

**ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ
ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

до самостійної роботи

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології

ОДЕСА
ОНУ
2024

**УДК 519.8(076)
П419**

Укладачі:

О. Д. Кічмаренко, доктор фізико-математичних наук, професор, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики;

А. О. Стехун, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики.

Рецензенти:

А. В. Плотніков, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури;

З. Ю. Журавльова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

*Рекомендовано вченою радою факультету математики, фізики
та інформаційних технологій ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол №7 від 19 червня 2023 року.*

П419 **Побудова** лінійних оптимізаційних моделей [Електронний ресурс] : електрон. метод. посіб. до самост. роб. для здобув. першого (бакалавр.) рівня вищ. освіти спец. 111 Матем., 113 Прикладна матем., 122 Комп'ют. науки, 126 Інформ. системи і технології / уклад.: О. Д. Кічмаренко, А. О. Стехун. – Одеса : Одеський нац. ун-т імені І. І. Мечникова, 2024. – 125 с. – 0,9 МБ.

Даний посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика, 122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології. У посібнику викладено основні принципи та інструментарій постановки оптимізаційних задач, методіку побудови економіко-математичних моделей, наведено типові приклади з розв'язанням, а також індивідуальні завдання на складання математичних моделей для самостійного розв'язання. Особливу увагу приділено розвитку практичних навичок з побудови економіко-математичних моделей.

УДК 519.8(076)

Зміст

1	ВСТУП	7
----------	--------------------	----------

I Побудова оптимізаційних моделей

2	Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей	11
----------	----------------------------------------------------------------	-----------

2.1	Задача про харчовий раціон	12
2.2	Задача про завантаження верстатів	14
2.3	Задача про розподіл ресурсів	17
2.4	Задача про перевезення	20
2.5	Задача про виробництво складного обладнання	23
2.6	Задача про раціональне використання посівних площ	26
2.7	Завдання складання плану виробництва	26
2.8	Задача про оптимальний розкрий	28
2.8.1	Модель розкрою з мінімальною витратою матеріалів	30
2.8.2	Модель розкрою з мінімальними відходами	30
2.8.3	Модель розкрою з урахуванням комплектації	34
2.9	Задача про розвідника	35

II Індивідуальні завдання

3	Завдання на складання математичних моделей	39
	Рекомендована література	124

Будь-які методи системного аналізу, як і методи дослідження операцій, і теорії керування, ґрунтуються на математичному описі тих чи інших фактів, явищ, процесів, тобто на математичному моделюванні.

Моделювання – це спеціальна форма експерименту, тобто дослідження системи за допомогою її моделі.

Модель – у широкому розумінні – це образ (можливо абстрактний) будь-якого об'єкта чи системи об'єктів, який використовується для дослідження замість реального об'єкта. Точність і якість такого опису визначаються, насамперед, відповідністю моделей до тих вимог, які пред'являються до дослідження. Тому існує ряд суб'єктивних факторів, що впливають на якість моделей. Один з них – це вибірковість: модель будується, виходячи із спостережень за об'єктом, але фахівець, навіть найкращий, помічає властивості об'єкта вибірково. Другий такий фактор – конструювання: ми починаємо бачити те, чого немає. Третій суб'єктивний фактор – це спотворення: ми будуємо моделі навколишнього світу, виділяючи одні сторони за рахунок замовчування інших. Ще один такий фактор – це узагальнення: дослідник, взявши за основу один випадок, прагне перенести дані на решту схожих випадків.

Побудова математичних моделей є основою всього системного аналізу. Це є центральний етап дослідження чи проектування будь-якої системи.

Побудова моделей – завжди процедура неформальна, і, звичайно, вона сильно залежить від дослідника, від його досвіду, таланту, завжди спирається на певний дослідний матеріал. Однакові об'єкти моделювання в залежності від цілі та задачі дослідження можуть мати різні моделі.

Модель має достатньо правильно відображати явища. Однак одного цього ще мало, вона повинна бути зручною для використання, тому ступінь деталізації моделі, форма її уявлення визначаються метою дослідження та безпосередньо залежать від дослідника. Працюючи з тим самим дослідним матеріалом, різні дослідники можуть представляти його по-різному.


Загальних способів побудови математичних моделей операцій не існує. В кожному випадку модель будують виходячи із цільової спря-

мованості операцій і задачі наукового дослідження з урахуванням необхідної точності рішення, а також точності із якою відомі вихідні дані. При побудові математичної моделі явище (в даному випадку операція) деяким чином спрощується, схематизується. З безлічі факторів, що впливають на явище виділяють порівняно невелику кількість найважливіших, а потім отримана схема опису явища повинна бути представлена в найбільш відповідних для неї математичних термінах (як кажуть, із використанням адекватного математичного апарату). В результаті встановлюються кількісні зв'язки між умовами операції, її параметрами та результатом операції, який оцінюється показником ефективності або сукупністю показників, якщо їх в даній задачі декілька.

Побудова математичної моделі – найбільш важлива і відповідальна частина дослідження, яка вимагає як глибоких математичних знань, так і знань предметної області, тобто суті явища, яке моделюється.

Даний посібник для самосійної роботи не є збірником готових моделей різноманітних ситуацій задач і процесів, але він може стати в нагоді читачеві при застосуванні декількох типів моделей, що подані у вигляді прикладів, та через розкриття теоретичних засад методології моделювання при самостійному використанні інструментарію моделювання, здійснюючи вибір ефективних рішень у будьякій сфері діяльності. Ця книга присвячена розкриттю суті основних принципів моделювання, котрі можна застосувати до найрізноманітніших управлінських ситуацій. Вона показує, яким чином реальні життєві ситуації можна досліджувати і аналізувати за допомогою модельних експериментів, а також розкриває економічну інтерпретацію математичних методів аналізу моделей.

Перший параграф представляє огляд способів побудови моделей, задач та методів моделювання, і процесу моделювання. Особлива увага приділяється системному підходу до побудови моделей. Другий – містить індивідуальні завдання на складання економіко-математичних моделей для самостійного розв'язання. Особливу увагу приділено розвитку практичних навичок з побудови економіко-математичних моделей.



Побудова оптимізаційних моделей

2 Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей 11

- 2.1 Задача про харчовий раціон
- 2.2 Задача про завантаження верстатів
- 2.3 Задача про розподіл ресурсів
- 2.4 Задача про перевезення
- 2.5 Задача про виробництво складного обладнання
- 2.6 Задача про раціональне використання посівних площ
- 2.7 Завдання складання плану виробництва
- 2.8 Задача про оптимальний розкрий
- 2.9 Задача про розвідника

2

Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

У багатьох галузях практики виникають своєрідні завдання оптимізації рішень, котрим характерні такі риси:

- показник ефективності W являє собою лінійну функцію від елементів розв'язків x_1, x_2, \dots ;
- обмежувальні умови, що накладаються на можливі розв'язки, мають вигляд лінійних рівностей або нерівностей.

Такі задачі прийнято називати *задачами лінійного програмування*.

Щоб побудувати математичну модель економічної ситуації як завдання лінійного програмування, передусім необхідно запровадити змінні цієї задачі. Вони повинні бути введені таким чином, щоб їх значення визначали шукане рішення задачі (отримавши значення змінних ми отримуємо відповідь на поставлене питання).

Наступним кроком є визначення мети, критерію ефективності операції, ту величину, яку необхідно екстремізувати (оптимізувати) у задачі. Її виражають через введені змінні – отримують лінійне вираження для цільової функції.

Після цього необхідно встановити, чим обмежується зростання чи спадання цільової функції, тобто визначити обмеження задачі. Їх потрібно також висловити через змінні та записати у вигляді системи рівнянь та/або нерівностей.

Крім того, при побудові моделі корисно скористатися наступними рекомендаціями. При визначенні змінних слід заздалегідь обміркувати, чи дозволять вони відобразити моделі всі умови завдання (якщо відомо, що немає надлишкових умов). У конкретній задачі вказують одиниці виміру для змінних. Якщо у вихідних даних завдання одна й та сама величина вимірюється в різних одиницях (наприклад, маса в грамах, кілограмах, тоннах), то необхідно перевести ці дані в одні й ті самі одиниці виміру. Виражаючи цільову функцію та обмеження через змінні, слід перевірити, якими одиницями вимірюватимуться отримані величини і чи не є вони безглуздими з економічної точки зору (наприклад, чи не вимірюються ліва та права частини обмежень у різних одиницях). Окремо слід продумати обмеження на знак змінних.

12 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

У деяких завданнях змінні можуть набувати лише цілі значення. Цей факт також необхідно записати як обмеження. Таке обмеження виводить поставлену задачу із класу задач лінійного програмування до класу задач цілочисельного лінійного програмування. Однак, розглянутих тут понять достатньо для того, щоб побудувати математичну модель і для цілочисельної задачі.

Наведемо деякі приклади економічних задач, математичні моделі яких є задачами лінійного програмування. Слід зазначити, що тут буде розглянуто далеко не всі такі завдання, та, крім того, навіть ті, що розглянуті, існують у різноманітних модифікаціях. Треба також відмітити, що і класифікація цих задач, значною мірою умовна, та відрізняється у різних авторів.

Наведемо кілька прикладів побудови математичної моделі задач лінійного програмування з різних областей практики.

2.1 Задача про харчовий раціон

Нехай маємо чотири види продуктів харчування:

$$П_1, П_2, П_3, П_4,$$

та відома вартість одиниці кожного продукту:

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

З цих продуктів необхідно скласти харчовий раціон, який повинен містити:

- білків не менше b_1 одиниць,
- вуглеводів не менше b_2 одиниць,
- жирів не менше b_3 одиниць.

Одиниця продукту $П_i$ містить a_{i1} одиниць білків, a_{i2} одиниць вуглеводів, a_{i3} одиниць жирів для кожного $i = 1, 2, 3, 4$. Відомий зміст елементів в одиниці кожного продукту можна задати таблицею:

Продукти	Елементи		
	білки	вуглеводи	жири
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}
$П_4$	a_{41}	a_{42}	a_{43}

Потрібно скласти такий харчовий раціон, щоб задані умови по вмісту корисних речовин були витримані, але при цьому вартість раціону була мінімальною.

Побудуємо математичну модель цієї задачі. Запишемо сформульовані словесно умови задачі у вигляді математичних формул.

Змінні моделі. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 кількість продуктів виду $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ відповідно, що входять у раціон.

Цільовою функцією або функцією мети, вочевидь, буде загальна вартість раціону, яка буде мати вигляд:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4. \quad (2.1.1)$$

Запишемо математично *обмеження задачі.* За умовою в одній одиниці продукту Π_1 міститься a_{11} одиниць білка, значить, в x_1 одиницях міститься $a_{11}x_1$ одиниць білка, в x_2 одиницях продукту Π_2 міститься $a_{21}x_2$ одиниць білка, в x_3 одиницях продукту Π_3 – $a_{31}x_3$ одиниць білка, в x_4 одиницях продукту Π_4 – $a_{41}x_4$ одиниць білка. Загальна кількість білків, які містяться у раціоні, за умовою не повинна бути менш ніж b_1 . Звідси отримуємо перше обмеження задачі:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \geq b_1.$$

Записуючи аналогічні умови на зміст вуглеводів і жирів у раціоні, одержимо наступну систему обмежень у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \geq b_3. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Ці умови є обмеження, що накладаються на розв'язки. Повинні виконуватися також змістовні обмеження на змінні x_i , а саме $x_i \geq 0$ $i = 1, 2, 3, 4$.

Тоді математичну модель можна записати таким чином:
знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , які задовольняють лінійним нерівностям (2.1.2), та при яких лінійна функція цих змінних (2.1.1) набуває мінімальне значення.

Математична модель 2.1.1

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \longrightarrow \min$$

14 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 \geq b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 \geq b_3, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Поставлена задача та побудована модель цієї задачі являють собою типову задачу лінійного програмування. Розглянемо ще кілька подібних задач.

2.2 Задача про завантаження верстатів

Ткацька фабрика має N_1 одиниць верстатів типу 1 і N_2 одиниць верстатів типу 2. Верстати можуть виробляти чотири різні види тканин:

$$T_1, T_2, T_3, T_4.$$

Кожен тип верстата може виробляти будь-який із видів тканин, але в неоднаковій кількості. Верстат типу 1 виробляє в місяць a_{11} метрів тканини виду T_1 , a_{12} метрів тканини виду T_2 , a_{13} метрів тканини T_3 , a_{14} метрів тканини T_4 . Відповідні числа для верстата типу 2 будуть a_{21} , a_{22} , a_{23} , a_{24} . Продуктивність верстатів під час виробництва кожного виду тканини задана у таблиці:

Тип верстата	Вид тканини			
	T_1	T_2	T_3	T_4
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

Кожен метр тканини виду T_1 приносить фабриці дохід c_1 грошових одиниць, тканини T_2 – дохід c_2 , тканини T_3 – дохід c_3 і тканини T_4 – дохід c_4 .

Фабриці наказано план виробництва, за яким вона зобов'язана виготовити протягом місяця:

- не менше b_1 метрів тканини виду T_1 ,
- не менше b_2 метрів тканини виду T_2 ,
- не менше b_3 метрів тканини виду T_3 ,
- не менше b_4 метрів тканини виду T_4 ,

тобто планове завдання виражається числами b_1 , b_2 , b_3 , b_4 .

Потрібно так розподілити завантаження верстатів виробництвом тканин різного виду, щоб план був виконаний і при цьому місячний прибуток був максимальним.

Запишемо математичну модель задачі.

Побудова математичної моделі.

