

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра оптимального керування та економічної кібернетики

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Багатокрокові ігри на разорення»

«Multi-step games for ruin»

Виконав: студент денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика

Довгань Олександр Олексійович

Керівник: д.ф.-м.н., доц. Кічмаренко О. Д.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Страхов Є.М.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ \_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

протокол № \_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Зміст

<b>ВСТУП</b> .....	2
<b>РОЗДІЛ 1. Багатокрокові ігри</b> .....	6
<b>1.1 Означення та поняття розв'язку багатокрокової гри</b> .....	6
<b>1.2 Гра “спіймай злочинця”</b> .....	8
<b>РОЗДІЛ 2. Ігри на розорення</b> .....	13
<b>2.1 Означення стратегічної гри на розорення</b> .....	13
<b>2.2 Приклад гри на розорення</b> .....	15
<b>РОЗДІЛ 3. Позиційні ігри з повною інформацією</b> .....	16
<b>3.1 Означення ігри та поняття розв'язку</b> .....	16
<b>3.2 Приклад позиційної гри з повною інформацією</b> .....	19
<b>3.3 Антагоністичні позиційні ігри з повною інформацією</b> .....	22
<b>Висновки</b> .....	26
<b>Список літератури</b> .....	27

## ВСТУП

Теорія ігор надає методи моделювання та розв'язання конфліктних ситуацій.

Ситуація є конфліктною, якщо є предмет конфлікту, є дві або більше зацікавлених сторін, кожна з яких має свої цілі щодо предмету конфлікту, а також знає які дії (стратегії) вона може реалізувати задля досягнення своєї мети щодо предмету конфлікту.

Раціональний вибір стратегій у конфлікті залежить від характеру конфлікту: кожний учасник конфлікту прагне максимізувати власний виграш, без можливості домовлятися іншим гравцем (безкоаліційні ігри), або ж гравців тільки двоє, то інтереси можуть бути протилежними (виграш одного є програшем для іншого) - це антагоністичні ігри.

Розв'язати безкоаліційну гру, означає дати рекомендацію кожному гравцеві щодо вибору однієї з із його стратегій та вказати, який виграш отримає кожний гравець, Але надзвичайно рідко вдається обрати одну із стратегій. Найчастіше при багатокроковому повторі гри гравці будуть обирати свої стратегії з певною частотою. Тоді розв'язок гри являє собою вектор ймовірностей вибору гравцем його стратегій (це так звана змішана стратегія гравця) і виграш розуміємо як математичне очікування виграшу.

Дипломна робота присвячена дослідженню безкоаліційних ігор, які реалізуються не за один крок, тобто, вибір стратегій гравцями може призвести до розподілу платежу або розіграшу нової гри. Такі ігри називаються багатокроковими.

Якщо в багатокроковій грі кожний гравець має обмежені ресурси та з кожним ходом ресурси одного з гравців зменшується і, врешті, ресурси одного з гравців виснажуються, то така гра є грою на розорення.

Класичного завдання про розорення гравця. Два гравці мають спочатку  $r$  та  $R - r$  доларів і при кожному киданні монети (не обов'язково врівноваженій) той, хто програв, платить тому, хто виграє

долар. Гра закінчується, коли капітал одного з гравця виснажується, тобто коли цей гравець розорився. Розглянемо гравця з початковим капіталом  $r$ , і нехай  $p$  – ймовірність (постійна) того, що він виграє долара,  $q = 1 - p$  – ймовірність того, що він програє долар при киданні монети. Позначимо через  $q_r$  ймовірність того, що він зрештою розориться. Можна

показати що

$$q_r = \begin{cases} \frac{(q/p)^R - (q/p)^r}{(q/p)^R - 1}, & \text{ЯКЩО } p \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{R-r}{R}, & \text{ЯКЩО } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

У цій грі на розорення, як тільки гравці до неї вплутались, немає жодного стратегічного завдання.

В моїй роботі буде розглянуто стратегічну гру на розорення, коли кожний гравець має можливість оцінити наслідки вибору своєї стратегії.

Дивідендну політику акціонерних товариств можна розглянути в розрізі ігор на розорення[2]

Найпростіший випадок - це вироджена гра одного акціонерного товариства, в якій актив з часом коливається відповідно до простого випадкового механізму. Наприклад, якщо накоплений статок в протязі одного періоду дорівнює  $R$  одиниць (тисячі або десятки тисяч доларів) то можна припустити, що в наступний період він буде  $R + 1$  з ймовірністю  $p$  чи  $R - 1$  з ймовірністю  $q = 1 - p$ . Акціонерне товариство буде розорене, якщо капітал впаде до 0.

Вірогідність розорення протягом певного відрізка часу, тим менша, чим більший капітал на початку цього відрізка часу але, з іншої сторони, якщо гроші лежать у класі товариство, це не влаштовує тримачів акцій, поки не об'явлені дивіденди, а об'ява дивідендів, звичайно, зменшує капітал. Крім того, долар, відданий тримачам через  $k$  періодів від цього моменту, в даний момент вважається таким, що має вартість лише  $p^k$ ,

причому  $r$  залежить взагалі від відсоткової ставки  $i$ , отже, має величину порядку 0,95. Чи варто фірмі оголошувати тепер дивіденд  $s$  доларів і тим збільшити ймовірність свого руйнування, чи почекати, поки її фінансове становище не стане більш міцним, знаючи, що гроші, які будуть виплачені в майбутньому, мають меншу цінність, ніж гроші, які ви були б виплачені зараз? Якщо припустити, що фірма прагне максимально збільшити поточну цінність всіх майбутніх дивідендів протягом періоду її платіжоспроможності, то, очевидно, вибір оптимальної дивідендної політики залежить від ймовірності  $p$  і значення  $p$  (вартість сьогоденного долара в майбутньому періоді).

Вибір дивідендної політики можна представити як гру однієї особи проти природи, якщо вважати, що  $p$  невідоме. Але на самому початку нічого не відомо про ймовірність  $p$ . То же встановити дивідендну політику спочатку?

