у просторі афінної зв'язності  $A_n$ .

**Означення 1.6.** Векторне поле  $\varphi^h(t)$  називається рекурентним уздовж кривої  $L$ , яку задано в вигляді (1.12), якщо в кожній її точці виконується умова

$$\varphi^h_{,\alpha} \lambda^\alpha = \rho \varphi^h \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (1.20)$$

Тут  $\rho(t)$  — деякий інваріант, а ліва частина є коваріантною похідною векторного поля  $\varphi^h(t)$  у напрямку вектора  $\lambda^h(t)$ , дотичного до кривої  $L$ . Властивість рекурентності векторного поля  $\varphi^h(t)$  вздовж кривої  $L$  інваріантна щодо вибору системи координат в  $A_n$ , параметра  $t$  на кривій та заміни цього векторного поля колінеарним йому полем  $\tilde{\varphi}^h = \sigma(t)\varphi^h(t)$ .

**Означення 1.7.** Крива  $L$ , задана у вигляді (1.12), простору афінної зв'язності  $A_n$  називається геодезичною лінією цього простору, якщо дотичне векторне поле  $\lambda^h(t)$  цієї кривої рекурентно вздовж неї, тобто задовольняє умовам

$$\lambda^h_{,\alpha} \lambda^\alpha = \rho \lambda^h \quad (h = 1, 2, \dots, n). \quad (1.21)$$

Відповідно до (1.13) вони мають вигляд

$$\frac{d\lambda^h(t)}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha(t)\lambda^\beta(t) = \rho(t)\lambda^h(t) \quad (1.22)$$

або, оскільки  $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ ,

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = \rho(t)\frac{dx^h}{dt} \quad (h, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n). \quad (1.23)$$

Отже, крива  $L$  є геодезичною лінією простору  $A_n$  тоді і лише тоді, коли функції (1.12) задовольняють у ньому рівнянням (1.23) при деякому  $\rho(t)$ .

На підставі вищесказаного, крива  $L$  являє собою геодезичну лінію простору  $A_n$  і не залежить ні від вибору системи координат у цьому просторі, ні від вибору на ній параметра  $t$ .

Параметр  $t$  кривої  $L$  у параметричному поданні (1.12) передбачає, що він припускає перетворення виду

$$t = t(\tau), \quad (1.24)$$

де дійсна функція  $t(\tau)$  має неперервні похідні до порядку  $r$ , причому  $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ . Рівняння кривої  $L$  після переходу до нового параметра  $\tau$  за законом (1.24) будуть такими:

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(\tau) \equiv x^h(x(\tau)). \quad (1.25)$$

Тому для дотичного вектора  $\tilde{\lambda}^h$  кривої  $L$  при новій параметризації отримуємо вираз

$$\tilde{\lambda}^h = \frac{dt}{d\tau} \lambda^h. \quad (1.26)$$

Значення інваріанту  $\rho(t)$  в результаті перетворення виду (1.24) параметра  $t$  змінюється, оскільки змінюється за формулами (1.26) дотичний вектор кривої. Тому у просторі  $A_n$  для кожної геодезичної лінії  $L$  завжди можна за законом (1.24) перейти від вихідного параметра  $t$  до нового параметра  $\tau$ , при якому для дотичного вектора  $\tilde{\lambda}^h(t)$  замість (1.21) виконуватимуться умови

$$\tilde{\lambda}_{,\alpha}^h \tilde{\lambda}^\alpha \equiv 0.$$

Такий параметр геодезичної лінії називається канонічним. Відповідно до (1.13) остання умова означає, що дотичний вектор  $\tilde{\lambda}^h$  геодезичної лінії, віднесеної до канонічного параметра, паралельний уздовж неї.

Таким чином, для функцій

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(\tau) \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (1.27)$$

де  $\frac{d\tilde{x}^h}{d\tau} = \tilde{\lambda}^h \neq 0$ , що визначають геодезичну лінію  $L$  простору  $A_n$ , віднесену

до канонічного параметра  $\tau$ , виконуються рівняння

$$\frac{d^2 \tilde{x}^h}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \frac{d\tilde{x}^\alpha}{d\tau} \frac{d\tilde{x}^\beta}{d\tau} = 0 \quad (h, \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n). \quad (1.28)$$

Вони є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку типу Коші. На підставі теореми теорії диференціальних рівнянь [13] для будь-яких початкових значень Коші

$$\tilde{x}^h(\tau_0) = \tilde{x}_0^h, \quad \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau}(\tau_0) = \tilde{\lambda}_0^h$$

у просторі  $A_n$  класу  $C^{r-2}$  ( $r > 2$ ) ця система має єдине рішення. Тому в будь-якому просторі афінної зв'язності  $A_n$  зазначеного класу через кожну його фіксовану точку  $M_0$  ( $\tilde{x}_0^h$ ) у кожному напрямку  $\tilde{\lambda}_0^h \in T_{M_0}$  можна провести і при тому єдину геодезичну лінію.

У просторах афінної зв'язності  $A_n$  може бути побудована теорія кривини кривих. Відповідно до неї для кривої  $L$  з  $A_n$  у загальному випадку в кожній точці у певному порядку виникає  $n - 1$  кривина:  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ . Якщо деяка з кривин для кривої  $L$  тотожно дорівнює нулю, то тотожно звертаються в нуль і всі наступні кривини цієї кривої. Кривими ж просторів афінної зв'язності  $A_n$ , у яких тотожно дорівнює нулю перша кривина  $k_1$ , є геодезичні лінії і тільки вони. Тому геодезичні лінії в геометрії просторів афінної зв'язності відіграють роль, подібну до прямих в евклідовому просторі.

У просторах афінної зв'язності та для тензорних полів довільного типу може бути введено поняття рекурентності.

**Означення 1.8.** Тензорне поле  $S \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  називається рекурентним уздовж кривої  $L$  у просторі  $A_n$ , якщо у кожній точці цієї кривої воно задовольняє умовам

$$S_{j_1 j_2 \dots j_q, \alpha}^{i_1 i_2 \dots i_p} \lambda^\alpha = \rho S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \\ (i_1, i_2, \dots, i_p; j_1, j_2, \dots, j_q; \alpha = 1, 2, \dots, n).$$

**Означення 1.9.** Тензорне поле  $S \begin{pmatrix} p \\ a \end{pmatrix}$  називається абсолютно рекурентним, якщо воно рекурентно вздовж будь-якої кривої простору  $A_n$ .