Змінні задачі. За умовою кожен тип верстата може виробляти будь-який із видів тканин, і необхідно визначити кількість верстатів кожного типу зайнятих виробництвом тканини кожного типу. Позначимо через x_{11} – кількість одиниць верстатів типу 1, що зайняти виробництвом тканини виду T_1 , x_{12} – кількість одиниць верстатів типу 1, зайнятих виробництвом тканини T_2 , тобто x_{1j} – кількість верстатів типу 1, зайнятих виробництвом тканини виду T_j ($j = 1, 2, 3, 4$). За аналогією x_{21} – кількість верстатів типу 2, що зайняти виробництвом тканини виду T_1 , x_{22} – кількість верстатів типу 2, зайнятих виробництвом тканини T_2 , тобто x_{2j} – кількість верстатів типу 2, зайнятих виробництвом тканини виду T_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Взагалі x_{ij} – кількість верстатів типу i , зайнятих виробництвом тканини виду T_j , де перший індекс $i = 1, 2$ відповідає типу верстата, другий – виду тканини $j = 1, 2, 3, 4$. Таким чином виникають вісім змінних задачі або елементів розв'язку:

$$\begin{aligned} x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \\ x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

які ми повинні вибрати так, щоб місячний прибуток був максимальним. Запишемо формулу для обчислення цього прибутку.

Цільова функція задачі. Тканина виду T_1 виробляється на верстаті типу 1 у кількості $a_{11}x_{11}$ метрів та на верстаті типу 2 у кількості $a_{21}x_{21}$ метрів. На обох – у кількості $a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}$ метрів. За умовою задачі кожен метр тканини виду T_1 приносить прибуток у c_1 грошових одиниць, тоді $a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}$ метрів тканини виду T_1 принесуть прибуток $c_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21})$ грошових одиниць. Продовжуючи міркування таким чином отримаємо, що загальний прибуток від реалізації тканин всіх видів складе:

$$\begin{aligned} L = c_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + \\ + c_3(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) + c_4(a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24}). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Потрібно вибрати такі невід'ємні значення змінних (2.2.1), щоб лінійна функція від них (2.2.2) набувала максимуму. При цьому повинні виконуватися наступні обмежувальні умови.

Обмеження задачі. Обмеження на кількість наявних верстатів. Ресурси по верстатах не повинні бути перевищені, тобто сума кількостей

16 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

верстатів кожного типу, що зайняти виробництвом усіх тканин, не повинна перевищувати наявного запасу верстатів:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq N_1, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq N_2.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Обмеження за планом виробництва. Завдання з асортименту, які передбачені у плані виробництва, мають бути виконані (або перевиконані). З урахуванням даних ці умови запишуться у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases}a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geq b_1, \\a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geq b_2, \\a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \geq b_3, \\a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} \geq b_4.\end{cases}\tag{2.2.4}$$

Таким чином, побудована математична модель задачі:
знайти такі невід'ємні цілочисельні значення змінних x_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$), що задовольняють лінійним нерівностям (2.2.3) і (2.2.4), при яких лінійна функція цих змінних (2.2.2) набувала б максимуму.

Математична модель 2.2.1

$$\begin{aligned}\max L &= c_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + \\&+ c_3(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) + c_4(a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24}).\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq N_1, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq N_2, \\a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geq b_1, \\a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geq b_2, \\a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \geq b_3, \\a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} \geq b_4, \\x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, j = \overline{1, 4}.\end{cases}$$

2.3 Задача про розподіл ресурсів

Розглянемо задачу у якій задані m різних видів ресурсів:

$$R_1, R_2, \dots, R_m$$

(на кшталт сировина, робоча сила, обладнання) в кількостях одиниць відповідно:

$$b_1, b_2, \dots, b_m.$$

За допомогою цих ресурсів є можливість виготовити товари виду:

$$T_1, T_2, \dots, T_n.$$

Для виробництва однієї одиниці товару виду T_1 необхідно:

a_{11} одиниць ресурсу R_1 ,

a_{21} одиниць ресурсу R_2 ,

.....

a_{31} одиниць ресурсу R_3 ,

і, відповідно, a_{m1} одиниць ресурсу R_m .

Для виробництва однієї одиниці товару виду T_2 необхідно:

a_{12} одиниць ресурсу R_1 ,

a_{22} одиниць ресурсу R_2 ,

a_{32} одиниць ресурсу R_3 ,

.....

і, відповідно, a_{m2} одиниць ресурсу R_m і так далі.

Отже, для виробництва однієї одиниці товару виду T_j для $j = \overline{1, n}$ необхідно a_{ij} одиниць кожного з ресурсів R_i $i = \overline{1, m}$. Таким чином відома матриця витрат ресурсів для виробництва всіх видів тканини:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожна одиниця ресурсу R_i ($i = \overline{1, m}$) коштує d_i грошових одиниць відповідно. Кожна одиниця товару T_j ($j = \overline{1, n}$) може бути реалізована за ціною c_j відповідно. Стосовно кожного виду товару кількість вироблених одиниць обмежується попитом. Відомо, що ринок не може поглинути більше, ніж k_j ($j = \overline{1, n}$) одиниць товару T_j відповідно.

Знайти, скільки одиниць та якого товару потрібно виробляти для того, щоб отримати максимальний прибуток від реалізації?

18 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

Побудова математичної моделі задачі.

Складемо математичну модель задачі. Для цього введемо змінні.

Змінні задачі. Позначимо через:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

кількості одиниць товару виду T_1, T_2, \dots, T_n відповідно, які заплановано до виробництва.

Обмеження задачі. Умови попиту накладають на величини товару, що заплановано до виробництва, наступні обмеження:

$$x_1 \leq k_1, \quad x_2 \leq k_2, \quad \dots, \quad x_n \leq k_n. \quad (2.3.1)$$

За умовою задачі ресурс R_1 є в обмеженій кількості b_1 та витрачається для виробництва товарів T_1, T_2, \dots, T_n у кількостях $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ на кожну одиницю відповідного типу товару, що виробляється у кількості x_1, x_2, \dots, x_n відповідно. Загальна кількість витраченого ресурсу R_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n.$$

Ресурсів має вистачити, звідси виникає обмеження на виробництво за кількістю витраченого ресурсу R_1 :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1.$$

Продовжуючи такі міркування отримаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Ці ж умови можна записати коротше у вигляді:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad \text{для кожного } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.3.2)$$

Цільова функція задачі. Завданням задачі є максимізація прибутку від реалізації виробленого товару. Знайдемо прибуток L . Собівартість

s_j одиниці товару T_j дорівнює:

$$\begin{aligned} s_j &= a_{1j}d_1 + a_{2j}d_2 + \dots + a_{mj}d_m = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}d_i \quad \text{для кожного } j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Обчисливши за цією формулою собівартість одиниці кожного товару, отримаємо ряд значень s_1, s_2, \dots, s_n . Чистий прибуток q_j , що отримується від реалізації однієї одиниці товару T_j , дорівнює різниці між її продажною ціною c_j і собівартістю s_j :

$$q_j = c_j - s_j \quad \text{для кожного } j = \overline{1, n}.$$

За цією формулою отримуємо чисті прибутки на одиницю для всіх товарів q_1, q_2, \dots, q_n . Загальний чистий прибуток від реалізації всіх товарів складає:

$$\begin{aligned} L &= q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n = \sum_{j=1}^n q_jx_j = \\ &= \sum_{j=1}^n (c_j - s_j)x_j = \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}d_i \right) x_j. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Отже, побудовано математичну модель задачі про оптимальний розподіл ресурсів:

знайти такі невід'ємні значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють лінійним нерівностям (2.3.1), (2.3.2) і при яких лінійна функція цих змінних (2.3.4) набуває максимум.

Математична модель 2.3.1

$$\max L = q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n = \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}d_i \right) x_j,$$

$$\begin{cases} x_j \leq k_j & \text{для кожного } j = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & \text{для кожного } i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

2.4 Задача про перевезення

Нехай є m складів:

$$C_1, C_2, \dots, C_m$$

і n пунктів споживання:

$$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n.$$

Мова йде про складання плану перевезень зі складів C_i ($i = \overline{1, m}$) в пункти Π_j ($j = \overline{1, n}$) деякого товару. На складах C_i ($i = \overline{1, m}$) є запаси однорідного товару в кількостях a_1, a_2, \dots, a_m одиниць відповідно. Пункти споживання Π_j ($j = \overline{1, n}$) подали заявки відповідно на b_1, b_2, \dots, b_n одиниць товару. Заявки здійсненні, тобто сума всіх заявок не перевищує суми всіх наявних запасів:

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i.$$

Склади C_i ($i = \overline{1, m}$) пов'язані з пунктами споживання Π_j ($j = \overline{1, n}$) якоюсь мережею доріг із певними тарифами на перевезення. Вартість перевезення однієї одиниці товару зі складу C_i в пункт Π_j дорівнює c_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Потрібно скласти план перевезень, тобто вказати, з якого складу, в які пункти і яку кількість товару потрібно направляти так, щоб заявки були виконані, а загальні витрати на всі перевезення були мінімальними.

Побудова математичної моделі задачі.

Змінні задачі. Позначимо через x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) кількість одиниць товару, що направляється зі складу C_i в пункт Π_j (якщо з цього складу в цей пункт товари не направляються, тоді покладемо $x_{ij} = 0$). Розв'язок (або план перевезень) складається з $m \cdot n$ чисел:

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}, \end{array}$$

які утворюють прямокутну таблицю (матрицю). Скорочено будемо позначати її (x_{ij}) . Потрібно вибрати такі невід'ємні значення змінних x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), щоб були виконані наступні умови-обмеження.

Обмеження задачі.

1). Ємність складів не повинна перевищувати загальну кількість наявного товару:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq a_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq a_m \end{cases}$$

або коротше:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4.1)$$

2). Заявки, що подані пунктами споживання, повинні бути виконані:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

або коротше:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.2)$$

Цільова функція задачі. Загальна вартість перевезень L буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} L = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \end{aligned}$$

або набагато коротше:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}. \quad (2.4.3)$$

Потрібно обрати такий план перевезень (x_{ij}) ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), щоб вартість L цих перевезень була мінімальною.

Побудовано математичну модель задачі про перевезення: знайти невід'ємні значення змінних (x_{ij}) такі, щоб при виконанні умов (2.4.1), (2.4.2) лінійна функція цих змінних (2.4.3) досягала мінімуму.

Математична модель 2.4.1

$$\min L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Деяка особливість цього завдання, в порівнянні з раніше розглянутими, полягає в тому, що не всі обмеження, накладені на змінні, є лінійними нерівностями, а саме, умови (2.4.2) записані у вигляді лінійних рівностей.

Зауважимо, що при деякій постановці задачі про перевезення всі умови-обмеження стають рівностями. А саме, якщо сума всіх заявок дорівнює сумі всіх запасів

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i,$$

то неминуче з кожного складу буде вивезено все, що на ньому є, і нерівності (2.4.1) перетворяться в рівності. Така задача про перевезення називається *закритою транспортною задачею* математична модель якої виглядає наступним чином

Математична модель 2.4.2

$$\min L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

2.5 Задача про виробництво складного обладнання

Планується виробництво складного обладнання, кожен комплект якого складається з n елементів:

$$O_1, O_2, \dots, O_n.$$

Замовлення на виробництво цих елементів можуть бути розміщені на m різних підприємствах:

$$P_1, P_2, \dots, P_m.$$

Протягом певного часу T на підприємстві P_i можна виготовити a_{ij} елементів типу O_j ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Здачі підлягають тільки повні комплекти обладнання, що складаються з набору всіх елементів O_1, O_2, \dots, O_n .

Потрібно розподілити замовлення по підприємствах так, щоб число повних комплектів обладнання, виготовлених за час T було максимально.

Побудова математичної моделі задачі. Плануючи виробництво обладнання, ми повинні для кожного підприємства P_i ($i = \overline{1, m}$) вказати, яку частину наявного в його розпорядженні часу воно має віддати на виробництво елементів O_j ($j = \overline{1, n}$).

Змінні задачі. Позначимо через x_{ij} частку часу, яку підприємство P_i буде приділяти виробництву елемента O_j ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). Якщо цей елемент на даному підприємстві взагалі не виготовляється, тоді покладемо $x_{ij} = 0$.

Обмеження задачі. При плануванні ми повинні дотримуватися наступних обмежувальних умов: кількість часу, яке кожне підприємство витрачає на виробництво всіх елементів, не повинно перевищувати загального запасу часу T (а «частка» - одиниці):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq 1; \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq 1; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq 1 \end{cases}$$

або коротше

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad \text{для кожного } i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5.1)$$

24 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

Цільова функція задачі. Визначимо кількість повних комплектів обладнання, яке за час T поставлять всі підприємства разом.

Загальна кількість елементів O_j , яку вироблять усі підприємства разом, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} N_j &= a_{1j}x_{1j} + a_{2j}x_{2j} + \dots + a_{mj}x_{mj} = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Таким чином, при заданому плані розподілу замовлень, тобто при заданих x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) буде вироблено:

- N_1 примірників елемента O_1 ,
-
- N_2 примірників елемента O_2 ,
- N_n примірників елемента O_n .

Скільки ж повних комплектів обладнання можна зібрати з цих елементів? Очевидно стільки, скільки складає яке мінімальне з усіх чисел N_1, N_2, \dots, N_n . Дійсно, якщо, наприклад, елементів типу O_1 вироблено 100 шт., а елементів типу O_2 – всього 10 шт., то ми ніяк не зможемо зібрати з цих елементів більше 10 повних комплектів.

Позначимо через Z кількість повних комплектів обладнання, яку можна зібрати при цьому плані розміщення замовлень (x_{ij}). Маємо:

$$Z = \min_{1 \leq j \leq n} N_j. \tag{2.5.3}$$

З урахуванням (2.5.2), умова (2.5.3) може бути записана у вигляді:

$$Z = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}. \tag{2.5.4}$$

Таким чином, ми приходимо до наступної математичної постановці задачі:

знайти такі невід’ємні значення змінних (x_{ij}), щоб виконувалися нерівності (2.5.1) і при цьому функція цих змінних (2.5.4) набувала максимуму.

Математична модель 2.5.1

$$\max Z = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, & i = \overline{1, m}, \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Відмінність цього завдання від всіх раніше розглянутих полягає в тому, що тут максимізуемая функція Z не є лінійною функцією від змінних (x_{ij}) і, таким чином, завдання, власне, не є завданням лінійного програмування. Однак її легко звести до задачі лінійного програмування наступними міркуваннями.