Можна припустити, що існує інше акціонерне товариство, також із заданим початковим активом, і що вони грають у гру на виживання. Інакше кажучи, якщо в якому-небудь випробуванні фірма 1 застосовує стратегію  $i$ , а фірма 2 стратегію  $j$ , то їх активи зміняться відповідно на  $a_{ij}$  та  $b_{ij}$  одиниць. Ця гра на виживання, дуже схожа на гру з ненульовою сумою, але як і в найпростішому випадку обидві фірми повинні будуть визначити дивідендну політику. Задача сформульована не повністю, поки невідомо, що станеться з однією фірмою, якщо інша стане неплатіжоздатною; можна припустити, що фірма, що залишилася, надалі весь час отримуватиме  $d$  одиниць протягом даного відрізка часу. Що не означає нескінченного прибутку через завжди існуючий обліковий відсоток  $r$ . Тут з'являються великі можливості змови.

Можна ввести надходження нових фондів, коли нові акціонери збільшують активи фірми, та припустити, що це надходження залежить від

поточного активу та минулої дивідендної політики. Таким чином складність моделі збільшується.

Отже вивчення та дослідження багатокрокових ігор є корисним та цікавим.

## РОЗДІЛ 1. БАГАТОКРОКОВІ ІГРИ

### 1.1 Означення та поняття розв'язку багатокрокових ігр

Багатокровою грою називають таку гру, в якій одна із ситуацій призводить

до розіграшу нової гри. До багатокрокових відносять такі ігри, у яких хоча б один із гравців робить більше, ніж один крок.

Так, позиційні ігри також є багатокроковими, оскільки там можна робити кілька ходів. Однак у багатокрокових іграх розглядаються більші можливості в порівнянні з позиційними іграми, тому що в них може бути нескінченно багато кроків (ходів).

Після вибору стратегій на кожному кроці ситуація гри реалізує завершення гри з визначенням виграшу або відбувається розіграш наступної гри. Так, наприклад, антагоністична двокрокова гра може бути представлена у вигляді наступної матриці:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

де  $a_{11}$  - дійсні числа, що виражають виграш першого гравця за рахунок другого, якщо перший і другий гравець застосують свої перші стратегії;  $a_{22}$  - виграш першого гравця, якщо обоє гравців застосовують свої другі стратегії;  $\Gamma_1$  - нова гра, яка повинна розігратися, якщо перший гравець застосує свою першу стратегію, а другий - свою другу стратегію, аналогічно и щодо гри  $\Gamma_2$ . Ігри  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  являють собою матричні ігри двох гравців з нульовою сумою, задані відповідно наступними матрицями виграшів першого гравця:

$$\Gamma_1, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Ця гра складається із двох однокрокових ігор: 1-а – перший гравець вибирає свою стратегію 1 або 2, другий гравець – свою стратегію 1 або 2, після чого перший гравець отримує  $a_{11}$  або  $a_{22}$ , якщо вони вибрали однойменні стратегії, і на цьому гра закінчується; або вони переходять до другого кроку (другій грі  $\Gamma_1$  або  $\Gamma_2$ ), якщо вони вибрали різні стратегії. На другому кроці гра закінчується; і перший гравець отримує виграш відповідно до результату в грі  $\Gamma_1$  або  $\Gamma_2$ . Якщо розглядати оптимальні розв'язки таких ігор, то варто користуватися поняттями середнього виграшу та змішаних стратегій. Тому з погляду оптимізації стратегій і отримання ціни гри в матриці (1) можна замінити  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  відповідно на ціни гри  $v_i$  для  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) і отримати наступну матрицю гри:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & v_1 \\ v_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Розв'язуючи гру з матрицею (2), отримаємо розв'язок двокрокової гри у вигляді:  $v$  – ціна гри,  $x = (x_1, x_2)$  – оптимальна змішана стратегія першого гравця,  $y = (y_1, y_2)$  – оптимальна змішана стратегія другого гравця.

Загалом кажучи, загальний метод розв'язання багатокрокових ігор зводиться до складання рекурентних співвідношень для ціни гри, починаючи з кінця гри, тобто для останніх двох або декількох кроків. Маючи ці рекурентні співвідношення й початкове значення ціни гри, можна отримати ціни гри для кожного кроку (кожної окремої гри, представленої на кожному кроці розвитку гри). Одержавши ціну гри на передостанньому кроці, визначаємо розв'язок гри на останньому кроці й тим самим отримуємо розв'язок всієї гри.

## 1.2 Гра “Спіймай злочинця”

Є дві особи: перша особа – злочинець, друга особа – поліцейський. Злочинець може зробити свою дію – злочин в один з  $n$  періодів часу 1, 2, ...,  $t$ , ...,  $n$ . Поліцейський може зробити перевірку тільки один раз у кожній із цих періодів часу. Якщо злочинець і поліцейський діють одночасно, то вважається, що злочинця зловили і він (злочинець) програє одиницю якихось благ, якщо злочинець і поліцейський діють у різні періоди часу, то злочинець виграє 1. Якщо злочинець не діє зовсім, то його виграш дорівнює нулю.

Для формалізації цієї гри назвемо злочинця першим гравцем, а поліцейського – другим. З кожним періодом часу пов’яжемо крок гри. Так, на першому кроці (у першому періоді) перший гравець може зробити свою дію (стратегія 1) або не зробити її (стратегія 2); другий гравець також може перевірку (стратегія 1), не перевіряти (стратегія 2). Розглянемо тепер результати гри на першому кроці: якщо перший гравець діє, а другий перевіряє, то гра закінчується на цьому кроці виграшем другого гравця, тобто перший гравець отримує -1; якщо перший гравець діє, а другий не перевіряє, то перший гравець виграє 1; якщо перший гравець не діє, а другий перевіряє, то перевірка закінчується безрезультатно, і перший гравець у будь-який інший період виграє 1 (другий гравець уже вичерпав свою можливість інспектувати); якщо перший гравець не діє, а другий не перевіряє, то дії переносяться на другий період, тобто розігрується гра  $\Gamma_{n-1}$ , у якій кількість кроків  $n - 1$  на одиницю менше, ніж у початковій грі, з урахуванням першого кроку. Отже, отримана гра формалізується за допомогою наступної матриці:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

у якій перший рядок відповідає виграшам першого гравця, якщо він застосує свою першу стратегію; другий рядок відповідає ситуації, коли він застосує свою другу стратегію; перший стовпчик відповідає виграшам першого гравця, якщо другий гравець застосує свою першу стратегію, другий стовпець відповідає ситуації, коли другий гравець застосує свою другу стратегію; значення  $\Gamma_{n-1}$  у матриці означає, що треба провести гру  $\Gamma_{n-1}$ .