Необхідна та достатня умови абсолютної рекурентності тензорного поля  $S \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  має вигляд

$$S_{j_1 j_2 \dots j_q, k}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = \rho_k(x) S_{j_1 j_2, \dots, j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x). \quad (1.29)$$

**Означення 1.10.** Якщо тензор Рімана простору  $A_n$  є абсолютно рекурентним у ньому, тобто якщо

$$R_{.ijk, l}^h(x) = \rho_l(x) R_{.ijk}^h(x), \quad (1.30)$$

то  $A_n$  називається рекурентним.

#### 1.4. Локально плоский простір

**Означення 1.11.** Простір афінної зв'язності  $A_n$  називається локально плоским або афінним, якщо в деякій околиці  $D$  кожної його точки може бути обрана така система координат  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , звана афінною, щодо якої в цій околиці об'єкт зв'язності  $A_n$  тотожно дорівнює нулю:

$$\Gamma_{ij}^h(y) \equiv 0 \quad (h, i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.31)$$

Для плоского простору афінної зв'язності  $A_n$  в афінній системі координат з (1.31) на підставі (1.6) випливає, що  $R_{.ijk}^h(y) \equiv 0$ . Проте рівність тензора нулю є фактом, інваріантним щодо вибору системи координат. Отже, для плоского простору  $A_n$ , до якої б системи координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  він не був би віднесений, ми маємо

$$R_{.ijk}^h(x) \equiv 0 \quad (h, i, j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.32)$$

З (1.4) неважко переконатися в тому, що умова (1.32) є не тільки необхідною, але й достатньою для того, щоб простір  $A_n$  був локально плоским.

Для плоского простору  $A_n$ , віднесеного до афінних координат, з рівнянь виду (1.28) внаслідок (1.31) отримуємо

$$y^h(\tau) = y_0^h + (\tau - \tau_0) \tilde{\lambda}_0^h,$$

де  $y_0^h = y^h(\tau_0)$ ,  $\frac{dy^h}{d\tau}(\tau_0) = \tilde{\lambda}_0^h$ . Це означає, що геодезичні лінії плоского простору  $A_n$  є прямими. Подібним чином можна переконатися в тому, що кривими плоского простору, для яких друга кривина  $k_2$  тотожно дорівнює нулю, є криві, що лежать у двовимірних площинах, і тільки вони.

### 1.5. Афінне відображення

Розглянемо локально взаємно однозначне відображення  $f$   $n$ -мірного диференційованого многовида  $X_n$  класу  $C^r$  на диференційований многовид  $\bar{X}_n$  того ж класу. Нехай поточній точці  $M \in X_n$  при відображенні  $f$  відповідає точка  $\bar{M} \in \bar{X}_n$ :  $M \xrightarrow{f} \bar{M}$ . Відображення  $X_n$  на  $\bar{X}_n$  індукує певне відображення дотичних просторів до даних многовидів у відповідних точках. Воно зветься диференціалом відображення  $f$  і позначається  $df : T_M \rightarrow \bar{T}_{\bar{M}}$  або  $T_M \xrightarrow{df} \bar{T}_{\bar{M}}$ .

Якщо точка  $M$  має в  $X_n$  локальні координати  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , а відповідна їй за відображенням  $f$  точка  $\bar{M}$  має в  $\bar{X}_n$  локальні координати  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ , то будемо припускати, що

$$\bar{x}^h = \bar{f}^h(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (1.33)$$

де функції  $\bar{f}^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$  належать класу  $C^r$  ( $r > 2$ ) і

$$\det \left\| \frac{\partial \bar{f}^h}{\partial x^k} \right\| \neq 0.$$

За цих умов для функцій (1.33) в околиці кожної точки існують зворотні функції

$$x^k = f^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \quad (1.34)$$

того ж класу.

Крива  $L$  з  $X_n$ , яку задано в параметричній формі рівняннями (1.12) при відображенні  $f$ , яке визначено системою функцій (1.33), переходить у криву  $\bar{L}$  з  $\bar{X}_n$ , параметричне подання якої ми отримаємо у вигляді

$$\bar{x}^h = \bar{x}^h(t) = \bar{f}^h(x(t)). \quad (1.35)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d\bar{x}^h}{dt} = \frac{\partial \bar{f}^h}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt},$$

тобто

$$\bar{\lambda}^h = \frac{\partial \bar{f}^h}{\partial x^\alpha} \lambda^\alpha, \quad (1.36)$$

де  $\lambda^h \in T_M$  і є дотичним вектором кривої  $L$  у точці  $M$ , а  $\bar{\lambda}^h \in \bar{T}_{\bar{M}}$  — дотичним вектором  $\bar{L}$  в  $\bar{M}$ .  $\bar{\lambda}^h$  вважається відповідним вектору  $\lambda^h$  при відображенні  $f$ . Оскільки  $\lambda^h$  можна розглядати як довільний вектор простору  $T_M$ , рівняння (1.36) визначають відображення  $T_M$  на  $\bar{T}_{\bar{M}}$ , яке індуковане відображенням  $X_n \xrightarrow{f} \bar{X}_n$  і яке зветься його диференціалом:  $\lambda^h \xrightarrow{df} \bar{\lambda}^h$ . Внаслідок умови  $\det \left\| \frac{\partial \bar{f}^h}{\partial x^k} \right\| \neq 0$  це відображення взаємно однозначне.

Якщо в  $\bar{X}_n$  від вихідної системи координат  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$  ми перейдемо до нової за формулами (1.34), то після цього відповідні за відображенням  $f$  точки  $M \in X_n$  і  $\bar{M} \in \bar{X}_n$  матимуть однакові координати:  $M(x^1, x^2, \dots, x^n) \xrightarrow{f} \bar{M}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . Інакше кажучи, відображення  $X_n \xrightarrow{f} \bar{X}_n$  здійснюватиметься за принципом рівності координат відповідних точок. У цьому випадку прийнято говорити, що  $X_n$  і  $\bar{X}_n$  віднесені до загальної за відображенням  $f$  системи координат. Оскільки тепер рівняння (1.33) набувають вигляду  $\bar{x}^h = x^h$ , з (1.36) випливає, що  $\bar{\lambda}^h = \lambda^h$ , тобто відображення  $T_M \xrightarrow{df} \bar{T}_{\bar{M}}$  буде здійснюватися за принципом рівності компонент відповідних векторів.