Так як величина Z є мінімальною з усіх величин $N_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij}$ $j = \overline{1, n}$, то можна написати ряд нерівностей

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} \geq Z, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.5)$$

Величину Z можна розглянути як нову невід'ємну змінну і розв'язати наступну задачу:

знайти такі невід'ємні значення змінних x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) і Z , щоб вони задовольняли лінійним нерівностям (2.5.1) і (2.5.5) і при цьому величина Z досягала свого максимуму.

Так як величина Z є лінійна функція нових змінних x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$):

$$Z = 0 \cdot x_{11} + 0 \cdot x_{12} + \dots + 0 \cdot x_{mn} + 1 \cdot Z,$$

то задача зведена до звичайної задачі лінійного програмування, шляхом введення «зайвої» змінної Z , яка в початковій постановки задачі не фігурувала.

Задачі такого типу, де потрібно звернути до максимуму мінімальне значення якоїсь величини (або, навпаки, в мінімум - максимальне), досить часто зустрічаються на практиці і називаються «задачами на мінімакс».

Отже, ми розглянули цілий ряд задач дослідження операцій з самих різних областей практики. Ці задачі характеризуються деякими загальними рисами. У кожній з них елементи розв'язків являють собою ряд невід'ємних змінних x_1, x_2, \dots . Потрібно так вибрати значення цих змінних, щоб:

1) виконувалися деякі обмеження, які мають вигляд лінійних нерівностей або рівностей щодо змінних x_1, x_2, \dots ;

2) деяка лінійна функція L тих же змінних набувала максимуму (мінімуму).

2.6 Задача про раціональне використання посівних площ

Є m земельних угідь S_1, S_2, \dots, S_m , які призначені для засіву тієї чи іншої сільськогосподарської культурою. Ці площі відрізняються або положенням, або характером ґрунту. На кожному з угідь (полей) S_i , $i = 1, 2, \dots, m$ можуть бути розміщені одна або кілька з n сільськогосподарських культур Q_1, Q_2, \dots, Q_n (пшениця, жито, кукурудза, картопля і т. д.). Нехай відома врожайність культури Q_j , на полі S_i яка дорівнює a_{ij} центнерів з гектара. Будемо позначати площу поля S_i ($i = \overline{1, m}$) в гектарах через r_i ($i = \overline{1, m}$). Відомі також закупівельні ціни c_j ($j = \overline{1, n}$) на кожен вид сільськогосподарської культури Q_j ($j = \overline{1, n}$). Обмеження в цьому завданні такі: заданий план виробництва b_j ($j = \overline{1, n}$) кожної сільськогосподарської культури Q_j ($j = \overline{1, n}$).

Потрібно визначити план засіву посівних площ з метою максимізації доходу від продажу сільськогосподарської продукції.

Нехай x_{ij} – площа (у гектарах) на i -му полі, зайнята культурою Q_j . Тоді математична модель задачі раціонального використання посівних площ така:

Математична модель 2.6.1

$$\max \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = r_i, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq b_j, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

2.7 Завдання складання плану виробництва

Розглядається діяльність виробничої одиниці (заводу, цеху). Потрібно скласти план виробництва, що забезпечує максимально виконання завдання. Щодо даної виробничої одиниці відомі її технологічні можливості, а також кількості сировинних ресурсів, які можна використовувати. Нехай кількість всіх видів ресурсів дорівнює m . Позначимо їх:

$$R_1, R_2, \dots, R_m.$$

28 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

або, в матричній формі, вектором Ax . Умова обмеженості ресурсів записується у вигляді $Ax \leq b$. Отже, при заданому векторі ресурсів b розглянутою виробничою одиницею може бути випущений будь-який набір товарів x , що задовольняє обмеженням $Ax \leq b, x \geq 0$. Як правило, такий вектор x не є єдиним. У зв'язку з цим з'являється можливість вибору найкращого (у певному сенсі) плану.

Розглянемо дві можливі постановки оптимізаційної задачі. Нехай задані ціни $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ на продукти виробництва G_1, G_2, \dots, G_n . Потрібно визначити план виробництва, що максимізує вартість випущеної продукції. Формальний запис цього завдання такий:

$$\begin{aligned} \max \langle c, x \rangle, \\ Ax \leq b, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Подібна постановка питання відповідає принципу планування «по валу». Той випадок, коли планування випуску ведеться «за номенклатурою», можна змоделювати інакше. Нехай заданий вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, що визначає один комплект випуску; потрібно випустити як можна більше таких комплектів. Нехай α означає кількість комплектів, що випускаються. Розглянемо завдання:

$$\begin{aligned} \max \alpha, \\ Ax \leq b, \quad x \geq \alpha \hat{x}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Тут нерівність $x \geq \alpha \hat{x}$ означає, що вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ містить не менше α повних комплектів $x = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ продукції, що випускається.

2.8 Задача про оптимальний розкрий

Більшість матеріалів, що використовуються у промисловості, надходить на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє використання таких матеріалів, як правило, неможливе. Попередньо їх поділяють на заготівлі необхідних розмірів. Це можна зробити, використовуючи різні способи розкрою матеріалу. Завдання оптимального розкрою полягає в тому, щоб вибрати один або кілька способів розкрою матеріалу і визначити, яку кількість матеріалу слід розкроювати, застосовуючи кожен з обраних способів. Сутність раціонального розкрою полягає у розробці та впровадженні таких технологічних доповнень розкрійних планів, у яких виходить необхідний асортимент (комплект) заготовок,

а відходи за довжиною, чи площею, чи вагою зводяться до мінімуму. Розробка планів розкрою особливо важлива, коли кількість різних варіантів дуже велика.

Формулювання завдання по раціональному розкрою матеріалів залежить від форми матеріалу, що розкраюється (довгомірні, листові, рулонні) і тих умов, які повинні враховуватися при розкрої (властивість матеріалу). Також розкрий може бути прямолінійним та фігурним.

Виділяють два етапи розв'язання задачі оптимального розкрою. У першому етапі визначаються раціональні методи розкрою матеріалу, другому — вирішується завдання лінійного програмування: визначення інтенсивності використання раціональних методів розкрою. У завданнях оптимального розкрою розглядаються так звані раціональні (оптимальні за Парето) способи розкрою. Припустимо, що з одиниці матеріалу можна виготовити заготовівлі кількох видів. Спосіб розкрою одиниці матеріалу називається раціональним (оптимальним за Парето), якщо збільшення кількості заготовок одного виду можливе лише за рахунок скорочення кількості заготовок іншого виду.

У наступному етапі визначають інтенсивність використання оптимальних методів розкрою.

Введемо такі позначення:

i – індекс матеріалу, $i = 1, \dots, n$;

k – індекс виду заготовівлі, $k = 1, \dots, q$;

j – індекс способу розкрою одиниці матеріалу, $j = 1, \dots, p$;

a_{ijk} – кількість (ціле число) заготовівель виду k , що отримані при розкрої одиниці i -го матеріалу j -м способом;

b_k – кількість заготовок виду k у комплекті, що постачається замовнику;

d_i – кількість матеріалу i -го виду;

x_{ij} – кількість одиниць i -го матеріалу, що розкраюються за j -м способом (інтенсивність використання способу розкрою);

c_{ij} – величина відходу, що отриман при розкрої одиниці i -го матеріалу за j -м способом;

x – число комплектів заготовівель різного виду, що поставляються замовнику.

2.8.1 Модель розкрою з мінімальною витратою матеріалів

Цільова функція (мінімум кількості використаних матеріалів):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p x_{ij} \longrightarrow \min;$$

система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідних для виконання замовлення:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ijk} x_{ij} \geq b_k, \quad k = \overline{1, q};$$

умови невід'ємності та цілочисельності змінних:

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Специфічними для даної моделі розкрою є обмеження, що визначають кількість заготівель.

2.8.2 Модель розкрою з мінімальними відходами

Цільова функція (мінімум відходів при розкрої матеріалів):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min;$$

система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідних для виконання замовлення:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ijk} x_{ij} = b_k, \quad k = \overline{1, q};$$

умови невід'ємності та цілочисельності змінних:

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Приклад 2.1 – Приклад математичної моделі прямолінійного розкрою з мінімальними відходами. Завод уклав договір на постачання комплектів стрижнів завдовжки 20, 45 і 50 см, причому, кількість стрижнів різної довжини в комплекті має бути у співвідношенні 4 : 3 : 2. На сьогоднішній день є 60 стрижнів

завдовжки 95 см. Як їх слід розрізати, щоб величина відходів була мінімальною?

Складемо математичну модель розкрою з урахуванням комплектації та обмежень на використаний матеріал. Визначемо всі раціональні способи розкрою матеріалу на заготовки типу A (стрижні завдовжки 20 см), на заготовки типу B (стрижні завдовжки 45 см) і на заготовки типу C (стрижні завдовжки 50 см).

Варіант розкрою	Кількість стрижнів, од.			Величина відходів, см.
	A	B	C	
1	4	–	–	15
2	–	2	–	5
3	2	–	1	5
4	–	1	1	0
5	2	1	–	10

Побудуємо математичну модель. У задачі необхідно визначити, яким способом слід розрізати 60 стрижнів, щоб величина відходів була мінімальною.

Введемо змінні:

x_i – кількість стрижнів, розпиляних i -тим способом, $i = \overline{1, 5}$;

x – кількість комплектів стрижнів.

Цільова функція L – мінімум відходів при розкрої матеріалів:

$$15x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 10x_5 \rightarrow \min .$$

За умовою є всього 60 стрижнів, отже:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 60.$$

Підрахуємо кількість комплектів стрижнів різної довжини з урахуванням виду розпилу. Загальна кількість всіх стрижнів виду A , що отримана при розкрої дорівнює $4x_1 + 2x_3 + 2x_5$, виду B – $2x_2 + x_4 + x_5$, виду C – $x_3 + x_4$. В кожному комплекті має бути рівно $4x$ стрижнів виду A , так як у кожен з цих комплектів має увійти по 4 стрижні виду A (ї частина не може залишитися зайвими, так як при даному розпилі відходи повинні бути мінімальними). Таким чином:

$$4x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 4x.$$

Аналогічні обмеження будуються для стрижнів виду B :

$$2x_2 + x_4 + x_5 = 3x$$

32 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

та для стрижнів виду C :

$$x_3 + x_4 = 2x.$$

Крім того, тут за змістом завдання змінні мають бути не лише невід'ємними, а й цілими. Тоді модель набуде вигляду:

$$\begin{cases} 15x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 10x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 60; \\ 4x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 4x; \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 3x; \\ x_3 + x_4 = 2x; \\ x_i \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x_i, x \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Приклад 2.2 – Приклад математичної моделі фігурного розкрою з мінімальною кількістю відходів.

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти з тканини 6 деталей. На швейній фабриці було розроблено два варіанти розкрою тканини. У таблиці наведено параметри варіантів розкрою 10 м^2 тканини, комплектність, тобто кількість деталей певного виду, які необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів цього типу становить 405 м^2 . Місячний план пошиття 90 виробів на місяць.

Побудувати математичну модель завдання, що у найближчий місяць виконати план з пошиття з мінімальною кількістю відходів. ■

Варіант розкрою	Кількість деталей, шт./відріз						Відходи, $\text{м}^2/\text{відріз}$
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0.5
2	80	35	20	78	15	0	0.35
Комплектність, шт./виріб	1	2	2	2	2	2	

У цьому завданні шукані величини явно не зазначені, але відомо, що має бути виконаний план з пошиття 90 виробів на місяць. Для пошиття 90 виробів потрібно розкроїти певну кількість деталей. Крій виробляється з відрізів тканини по 10 м^2 двома різними способами, що дозволяють отримати різну кількість деталей. Оскільки заздалегідь

невідомо, скільки тканини буде розкроюватися першим способом і скільки – другим, то як шукані величини можна задати кількість відрізів тканини по 10 м^2 , розкромлених кожним із способів:

x_1 – кількість відрізків тканини по 10 м^2 , розкромлених першим способом протягом місяця, (відріз./міс.);

x_2 – кількість відрізків тканини по 10 м^2 , розкромлених другим способом протягом місяця, (відріз./міс.).

Метою розв'язання задачі є виконання плану за мінімальної кількості відходів. Оскільки кількість виробів строго заплановано (90 шт./міс.), цей параметр не описує цільову функцію, а відноситься до обмеження, невиконання якого означає, що завдання не вирішено. А критерієм ефективності виконання плану є параметр – кількість відходів, який необхідно звести до мінімуму. Загальна кількість відходів при крої дорівнює $0,5x_1 + 0,35x_2$.

Цільова функція має вигляд:

$$L(x) = 0,5x_1 + 0,35x_2 \longrightarrow \min.$$

У таблиці вказано комплектність викромлених деталей, так деталей першого виду треба одна штука на виріб, а інших по дві штуки на виріб. Загальна кількість викромлених деталей має бути такою, щоб з них можна було пошити 90 виробів на місяць. Отже деталей першого виду має бути як мінімум 90 шт., деталей інших видів – як мінімум 180 шт.:

$$\begin{aligned}60x_1 + 80x_2 &\geq 90; \\35x_2 &\geq 180; \\90x_1 + 20x_2 &\geq 180; \\40x_1 + 78x_2 &\geq 180; \\70x_1 + 15x_2 &\geq 180; \\90x_1 &\geq 180.\end{aligned}$$

Витрата тканини не повинна перевищувати місячного запасу на складі:

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10}.$$

Кількість відрізків розкромленої тканини не може бути негативним.

Таким чином, математична модель набуває вигляд:

$$L(x) = 0,5x_1 + 0,35x_2 \longrightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 60x_1 + 80x_2 \geq 90; \\ 35x_2 \geq 180; \\ 90x_1 + 20x_2 \geq 180; \\ 40x_1 + 78x_2 \geq 180; \\ 70x_1 + 15x_2 \geq 180; \\ 90x_1 \geq 180; \\ x_1 + x_2 \leq 40, 5; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

2.8.3 Модель розкрою з урахуванням комплектації

Цільова функція (максимум комплектів, що включають заготівлі різних видів):

$$x \longrightarrow \max;$$

обмеження щодо кількості матеріалів:

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} \leq d_j, \quad i = 1, \dots, n;$$

система обмежень, що визначають кількість заготівель, необхідних для формування комплектів:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ijk} x_{ij} \geq b_k x, \quad k = 1, \dots, q;$$

умови невід'ємності та цілочисельності змінних:

$$x_{ij} \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x_{ij}, x \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}.$$

Приклад 2.3 – Приклад математичної моделі прямолінійного розкрою з максимальною кількістю комплектів.