Нехай  $v_i$  - ціна гри на  $t$ -ому кроці ( $t = 1, 2, \dots, n$ ), тоді при  $n \geq 2$  гру з матрицею (3) можна замінити на гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

для ціни гри справедливо наступне рекурентне співвідношення:

$$v_n = \text{ціна гри} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & v_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Очевидно,  $v_{n-1} < 1$ , тому гра з матрицею (4) не має сідлової точки, і можна знайти оптимальні змішані стратегії  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  відповідно для першого й другого гравців і  $v_n$ .

Із цією метою запишемо рівняння:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= v_n, & -y_1 + y_2 &= v_n, & x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + v_{n-1}x_2 &= v_n, & y_1 + v_{n-1}y_2 &= v_n, & y_1 + y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Розв'язок цих рівнянь:

$$x_1 = \frac{1 - v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \quad x_2 = \frac{2}{3 - v_{n-1}}, \quad (6)$$

$$y_1 = \frac{1 - v_{n-1}}{3 - v_{n-1}}, \quad y_2 = \frac{2}{3 - v_{n-1}}, \quad (7)$$

$$v = \frac{v_{n-1} + 1}{3 - v_{n-1}}. \quad (8)$$

У грі з одним періодом  $n = 1$  перший гравець повинен обов'язково діяти, оскільки майбутнього періоду у грі немає, саме тому при 2-й стратегії перший гравець буде мати тільки 0, і матриця виграшів першого гравця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця має сідлову точку  $(2, 1)$  і ціну гри  $v_1 = 0$ . Тому, маючи  $v_1 = 0$  як початкову умову, з (8) можна визначити послідовно  $v_i$  ( $t = 1, 2, \dots, n$ ), тобто  $v_n$  - ціну всієї  $n$ -крокової гри.

Рівняння (8) - різницеве рівняння, тому зробивши в ньому підстановку  $w_n = \frac{1}{v_{n-1}}$ , отримаємо

$$w_n = w_{n-1} - \frac{1}{2}, \quad w_1 = -1.$$

Підставляючи  $v_{n-1}$  з (10) в (4), отримаємо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{n-2}{n} \end{pmatrix},$$

розв'язуючи яку, знаходимо оптимальні змішані стратегії для першого гравця:

$$x_1 = \frac{1}{1+n}, \quad x_2 = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 2),$$

для другого гравця:

$$y_1 = \frac{1}{1+n}, \quad y_2 = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 2),$$

і ціною гри:

$$v = \frac{n-1}{n+1}.$$

Таким чином, на 1-му кроці маємо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{n-2}{n} \end{pmatrix},$$

і з розв'язком

$$x_1^1 = \frac{1}{n+1}, \quad x_2^1 = \frac{n}{n+1}, \quad y_1^1 = \frac{1}{n+1}, \quad y_2^1 = \frac{n}{n+1},$$

і ціною гри  $v^1 = v_n = \frac{n-1}{n+1}$ .

Для другого кроку маємо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{n-3}{n-1} \end{pmatrix},$$

з розв'язком

$$x_1^2 = \frac{1}{n}, \quad x_2^2 = \frac{n-1}{n}, \quad y_1^2 = \frac{1}{n+1}, \quad y_2^2 = \frac{n}{n+1},$$

і ціною гри  $v^2 = v_{n-1} = \frac{n-2}{n}$ .

На t-му кроці маємо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \Gamma_{n-t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{n-t-1}{n-t+1} \end{pmatrix},$$

з розв'язком

$$x_1^t = \frac{1}{n-t+2}, \quad x_2^t = \frac{n-t+1}{n-t+2}, \quad y_1^t = \frac{1}{n-t+2}, \quad y_2^t = \frac{n-t+1}{n-t+2};$$

та ціною гри  $v^t = v_{n-t+1} = \frac{n-t}{n-t+2}$ .

Отже, імовірність застосування гравцями своїх перших стратегій (дій) з кожним кроком гри збільшується й на останньому кроці при  $t = n$  стає рівною  $\frac{1}{2}$  ймовірність застосування їхніх других стратегій (бездій) зменшується з кожним кроком гри й на останньому кроці при  $t = n$  стає рівною також  $\frac{1}{2}$ ; ціна гри  $v^t$  зменшується з кожним кроком, наближаючись до 0; чим більше  $n$  кроків у грі, тим більша загальна ціна гри  $v_n$  і тим ближче вона до 1.

## РОЗДІЛ 2. Ігри на розорення

### 2.1 Означення стратегічної гри на розорення та поняття розв'язку

Ігри на розорення називаються багатокрокові ігри, у яких кожний гравець, починаючи гру, має обмежені ресурси та з кожним ходом або кроком ресурси одного із гравців зменшуються на одиницю. Переможеним вважається той, хто раніше виснажить свої ресурси, а переможцем – той, у кого залишаться ресурси.

Гра на розорення може бути сформульована як гра на виграш, якщо вважати, що гравці починають гру з нульовими ресурсами, а потім на кожному кроці ресурси одного із гравців збільшуються на одиницю. Переможцем вважається той, хто раніше досягне певної кількості ресурсів (ця кількість обумовлюється перед початком гри).

Оскільки кількість ресурсів є скінченною та на кожному кроці вона змінюється на одиницю, то гра на розорення завжди закінчується через скінченну кількість кроків.