Припустимо, що на  $X_n$  визначено афінну зв'язність  $\Gamma$ , а на  $\bar{X}_n$  — афінна зв'язність  $\bar{\Gamma}$ , і ми розглядаємо відображення  $f$  простору афінної зв'язності  $A_n$  на простір афінної зв'язності  $\bar{A}_n$ .

**Означення 1.12.** Відображення  $A_n \xrightarrow{f} \bar{A}_n$  називається афінним, якщо його диференціал  $df$  кожне паралельне вздовж будь-якої кривої  $L$  в  $A_n$  векторне

поле  $\varphi^h$  переводить у паралельне вздовж відповідної в  $\bar{A}_n$  кривої  $\bar{L}$  векторне поле  $\bar{\varphi}^h$ .

З цього означення неважко зробити висновок про те, що відображення  $A_n$  на  $\bar{A}_n$ , що визначається в локальних координатах рівняннями (1.33) або (1.34), є афінним тоді і тільки тоді, коли між їх об'єктами зв'язності має місце наступна залежність:

$$\frac{\partial f^h}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha(x) = \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \frac{\partial f^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 f^h}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}.$$

Порівняння отриманої залежності з (1.4) показує, що два простори афінної зв'язності  $A_n$  і  $\bar{A}_n$ , що припускають афінне відображення один на одного, являють собою той самий простір, що розглядається в різних системах координат. Для цих просторів у загальній за відображенням  $f$  системі координат ми отримуємо

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) \quad (1.37)$$

Таким чином, відображення  $A_n \xrightarrow{f} \bar{A}_n$  є афінним тоді і лише тоді, коли у загальній за відображенням системі координат у відповідних точках однойменні компоненти об'єктів зв'язності цих просторів збігаються.

## 1.6. Афінорна структура

**Означення 1.13.** Дійсний диференційований многовид  $X_n$  класу  $C^r$  за визначенням вважається наділений афінорною структурою, якщо на ньому

задано поле  $F$  тензора типу  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

У кожній локальній системі координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  на  $X_n$  його компоненти  $F_i^h(h, i = 1, 2, \dots, n)$  є певними функціями класу  $C^{r-1}$  координат поточної точки:  $F_i^h = F_i^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

**Означення 1.14.** Афінорна структура  $F_i^h$  на  $X_n$  називається локально інтегрованою, якщо в деякому не виродженому околі  $D$  кожної його точки існує така система координат  $y^1, y^2, \dots, y^n$ , відносно якої всі компоненти  $F_i^h$  в області  $D$  є постійними.

Очевидно, у цьому випадку афінорна структура  $F_i^h$ , шляхом переходу до канонічної системи координат, може бути приведена до нормальної жорданової форми в усіх точках області  $D$  одночасно. Відомо [17], що необхідною та достатньою ознакою локальної інтегрованості афінорної структури  $F_i^h$  є існування на  $X_n$  симетричної афінної зв'язності  $\Gamma$ , відносно якої ця структура абсолютно паралельна, тобто задовольняє умовам

$$F_{i,j}^h \equiv 0. \quad (1.38)$$

Умовимося рахувати  $X_n$  наділеним  $e$ -структурою, якщо у ньому задана афінорна структура  $F_i^h$ , яка задовольняє в кожній точці умовам

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e \delta_i^h \quad (h, i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.39)$$

де  $e = 1, -1$  або  $0$ . Коли  $e = 1$ , кажуть, що  $X_n$  має структуру майже добутку. Коли  $e = -1$ ,  $X_n$  називається майже комплексним многовидом. Коли  $e = 0$  — майже тангенціальним. Водночас з (1.39) необхідною та достатньою умовою локальної інтегрованості  $e$ -структури є тотожна рівність нулю її тензора Нейенхейса

$$N_{ij}^h = F_i^\alpha (\partial_j F_\alpha^h - \partial_\alpha F_j^h) - F_j^\alpha (\partial_i F_\alpha^h - \partial_\alpha F_i^h) \quad (1.40)$$

$$(h, i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Легко бачити, що частинні похідні тут можна замінити коваріантними похідними за будь-якої зв'язності без кручення.

## 1.7. Похідна Лі

Припустимо спочатку, що у многовиді  $X_n$  задані диференціально-геометричний об'єкт  $\Omega^a$  класу  $C^l$  та деяке точкове перетворення класу  $C^l$  ( $l \leq p$ ), яке переводить деяку область  $U$  в область  $\tilde{U}$ . Зберігаючи за кожною точкою  $\tilde{p}$  області  $\tilde{U}$  координати точки  $p \in U$  — прообразу точки  $\tilde{p}$ , ми отримуємо в  $\tilde{U}$  перетворену локальну систему координат. При аналізованому точковому перетворенні разом з точками перетворюються за відповідними індукованими законами та зв'язні з ними дотичні простори та геометричні об'єкти.

Геометричний об'єкт  $\Omega^a$  у точці  $p$  перетворюється на об'єкт  $\widetilde{\Omega}^a$  у точці  $\widetilde{p}$  так, що координати останнього у перетвореній локальній системі координат за визначенням приймаються рівними відповідним координатам даного об'єкта  $\Omega^a$  у вихідній системі координат. За відомими формулами перетворення локальних координат зазвичай визначаються координати перетвореного об'єкта у вихідній системі координат.

Перейдемо тепер до означення похідної Лі. Нехай  $\xi^\alpha(x)$  є вектором інфінітезимального перетворення, тобто перетворення, при якому точки  $p(x^\alpha)$  переходять у  $\widetilde{p}(\widetilde{x}^\alpha)$  за законом:

$$\widetilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x)dt, \quad (1.41)$$

де  $dt$  позначає приріст деякої незалежної змінної  $t$ . Точці  $p(x^\alpha)$  зіставляється точка  $\widetilde{p}(\widetilde{x}^\alpha)$ .