Зі 100 листів фанери виготовляють деталі трьох видів A , B і C , після чого з них складають комплекти, які включають 3 деталі виду A і по 2 деталі B і C . З кожного листа можна виготовити або 4 деталі A і 1 деталь C , або по 2 деталі A і C та 3 деталі B . Необхідно розкрити листи так, щоб максимізувати кількість комплектів деталей. ■

Побудуємо математичну модель. У задачі необхідно визначити, скільки листів розкroїти і яким способом. Введемо змінні x_1 – кількість листів фанери, що оброблені першим способом (при якому отримують 4 деталі виду A і 1 деталь виду C), x_2 – кількість листів, що оброблені іншим способом.

Мета операції – отримати якнайбільше комплектів. Для цього введемо ще одну змінну: x – кількість комплектів деталей.

За умовою є всього 100 аркушів, отже $x_1 + x_2 \leq 100$. За рахунок першого способу обробки буде отримано $4x_1$ деталей виду A , а за рахунок другого – $2x_2$. Загальна кількість деталей A має бути не менше $3x$, так як у кожен з цих комплектів має увійти по 3 деталі A (і частина деталей A може залишитися зайвими). Таким чином, $4x_1 + 2x_2 \geq 3x$. Аналогічні обмеження будуються для деталей виду B ($3x_2 \geq 2x$) та виду C ($x_1 + 2x_2 \geq 2x$). Крім того, тут за змістом завдання змінні мають бути не лише невід’ємними, а й цілими. Тоді модель набуде вигляду:

$$x \longrightarrow \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100; \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 3x; \\ 3x_2 \geq 2x; \\ x_1 + 2x_2 \geq 2x; \\ x_1, x_2, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

2.9 Задача про розвідника

Іноземний резидент потрапив до «закритого міста», у якому три військові заводи. Його завдання визначити кількість працюючих на «закритих» військових заводах «закритого міста» з населенням 100 тис осіб, серед яких 70% – працевлаштовано; безробіття немає. Якщо доступна інформація про текучість кадрів:

з кожної тисячі працюючих на заводі P_1 щорічно звільняється 7 чол. і працевлаштовуються на два інших заводи 4 на завод P_2 та 3 – на P_3 ;

з кожної тисячі працюючих на заводі P_2 щорічно звільняється 15 чол. і працевлаштовуються на два інших заводи 3 на завод P_1 та 12 — на P_3 ;

з кожної тисячі працюючих на заводі P_3 щорічно звільняється 3 чол. і працевлаштовуються на два інших заводи 2 на завод P_1 та 1 — на P_2 .

36 Розділ 2. Приклади побудови лінійних оптимізаційних моделей

Запишемо сформульовані словесно умови задачі у вигляді математичних формул. Позначимо через x_1 , x_2 , x_3 кількість працюючих на «закритих» військових заводах P_1 , P_2 , P_3 відповідно. Загальна кількість працюючих складає за умовою 70% або:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 70000. \quad (2.9.1)$$

Запишемо математично задані умови. З кожної тисячі працюючих на заводі P_1 щорічно звільняється 7 чол. і працевлаштовуються на цей завод 5 чол.: 2 з заводу P_2 та 3 – із P_3 . Отримаємо рівняння балансу (скільки звільнилося, стільки ж і прийшло):

$$7 \frac{x_1}{1000} = 4 \frac{x_2}{1000} + 3 \frac{x_3}{1000}. \quad (2.9.2)$$

З кожної тисячі працюючих на заводі P_2 щорічно звільняється 15 чол. і працевлаштовуються на цей завод 5 чол.: 4 з заводу P_1 та 1 – із P_3 . Отримаємо рівняння балансу (скільки звільнилося, стільки ж і прийшло):

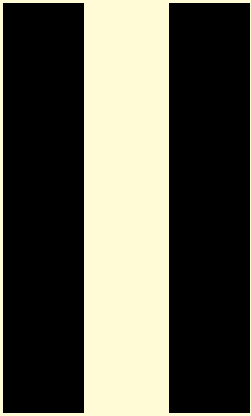
$$15 \frac{x_2}{1000} = 4 \frac{x_1}{1000} + \frac{x_3}{1000}. \quad (2.9.3)$$

Записуючи аналогічні умови для звільнених з третього заводу, отримаємо:

$$3 \frac{x_3}{1000} = 3 \frac{x_1}{1000} + 12 \frac{x_2}{1000}. \quad (2.9.4)$$

Виникає наступна задача:

обрати такі невід'ємні, цілочисленні значення змінних x_1 , x_2 , x_3 , які задовольняють лінійним рівнянням (2.9.1–2.9.4).



Індивідуальні завдання

3	Завдання на складання математичних моделей	39
	Рекомендована література	

3

Завдання на складання математичних моделей

1. Для виготовлення трьох видів виробів A , B та C використовується токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання наведено в таблиці. У ній же зазначено загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного устаткування, і навіть прибуток від одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Витрати часу на обробку одного виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Потрібно визначити, скільки виробів та якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель завдання.

2. Продукцією міського молочного заводу є молоко, кефір та сметана, що розфасовані у пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру та сметани потрібно відповідно 1010, 1010 та 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока та кефіру становлять 0,18 та 0,19 машино-годин. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва цільномолочної продукції завод може використовувати 136 000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани — протягом 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру та сметани відповідно дорівнює 30, 22 та 136 гр. од. Завод повинен щодня виробляти щонайменше 100 т молока, розфасованого у пляшки. На виробництво іншої продукції немає жодних обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію та в якій кількості слід щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальним. Скласти математичну модель завдання.

3. На швейній фабриці тканина може бути розкроєна декількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при j -м варіанті розкрою ($j = 1, \dots, n$) 100 м^2 тканини виготовляється b_{ij} деталей i -го виду ($i = 1, \dots, m$), а величина відходів при даному варіанті розкрою дорівнює $c_j \text{ м}^2$. Знаючи, що деталей i -го виду слід виготовляти B_i штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб була отримана необхідна кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель завдання.

4. У трьох пунктах відправлення зосереджений однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 420, 380 та 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти у три пункти призначення у кількостях, відповідно рівних 260, 520 та 420 т. Вартість перевезень 1 т вантажу з кожного пункту відправлення в кожен пункт призначення є відомими величинами і задається матрицею:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивезення наявного в пунктах відправлення та завезення необхідного у пунктах призначення вантажу за мінімальної загальної вартості перевезень.

5. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A , B та C використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі даного виду наведено у таблиці. У ній же зазначено загальну кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведено прибуток від реалізації 1 т карамелі цього виду.

Вид сировини	Норми витрати			Загальна кількість сировини (т.)
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Цукровий пісок	0.8	0.5	0.6	800
Патока	0.4	0.4	0.3	600
Фруктове пюре	-	0.1	0.1	120
Прибуток від 1 т. продукції (гр. од.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який би забезпечив максимальний прибуток від її реалізації.

6. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня має отримати щонайменше 60 од. поживної речовини *A*, щонайменше 50 од. речовини *B*, та не менше 12 од. речовини *C*. Зазначені поживні речовини містять три види корму. Вміст одиниць поживних речовин в 1 кг кожного з видів корму наведено в таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг корму виду		
	I	II	III
<i>A</i>	1	3	4
<i>B</i>	2	4	2
<i>C</i>	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин за мінімальних грошових витрат, якщо ціна 1 кг корму I виду становить 9 гр. од., корми II виду — 12 гр. од. і корми III виду — 10 гр. од.

7. У m пунктах можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деяку однорідну продукцію. Ця продукція надходить у n пунктів її споживання, причому у j -му пункті ($j = \overline{1, n}$) потреби в продукції рівні a_j одиницям. Витрати, пов'язані з доставкою одиниці продукції з i -го пункту відправлення в j -й пункт споживання, становлять c_{ij} гр. од. Відомо, що у i -му ($i = \overline{1, m}$) пункті виготовлення продукції максимальний обсяг її виробництва не може перевищувати b_i одиниць ($i = \overline{1, m}$), а витрати, пов'язані з виготовленням одиниці виробленої продукції, становлять d_i гр. од. ($i = \overline{1, m}$). Визначити таке розміщення

підприємств, у якому забезпечуються потреби у продукції кожному з пунктів її споживання при найменших загальних витратах, що пов'язані з виробництвом і доставкою продукції.

8. Для виробництва n видів виробів підприємство використовує m груп взаємозамінного обладнання. Виробів i -го виду необхідно виготовити B_i одиниць ($i = \overline{1, n}$), причому j -та група обладнання може бути зайнята виготовленням виробів не більше ніж a_j годин ($j = \overline{1, m}$). Час виготовлення одного виробу i -го виду на j -й групі обладнання дорівнює a_{ij} годинам, а ціна виробництва дорівнює c_{ij} гр. од. Визначити, скільки виробів даного виду з використанням кожної з груп обладнання слід виготовити, щоб зробити потрібну кількість виробів кожного виду за найменшої загальної вартості їх виготовлення.

9. При вирощуванні деякої культури (або групи споріднених культур) може бути використаний i -й вид добрив у кількості, не більшій ніж b_i ($i = \overline{1, m}$) кг. Вся посівна площа містить n ґрунтово-кліматичних зон, причому площа j -ї зони дорівнює d_j ($j = \overline{1, n}$) га. Внесення на кожен гектар площі j -ї зони 1 кг добрив i -го виду збільшує середню врожайність на c_{ij} центнерів. Потрібно розподілити виділений фонд добрив між посівними зонами так щоб сумарний приріст врожайності культур за рахунок внесення добрив був максимальний.

10. Для виробництва чавунного лиття використовується n різних вихідних шихтових матеріалів (чавун різних марок, сталевий брухт, ферофосфор і др.) Хімічний склад чавунного лиття визначається вмістом у ньому m хімічних елементів (кремнію, марганцю, фосфору та ін.) Готовий чавун повинен мати суворо визначений хімічний склад, який задається величинами H_j , що представляють собою частки (у відсотках) j -го ($j = \overline{1, m}$) хімічного елемента у готовому продукті. При цьому відомі величини: h_{ij} – зміст (у відсотках) j -го хімічного елемента в i -му ($i = \overline{1, n}$) вихідному шихтовому матеріалі, c_i – ціна одиниці кожного i -го шихтового матеріалу. Визначити склад шихти, що забезпечує отримання лиття заданої якості за мінімальної загальної вартості використовуваних шихтових матеріалів.

11. Для виробництва столів та шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу та загальна кількість наявних ресурсів кожного виду наведено у наступній таблиці:

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина (м ³):			
I виду	0,2	0,1	40
II виду	0,1	0,3	60
Трудовісткість (люд-год.)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (гр. од.)	6	8	

Визначити, скільки столів та шаф фабриці слід виготовляти, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

12. Для виробництва двох видів виробів використовується токарне, фрезерне та шліфувальне обладнання. Норми витрат часу кожного з типів устаткування на один виріб даного виду наведено у таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від одного виробу.

Тип обладнання	Витрати часу (верстат-год.) на обробку одного виробу		Загальний фонд корисного робочого часу обладнання (год.)
	<i>A</i>	<i>B</i>	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток від реалізації одного виробу (гр. од.)	14	18	

Знайти план випуску виробів, який би забезпечував максимальний прибуток від реалізації.

13. На меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізати заготівлі трьох видів у кількостях, відповідно рівних 24, 31 та 18 шт. Кожен аркуш фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість одержуваних заготовок при даному способі розкрою наведено у таблиці. У ній же зазначена кількість відходів, що утворюються при даному способі розкрою одного листа фанери.

Вид заготівлі	Кількість заготовок (шт.) при розкрої за способом	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Кількість відходів (см ²)	12	16

Визначити, скільки листів фанери і яким способом слід розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

14. На звірофермі можуть вирощуватися чорно-бурі лисиці та песці. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щодня отримувати лисиці та песці, наведено у таблиці. У ній же зазначено загальну кількість корму кожного виду, яка може бути використана звірофермою, та прибуток від реалізації однієї шкірки лисиці та песця.

Вид корму	Кількість одиниць корму, які щодня повинні отримувати		Загальна кількість корму
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкіри (гр. од.)	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців слід вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

15. Для виготовлення різних виробів A , B та C підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A , B і C , а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведено у таблиці.

Вид сировини	Норми затрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кількість сировини
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Вартість одного виробу (гр. од.)	9	10	16	

Вироби A , B та C можуть вироблятися у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежено виділеною підприємству сировиною кожного виду. Скласти план виробництва виробів, у якому загальна вартість усієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

16. На швейній фабриці для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрати тканин всіх артикулів на пошиття одного виробу наведено у таблиці. У ній же вказані наявна у розпорядженні фабрики загальна кількість тканин кожного артикула та ціна одного виробу даного виду. Визначити, скільки виробів кожного виду має зробити фабрика, щоб вартість виготовленої продукції була максимальною.

Артикул тканини	Норма витрати тканини (м) на один виріб виду				Загальна кількість тканин (м)
	1	2	3	4	
I	1	—	2	1	180
II	—	1	3	2	210
III	4	2	—	4	800
Ціна одного виробу (гр. од.)	9	6	4	7	

17. Підприємство випускає чотири види продукції та використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне та шліфувальне. Витрати часу на виготовлення одиниці виробленої продукції кожного з типів обладнання наведено в таблиці. В ній же зазначені загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від одного виробу цього виду. Визначити такий обсяг випуску шкіряних виробів, у якому загальний прибуток від реалізації є максимальною.

Тип обладнання	Витрати часу (верстат-год.) на одиницю продукції виду				Загальний фонд робочого часу (верстат-год.)
	1	2	3	4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	—	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	—	340
Прибуток від реалізації одиниці продукції (гр. од.)	8	3	2	1	

18. Для перевезень вантажу на трьох лініях можуть бути використані судна трьох типів. Продуктивність судів під час використання їх у різних лініях характеризується даними, наведеними у таблиці. У ній же зазначено загальний час, протягом якого судна кожного типу перебувають у експлуатації, і мінімально необхідні обсяги перевезень кожної з ліній. Визначити, які судна, на якій лінії та протягом якого часу слід використовувати, щоб забезпечити максимальне завантаження судів з урахуванням можливого часу їх експлуатації.