Розглянемо стратегічну постанову гри на розорення: припустимо, що гравець 1 і 2 розпочав гру на виживання, маючи відповідно  $r$  та  $R - r$  доларів, де  $R$  - спільний капітал двох гравців але замість того, щоб використовувати випадковий механізм, вони проводять якусь гру з нульовою сумою (у грошових одиницях). Якщо у будь-якому випробуванні гравець 1 обирає стратегію  $a_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , а гравець 2 - стратегію  $B_j (j = 1, 2, \dots, n)$ , то гравець 1 отримує  $a_{ij}$  доларів від гравця 2. Гра повторюється до тих пір, поки один з гравців не розориться.

Як приклад, припустимо, що

- а) гравець 1 має  $r$  доларів, де  $r = 1, 2$  чи  $3$ ;
- б) гравець 2 має  $R - r$  доларів, де  $R = 4$ ;
- в) в кожному випробуванні гравці проводять гру з нульовою сумою

$$\begin{array}{c}
 \beta_1 \quad \beta_2 \\
 \alpha_1 \quad \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \right] \\
 \alpha_2 \quad \left[ \begin{array}{cc} -2 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Ця гра на розорення еквівалентна наступній трехкомпонентній грі.

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma^1 & \Gamma^2 & \Gamma^3 \\
 \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 \\
 \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 \\
 \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\
 \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\
 \left[ \begin{array}{cc} \Gamma^3 & 0 \\ 0 & \Gamma^2 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 1 & \Gamma^1 \\ 0 & \Gamma^3 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} 1 & \Gamma^2 \\ \Gamma^1 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

де  $\Gamma^k$  означає гру для гравця 1 коли його капітал дорівнює  $k$  доларів. Платежі гравця 1 (0, якщо він розорений, та 1 якщо розрений його супротивник) обрані так, що ціна гри виражається через ймовірність розорення. Нехай гравець 1 та 2 обрали свої стратегії; тоді середнє значення виграшу для гравця 1 дорівнює

$$0 * (\text{ймовірність розорення гравця 1} + \text{ймовірність того, що гра не закінчиться}) + 1 * (\text{ймовірність розорення гравця 2})$$

Отже, середній платіж дорівнює ймовірність розорення гравця 2.

Якщо  $w_1, w_2, w_3$  - ціни ігор  $\Gamma^1, \Gamma^2$  і  $\Gamma^3$  відповідно, то перепишемо ігри  $\Gamma^1, \Gamma^2$  і  $\Gamma^3$  у вигляді

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 \\ 0 & \omega_3 \end{pmatrix} \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \omega_2 \\ \omega_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_1^* &= \frac{\omega_3 * \omega_2}{\omega_3 + \omega_2}, \\
 \omega_2^* &= \frac{\omega_2}{\omega_3 + 1 - \omega_2}, \\
 \omega_3^* &= \frac{1 - \omega_1 * \omega_2}{1 - \omega_2 - \omega_1}.
 \end{aligned}$$

В[2] показано, що в цьому перетворенні цін є тільки одна нерухома точка

$(w_1^*, w_2^*, w_3^*)$ , де

Оскільки  $w_1^* > \omega_1^* = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,293, \omega_2^* = 0,5, \omega_3^* \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ .  $(w_1^*, w_2^*, w_3^*)$  досяжна для гравця 2 [8] й мінімаксна стратегія для гравця 2 складається із застосування своєї мінімаксимальної стратегії в кожній з ігр-компонентів  $\Gamma^k(w_1^*, w_2^*, w_3^*), k = 1, 2, 3$ . У цій грі максимінною стратегією є складена стратегія гравця 1, така, що він застосовує у кожній грі-компоненті  $\Gamma^k(w_1^*, w_2^*, w_3^*), k = 1, 2, 3$ , свою єдину максимінною стратегію.

## 2.2 Приклад гри на розорення.

Приклад 2.2. Нехай два гравці мають загальним капітал 4 грошові одиниці й повторюють гру з нульовою сумою

$$\begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ми отримаємо результати представлені в таблиці 2.1

Таблиця 2.1

Ймовірність розорення гравця 2 оптимальні стратегії гравців у грі розорення.

Поточний капітал гравця 1	Ймовірність розорення гравця 2, коли поточний капітал гравця 1 дорівнює $r$	Максимальна стратегія гравця 1, коли його поточний капітал дорівнює $r$	Максимальна стратегія гравця 2, коли поточний капітал гравця 1 дорівнює $r$
$r = 1$	0,293	$(0,414a_1, 0,586a_2)$	$(0,414\beta_1, 0,586\beta_2)$
$r = 2$	0,5	$(0,5a_1, 0,5a_2)$	$(0,5\beta_1, 0,5\beta_2)$
$r = 3$	0,707	$(0,586a_1, 0,414a_2)$	$(0,586\beta_1, 0,414\beta_2)$

### РОЗДІЛ 3. Позиційні ігри з повною інформацією.

Математичні моделі конфліктів, що враховують динаміку, досліджуються в теорії позиційних ігор. Найбільш простим класом позиційних ігор є клас скінченних ігор з повною інформацією.

#### 3.1 Означення та поняття розв'язку.

Дамо означення багатокрокової гри з повною інформацією на деревоподібному скінченному графі.

Нехай задана скінченна множина елементів  $X$ . Задамо багатозначне відображення  $F$  елементів множини  $X$  в множину  $X$  як правило, яке кожному елементу  $x \in X$  ставить у відповідність деяку підмножину  $F_x \subset X$ .

**Означення 3.1[1].** Нехай  $G = (X, F)$  – деревоподібний граф. Розглянемо розбиття множини вершин  $X$  на  $n+1$  множин

$$X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i = X, X_k \cap X_e = \emptyset,$$

$k \neq 1$ , де  $F_x = \emptyset$  для  $x \in X_{n+1}$ . Множина  $X_i, i = 1, \dots, n$  називається множиною черговості гравця  $i$ , а множина  $X_{n+1}$  – множиною остаточних позицій. На множині  $X_{n+1}$  остаточних позицій визначено  $n$  дійснозначних функцій  $H_1(x), \dots, H_n(x), x \in X_{n+1}$ . Функція  $H_i(x), i = 1, \dots, n$ , називається виграшем гравця  $i$ .