**Означення 1.15.** Похідною Лі заданого диференціально-геометричного об'єкта  $\Omega(p)$  у точці  $p$  називається такий об'єкт, координати якого є границями різниць відповідних координат у точці  $\widetilde{p}$  даного об'єкта  $\Omega(\widetilde{p})$  та перетвореного об'єкту  $\widetilde{\Omega}(\widetilde{p})$ , віднесених до приросту  $\Delta t (t = 0)$ , що викликав перехід точки  $p$  в точку  $\widetilde{p}$ , за умови, що  $\Delta t$  прямує до нуля. Позначаючи похідну від об'єкта  $\Omega$  символом  $L\Omega$ , маємо:

$$L\Omega(p) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Omega(\widetilde{p}) - \widetilde{\Omega}(\widetilde{p})}{\Delta t}. \quad (1.42)$$

Похідна Лі виходячи з (1.42) характеризує ступінь відхилення природного значення об'єкта від перетвореного. Слід також зазначити, що при складанні різниць відповідних координат природного значення диференціально-геометричного об'єкта  $\Omega(\widetilde{p})$  і перетвореного об'єкта  $\widetilde{\Omega}(\widetilde{p})$ , координати останнього передбачаються обчисленими у вихідній системі координат.

З (1.42) випливає також закон перетворення  $L\Omega^b$  при перетворенні локальних координат:

$$L\Omega^{a'} = \frac{\partial F^a}{\partial \Omega^b} L\Omega^b. \quad (1.43)$$

З формули (1.43) випливає насамперед, що властивість обернення в нуль усіх  $L\Omega^a$  не залежить від вибору координат. Ці формули визначають за-

кон перетворення похідної Лі при перетворенні локальних координат ( $x^\alpha$ ). Оскільки частинні похідні від функції  $F^a$  за  $\Omega^b$  містять у загальному випадку координати самого об'єкта  $\Omega$ , то похідна Лі від геометричного об'єкта, взагалі кажучи, не є геометричним об'єктом.

Праві частини (1.43) показують, що похідна Лі від геометричного об'єкта тоді і тільки тоді є геометричним об'єктом, коли частинні похідні від правих частин формул

$$\Omega^{a'} = F^{a'} \left( \Omega, x, x', \partial_{\beta_1} x^{\alpha'}, \dots, \partial_{\beta_1 \dots \beta_l} x^{\alpha'} \right) \left( \partial_{\beta_k \dots \beta_1} x^{\alpha'} = \frac{\partial^k x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta_1} \dots \partial x^{\beta_k}} \right), \quad (1.44)$$

за  $\Omega^a$  не залежать від  $\Omega$ . Отже, даний геометричний об'єкт має бути лінійним об'єктом:

$$\Omega^a = A_b^a \left( x, \bar{x}, \bar{f}_{\beta_1}^\alpha, \dots, \bar{f}_{\beta_1 \dots \beta_l}^\alpha \right) \Omega^b + B^a \left( x, \bar{x}, f_{\beta_1}^\alpha, \dots, f_{\beta_1 \dots \beta_l}^\alpha \right). \quad (1.45)$$

Ясно, що в цьому випадку при тотожному перетворенні координат коефіцієнти  $A_b^a$  у формулах перетворення лінійного об'єкта перетворюються на символи Кронекера,  $B^a$  — у нулі. При цих значеннях коефіцієнтів перетворення координат об'єкта  $\Omega^a$  тотожне.

Крім того, з (1.43) випливає, що координати похідної Лі лінійного диференціально-геометричного об'єкта перетворюються за наступним законом:

$$L\Omega^{a'} = A_a^{a'} \left( x, \bar{x}, \bar{f}_{\beta_1}^\alpha, \dots, \bar{f}_{\beta_1 \dots \beta_l}^\alpha \right) L\Omega^a. \quad (1.46)$$

Таким чином, (1.46) показує, що похідна від тензора є тензором того ж типу. Наведемо приклади обчислення похідної Лі для тензора  $g_{ij}$  і для  $\Gamma_{ij}^h$ .

$$L_\xi g_{ij} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} g_{\alpha j} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} g_{\alpha i} + \xi^\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \quad (1.47)$$

$$L_\xi \Gamma_{ij}^h = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial y^i \partial y^j} + \xi^\beta \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial y^\beta} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial y^i} \Gamma_{\beta j}^h + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial y^j} \Gamma_{\beta i}^h - \frac{\partial \xi^h}{\partial y^\beta} \Gamma_{ij}^\beta. \quad (1.48)$$

## РОЗДІЛ 2

### НАБЛИЖЕННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ АФІННОЗВ'ЯЗНОГО ПРОСТОРУ

Нехай задано простір  $A_n$ , віднесений до координат  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ , з об'єктом зв'язності  $\Gamma_{ij}^h(x)$ .  $M_0$  — фіксована точка цього простору. Будуємо новий простір  $\tilde{A}_n$ , віднесений до координат  $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ , зі своїм об'єктом зв'язності  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ , який задається формулою

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = -\frac{1}{3}R_{0.(ij)l}^h y^l, \quad (2.1)$$

де  $R_{0.(ij)l}^h = R_{.(ij)l}^h(M_0)$  — компоненти тензора кривини простору  $A_n$ , круглі дужки позначають симетрування без ділення за вміщеними у них індексами.

#### 2.1. Деякі геометричні об'єкти простору $\tilde{A}_n$

Розглянемо тензор Рімана:

$$\tilde{R}_{.ijk}^h(y) = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^h}{\partial y^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^k} + \tilde{\Gamma}_{ik}^\alpha(x) \tilde{\Gamma}_{j\alpha}^h - \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha(x) \tilde{\Gamma}_{k\alpha}^h. \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^k} = -\frac{1}{3}R_{0.(ij)k}^h$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha k}^h = \frac{1}{9}R_{0.(ij)l_1}^\alpha R_{0.(\alpha k)l_2}^h y^{l_1} y^{l_2},$$

тому

$$\tilde{R}_{.ijk}^h = -\frac{1}{3} \left( R_{.(ik)j}^h - R_{.(ij)k}^h \right) \Big|_0 + \frac{1}{9} \left( R_{.(ik)l_1}^\alpha R_{.(\alpha j)l_2}^h - R_{.(ij)l_1}^\alpha R_{.(\alpha k)l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}.$$

Враховуючи алгебраїчні властивості тензора Рімана (1.7) і (1.8),

$$\begin{aligned} R_{.(ik)j}^h - R_{.(ij)k}^h &= R_{.ikj}^h + R_{.kij}^h - R_{.ijk}^h - R_{.jik}^h = R_{.ikj}^h - R_{.ijk}^h - R_{.ijk}^h = \\ &= -R_{.ijk}^h - 2R_{.ijk}^h = -3R_{.ijk}^h. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\tilde{R}^h_{.ijk} = R^h_{.ijk} + \frac{1}{9} \left( R^{\alpha}_{.(ik)l_1} R^h_{.(\alpha j)l_2} - R^{\alpha}_{.(ij)l_1} R^h_{.(\alpha k)l_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (2.3)$$