Тип судна	Продуктивність суден (млн. тонно-міль на добу) на лінії			Загальний час експлуатації суден (доб.)
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданий обсяг перевезень (млн. тонно-міль)	3000	5400	3300	

19. На ткацькій фабриці для виготовлення трьох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа та барвники. У таблиці вказані продуктивність верстатів кожного типу, норми витрати пряжі та барвників, ціна 1 м тканини даного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів кожного типу, що є у розпорядженні фабрики, фонди пряжі та барвників та обмеження на можливий випуск тканин даного артикула. Скласти такий план виготовлення тканин, згідно з яким буде вироблена можлива кількість тканин даного артикулу, а загальна вартість всіх тканин максимальна.

Ресурси	Норми витрат на 1 м тканини артикулу			Загальна кількість ресурсів
	1	2	3	
Продуктивність верстатів (станко-год.):				
I типа	0.02	–	0.04	200
II типа	0.04	0.03	0.01	500
Пряжа (кг)	1.0	1.5	2.0	15000
Барвники (кг)	0.03	0.02	0.025	450
Ціна 1 м тканини (гр. од.)	5	8	8	–
Випуск тканини (м):				
мінімальний	1000	2000	2500	–
максимальний	2000	9000	4000	–

20. Машинобудівне підприємство для виготовлення чотирьох видів продукції використовує токарне, фрезерне, свердлильне, розточувальне та

шліфувальне обладнання, а також комплектуючі вироби. Крім того, збирання виробів вимагає виконання певних складально-налагоджувальних робіт. Норми витрат всіх видів ресурсів виготовлення кожного з виробів наведено у таблиці. У цій же таблиці зазначені готівковий фонд кожного з ресурсів, прибуток від одиниці продукції даного виду, а також обмеження на можливий випуск продукції 2-го і 3-го видів. Знайти план випуску продукції, за яким прибуток від її реалізації є максимальним.

Ресурси	Норми витрат на виготовлення одного виробу				Загальний об'єм ресурсів
	1	2	3	4	
Продуктивність обладнання (люд.-год.):					
токарного	550	–	620	–	64270
фрезерного	40	30	20	20	4800
свердлувального	86	110	150	52	22360
розточувального	160	92	158	128	26240
шліфувального	–	158	30	50	7900
Комплектуючі вироби (шт.)	3	4	3	3	520
Складально-налагоджувальні роботи (людина-ч.)	4.5	4.5	4.5	4.5	720
Прибуток від реалізації одного виробу (гр. од.)	315	278	573	370	–
Випуск (шт.):					
мінімальний	–	40	–	–	–
максимальний	–	–	120	–	–

21. Для обігріву приміщень використовують чотири агрегати, кожен з яких може працювати на будь-якому з п'яти сортів палива, що є в кількостях 90, 110, 70, 80 та 150т. Потреба у паливі кожного з агрегатів відповідно дорівнює 80, 120, 140 та 160т. Теплотворна здатність i -го сорту палива при використанні його на j -м агрегаті задається матрицею:

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий розподіл палива між агрегатами, при якому виходить максимальна кількість теплоти від використання всього палива.

22. Цегла, що виготовляється на п'яти цегельних заводах, надходить на шість об'єктів, що будуються. Щоденне виробництво цегли та потреба в ньому вказані в таблиці. У ній же вказано вартість перевезення 1000 шт. цеглини з кожного із заводів до кожного з об'єктів.

Цегляний завод	Ціна перевезення 1 тис. шт. цегли до об'єкту, що будується						Виробництво цегли (тис. шт)
	1	2	3	4	5	6	
1	8	7	5	10	12	8	240
2	13	8	10	7	6	13	360
3	12	4	11	9	10	11	180
4	14	6	12	13	7	14	120
5	9	12	14	15	8	13	150
Потреба в цеглі (тис. шт.)	230	220	130	170	190	110	

Скласти план перевезень, згідно з яким забезпечуються потреби в цеглі на кожному з об'єктів, що будуються, при мінімальній загальній вартості перевезень.

23. Для підтримки нормальної життєдіяльності людині щодня необхідно споживати щонайменше 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Кількість поживних речовин, що містяться в 1 кг кожного виду споживаних продуктів, а також ціна 1 кг кожного з цих продуктів наведені в таблиці нижче. Скласти денний раціон, що містить не менше мінімальної добової норми потреби людини у необхідних поживних речовинах при мінімальній загальній вартості споживаних продуктів.

Поживні речовини	Зміст (г) поживних речовин в 1 кг продуктів						
	м'ясо	риба	молоко	масло	сир	крупа	картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	865	310	30	2
Вуглеводи	–	–	50	6	20	650	200
Мінеральні солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна 1 кг продуктів (гр. од.)	1,8	1,0	0,28	34	2,9	0,5	0,1

24. Для виробництва трьох видів продукції підприємство використовує два типи технологічного обладнання та два види сировини. Норми витрат сировини та часу на виготовлення одного виробу кожного виду наведено у таблиці. У ній же зазначені загальний фонд робочого часу кожної з груп технологічного устаткування, обсяги наявної сировини кожного виду, а також вартість одного виробу цього виду та обмеження можливого випуску кожного з виробів.

Ресурси	Норми витрат на один виріб виду			Загальна кількість ресурсів
	1	2	3	
Продуктивність обладнання (нормо-год.):				
I типу	2	—	4	200
II типу	4	3	1	500
Сировина (кг):				
1-го виду	10	15	20	1495
2-го виду	30	20	25	4500
Ціна одного виробу (гр. од.)	10	15	20	—
Випуск (шт.):				
мінімальний	10	20	25	—
максимальний	20	40	100	—

Скласти такий план виробництва продукції, за яким буде виготовлено необхідну кількість виробів кожного виду, а загальна вартість усієї продукції максимальна.

25. Під час виробництва чотирьох видів кабелю виконується п'ять груп технологічних операцій. Норми витрат на 1 км кабелю цього виду на кожній з груп операцій, прибуток від реалізації 1 км кожного виду кабелю, і навіть загальний фонд робочого часу, протягом якого можуть виконуватися ці операції, зазначені у таблиці.

Технологічна операція	Норми витрат часу (год.) на обробку 1 км кабелю виду				Загальний фонд робочого часу (год.)
	1	2	3	4	
Волочіння	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Накладання ізоляцій	1,0	0,4	0,8	0,7	5 600
Скручування елементів в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Покрити свинцем	30	—	1,8	2,4	3 600
Випробування та контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4 200
Прибуток від реалізації 1 км кабелю (гр. од.)	1,2	0,8	1,0	1,3	

Визначити такий план випуску кабелю, у якому загальний прибуток від продукції, що виготовляється, є максимальним.

26. Для виробництва трьох видів виробів A , B та C використовується три різних види сировини. Кожен із видів сировини може бути використаний у кількості, відповідно не більшій за 180, 210 та 244 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного виду наведено у таблиці. Визначити план випуску продукції, за яким забезпечується її максимальна вартість.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю		
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (гр. од.)	10	14	12

27. Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує три типи ресурсів. Норми витрат ресурсів кожного типу на одиницю продукції, їх наявність у розпорядженні підприємства, а також ціна одиниці продукції наведено в таблиці. Потрібно визначити план випуску продукції, при якому забезпечується її максимальна вартість.

Тип ресурсу	Норма витрати ресурсів на одиницю продукції				Наявність ресурсу
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Прибуток від реалізації 1 км кабелю (гр. од.)	9	6	4	7	

28. Для виробництва продукції трьох видів *A*, *B* та *C* використовується три різні види сировини. Кожен із видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно не більшому, ніж 180, 210 та 236 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного виду наведено у таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	виріб <i>A</i>	виріб <i>B</i>	виріб <i>C</i>
I	4	4	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (гр. од.)	10	14	12

Потрібно визначити план випуску продукції, що забезпечує максимальний випуск у вартісному виразі.

29. З чотирьох видів сировини необхідно скласти суміш, в склад якої має входити 26 од. хімічної речовини A , 30 од. — речовини B і не менше 24 од. — речовини C . Кількість одиниць хімічної речовини, що міститься в 1 кг сировини кожного виду, зазначено у таблиці. У ній же наведена ціна 1 кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість одиниць речовини, що міститься в 1 кг сировини виду			
	1	2	3	4
A	1	1	—	4
B	2	—	3	5
C	1	2	4	6
Ціна 1 кг сировини (гр. од.)	5	6	7	4

Скласти суміш, що містить не менше потрібної кількості речовин даного виду і має мінімальну вартість.

30. Сталеві прутки довжиною 110 см необхідно розрізати на заготовки довжиною 45, 35 і 50 см. Необхідна кількість заготовок даного виду становить відповідно 40, 30 та 20 шт. Можливі варіанти розрізу та величина відходів при кожному з них наведені у наступній таблиці.

Довжина заготовки (см)	Варіант розрізу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	—	—	—
35	—	1	—	3	1	—
50	—	—	1	—	1	2
Величина відходів (см)	20	30	15	5	25	10

Визначити, скільки лозин по кожному з можливих варіантів слід розрізати, щоб отримати не меншу кількість заготовок кожного виду при мінімальних відходах.

31. З відходів виробництва підприємство може організувати випуск чотирьох видів продукції. Для цього воно планує використовувати два

типи обладнання, що взаємозамінюється. Кількість виробів кожного виду, яке може бути виготовлено на відповідному устаткуванні протягом 1 год, а також витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведені у таблиці нижче.

Тип обладнання	Кількість виробів, що виготовляються протягом 1 години, виду				Витрати (грн.) на виробництво протягом 1 години виробу виду			
	1	2	3	4	1	2	3	4
I	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
II	6	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Обладнання I типу підприємство може використовувати не більше 80 год, а обладнання II типу – не більше 60 год. Враховуючи, що підприємству слід виготовити виробів кожного виду відповідно не менше 240,160,150 та 220 од., визначити, за який час і на якому обладнанні слід виготовляти кожен із виробів так, щоб отримати щонайменше потрібної кількості виробів за мінімальних витрат на їх виробництво.

32. На меблевій фабриці виготовляється п'ять видів продукції: столи, шафи, дивани-ліжка, крісла-ліжка та тахти. Норми витрат праці, а також деревини та тканини на виробництво одиниці продукції даного виду наведені в таблиці нижче.

У цій же таблиці зазначено прибуток від одного виробу кожного виду, наведено загальну кількість ресурсів даного виду, що є у розпорядженні фабрики, а також зазначено (на основі вивчення попиту), в межах яких обсягів може виготовлятися кожен вид продукції. Визначити план виробництва продукції меблевою фабрикою, згідно з яким прибуток від її реалізації є максимальним.

Ресурси	Норма витрати ресурсу на одиницю продукції					Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	диван-ліжко	крісло-ліжко	тахта	
Трудовитрати (людина-ч.)	4	8	12	9	10	3456
Деревина м ³	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Тканина (м)	—	—	6	4	5	2000
Прибуток від реалізації одного виробу(грн.)	8	10	16	14	12	—
Випуск (шт.): мінімальний	120	90	20	40	30	—
максимальний	480	560	180	160	120	—

33. На молочному комбінаті для виробництва двох видів вершкового морозива та двох видів пломбіру потрібно молоко натуральне, молоко сухе, молоко сухе знежирене, масло вершкове, цукор, молоко згущене, молоко згущене знежирене, а також використовується відповідне обладнання для розфасовки та пакування морозива. Норми витрат зазначених ресурсів виробництва 1 т морозива наведено у таблиці (дивись нижче).

У цій же таблиці зазначено прибуток від реалізації 1 т морозива кожного виду, наведено загальну кількість ресурсів даного виду, що є у розпорядженні молочного комбінату, а також вказано мінімально можливий випуск вершкового морозива II-го виду та максимально можливий — пломбіру I-го виду (ці межі визначені на основі попиту на морозиво). Визначити план виробництва морозива молочним комбінатом, який би забезпечив максимальний прибуток від його реалізації.

Ресурси (кг)	Норма витрат ресурсу на 1 т морозива				Загальна кількість ресурсів
	вершкове I виду	вершкове II виду	пломбір I виду	пломбір II виду	
Молоко натуральне	550	—	620	—	64 100
Молоко сухе	40	30	20	20	4800
Молоко сухе знежирене	30	40	30	30	55200
Масло вершкове	86	110	150	52	22360
Цукор	160	92	158	128	26240
Молоко згущене	—	—	—	50	800
Молоко згущене знежирене	—	158	30	50	7910
Продуктивність обладнання (машино-год.)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибуток від реалізації 1 т морозива (гр.од.)	315	278	573	370	—
Випуск (т.): мінімальний	—	40	—	—	—
максимальний	—	—	120	—	—

34. Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують три види сировини. Потреби у сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 120, 50, 190 та 110 од. Сировина зосереджена у трьох місцях її отримання, а запаси відповідно дорівнюють 160, 140, 170 од. На кожне з підприємств сировина може завозитись з будь-якого пункту її отримання. Тарифи перевезень є відомими величинами та задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень, за яким загальна вартість перевезень є мінімальною.

35. На трьох складах оптової бази зосереджено однорідний вантаж у кількостях 180, 60 та 80 од. Цей вантаж необхідно перевезти до чотирьох магазинів. Кожен із магазинів повинен отримати відповідно 120, 40, 60 та 80 од. вантажу. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного зі складів у всі магазини задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень, за яким загальна вартість перевезень є мінімальною.

36. Виробниче об'єднання має у своєму складі три філії, які виробляють однорідну продукцію відповідно у кількостях, рівних 50, 30 та 10 од. Цю продукцію отримують чотири споживачі, розташовані у різних місцях. Їхні потреби відповідно рівні 30, 30, 10 і 20 од. Тарифи перевезень одиниці продукції від кожної з філій відповідним споживачам задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план прикріплення одержувачів продукції до її постачальників, за яким загальна вартість перевезень є мінімальною.