Гра відбувається в такий спосіб. Задано Множину  $N$  гравців, перенумерованих натуральними числами  $1, 2, \dots, i, \dots, n$  (надалі  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ). Нехай  $x_0 \in X_{i_1}$ , тоді у вершині (позиції)  $x_0$  гравець  $i_1$  здійснює хід і обирає вершину  $x_1 \in F_{x_0}$ . Якщо  $x_1 \in X_{i_2}$ , то в вершині  $x_1$  гравець  $i_2$  здійснює хід і обирає наступну вершину (позицію)  $x_2 \in F_{x_1}$ , и т. д. Таким чином, якщо на  $k$ -му кроці вершина (позиція)  $x_{(k-1)} \in X_{i_k}$ , то в ній гравець

$i_k$  здійснює хід і обирає наступну вершину (позицію) з множини  $F_{x_{(k-1)}}$ . Гра припиняється, коли досягається остаточно вершина (позиція)  $x_l \in X_{(n+1)}$ , тобто така, для якої  $F_{x_l} = \emptyset$ .

Послідовним вибором позицій однозначно реалізується деяка послідовність  $x_0, \dots, x_k, \dots, x_1$ , що визначає шлях у деревоподібному графі  $G$ , який виходить з початкової позиції  $x_0$  і досягає однієї з остаточнох позицій гри. Такий шлях у подальшому будемо називати партією. Через деревоподібність графа  $G$  кожна партія закінчується у фінальній позиції  $x_l$  і, навпаки, фінальна позиція  $x_l$  однозначно визначає партію. У позиції  $x_l$  кожен із гравців  $i = 1, 2, \dots, n$  отримує виграш  $H_{i(x_l)}$ . Далі вважатимемо, що гравець  $i$  при здійсненні вибору в позиції  $x \in X_i$  знає цю позицію  $x$ , а отже, через деревоподібність графа  $G$  може відновити і всі попередні позиції. У такому разі кажуть, що гравці мають повну інформацію.

Прикладом ігор з повною інформацією є шахи та шашки, оскільки в них гравці можуть записувати ходи і тому можна вважати, що вони знають передісторію гри під час кожного чергового ходу.

**Означення 3.2[1].** Однозначне відображення  $u_i$ , яке кожній вершині (позиції)  $x \in X_i$  ставить у відповідність деяку вершину (позицію)  $y \in F_x$ , називається стратегією гравця  $i$ .

Множину всіх можливих стратегій гравця  $i$  будемо позначати через  $U_i$ . Таким чином, стратегія гравця  $i$  вказує йому в будь-якій позиції  $x$  з множини його черговості  $X_i$  однозначний вибір наступної позиції.

Впорядкований набір  $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  де  $u_i \in U_i$  називається ситуацією в грі, а декартовий добуток  $V = \prod_{i=1}^n U_i$  називається множинною ситуацій. Кожна ситуація  $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  однозначно визначає партію гри, а, відповідно,  $i$  виграш гравців.

Нехай ситуації  $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  відповідає партія  $x_0, x_1, \dots, x_l$ . Тоді визначимо функцію виграшу  $K_i$  гравця  $i$  як значення виграшу  $H_i$  в кожній ситуації з функціональною позицією партії  $x_0, x_1, \dots, x_l$ , тобто  $K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = H_i(x_l)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Функції  $K_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) визначені на множині ситуацій  $U = \prod_{i=1}^n U_i$ .

**Означення 3.3[1]** Ситуація  $u^* = (u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_n^*)$  називається рівновагою по Нешу, якщо для всіх  $u_i \in U_i$ ,  $i \in N$  має місце нерівність:

$$K_i(u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_n^*) \geq K_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_n^*).$$

Для основної гри  $\Gamma$ , заданої на графі  $G$ , дамо означення підгри  $\Gamma_z$  у такий спосіб: нехай  $z \in X$ , тоді  $X_z$  - множина позицій, в якій можна вийти із  $z$ ,

множина чергової визначається як  $Y_i^z = X_i \cap X_z$ ,  $i = 1, \dots, n$ , множина

фінальних позицій  $Y_{n+1}^z = X_{n+1} \cap X_z$  виграш гравця  $i$  в підгрі

$$H_i^z(x) = H_i(x), \quad x \in Y_{n+1}^z, \quad i = 1, \dots, n.$$

Стратегія  $U_i^z$   $i$ -го гравця в підгрі  $\Gamma_z$  - це звуження стратегії  $u_i$  цього ж гравця в грі  $\Gamma$  на множину  $Y_i^z$ :

$$u_i^z = u_i(x), \quad x \in Y_i^z = X_i \cap X_z, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Означення 3.4[1].** Ситуація рівноваги по Нешу основної гри називається ситуацією абсолютної рівноваги по Нешу у грі  $\Gamma$ , якщо для будь-якого  $z \in X$  ситуація  $(u^*)^z = ((u_1^*)^z, \dots, (u_n^*)^z)$ , де  $(u_i^*)^z$  — звуження стратегії  $u_i^*$  на підгру  $\Gamma_z$  є ситуацією рівноваги по Нешу в підгрі  $\Gamma_z$

**Теорема 3.1[1].** У будь-якій багатокроковій грі з повною інформацією на скінченному деревовидному графі існує ситуація абсолютної рівноваги Нешу.

### 3.2 Приклад позиційної гри з повною інтеграцією.

**Приклад 3.1 .** Нехай гра  $\Gamma$  відбувається на графі (рис. 231), та нехай множина  $N$  складається із двох гравців:  $N = \{1, 2\}$ .