Останнє співвідношення згорнемо за індексами  $h$  та  $k$  і отримуємо тензор Річчі:

$$\tilde{R}_{.ij} = R_{.ij} + \frac{1}{9} \left( R_{.il_1} R_{.jl_2} + R^{\alpha}_{.(ij)l_1} R_{.al_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (2.4)$$

Підрахуємо компоненти параметрів Томаса.

$$\tilde{T}^h_{ij} = \tilde{\Gamma}^h_{.ij} - \frac{1}{n+1} \left( \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{.ai} \delta^h_j + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{.aj} \delta^h_i \right) \quad (2.5)$$

Згорнемо (2.1) за індексами  $h$  та  $j$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{.ai} &= -\frac{1}{3} R^{\alpha}_{.(\alpha a)l} y^l = -\frac{1}{3} R^{\alpha}_{.ial} y^l - \frac{1}{3} R^{\alpha}_{.ail} y^l \\ \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{.ai}(y) &= \frac{1}{3} R_{.il} y^l \end{aligned} \quad (2.6)$$

Підставимо (2.6) в (2.5), тоді проєктивні параметри Томаса мають вигляд

$$\tilde{T}^h_{ij} = -\frac{1}{3} \left[ R^h_{.(ij)l} + \frac{1}{n+1} \left( R_{.il} \delta^h_j + R_{.jl} \delta^h_i \right) \right] \Big|_0 y^l \quad (2.7)$$

Наразі підрахуємо компоненти тензора проєктивної кривини (тензора Вейля).

$$\tilde{W}^h_{.ijk} = \tilde{R}^h_{.ijk} - \frac{1}{n-1} \left( \tilde{R}_{.ij} \delta^h_k - \tilde{R}_{.ik} \delta^h_j \right) \quad (2.8)$$

Підставимо співвідношення (2.3) і (2.4) в (2.8) та отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{W}^h_{.ijk} &= R^h_{.ijk} + \frac{1}{9} \left( R^{\alpha}_{.(ik)l_1} R^h_{.(\alpha j)l_2} - R^{\alpha}_{.(ij)l_1} R^h_{.(\alpha k)l_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} - \frac{1}{n-1} \times \\ &\times \left[ \left( R_{.ij} + \frac{1}{9} \left( R_{.il_1} R_{.jl_2} + R^{\alpha}_{.(ij)l_1} R_{.al_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} \right) \delta^h_k - \left( R_{.ik} + \frac{1}{9} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left( R_{.il_1} R_{.kl_2} + R_{.(ik)l_1}^\alpha R_{.al_2} \right) \Big|_0^{y^{l_1} y^{l_2}} \delta_j^h \Big].$$

Після приведення подібних маємо

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{.ijk}^h &= W_{.ijk}^h + \frac{1}{9} \left[ R_{.(ik)l_1}^\alpha R_{.(aj)l_2}^h - R_{.(ij)l_1}^\alpha R_{.(ak)l_2}^h - \frac{1}{n-1} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \left( R_{.il_1} R_{.jl_2} + R_{.(ij)l_1}^\alpha R_{.al_2} \right) \delta_k^h - \left( R_{.il_1} R_{.kl_2} + R_{.(ik)l_1}^\alpha R_{.al_2} \right) \delta_j^h \right] \right] y^{l_1} y^{l_2}. \end{aligned}$$

## 2.2. Нескінченно малі рухи в $\tilde{A}_n$

**Означення 2.1.** Відображення простору  $\tilde{A}_n$  на себе, яке зберігає об'єкт  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ , називається рухом даного простору афінної зв'язності.

Будемо досліджувати перехід від координат  $y^1, y^2, \dots, y^n$  до нових координат  $y'^1, y'^2, \dots, y'^n$  на лінійному перетворенні відносно приросту параметра  $t$

$$y'^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y) \delta t, \quad (2.9)$$

де  $\tilde{\xi}^h(y)$  — вектор зміщення рухів.

Компоненти вектора зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  будемо шукати в такому вигляді:

$$\tilde{\xi}^h(y) = a_{.}^h + a_{.l_1}^h y^{l_1} + a_{.l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + a_{.l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + a_{.l_1 l_2 \dots l_k}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

або

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{.k}^h, \quad (2.10)$$

де введено позначення

$$a_{.p}^h = a_{.l_1 l_2 \dots l_p}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_p}. \quad (2.11)$$

**Зауваження 2.1.** У (2.11)  $a_{.}^h, a_{.l_1 l_2 \dots l_p}^h$  — деякі постійні, причому  $a_{.l_1 \dots l_p}^h (p \geq 2)$  симетричні за будь-якою парою нижніх індексів.

Введемо позначення:

$$t_\alpha^h = \frac{1}{3} R_{.l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2}, \quad t_\alpha^{(2)h} = t_\beta^h t_\alpha^\beta, \quad \dots \quad (2.12)$$

**Лема 2.1.** Для того, щоб ряди (2.10) визначали компоненти вектора зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  у просторі  $\tilde{A}_n$ , необхідно, щоб члени цих рядів визначалися з рекурентних співвідношень

$$a_{2k}^h = -\frac{2k-3}{k(2k-1)} a_{2k-2}^\alpha t_\alpha^h, \quad (2.13)$$

$$a_{2k+1}^h = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

*Доведення.* Відомо [3], що векторне поле зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  тоді і тільки тоді переводить об'єкт  $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$  в себе, коли

$$L_{\tilde{\xi}} \tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = 0. \quad (2.15)$$

Відносно компонент вектора зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  рівняння (2.15) представляють систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^h + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha i}^h - \frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha = 0. \quad (2.16)$$

Диференціюємо співвідношення (2.10) як степеневу функцію:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^i} = a_{.i}^h + 2a_{.il}^h y^l + 3a_{.il_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (k+1)a_{.il_1 l_2 \dots l_k}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

Розпишемо перший доданок рівняння (2.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} &= 2a_{.ij}^h + 2 \cdot 3a_{.ijl_1}^h y^{l_1} + 3 \cdot 4a_{.ijl_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + \dots + \\ &+ (k+1)(k+2)a_{.ijl_1 \dots l_k}^h y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \end{aligned}$$