37. Три підприємства даного економічного району можуть виробляти деяку однорідну продукцію у кількостях, відповідно рівних 180, 350 та 20 од. Ця продукція має бути поставлена п'ятьом споживачам у кількостях, відповідно рівних 110, 90, 120, 80 та 150 од. Витрати, пов'язані з виробництвом та доставкою одиниці продукції, задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план прикріплення споживачів до постачальників, у якому загальні витрати є мінімальними.

38. На три бази A_1, A_2, A_3 надійшов однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 140, 180 та 160 од. Цей вантаж потрібно перевезти в п'ять пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 відповідно в кількостях 60, 70, 120, 130 та 100 од. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного з пунктів відправлення до відповідних пунктів призначення вказані в наступній таблиці:

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Знайти план перевезень цієї транспортної задачі.

39. Для будівництва чотирьох доріг використовується гравій із трьох кар'єрів. Запаси гравію у кожному з кар'єрів відповідно дорівнюють 120, 280 та 160 у. од. Потреби у гравію для будівництва кожної з доріг відповідно дорівнюють 130, 220, 60 та 70 у. од. Відомі також тарифи перевезень 1 у. од. гравію з кожного з кар'єрів до кожної з доріг, що будуються, які задаються матрицею:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень гравію, при якому потреби в ньому кожної з доріг, що будуються, були б задоволені при найменшій загальній вартості перевезень.

40. Для будівництва чотирьох об'єктів використовується цегла, що виготовляється на трьох заводах. Щодня кожен із заводів може виготовляти 100, 150 та 50 од. цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному

з об'єктів, що будуються відповідно рівні 75, 80, 60 і 85 од. Відомі також тарифи перевезень 1 од. цегли з кожного із заводів до кожного з об'єктів, що будуються, які задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень цегли до об'єктів, що будуються, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

41. На трьох хлібокомбінатах щодня виробляється 110, 190 та 90 т борошна. Це борошно споживається чотирма хлібозаводами, щоденні потреби яких рівні відповідно 80, 60, 170 і 80 т. Тарифи перевезень 1 т борошна з хлібокомбінатів до кожного з хлібозаводів задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план доставки борошна, за яким загальна вартість перевезень є мінімальною.

42. У трьох сховищах пального щодня зберігається 175, 125 та 140 т бензину. Цей бензин щодня отримують чотири заправні станції в кількостях, рівних відповідно 180, 110, 60 і 40 т. Вартість перевезення 1 т. бензину із сховищ до заправних станцій задана матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень бензину, за яким загальна вартість перевезень є мінімальною.

43. На трьох складах оптової бази зосереджено борошно в кількостях, рівних відповідно 140, 360 і 180 т. Це борошно необхідно завезти до п'яти магазинів, кожен з яких повинен отримати відповідно 90, 120, 230, 180 і 60 т. З першого складу муку неможливо перевозити в 2-й і 5-й магазини, а з 2-го складу в 3-й магазин має бути завезено 100 т борошна. Знаючи тарифи перевезення 1 т борошна з кожного зі складів до відповідних магазинів, що визначаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & - & 8 & 2 & - \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

скласти план перевезень, який забезпечує мінімальну загальну вартість цих перевезень.

44. На трьох залізничних станціях A_1 , A_2 , A_3 зібралось 120, 110 і 130 незавантажених вагонів. Ці вагони необхідно перегнати на залізничні станції B_1 , B_2 , B_3 , B_4 і B_5 . На кожній із цих станцій потреба у вагонах відповідно дорівнює 80, 60, 70, 100 і 50. Враховуючи, що з залізничної станції A_2 неможливо перегнати вагони на станції B_2 та B_4 і, знаючи, що тарифи перегонки одного вагона визначаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & - & 5 & - & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

скласти такий план перегону вагонів, щоб загальна вартість була мінімальною.

45. На текстильному підприємстві є три типи ткацьких верстатів. На верстатах кожного з типів можуть вироблятися чотири види тканин: міткаль, бязь, ситець та сатин. Продуктивність кожного верстата та собівартість тканин наведені у таблиці.

Тип верстата	Продуктивність верстата (м/год) при виробленні				Собівартість (гр од.) тканини при виробленні 1 м/год			
	міткалі	бязі	ситця	сатина	міткалі	бязі	ситця	сатина
I	24	30	18	42	2	1	3	1
II	12	15	9	21	3	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

Враховуючи, що фонд робочого часу кожної з груп ткацьких верстатів відповідно дорівнює 90, 220 і 180 верстат-годин, скласти такий план їх завантаження, при якому загальна собівартість тканин, що випускаються у кількості 1200 м міткалі, 900 м бязі, 1800 м ситця і 840 м сатину є мінімальною.

46. На п'яти токарних верстатах різних типів можна виконувати п'ять операцій обробки деталі. При цьому за кожним з верстатів може бути закріплена лише одна операція і та сама операція може виконуватися тільки одним верстатом. Знаючи час виконання кожної з операцій на кожному станку, яке задається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

скласти такий розподіл операцій між верстатами, при якому сумарні витрати часу на обробку деталі є мінімальними.

47. Є три земельні ділянки на яких можуть бути засіяні кукурудза, пшениця, ячмінь та просо. Площа кожної з ділянок відповідно дорівнює 600, 180 та 220 га. З урахуванням наявності насіння кукурудзою, пшеницею, ячменем та просом слід відповідно засіяти 290, 180, 110 та 420 га. Урожайність кожної з культур для кожної з ділянок різна і задається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній ділянці слід засіяти так, щоб загальний збір зерна був максимальним.

48. На кожній із чотирьох філій виробничого об'єднання можуть виготовлятися вироби чотирьох видів. Враховуючи необхідність поглиблення спеціалізації, на філіях вирішено зосередити випуск лише по одному виду виробів. Собівартість кожного з виробів на кожному з філій різна і визначається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий розподіл випуску продукції між філіями, щоб загальна собівартість продукції була мінімальною.

49. М'ясокомбінат має у своєму складі чотири заводи, на кожному з яких може виготовлятися три види ковбасних виробів. Потужності кожного із заводів відповідно дорівнюють 320, 280, 270 і 350 т/доб. Щоденні потреби у ковбасних виробах кожного виду також відомі і відповідно дорівнюють 450, 370 та 400 т. Знаючи собівартість 1 т кожного виду ковбасних виробів на кожному заводі, які визначаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий розподіл випуску ковбасних виробів між заводами, при якому собівартість продукції, що виготовляється, є мінімальною.

50. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове обладнання. Для його розміщення виділено 193 м^2 площі. На придбання обладнання підприємство може витратити 10 000 грош. од., при цьому воно може купити устаткування двох видів. Комплект обладнання I-го виду коштує 1000 грош. од., а II-го виду – 3000 грош. од. Придбання одного комплекту обладнання I-го виду дозволяє збільшити випуск продукції за зміну на 2 од., а одного комплекту обладнання II-го виду – на 4 од. Знаючи, що для встановлення одного комплекту обладнання I-го виду потрібно 2 м^2 площі, а обладнання II-го виду – 1 м^2 площі, визначити такий набір додаткового обладнання, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

51. Для виконання робіт можуть бути використані n механізмів. Продуктивність i -го механізму ($i = \overline{1, n}$) при виконанні j -ї роботи ($j = \overline{1, n}$) дорівнює c_{ij} . Припускаючи, що кожен механізм може бути використаний тільки на одній роботі та кожна робота може виконуватися тільки одним механізмом, визначити закріплення механізмів за роботами, що забезпечує максимальну продуктивність. Побудувати математичну модель завдання.

52. Міністерству необхідно скласти план розвитку кожного з m підприємств, що випускають однорідну продукцію. Число можливих варіантів розвитку i -го підприємства різне і дорівнює n_i . Реалізація j -го варіанта розвитку i -го підприємства ($j = 1, \dots, n_i$) вимагає капітальних витрат, рівних K_{ij} , і забезпечує випуск продукції обсягом b_{ij} одиниць. При цьому економічний ефект від капітальних вкладень на розвиток i -го підприємства за j -м варіантом дорівнює c_{ij} . Враховуючи, що необхідно випустити продукції в кількості B одиниць і що загальна величина капіталовкладень обмежена і дорівнює K , скласти такий план розвитку підприємств, при якому економічний ефект від реалізації обраних варіантів розвитку підприємств є максимальним.

53. В аеропорту для перевезення пасажирів за n маршрутами може бути використано m типів літаків. Місткість літака i -го типу дорівнює a_i людей, а кількість пасажирів, що перевозяться по j -му маршруту за сезон, становить b_j людей. Витрати, пов'язані з використанням літака

i -го типу на j -м маршруті, складають c_{ij} гр. од. Визначити, скільки літаків даного типу та на якому з маршрутів слід використовувати, щоб задовольнити потреби у перевезеннях за найменших загальних витрат.

54. У взуттєвому виробничому об'єднанні проводиться розкрій m різних партій матеріалів, причому кожна з партій складається з b_i одиниць матеріалу, що має однакову форму (наприклад, пластини) і розмір. З матеріалів всіх партій потрібно викроїти максимальну кількість комплектів деталей взуття, у кожен з яких входить d_j ($j = 1, \dots, n$) деталей j -го виду, якщо при розкрої одиниці матеріалу i -ї партії k -му варіанту ($k = 1, \dots, K$) виходить a_{kj} деталей j -го виду.

55. Маємо n міст, відстань між будь-якими двома з яких дорівнює c_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$). Знайти маршрут, що має мінімальну довжину, що починається і закінчується в тому самому місті і включає по одному разу всі інші міста.

56. Для виконання чотирьох видів землерийних робіт можна використовувати екскаватори чотирьох типів. Продуктивність екскаватора i -го типу при виконанні j -ї роботи задається матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,9 \\ 0,7 & 0,8 & 0,9 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,7 & 0,9 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що на кожній з робіт може бути зайнятий лише один екскаватор і всі екскаватори повинні бути задіяні, знайти такий розподіл екскаваторів між роботами, який забезпечує максимальну продуктивність.

57. Пароплав може бути використаний для перевезення 11 найменувань вантажу, маса, обсяг та ціна одиниці кожного з яких наведені в таблиці нижче. На пароплав може бути завантажено не більше 800 т вантажу загальним обсягом, що не перевищує 600 м^3 . Визначити скільки одиниць кожного вантажу слід помістити на пароплав так, щоб загальна вартість розміщеного вантажу була максимальною.

Параметри одиниці вантаж	Номер вантажу										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Маса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Об'єм (м ³)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Ціна (гр. од.)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

58. З листового прокату потрібно викроїти заготовки чотирьох видів. Один лист довжиною 184 см можна розрізати на заготовки довжиною 45, 50, 65 і 85 см. Усього заготовок кожного виду необхідно відповідно 90, 96, 88 та 56 шт. Способи розрізу одного листа на заготівлі та величина відходів при кожному способі наведені в наступній таблиці:

Довжина заготовки (см)	Кількість заготовок, що викроюються з одного листа при розрізі способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	—	—	—	—	—
50	—	1	—	—	2	—	1	1	3	2	1	—	2
65	—	—	1	—	—	2	1	—	—	1	2	1	—
85	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	1	—
Величина відходів (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Визначити, скільки листів по кожному з способів слід розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок даного виду при мінімальних загальних відходах.

59. Підприємство має випустити два види продукції A та B для виготовлення яких використовується три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведено у таблиці. У ній же зазначені запаси сировини кожного виду, яка може бути використана на виробництво одиниці продукції даного виду. Відомо, що ціна одиниці виробленої продукції може змінюватися для виробу A від 2 до 12 гр. од, виробу B — від 13 до 3 гр. од., причому ці зміни визначаються співвідношеннями $c_1 = 2 + t$, $c_2 = 13 - t$, де $0 \leq t \leq 10$. Для кожного з можливих значень ціни одиниці продукції кожного з видів знайти такий план їх виробництва, при якому загальна вартість продукції є максимальною.

Вид сировини	Норми витрати сировини на виробництво одиниці продукції		Запаси сировини
	A	B	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

60. У задачі буріння нафтових свердловин на двох нафтоносних ділянках необхідно розмістити чотири різні свердловини. Витрати підготовки до буріння на кожній ділянці та витрати на буріння свердловин j на ділянках i ($i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$) наведені нижче. Потрібно визначити порядок розміщення свердловин на ділянках, у якому сумарні витрати мінімальні.

Ділянка	Витрати на буріння свердловин				Витрати на підготовку до буріння
	1	2	3	4	
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Побудуйте модель цілісного програмування, яка відповідає умовам цієї задачі.

61. Для виробництва n видів продукції, збут якої забезпечений, підприємство використовує m видів сировини. Норми витрати сировини i -го виду на виробництво одиниці продукції j -го виду дорівнюють a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). Відомий прибуток від реалізації одиниці продукції j -го виду, що дорівнює c_j ($j = 1, \dots, n$). Підприємство може використовувати не більше ніж $b_i + d_i \cdot t$ одиниць сировини i -го виду ($i = \overline{1, m}$), де t – деякий параметр, значення якого належать проміжку (α, β) . Для кожного значення t визначити план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації є максимальним.

62. У виробничому об'єднанні n видів продукції можуть вироблятися m технологічними способами. Потреба продукції кожного виду визначається числами b_i ($i = \overline{1, n}$). Кількість i -ї продукції, що виготовляється j -м технологічним способом в одиницю часу, дорівнює $a_{ij} + c_{ij} \cdot t$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$), де t — певний параметр ($\alpha \leq t \leq \beta$). Для кожного значення параметра t визначити план виробництва продукції, згідно з яким необхідна кількість продукції кожного виду буде виготовлена за мінімальний час.

63. Підприємство для виготовлення різних виробів A , B та C використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведено у таблиці. У ній же вказана ціна виробу кожного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	A	B	C
I	18	15	12
II	6	4	8
III	5	3	3
Ціна одиниці продукції (гр. од.)	9	10	16

Вироби A , B та C можуть виконуватись у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений). Однак виробництво обмежено наявною у розпорядженні підприємства сировиною I-го виду в кількості 360 кг, II-го виду – у кількості 192 кг і III-го виду – в кількості 180 кг. Знайти план виробництва виробів, реалізація якого забезпечує максимальний випуск продукції у вартісному вираженні.