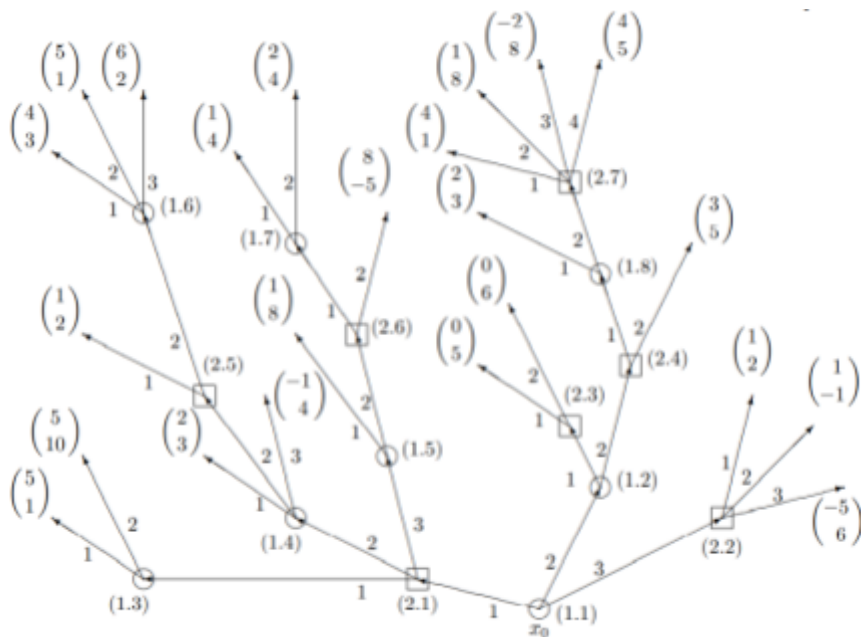


Рис.3.1. Гра з повною інформацією на деревоподібному графі

Визначимо множини черговості для цієї гри. Зобразимо вершини множини  $X_1$  кружечками, а вершини множини  $X_2$  - квадратами. Виграші гравців записані у фінальних позиціях. Перенумеруємо подвійними індексами позиції, що входять до множини  $X_1$  і  $X_2$ , а дуги, що виходять з кожної

вершини, — одним індексом. Вибір у вершині  $x$  еквівалентний вибору наступної вершини  $x' \in F_x$ , тому будемо припускати, що стратегії вказують у кожній вершині номер дуги, за якою слід рухатися далі. Наприклад, стратегія  $u_1 = (2, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 1)$  гравця 1 передбачає вибір дуги 2 у вершині 1, дуги 1 – у вершині 2, дуги 2 – вершині 3, дуги 3 – у вершині 4 і т. д. Оскільки множина черговості першого гравця складається з восьми вершин, його стратегія є восьмивимірний вектор. Аналогічно будь-яка стратегія гравця 2 є семивимірним вектором. Всього у першого гравця 864 стратегії, а у другого гравця – 576 стратегій. Таким чином, відповідна нормальна форма виявляється біматричною грою з матрицями розміру  $864 \times 576$ . Розв'язання таких біматричних ігор є досить складним. Разом з тим ця гра є простою, і її можна розв'язати.

Позначимо через  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  виграші у підгрі  $\Gamma_x$  у певній фіксованій ситуації абсолютної рівноваги. Спочатку розв'язуємо підігри  $\Gamma_{1.6}$ ,  $\Gamma_{1.7}$ ,  $\Gamma_{2.7}$ . Бачимо, що  $v_1(1.6) = 6$ ,  $v_2(1.6) = 2$ ,  $v_1(1.7) = 2$ ,  $v_2(1.7) = 4$ ,  $v_1(2.7) = 1$ ,  $v_2(2.7) = 8$ . Далі розв'язуємо підігри  $\Gamma_{2.5}$ ,  $\Gamma_{2.6}$ ,  $\Gamma_{1.8}$ . У підгрі  $\Gamma_{2.8}$  дві рівноваги по Нешу, оскільки гравцю 2 байдуже, яку альтернативу обрати. Разом з тим, його вибір виявляється суттєвим для гравця 1, оскільки при виборі гравцем 2 лівої дуги перший гравець виграве +1, а при виборі гравцем 2 другої дуги +6. Звернемо увагу на це та припустимо, що гравець 2 «доброзичливий» і вибирає в позиції (2.5) праву дугу. Тоді  $v_1(2.5) = v_1(1.6) = 6$ ,  $v_2(2.5) = v_2(1.6) = 2$ ,  $v_1(2.6) = v_1(1.7) = 2$ ,  $v_2(2.6) = v_2(1.7) = 4$ ,  $v_1(1.8) = 2$ ,  $v_2(1.8) = 3$ . Далі розв'язуємо ігри  $\Gamma_{1.4}$ ,  $\Gamma_{1.8}$ ,  $\Gamma_{2.3}$ ,  $\Gamma_{1.5}$ ,  $\Gamma_{2.4}$ .

У підгрі  $\Gamma_{1.3}$  дві рівноваги по Нешу, оскільки гравцю 1 байдуже, яку альтернативу обрати. Разом з тим його вибір виявляється суттєвим для гравця 2, тому що при виборі гравцем 1 лівої альтернативи він виграве 1, а

при виборі правої виграє 10. Припустимо, що гравець 1 «доброзичливий» і обирає в позиції (1.3) праву альтернативу. Тоді  $v_1(1.3) = 5$ ,  $v_2(1.3) = 10$ ,  $v_1(1.4) = v_1(2.5) = 6$ ,  $v_2(1.4) = v_2(2.5) = 2$ ,  $v_1(1, 5) = v_1(2.6) = 2$ ,  $v_2(1.5) = v_2(2.6) = 4$ ,  $v_1(2.3) = 0$ ,  $v_2(2.3) = 6$ ,  $v_1(2.4) = 3$ ,  $v_2(2.4) = 5$ . Далі розв'язуємо ігри  $\Gamma_{2.1}$ ,  $\Gamma_{1.2}$ ,  $\Gamma_{2.2}$ :  $v_1(2.1) = v_1(1, 3) = 5$ ,  $v_2(2.1) = v_2(1.3) = 10$ ,  $v_1(1.2) = v_1(2.4) = 3$ ,  $v_2(1.2) = v_2(2.4) = 5$ ,  $v_1(2.2) = -5$ ,  $v_2(2.2) = 6$ .

Тепер розв'язуємо гру  $\Gamma_{1.1}$ . Тут  $v_1(1.1) = v_1(2.1) = 5$ ,  $v_2(1.1) = v_2(2.1) = 10$ .