Тепер розпишемо другий доданок:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} = -\frac{1}{3} R_{0.(ij)\alpha}^h$$

$$\tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} = -\frac{1}{3} \left[ \left( a_{.i}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left( a_{.l_1}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + \left( a_{.l_1 l_2}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + \right. \\ \left. + \dots + \left( a_{.l_1 \dots l_k}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} \right]$$

Третій доданок має вигляд:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^h = -\frac{1}{3} \left[ \left( a_{.i}^\alpha R_{.(\alpha j)l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left( a_{.il_1}^\alpha R_{.(\alpha j)l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ \left. \times \left( a_{.il_1 l_2}^\alpha R_{.(\alpha j)l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left( a_{.il_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{.(\alpha j)l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right]$$

Аналогічно четвертий доданок:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha i}^h = -\frac{1}{3} \left[ \left( a_{.j}^\alpha R_{.(\alpha i)l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left( a_{.jl_1}^\alpha R_{.(\alpha i)l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ \left. \times \left( a_{.jl_1 l_2}^\alpha R_{.(\alpha i)l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left( a_{.jl_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{.(\alpha i)l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right]$$

П'ятий доданок:

$$-\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha = \frac{1}{3} R_{.(ij)m}^\alpha y^m \left( a_{.\alpha}^h + 2a_{.\alpha l_1}^h y^{l_1} + 2a_{.\alpha l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + \dots + \right. \\ \left. + k a_{.\alpha l_1 \dots l_{k-1}}^h y^{l_1} \dots y^{l_{k-1}} + \dots \right)$$

Отримані співвідношення підставляємо в рівняння (2.16) і зведемо подібні:

$$\begin{aligned}
& \left( 2a_{.ij}^h - \frac{1}{3}a_{.}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left[ 2 \cdot 3a_{.ijl_1}^h - \frac{1}{3} \left( a_{.l_1}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^\alpha R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^\alpha R_{.(\alpha i)l_1}^h - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^\alpha \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} + \left[ 3 \cdot 4a_{.ijl_1l_2}^h - \frac{1}{3} \left( a_{.l_1l_2}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + 2 \left( a_{.il_1}^\alpha R_{.(\alpha j)l_2}^h + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + a_{.jl_1}^\alpha R_{.(\alpha i)l_2}^h - a_{.\alpha l_1}^h R_{.(ij)l_2}^\alpha \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + \dots + \left[ (k+1)(k+2) a_{.ijl_1 \dots l_k}^h y^{l_1} \dots y^{l_k} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \left( a_{.l_1 \dots l_k}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + k \left( a_{.il_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{.(\alpha j)l_k}^h + a_{.jl_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{.(\alpha i)l_k}^h - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - a_{.\alpha l_1 \dots l_{k-1}}^h R_{.(ij)l_k}^\alpha \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} = 0 \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Оскільки рівняння (2.17) виконується при будь-яких  $y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_n}$ , то зведені коефіцієнти дорівнюють нулю.

Спочатку прирівнюємо нулю доданок першого степеня.

$$\left[ 2 \cdot 3a_{.ijl_1}^h - \frac{1}{3} \left( a_{.l_1}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^\alpha R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^\alpha R_{.(\alpha i)l_1}^h - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^\alpha \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} = 0$$

Згортаємо його з  $y^i y^j$  та підсумуємо за індексами  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$2 \cdot 3a_{.l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = \frac{1}{3} \left( 2a_{.l_1}^\alpha R_{.l_2 l_3 \alpha}^h + 2a_{.l_1}^\alpha R_{.(\alpha l_2) l_3}^h - 2a_{.\alpha}^h R_{.l_2 l_3 l_1}^\alpha \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

З (1.8) випливає, що  $R_{.\alpha l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \equiv 0$ , тому

$$3a_{.l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = \frac{1}{3} \left( a_{.l_1}^\alpha R_{.l_2 l_3 \alpha}^h + a_{.l_1}^\alpha R_{.\alpha l_2 l_3}^h + a_{.l_1}^\alpha R_{.l_2 \alpha l_3}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

$$3a_{.l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = a_{.l_1}^\alpha (R_{.l_2 l_3 \alpha}^h - R_{.l_2 l_3 \alpha}^h) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

$$a_{.l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} = 0$$

$$a_{.}^h = 0. \tag{2.18}$$

Тепер розглянемо рівність нулю коефіцієнта при  $y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$ .

$$4 \cdot 5a_{.ijl_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = \frac{1}{3} \left( a_{.l_1l_2l_3}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + 3 \left( a_{.il_1l_2}^\alpha R_{.(\alpha j)l_3}^h + a_{.jl_1l_2}^\alpha R_{.(\alpha i)l_3}^h - a_{.\alpha l_1l_2}^h R_{.(ij)l_3}^\alpha \right) \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з  $y^i y^j$  та підсумуємо за індексами  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$4 \cdot 5a_{.5}^h = \frac{1}{3} \left( 2a_{.3}^\alpha R_{.l_1l_2\alpha}^h + 2 \cdot 3a_{.3}^\alpha R_{.\alpha l_1l_2}^h - 2 \cdot 3a_{.3}^\alpha R_{.l_1l_2\alpha}^h \right) y^{l_1}y^{l_2}$$

$$a_{.5}^h = 0$$

Продовжуючи цей процес, на  $(2k - 1)$ -ому кроці ми бачимо, що  $a_{.2k+1}^h$  виражаються через добуток, у якому присутній множник  $a_{.2k-1}^h = 0$ , тому має місце співвідношення (2.14).