64. Для виробництва продукції трьох видів A , B та C необхідні три різні види сировини. Кожен із видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно не більшому ніж 180, 210 та 244 кг.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	виріб A	виріб B	виріб C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції (гр. од.)	10	14	12

Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції даного виду наведені у таблиці. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує максимальний випуск у вартісному розумінні.

65. Для виробництва трьох видів виробів підприємство використовує три види сировини. Норми витрати кожного виду сировини визначаються матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підприємство може використовувати сировини I-го виду не більше 20 од., II-го виду — не більше 42 од. III-го виду — не більше 36 од. Ціна одиниці продукції кожного виду лінійно залежить від деякого параметра t . Ця залежність відповідно має вигляд $2 + t$, $12 - t$, $6 + t$ ($0 \leq t \leq 10$).

Для кожного значення параметра t ($0 \leq t \leq 10$) знайти такий план випуску продукції, реалізація якого забезпечує максимальний випуск виробів у вартісному розумінні.

66. Для виробництва трьох видів виробів A , B та C підприємство використовує чотири види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведено у таблиці. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	A	B	C
I	2	3	—
II	—	4	6
III	5	5	2
IV	4	—	7
Прибуток від реалізації одного виробу (гр. од.)	25	28	27

Вироби A , B та C можуть вироблятися у будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але для їх виробництва підприємство може використовувати сировини I-го виду не більше 200 кг, II-го виду — не більше 120 кг, III-го виду — не більше 180 кг, IV-го виду — не більше 138 кг. Визначте план виробництва, у якому загальний прибуток підприємства від реалізації всієї продукції був би найбільшим.

67. Для виробництва двох видів виробів A та B підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен із виробів повинен пройти обробку на кожному з типів обладнання. Час обробки кожного з виробів на обладнанні даного типу наведено в таблиці. У ній же зазначені витрати, які пов'язані з виробництвом одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Витрати часу (год.) на обробку одного виробу	
	A	B
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Витрати на виготовлення одного виробу (гр. од.)	2	3

Обладнання I-го та III-го типів підприємство може використовувати не більше 26 та 39 год. При цьому, обладнання II-го типу доцільно використовувати не менше 4 год. Потрібно визначити скільки виробів кожного виду слід виготовити підприємству, щоб собівартість одного виробу була мінімальною.

68. Для виробництва n видів виробів підприємство використовує m типів взаємозамінного обладнання. Кожен із n видів виробів необхідно виготовити в кількості b_i одиниць ($i = \overline{1, n}$) відповідно, причому кожен із m типів обладнання може бути зайнятий виготовленням цих виробів не більше ніж a_j годин ($j = \overline{1, m}$) відповідно. Час виготовлення одного виробу i -го виду на j -му типі обладнання дорівнює k_{ij} годин, а витрати, які пов'язані з виробництвом одного виробу на даному типі обладнання, становлять c_{ij} гр. од. Визначити, скільки виробів кожного виду на кожному з типів обладнання слід зробити так, щоб собівартість одного виробу була мінімальною.

69. Взуттєве виробниче об'єднання для виготовлення n різних моделей взуття використовує m видів шкіртоварів. На виготовлення однієї пари взуття j -ї моделі ($j = 1, \dots, n$) потрібно a_{ij} м² шкіртоварів i -го виду ($i = 1, \dots, m$) а всього їх може бути використано b_i м². Величина виробничих фондів, що використовуються при виробництві однієї пари

взуття j -й моделі, дорівнює c_j гр. од., а прибуток від реалізації дорівнює d_j ден. од. Припускаючи, що об'єднання може випускати взуття різних моделей будь-яких співвідношеннях, знайти план випуску, який би мав максимальну рентабельність.

70. Для виконання n різних робіт можуть бути використані робітники m кваліфікаційних груп. При виконанні j -й роботи i -й групою робітників вироблення в одиницю часу дорівнює c_{ij} гр. од. ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). Загальний фонд часу, протягом якого i -а група робочих може бути зайнята виконанням робіт, не перевищує b_i одиниць часу, а обсяг j -й роботи дорівнює a_j гр. од. Скласти такий план виконання робіт, у якому продуктивність праці є максимальною.

71. Для виробництва двох видів виробів на двох підприємствах галузі може бути використано 480 од. сировини. Норми витрат сировини на один виріб відповідно дорівнюють 4 та 3 од., а прибуток від реалізації одного виробу відповідно дорівнює 5 та 6 гр. од. На кожному з підприємств сировина проходить послідовну обробку, причому використовуються два типи технологічного обладнання. Витрати часу при обробці сировини на кожному з типів устаткування на кожному підприємстві наведено у таблиці. У ній же зазначено загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування на кожному з підприємств.

Тип обладнання	I-е підприємство		II-е підприємство		Загальний фонд робочого часу підприємства	
	Витрати часу на виготовлення одного виробу				I	II
	A	B	A	B		
I	2	1	2	3	360	420
II	1	3	4	5	420	340

З урахуванням наявної сировини та можливостей використання підприємствами технологічного обладнання визначити, скільки виробів кожного виду слід виготовити на кожному з підприємств, так щоб прибуток від їх реалізації був максимальним.

72. I-й склад A_1 має сталь двох марок: 3000 т марки «а» та 4000 т марки «б». II-й склад A_2 також має сталь двох марок: 5000 т марки «а» і 2000 т марки «б». Сталь має бути вивезена в два пункти споживання:

у пункт B_1 необхідно поставити 2000 т сталі марки «а», 3000 т марки «б» та інші 2000 т сталі будь-якої марки. Аналогічно, другий пункт споживання B_2 повинен отримати 8250 т сталі, з них 1000 т марки «а» і 1500 т марки «б». Відомо, що 2 т сталі марки «а» можуть замінити 1,6 т сталі марки «б». Вартість перевезень у гривнях за тону становлять: з пункту A_1 до пунктів B_1 і B_2 1 гр. од. та 1,5 гр. од. відповідно, із пункту A_2 в B_1 і B_2 2 гр. од. та 1 гр. од. відповідно. Скласти оптимальний план перевезень.

73. Визначити оптимальний план перевезень тих же вантажів (з попередньої задачі) при коефіцієнті взаємозамінності $\alpha = 2$ та наступних даних про трьох постачальників та двох споживачів.

Поста- чаль- ники	A_1		A_2		A_3	
	400 «а»	250 «б»	300 «а»	200 «б»	200 «а»	150 «б»
Спожи- вачі	B_1		B_2			
	350 «а»	200 «б»	450 «а»	250 «б»	100 «а»	100 «б»

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	4	1
A_3	5	6

74. Визначити оптимальний план перевезень із умови доставки вантажу у найкоротший термін.

Відомі ресурси a_i ($i = 1, 2, 3$) відповідно: 30, 35, 40;

потреби b_j ($j = \overline{1, 5}$) відповідно: 20, 34, 16, 10, 25

і матриця:

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

де t_{ij} – час, що витрачається на перевезення вантажу з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення.

75. Маємо випуск продукції на трьох заводах:

$$a_1 = 460, a_2 = 340, a_3 = 300;$$

вимоги до цієї продукції чотирьох споживачів:

$$b_1 = 350, b_2 = 200, b_3 = 450, b_4 = 100;$$

витрати на виробництво 1 од. продукції на кожному заводі:

$$d_1 = 9, d_2 = 8, d_3 = 2$$

і матриця C транспортних витрат на доставку 1 од. продукції з i -го заводу k -му споживачу:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний план прикріплення споживачів до заводів за умови мінімізації сумарних витрат на виробництво та транспортування.

Вказівка. Розглянути як звичайне транспортне завдання, попередньо перетворивши матрицю транспортних витрат на матрицю сумарних витрат w_{ik} , де $w_{ik} = c_{ik} + d_i$.

76. Будівельний пісок видобувається у трьох кар'єрах та доставляється на чотири будівельні майданчики. Дані про продуктивність кар'єрів за добу (a_i т.), потреби в піску будівельних майданчиків (b_k в т), витрати на видобуток піску (d_i в гр. од./т) та транспортних витратах (c_{ij}) наведено в наступній таблиці:

a_i	b_k				d_i
	40	35	30	45	
46	4	3	2	5	2
34	1	1	6	4	3
40	3	5	9	4	1

Нестачу піску – 30 т на день можна забезпечити такими трьома шляхами:

1) збільшення продуктивності I-го кар'єру, що спричинить додаткові витрати в 3 гр. од. на видобуток 1 т;

2) збільшення продуктивності II-го кар'єру з додатковими витратами на 2 гр. од./т;

3) експлуатація нового кар'єру із витратами на видобуток 5 гр. од./т і на транспортування до зазначених будівельних майданчиків $c_{41} = 2$, $c_{42} = 3$ та $c_{43} = 1$ (гр. од./т).

Визначити оптимальний план закріплення будівельних майданчиків за кар'єрами та оптимальний варіант розширення постачання піску.

77. Скласти моделі розподільних задач за наступних даних:

- 1) a_i – ресурси i -го виду обладнання в станко-годинах ($i = \overline{1, n}$), b_k – планове завдання на виготовлення k -х виробів у штуках ($k = \overline{1, m}$), λ_{ik} – продуктивність i -го обладнання по k -у виробу в шт./год., c_{ik} – собівартість одиниці k -го виробу при його виготовленні i -му устаткуванні у гр.од./шт. ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 2) a_i , b_k , λ_{ik} ті ж, c_{ik} – прибуток у гр.од./шт. ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 3) a_i , b_k , λ_{ik} ті ж, c_{ik} – витрати на гр.од./год ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 4) a_i , b_k , ті ж, λ_{ik} – норми витрат часу в год./шт., c_{ik} – прибуток у гр. од./шт. ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 5) a_i , b_k , ті ж, λ_{ik} – норми витрат часу в год./шт., c_{ik} – собівартість у гр. од./шт. ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 6) a_i , b_k , λ_{ik} , ті ж, що й у (5), c_{ik} – витрати на гр. од./год ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$);
- 7) a_i , b_k , λ_{ik} , ті ж, що й у (5), умова — мінімізація часу завантаження обладнання;
- 8) a_i , b_k , ті ж, λ_{ik} – продуктивність в шт./год., умова — мінімізація завантаження обладнання.

78. Знайти оптимальне розподілення трьох видів механізмів, що є в кількостях $a_1 = 45$, $a_2 = 20$ і $a_3 = 35$ між чотирма ділянками робіт, потреби яких відповідно рівні $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $b_4 = 40$ при наступній матриці продуктивності кожного з механізмів на відповідній ділянці роботи:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нульові елементи означають, що цей механізм на даній ділянці не може бути використаний.

79. Скласти оптимальне розподілення фахівців чотирьох профілів, наявних у кількостях 60, 30, 45, 25 між п'ятьма видами робіт, потреби у спеціалістах для кожного виду роботи відповідно дорівнюють 20, 40, 25, 45, та 30; матриця

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризує ефективність використання спеціаліста на даній роботі.

80. Розподілити 4 сорти палива в кількості 70, 40, 50 та 40 т між чотирма агрегатами, потреби яких відповідно дорівнюють 30, 50, 30, 80 т; відома матриця

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

елементи c_{ik} якої характеризують теплотворну здатність i -го сорту палива при використанні його в k -м агрегаті. Знайти оптимальний розподіл палива між агрегатами, при якому буде досягнута максимальна кількість теплоти від усього запасу палива.

81. Чотири різні підприємства можуть випускати будь-який із чотирьох видів продукції. Виробничі потужності підприємств дозволяють забезпечити випуск продукції кожного виду в кількостях 50, 70, 100 та 30 тис. шт., а планове завдання становить відповідно 30, 80, 20 та 100 тис. шт. Матриця

$$C = \{c_{ik}\} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

характеризує собівартість одиниці k -го виду продукції під час виробництва його на i -му підприємстві. Знайти оптимальний розподіл планового завдання між підприємствами.

82. Чотири ремонтні майстерні можуть протягом року відремонтувати відповідно 700, 500, 450 і 550 машин при собівартості ремонту однієї машини в 250, 270, 265 і 260 грн. Кожна з п'яти автомобільних баз планує ремонт машин у кількостях відповідно: 350, 350, 300, 300 та 200 машин. Надлишкові потужності I-ї та II-ї майстерень можуть бути використані для обслуговування інших видів робіт, а III-ї та IV-ї майстерень – тільки на зазначений вид робіт. Матриця

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 70 & 50 \\ 20 & 80 & 30 & 10 \\ 60 & 30 & 30 & 40 \\ 10 & 40 & 50 & 50 \\ 20 & 30 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризує транспортні витрати на доставку машини з i -ї автобази в k -ю ремонтну майстерню. Визначити мінімальну річну потребу в кредитах на виконання зазначеного обсягу ремонтних робіт по всіх автобазах.

83. На трьох ділянках посівних площ розміром 300, 500 і 400 га можуть бути посаджені 4 види с.-г. культур, які необхідно виростити у кількості відповідно 600, 1500, 225 та 1250 т. Матриця

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 50 & 40 & 15 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

характеризує собівартість 1 т при вирощуванні i -ї культури на k -й ділянці. Скласти оптимальний план посіву, якщо врожайність різних культур не залежить від ділянки посіву і становить 20, 30, 15 і 50 ц/га.

84. Ресурси вугілля трьох сортів становлять 300, 800 і 400 т, а їх теплотворна здатність відповідно 1800, 2500, 3000 кал/кг. Вугілля спалюється у чотирьох печах, потреби яких становлять 750, 920, 1100 та 800 млн. кал. Сумарні витрати на виробництво та доставку кожного сорту вугілля до кожної печі (у гр. од./т) задаються наступною матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 36 & 18 & 18 \\ 30 & 25 & 15 & 20 \\ 36 & 30 & 24 & 21 \end{pmatrix}.$$

Скласти оптимальний план розподілу ресурсів вугілля по печах.