В результаті отримуємо ситуацію абсолютної рівноваги по Нешу  $(u_1^*, u_2^*)$ , де

$$u_1^* = (1, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1), \quad u_2^* = (1, 3, 2, 2, 2, 1, 2).$$

У ситуації  $(u_1^*, u_2^*)$  гра розвивається шляхом (1,1), (2,1), (1,3). Зауважимо, що в процесі побудови стратегії  $u_i^*$ ,  $i = 1, 2$  «доброзичливі» у тому сенсі, що обидва гравці при здійсненні свого ходу, будучи рівною мірою зацікавлені у виборі наступних альтернатив, обирають ту з них, яка більш сприятлива для іншого гравця.

У грі  $\Gamma$  є ситуації абсолютної рівноваги, в яких виграші гравців будуть іншими. Для побудови таких рівноваг достатньо зняти умову «доброзичливості» гравців та замінити її на зворотну умову «недоброзичливості». Позначимо через  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  виграші гравців у підгрі  $\Gamma_x$  за умови використання гравцями «недоброзичливої» рівноваги. Тоді маємо  $v_1(1.6) = v_1(1.6) = 6$ ,  $v_2(1.6) = v_2(1.6) = 2$ ,  $v_1(1.7) = v_1(1.7) = 2$ ,  $v_2(1.7) = v_2(1.7) = 4$ ,  $v_1(2.7) = -2$ ,  $v_2(2.7) = v_2(2.7) = 8$ . Як було видно раніше, у підгрі  $\Gamma_{2.5}$  дві рівноваги по Нешу. На відміну від попереднього

випадку, припустимо, що гравець 2 «недоброзичливий» і вибирає ту з вершин, в якій при його максимальному виграші виграш гравця 1 мінімальний. Тоді  $v_1(2.5) = 1$ ,  $v_2(2.5) = 2$ ,  $v_1(2.6) = v_1(1.7) = 2$ ,  $v_2(2.6) = v_2(1.7) = 4$ ,  $v_1(1.8) = v_1(1.8) = 2$ ,  $v_2(1.8) = v_2(1.8) = 3$ . Далі шукаємо розв'язки ігор  $\Gamma_{1.3}$ ,  $\Gamma_{1.4}$ ,  $\Gamma_{1.5}$ ,  $\Gamma_{2.3}$ ,  $\Gamma_{2.4}$ . У підгрі  $\Gamma_{1.3}$  дві рівноваги за Нешем. Як і в попередньому випадку, оберемо «недоброзичливі» дії гравця 1. Тоді маємо:  $v_1(1.3) = v_1(1.3) = 5$ ,  $v_2(1.3) = 1$ ,  $v_1(1.4) = 2$ ,  $v_2(1.4) = 3$ ,  $v_1(1.5) = v_1(2.6) = v_1(1.5) = 2$ ,  $v_2(1.5) = v_2(2.6) = v_2(2.6) = 4$ ,  $v_1(2.3) = v_1(2.3) = 0$ ,  $v_2(2.3) = v_2(2.3) = 6$ ,  $v_1(2.4) = v_1(2.4) = 3$ ,  $v_2(2, 4) = v_2(2.4) = 5$ . Далі розв'яжемо ігри  $\Gamma_{2.1}$ ,  $\Gamma_{1.2}$ ,  $\Gamma_{2.2}$ . Маємо  $v_1(2.1) = v_1(1.5) = 2$ ,  $v_2(2.1) = v_2(1.5) = 4$ ,  $v_1(1.2) = v_1(2.4) = 3$ ,  $v_2(1.2) = v_2(2.4) = 5$ ,  $v_2(2.2) = v_2(2.2) = 6$ ,  $v_1(2.2) = v_1(2.2) = -5$ .

Тепер розв'язуємо гру  $\Gamma = \Gamma_{1.1}$ . Тут  $v_1(1.1) = v_1(1.2) = 3$ ,  $v_2(1.1) = v_2(1.2) = 5$ .

Таким чином, отримано нову ситуацію рівноваги по Нешу

$$\bar{u}_1^* = (2, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1), \quad \bar{u}_2^* = (3, 3, 2, 2, 1, 1, 3).$$

Виграші обох гравців в цій ситуації менші від їх виграшів при «доброзичливому» виборі альтернатив.

### 3.3 Антагоністичні позиційні ігри з повною інформацією.

Розглянемо багатокрокові антагоністичні ігри з повною інформацією.

Нехай гравців два, тобто  $N = \{1, 2\}$  та  $H_2(x) = -H_1(x)$  для всіх  $x \in X_3$  ( $X_3$  — множина фінальних позицій у грі  $\Gamma$ ). Тоді  $\Gamma = \langle N, U_i, K_i \rangle$  - це антагоністична багатокрокова гра з повною інформацією.

Очевидно, що таку ж властивість мають і всі підгри  $\Gamma_z$  гри  $\Gamma$ . Оскільки з умови  $H_2(x) = -H_1(x)$  випливає, що  $K_2(u_1, u_2) = -K_1(u_1, u_2)$  для всіх  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ , то в ситуації рівноваги по Нешу  $(u_1^*, u_2^*)$  виконуються нерівності

$$K_1(u_1, u_2^*) \leq K_1(u_1^*, u_2^*) \leq K_1(u_1^*, u_2) \text{ для всіх } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2.$$

Пару  $(u_1^*, u_2^*)$  у цьому випадку назвемо ситуацією рівноваги або сідловою точкою, а стратегії, що утворюють ситуацію рівноваги, оптимальними. Значення функції виграшу у ситуації рівноваги позначимо  $v$  та назвемо значенням гри  $\Gamma$ .

В антагоністичній багатокроковій грі з повною інформацією на скінченному деревоподібному графі існує ситуація абсолютної рівноваги, тобто така ситуація  $(u_1^*, u_2^*)$ , звуження якої на будь-яку підгру  $\Gamma_z$  гри  $\Gamma$  утворює в грі  $\Gamma_z$  ситуацію рівноваги. Для будь-якої підгри  $\Gamma_y$  можна визначити число  $v(y)$ , що представляє значення функції виграшу в ситуації рівноваги цієї підгри та називається значенням підгри  $\Gamma_y$ .