Наразі доведемо (2.13), для цього спочатку прирівняємо нулю вільний член.

$$2a_{.ij}^h - \frac{1}{3}a^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h = 0$$

$$a_{.ij}^h = \frac{1}{6}a^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h$$

Якщо домножити попереднє рівняння на  $y^i y^j$  та підсумувати за індексами  $i, j = 1, \dots, n$ , то отримаємо

$$a_{.2}^h = a^\alpha t_\alpha^h. \quad (2.19)$$

Легко бачити, що (2.19) можна отримати і з (2.13) при  $k = 1$ . Розглянемо тепер рівність нулю доданка другого степеня відносно  $y^1 y^2 \dots y^k$ .

$$\left[ 3 \cdot 4a_{.ijl_1l_2}^h - \frac{1}{3} \left( a_{.l_1l_2}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + 2 \left( a_{.il_1}^\alpha R_{.(\alpha j)l_2}^h + a_{.jl_1}^\alpha R_{.(\alpha i)l_2}^h - a_{.\alpha l_1}^h R_{.(ij)l_2}^\alpha \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} = 0$$

$$3 \cdot 4a_{.ijl_1l_2}^h y^{l_1}y^{l_2} = \frac{1}{3} \left( a_{.l_1l_2}^\alpha R_{.(ij)\alpha}^h + 2 \left( a_{.il_1}^\alpha R_{.(\alpha j)l_2}^h + a_{.jl_1}^\alpha R_{.(\alpha i)l_2}^h - \right. \right.$$

$$-a_{\alpha l_1}^h R_{(ij)l_2}^\alpha) y^{l_1} y^{l_2}$$

Ліву та праву частини останнього співвідношення згортаємо з  $y^i y^j$  та підсумуємо за індексами  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4a_{\dot{4}}^h &= \frac{1}{3} \left( 2a_{\dot{2}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4a_{\dot{2}}^\alpha R_{(\alpha l_1) l_2}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 3 \cdot 4a_{\dot{4}}^h &= \frac{1}{3} \left( 2a_{\dot{2}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4a_{\dot{2}}^\alpha R_{\alpha l_1 l_2}^h - 4a_{\dot{2}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 3 \cdot 4a_{\dot{4}}^h &= -\frac{2}{3} a_{\dot{2}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned}$$

Враховуючи рівняння (2.12), отримаємо

$$a_{\dot{4}}^h = -\frac{1}{6} a_{\dot{2}}^\alpha t_\alpha^h \quad (2.20)$$

Але до того ж результату приходимо і з (2.13) при  $k = 2$ . Тепер розглянемо ріність нулю коефіцієнта при  $y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4}$ .

$$\begin{aligned} 5 \cdot 6a_{\dot{6}}^h y^{l_1} \dots y^{l_4} &= \frac{1}{3} \left( a_{l_1 \dots l_4}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h + 4 \left( a_{i l_1 l_2 l_3}^\alpha R_{(\alpha j) l_4}^h + a_{j l_1 l_2 l_3}^\alpha R_{(\alpha i) l_4}^h - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{\alpha l_1 l_2 l_3}^h R_{(ij) l_4}^\alpha \right) \right) y^{l_1} \dots y^{l_4} \end{aligned}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з  $y^i y^j$  та підсумуємо за індексами  $i, j = 1, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} 5 \cdot 6a_{\dot{6}}^h &= \frac{1}{3} \left( 2a_{\dot{4}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 2 \cdot 4a_{\dot{4}}^\alpha R_{\alpha l_1 l_2}^h - 2 \cdot 4a_{\dot{4}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 5 \cdot 3a_{\dot{6}}^h &= -\frac{4-1}{3} a_{\dot{4}}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2} \\ a_{\dot{6}}^h &= -\frac{1}{5} a_{\dot{4}}^\alpha t_\alpha^h \quad (2.21) \end{aligned}$$

Легко бачити, що (2.21) можна отримати і з (2.13) при  $k = 3$ .

Таким чином, формула (2.13) вірна для  $k = 1, 2, 3$ . Нехай вона має місце для  $k = p$ , тобто

$$a_{\dot{2p}}^h = -\frac{2p-3}{p(2p-1)} a_{\dot{2p-2}}^\alpha t_\alpha^h.$$

Доведемо, що вона справедлива і для  $k = p + 1$ . Враховуючи припущення індукції, отримуємо

$$a_{2p+2}^h = -\frac{2p-1}{(p+1)(2p+1)} a_{2p}^{\alpha} t_{\alpha}^h, \quad (2.22)$$

що й завершує доведення леми.  $\square$

**Лема 2.2.** Для того, щоб ряди (2.10) визначали компоненти вектора зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  у просторі  $\tilde{A}_n$ , необхідно, щоб виконувалися співвідношення (2.14), а загальні члени рядів мали вигляд

$$a_{2k}^h = \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a_{\alpha}^{\alpha} t_{\alpha}^{(k)h}. \quad (2.23)$$

*Доведення.* Співвідношення (2.19) можна отримати з (2.23) при  $k = 1$ . Підставляючи (2.19) у (2.20), отримаємо

$$a_{\dot{4}}^h = -\frac{1}{6} a_{\alpha}^{\alpha} t_{\alpha}^{(2)h}. \quad (2.24)$$

Легко бачити, що (2.24) можна отримати і з (2.23) при  $k = 2$ . Враховуючи рівняння (2.24), з (2.21) отримаємо

$$a_{\dot{6}}^h = \frac{1}{30} a_{\alpha}^{\alpha} t_{\alpha}^{(3)h}. \quad (2.25)$$

Цей же результат можна отримати і з (2.23) при  $k = 3$ . Таким чином формула (2.23) вірна для  $k = 1, 2, 3$ . Нехай вона має місце для  $k = p$ , тобто

$$a_{2p}^h = \frac{(-1)^{p+1}}{p!(2p-1)} a_{\alpha}^{\alpha} t_{\alpha}^{(p)h}.$$

Доведемо, що вона справедлива і для  $k = p + 1$ . Враховуючи припущення індукції і співвідношення (2.22), отримуємо

$$a_{2p+2}^h = -\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!(2p+1)} a_{\beta}^{\beta} t_{\beta}^{(p)\alpha} t_{\alpha}^h = \frac{(-1)^{p+2}}{(p+1)!(2p+1)} a_{\alpha}^{\alpha} t_{\alpha}^{(p+1)h},$$

що і завершує доказ леми.  $\square$

Підставляючи (2.14) і (2.23) у співвідношення (2.10), отримуємо

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a^{\alpha} t_{\alpha}^{(k)h}. \quad (2.26)$$

Введемо позначення

$$M = \max\{|a^h|\}. \quad (2.27)$$

Оскільки  $t_p^h$  — квадратична функція відносно  $y^1 y^2 \dots y^n$ , то вона обмежена на будь-якій компактній множині. Позначимо

$$\frac{c}{n} = \max\{|t_p^h|\}. \quad (2.28)$$

Тоді справедливі наступні оцінки:

$$\left| t_p^{(2)h} \right| \leq |t_1^h t_p^1| + |t_2^h t_p^2| + \dots + |t_n^h t_p^n| \leq \frac{c^2}{n}$$

$$\left| t_p^{(3)h} \right| \leq \frac{c^3}{n} \quad \dots \quad \left| t_p^{(k)h} \right| \leq \frac{c^k}{n}$$

Тому

$$\left| a^{\alpha} t_{\alpha}^{(k)h} \right| \leq \left| a^1 t_1^{(k)h} \right| + \left| a^2 t_2^{(k)h} \right| + \dots + \left| a^n t_n^{(k)h} \right| \leq M \cdot c^k$$

Отже, ряд (2.26) мажорується числовим рядом

$$M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} c^k}{k!(2k-1)},$$

який сходиться абсолютно при  $c \leq 1$ . На підставі проведених міркувань та ознаки Веєрштрасу [5] доведено наступну лему.

**Лема 2.3.** *Ряди (2.26) при  $h = 1, 2, \dots, n$  сходяться абсолютно і рівномірно на множині*

$$\left| R_{.l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \right| \leq \frac{3}{n}$$

Об'єднуючи Лему (2.1) – Лему (2.3), отримуємо наступну теорему.

**Теорема 2.1.** *Для того, щоб у просторі  $\tilde{A}_n$  існував вектор зміщення рухів  $\tilde{\xi}^h(y)$  виду (2.10), необхідно, щоб виконувалися співвідношення (2.23) і (2.14).*

### 2.3. Індуковані відображення для наближення афінних просторів

Розглянемо два простори афінної зв'язності  $\bar{A}_n$  з об'єктом зв'язності  $\bar{\Gamma}_{ij}^h$  ( $\bar{M}_0 \in \bar{A}_n$ ) і  $A_n$  з об'єктом зв'язності  $\Gamma_{ij}^h$ , які допускають нетривіальне геодезичне відображення у загальній системі координат  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ . Побудуємо їх наближення першого порядку — простір  $\tilde{A}_n$  з об'єктом зв'язності (2.1) і  $\tilde{\tilde{A}}_n$  зі своїм об'єктом зв'язності

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h = -\frac{1}{3} \bar{R}_{0 \cdot (ij)l}^h y^l, \quad (2.29)$$

де  $\bar{R}_{0 \cdot ijl}^h = \tilde{R}_{ijl}^h(\bar{M}_0)$ .

Виникає питання: яку властивість має індуковане відображення між просторами наближення  $\tilde{A}_n$  і  $\tilde{\tilde{A}}_n$ ?

Відома наступна теорема [19].

**Теорема 2.2.** *Пара просторів  $A_n$  та  $\bar{A}_n$  допускає нетривіальне геодезичне відображення  $A_n \xrightarrow{\psi} \bar{A}_n$  тоді і тільки тоді, коли об'єкти зв'язності пов'язані між собою рівнянням Леві — Чівіта*

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \psi_{(i} \delta_{j)}^h. \quad (2.30)$$

З (2.30) випливає, що

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \psi_{(ik} \delta_{j)}^h - \psi_{(ij} \delta_{k)}^h, \quad (2.31)$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j. \quad (2.32)$$

Підставимо рівняння (2.31) в (2.29):

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h &= -\frac{1}{3} \left( R_{\cdot (ij)l}^h + \psi_{(il} \delta_{j)}^h + \psi_{(j} \delta_{i)}^h - 2\psi_{(ij} \delta_{l)}^h \right) \Big|_0 y^l \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h &= \tilde{\Gamma}_{ij}^h + \varphi_{(i} \delta_{j)}^h + \varphi_{(j} \delta_{i)}^h + \frac{2}{3} \psi_{ij} y^h, \end{aligned} \quad (2.33)$$

де

$$\varphi_i = -\frac{1}{3} \psi_{il} y^l. \quad (2.34)$$

Таким чином тензор деформації  $\tilde{P}_{ij}^h = \tilde{\Gamma}_{ij}^h - \tilde{\Gamma}_{ij}^h$  відображення між просторами наближення має вигляд

$$\tilde{P}_{ij}^h = \varphi_{(i} \delta_{j)}^h + \frac{2}{3} \psi_{ij} y^h. \quad (2.35)$$

Для того, щоб індуковане відображення між просторами  $\tilde{A}_n$  і  $\tilde{\tilde{A}}_n$  було геодезичним, потрібно, щоб  $\psi_{ij} = 0$ . З (2.34) і (2.33) випливає, що  $\varphi_i = 0$  і  $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{ij}^h = \tilde{\Gamma}_{ij}^h$  відповідно. Таким чином, тензор деформації  $\tilde{P}_{ij}^h$  дорівнює нулю, індуковане відображення не є геодезичним.

**Теорема 2.3.** *Відображення просторів наближення, яке індукується геодезичним відображенням вихідних просторів, не є геодезичним.*

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — УМН.т. XVI, вып. 3, 1961. — с. 171-174
2. Движения в пространствах аффинной связности. — Казань: ИКУ, 1965. — 206 с.
3. Егоров И. П. Геометрия: Спец. курс для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1979. — с. 256
4. Иванов В. В. Теория приближённых методов и её применение к численному решению сингулярных уравнений. — К.: Наукова думка, 1968. — 288 с.
5. Коляда В. И., Кореновский А. А. Курс лекций по математическому анализу в 2-х ч. Часть 2. — Одесса: АстроПринт, 2009. — XXVII, 292 с.
6. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980. — 536 с.
8. Марчук Г. И., Михайлов Г. А. и др. Метод Монте—Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск.: Наука, 1976. — 283 с.
9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. т. 1–3. — М.: Мир, 1977.
10. Моисеев Н. И. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981. — 408 с.
11. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976. — 431 с.
12. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966. — 496 с.
13. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 336 с.
14. Спанье Дж., Гелбарт З. Метод Монте—Карло и задачи переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1972. — 272 с.
15. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространс-

- тва. — М.: Мир, 1964. — 534 с.
16. Хьюзмоллер Д. Расслоённые пространства. — М.: Мир, 1970. — 442 с. : ил.
  17. Широков А. П. Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров. ДАН СССР, т. 102, 1955.—с. 461-464
  18. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. — Казань: ИКУ, 1966. — 292 с.
  19. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948. — 303 с.
  20. Яненко Н. И. Численные методы механики сплошной среды. Пятый Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. — Алма-Ата: Наука, 1981. — 408 с.