Значення антагоністичної гри (тобто значення функції виграшу гравця 1 у ситуації рівноваги) визначається однозначно, тому функція  $v(y)$  визначена для всіх  $y \in X_1, y \in X_2$  і є однозначною функцією.

Виведемо функціональні рівняння для обчислення функції  $v(y)$ . З визначення  $v(y)$  випливає, що

$$v(y) = K_1^y((u_1^*)^y, (u_2^*)^y) = -K_2^y((u_1^*)^y, (u_2^*)^y),$$

де  $((u_1^*)^y, (u_2^*)^y)$  - ситуація рівноваги в підгрі  $\Gamma_y$ , що є звуженням ситуації абсолютної рівноваги  $(u_1^*, u_2^*)$ .

Нехай  $y \in X_1$  та  $z \in F_y$ . Тоді маємо

$$v(y) = \max_{z \in F_y} K_1^z((u_1^*)^z, (u_2^*)^z) = \max_{z \in F_y} v(z).$$

Для  $y \in X_2$  аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} v(y) &= -K_2^y((u_1^*)^y, (u_2^*)^y) = -\max_{z \in F_y} K_2^z((u_1^*)^z, (u_2^*)^z) = \\ &= -\max_{z \in F_y} (-v(z)) = \min_{z \in F_y} v(z). \end{aligned}$$

Маємо:

$$v(y) = \max_{z \in F_y} v(z), \quad y \in X_1; \quad (9)$$

$$v(y) = \min_{z \in F_y} v(z), \quad y \in X_2. \quad (10)$$

Рівняння (9), (10) розв'язуються при граничній умові

$$v(y)|_{y \in X_3} = H_1(y).$$

Система рівнянь з граничною умовою дозволяє здійснити зворотну рекурентну процедуру знаходження значення гри та оптимальних стратегій гравців. Дійсно, нехай значення всіх підігор  $\Gamma_z$  тривалістю  $l(z) \leq k - 1$  відомі і дорівнюють  $v(z)$ , нехай  $\Gamma_y$  — певна підгра тривалістю  $l(y) = k$ . Тоді, якщо  $y \in X_1$ , то  $v(y)$  визначається за формулою (9), якщо ж  $y \in X_2$ , то  $v(y)$  знаходиться за формулою (10). При цьому значення функцій  $v(z)$  у формулах (9), (10) відомі, оскільки відповідні підігри мають довжину не більше ніж  $k-1$ . Ці формули вказують спосіб побудови стратегій гравців. Справді, якщо  $y \in X_1$ , то гравець 1 (максимізуючий) повинен вибрати у точці  $y$  вершину  $z \in F_y$ , для якої значення наступної підігри є максимальним. Якщо ж  $y \in X_2$ , то гравець 2 (мінімізуючий) повинен вибрати позицію  $z \in F_y$ , для якої значення наступної підігри є мінімальним.

У разі, коли вибори гравців в багатогранній антагоністичній грі чергуються (почергова гра), рівняння (9), (10) можуть бути записані у вигляді одного рівняння. Справді, розглянемо підігра  $\Gamma_x^i$  нехай для певності  $x \in X_1$ . Тоді в наступній позиції ходить гравець 2 або ця позиція є (чергова гра) остаточною, тобто  $F_x \subset X_2 \cup X_3$ . Тому можна записати

$$v(x) = \max_{y \in F_x} v(y), \quad x \in X_1; \quad (11)$$

$$v(y) = \min_{z \in F_y} v(z), \quad y \in F_x \subset X_2 \cup X_3. \quad (12)$$

Підставляючи (11) у (12), отримаємо

$$v(x) = \max_{y \in F_x} [\min_{z \in F_y} v(z)], \quad x \in X_1. \quad (13)$$

Якщо  $x \in X_2$ , то аналогічно маємо

$$v(x) = \min_{y \in F_x} [\max_{z \in F_y} v(z)]. \quad (14)$$

Рівняння (13), (14) еквівалентні і повинні розглядатися з початковою умовою

$$v(x) | x \in X_3 = H_1(x)$$

Теорема 3.1 дозволяє стверджувати існування ситуації рівноваги в «шахах», «шашках», у класі чистих стратегій, а рівняння

$$v(x) = \max_{y \in F_x} [\min_{z \in F_y} v(z)], \quad x \in X_1. \quad \text{та} \quad v(x) = \min_{y \in F_x} [\max_{z \in F_y} v(z)].$$

показують шлях знаходження значення гри.



## **ВИСНОВКИ**

Отже, в дипломній роботі розглянуто багатокрокові ігри, зокрема ігри на розорення, та позиційні ігри з повною інформацією, наведені та розв'язані приклади таких ігор. Стратегічна поведінка в іграх на економічне розорення диктує вибір політики в області дивідендів.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Алгоритмы: построение и анализ. / Корман Т. Х. и др. / 3-е издание: Пер. с англ. – М. : ООО “И. Д. Вильямс”, 2013. – 1328 с.
2. Игры и решение. Введение и критический обзор./Льюис Р.Д., Райфа Х. / Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 642 с.
3. Крушевский А. В. Теория игр. – К.: Вища школа.— 1977. – 216 с.
4. Теория игр: учебник / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. / 2-е издание. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012 — 432 с.
5. Dungan R. Luce. Games and Decisions: Introduction and Critical Survey. – New York: Dover Publications, 1989. – 544 p.
6. Hausner M. Games of survival // Research Memorandum RM-776, RAND Corporation, Santa Monica. – 1952
7. Hausner M. Optimal strategies in games of survival // Research Memorandum RM-777, RAND Corporation, Santa Monica. – 1952
8. Odhnoff J. On the Applicability of Game Theory in Economics: A Survey // The Swedish Journal of Economics. – 1966 . – Vol. 68, №. 3 . – PP. 162 – 192.
9. Owen G. Game theory: 3rd edition.— Bingley: Emerald Group Publishing Limited; – 1995. – 460 p.
10. Spaniel W. Game Theory 101: The Complete Textbook Paperback. – South Carolina: CreateSpace Independent Publishing Platform. – 2011. – 276 p.