85. Знайти оптимальний розподіл трьох взаємозамінних механізмів за чотирма видами земляних робіт при заданих ресурсах часу кожного механізму 240, 160 та 150 год, продуктивності механізмів 30, 55, 18 м³/год, обсязі робіт, що підлягають виконанню 5, 2, 3 та 8 тис м³ і матриці C собівартості робіт у гр. од./м³:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0,5 & 1,2 \\ 0,8 & 1,2 & 0,9 & 0,8 \\ 0,5 & 1,0 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

86. На чотирьох ткацьких верстатах з обсягом робочого часу 200, 300, 250 і 400 верстат-годин може виготовлятися тканина трьох артикулів у кількостях 260, 200, 340 і 500 м за 1 год. Скласти програму завантаження верстатів, якщо прибуток (у гривнях) від реалізації 1-го метра тканини

i -го артикула при її виготовленні на станку k задається елементами матриці

$$C = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,2 & 2,0 & 2,8 \\ 1,6 & 1,0 & 1,9 & 1,2 \\ 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix},$$

а сумарна потреба в тканині кожного з артикулів дорівнює 200, 100 та 150 тис. м.

87. Є три сорти паперу в кількостях 10, 8 і 5 т, який можна використувати на видання чотирьох книг тиражем у 8000, 6000, 15000 та 10000 прим. Витрата паперу на одну книгу становить 0,6, 0,8, 0,4 та 0,5 кг відповідно, а собівартість (у гр.од.) друкування книги при використанні i -го сорту паперу задається матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний розподіл паперових ресурсів.

88. Скласти оптимальну виробничу програму з обробки чотирьох видів виробів А, Б, В і Г на трьох взаємозамінних верстатах за такими вихідними даними:

Верстати	Ресурси часу (год)	Собівартість гр. од./шт				Продуктивність шт/год			
		А	Б	В	Г	А	Б	В	Г
І	240	2,0	1,0	0,5	1,2	30	50	30	20
ІІ	150	0,8	1,2	0,9	0,8	60	100	60	40
ІІІ	150	0,5	1,0	0,6	0,9	18	30	18	12
Планове завдання тис. од.		3	15	4,5	1,5				

89. Знайти оптимальний план випуску п'яти виробів (А, Б, В, Р та Д) на чотирьох підприємствах за вихідними даними в наведеній нижче таблиці.

Підприємство	Ресурси часу (год)	Продуктивні витрати гр. од./шт.					Продуктивність шт./год.				
		А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
I	100	—	4	5	4	8	—	21	9	15	18
II	60	2,4	5	—	4	6	30	42	—	30	36
III	120	—	3	9	3	7	—	14	6	10	12
IV	60	3,6	4	8	—	6	45	63	27	—	54
Планове завдання тис.од.		1,5	2,1	0,36	0,6	3,6					

Розв'язати задачу за такими критеріями оптимальності:

- 1) мінімізація виробничих витрат;
- 2) мінімізація часу завантаження обладнання;
- 3) максимізація прибутку, при заданих відпускних цінах на вироби 10, 7, 12, 8 та 10 гр.од./шт.

90. Скласти оптимальний план посіву чотирьох культур на трьох ділянках посівної площі за такими вихідними даними:

Ділянки	Розмір посівної площі (га)	Врожайність, ц/г (В) Собівартість, гр.од./ц. (С)							
		Кукурудза		Горох		Капуста		Жито	
		В	С	В	С	В	С	В	С
I	300	100	10	20	60	25	80	35	40
II	500	85	15	25	50	15	65	30	40
III	400	120	18	20	70	10	100	40	20

91. Чотири різні види виробів (А, Б, В і Г) можуть виготовлятися з трьох видів сировини (I, II та III). У зв'язку з різними відпускними цінами на одиницю виробу в залежності від використовуваної сировини, різними виробничими витратами при використанні різної сировини,

прибуток, що отримується від реалізації одиниці виробу, залежить від виду продукту та виду сировини, що використовується при його виготовленні. У таблиці наведено вихідні дані задачі.

Скласти оптимальний план використання сировини за такими критеріями:

- 1) максимізація сумарного прибутку;
- 2) мінімізація використання сировини.

Сировина	Норми витрат (кг.шт.)				Прибуток (гр.од./шт.)				Запаси сировини (кг)
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	12	8	16	6	72	56	32	54	300
II	6	4	8	3	60	24	80	42	200
III	9	6	12	4,5	36	96	64	24	450
Планове завдання (шт.)					20	30	40	25	

92. Знайти оптимальну програму обробки трьох виробів (А, Б, В) на двох взаємозамінних верстатах (I, II) за наступними вихідними даними:

Верстати	Норми часу (год./шт.)			Робочий час (год)	Собівартість (гр.од./год.)		
	А	Б	В		А	Б	В
I	2	5	3	200	3	2	4
II	4	7	5	350	2,5	2	3
План (шт.)	80	30	10	Прибуток (гр.од./год.)	20	40	30

Як критерій оптимальності обрати:

- 1) мінімум собівартості;
- 2) мінімум витрат часу роботи верстатів;
- 3) максимум прибутку.

93. Є три сорти взаємозамінної сировини в кількості 200, 100, 300 кг, яка використовується при виробництві чотирьох продуктів у кількості 25, 45, 30, 70 одиниць. У матрицях зазначені відповідно витрати сировини (в кг) та виробничі витрати на одиницю продукту (гр.од.):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2,4 & 3 \\ 3,5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 20 & 35 \\ 30 & 25 & 45 & 40 \\ 20 & 45 & 30 & 35 \end{pmatrix}.$$

Скласти математичну модель задачі визначення оптимального плану використання сировини.

94. Є три підприємства (1, 2, 3), що мають у своєму розпорядженні для випуску продукції А, Б, В два види ресурсів (I, II), обсяги яких становлять для 1-го підприємства 250 і 150 од., для 2-го 100 та 200 од. та для 3-го відповідно 240 та 300 од. Задано норми витрат кожного ресурсу на i -му підприємстві для виробництва одиниці k -ї продукції ($k = 1, 2, 3$). Собівартість виробництва одиниці k -ї продукції на i -м підприємстві та обсяги виробництва k -ї продукції передбачені виробничою програмою. Всі зазначені числові дані розміщені в таблиці.

Підприємства	Норми витрат						Собівартість		
	А		Б		В		А	Б	В
	I	II	I	II	I	II			
1	2	4	1,1	2	2,5	3	2	8	5
2	1,5	5	1,6	3	2,2	2,5	3	7	6
3	2,2	3	1,2	2,4	2,4	4,2	2,5	9	7
Виробнича програма							300	170	260

Скласти математичну модель для визначення оптимальної спеціалізації виробництва за умови мінімізації сумарної собівартості. Вирішити те саме завдання з припущення, що I-й вид ресурсів жорстко закріплений за підприємством, а II-й вид можна передавати з одного підприємства іншому.

95. Планове завдання з виготовлення чотирьох моделей костюмів необхідно розподілити між трьома швейними фабриками. Виробничі

потужності i -ї фабрики ($i = 1, 2, 3$) дозволяють за розглядаємий час випустити λ_{ik} костюмів k -ї моделі ($k = \overline{1, 4}$). Задано ціни c_k на костюм k -ї моделі та собівартості s_{ik} -ї виготовлення k -ї моделі костюма на i -ї фабриці. Числові дані вказані у таблиці.

Фабрики	План							
	180		150		100		100	
	Моделі костюмів							
	1		2		3		4	
	s_{ik}	λ_{ik}	s_{ik}	λ_{ik}	s_{ik}	λ_{ik}	s_{ik}	λ_{ik}
I	40	120	40	240	50	300	20	150
II	25	240	30	300	25	200	40	300
III	40	150	50	240	40	300	30	200
Ціна	50		65		80		50	

Вирішити, спираючись на ці дані, такі завдання:

1. Скласти оптимальний план завантаження фабрик із умови мінімізації собівартості планової продукції.
2. Скласти оптимальний план завантаження з умови максимізації прибутку за точного виконання планового завдання.
3. Те саме, при допустимості перевиконання плану.
4. Скласти оптимальний план завантаження фабрик, що забезпечує максимальну кількість комплектів костюмів, якщо числа планового завдання розглядати як асортиментні відносини.

96. На трьох ділянках фермерського угіддя можуть вирощуватися три культури: жито, пшениця та ячмінь. У наступній таблиці вказані розміри ділянок у гектарах, урожайність λ_{ik} (у ц/га) на кожній із ділянок по кожній культурі, витрати c_{ik} у люд.-год. на 1 ц і планове завдання збору цих культур (в ц):

Ділянки (га)	Культури					
	Жито		Пшениця		Ячмінь	
	Врожайність (λ_{ik}) та витрати (c_{ik})					
	λ_{ik}	c_{ik}	λ_{ik}	c_{ik}	λ_{ik}	c_{ik}
30	2	12	2,5	16	3	16
50	2,4	10	3	12	3	20
20	1,8	15	2	16	2,5	24
План	500		200		400	

Розв'язати такі завдання:

1. Визначити оптимальну структуру посівів, що мінімізує сумарні витрати.
2. Визначити оптимальну структуру посівів, що забезпечує максимальне перевиконання плану за збереження планового асортименту (5: 2: 4).
3. Відомо додатково, що фермер має в своєму розпорядженні парк тракторів, який може виділити для обробки даних ділянок 12000 тракторо-годин, витрачаючи на обробку 1 га на відповідних ділянках 160, 140 і 120 год. Скласти оптимальну структуру посівів, максимізуючи плановому асортиментному співвідношенні 5:2:4.
4. При додаткових даних задачі 3 визначити оптимальну структуру посівів, що забезпечує виконання планового завдання з мінімальними витратами.

97. Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром і чотирма містами має в своєму розпорядженні три групи літаків: I група з 10 чотиримоторних літаків, II — з 25 двомоторних і III група — з 40 двомоторних старого зразка. Кількість пасажирів у тис. осіб, що перевозяться одним літаком даного типу по кожному маршруту за 1 місяць, та пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак у тис.гр. од. зазначені відповідно у правих та лівих половинках кожної клітини нижченаведеної таблиці. В ній же у двох останніх рядках наведено кількість пасажирів, яку потрібно перевезти за цим маршрутом на місяць, та вартість одного квитка. Розподілити літаки за маршрутами за умови досягнення максимального прибутку авіакомпанії.

Літак	Маршрут							
	Міста							
	1		2		3		4	
I	16	1,6	20	2,2	15	1,3	—	—
II	30	2,8	25	3,0	20	2,4	25	2
III	15	0,8	—	—	12	1,0	16	1,5
Кількість пасажирів (тис.люд.)	20		50		40		30	
Вартість квитка	25		15		20		15	

98. Три підприємства (I, II, III) можуть забезпечити випуск трьох видів виробів (A, B, B) на кожному з них. Основні виробничо-економічні дані наведено у наступній таблиці.

Підприємство	Місячна продуктивність (шт.)			Собівартість (гр.од./шт.)		
	A	B	B	A	B	B
I	3000	4000	6000	15	20	25
II	5000	4000	9000	16	18	20
III	4000	2000	6000	12	15	16

Скласти оптимальний річний план завантаження підприємств із умови отримання максимальної кількості комплектів, у кожен із яких вироби входять в співвідношенні 1 : 2 : 3.

99. Фірма об'єднує три підприємства, кожне з яких виробляє три види виробів. Продуктивність кожного підприємства при виготовленні одного виробу (у грошових одиницях) характеризується такою таблицею:

Підприємство	Вироби		
	1	2	3
1	15	6	12
2	6	9	13
3	8	11	2

Враховуючи необхідність спеціалізації кожного підприємства тільки по одному виробу, розподілити виробництво виробів на підприємствах так, щоб сумарна продуктивність фірми при цьому розподілі була максимальною.

100. Вирішити попереднє завдання, якщо фірма включає ще два підприємства з продуктивностями 7, 13, 6 і, відповідно, 4, 9 та 12.

101. Є 5 робіт та 5 осіб, кожна з яких може виконати будь-яку з цих робіт. При цьому кожен працівник виконує лише одну роботу. Продуктивності працівника A_i при виконанні роботи B_k представлені в наступній таблиці.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	2	2	1
A_2	4	5	3	1	3
A_3	4	3	1	1	1
A_4	3	1	2	2	2
A_5	1	3	1	2	1

Розподілити людей працювати так, щоб сумарний ефект їх праці (продуктивність) був максимальним.

102. Є 5 видів сировини та 5 різних підприємств, що переробляють цю сировину. Задано матрицю:

$$C = (c_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

де c_{ik} характеризує прибуток, який одержує k -е підприємство під час переробки i -го виду сировини. Визначити оптимальний розподіл сировини між підприємствами, що максимізує сумарний прибуток, якщо кожне підприємство за умовами технологічного процесу може працювати тільки на одному виді сировини та кожен із видів сировини внаслідок обмеженості її запасу можна використовувати лише на одному підприємстві.

103. На деякому заводі є 4 верстати (I, II, III та IV), які можуть виконувати 3 види робіт (1, 2 та 3). Кожну роботу може одночасно

виконувати тільки один верстат і кожен верстат можна завантажити лише однією роботою. Матриця витрат часу під час виконання i -м верстатом k -ї роботи ($i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3$) має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 8 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Визначити найбільш раціональний розподіл робіт між верстатами, що мінімізує сумарні витрати часу.

104. У двогалузевій лінійній моделі задані розміри фонду накопичення 60 та 50 млн. гр. од. та матриця коефіцієнтів повних капітальних витрат:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 1,4 & 1,1 \\ 1,25 & 0,8 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} є розмір капіталовкладень з фонду накопичення i -ї галузі для збільшення на 1 од. випуску кінцевої продукції k -ї галузі. При цих вихідних даних вирішити такі завдання:

1. Визначити оптимальний план розвитку виробництва за умови отримання максимального сумарного приросту кінцевої продукції.
2. Вирішити те саме завдання, якщо задана додаткова умова, що приріст кінцевого продукту 1-ї та 2-ї галузей знаходиться у відношенні 3 : 1.
3. Розв'язати задачу 1 за додаткової умови, що полягає в обмеженості трудових ресурсів для розвитку виробництва величиною 200 тис. люд.-дн. при коефіцієнтах витрат на 1 од. кінцевого продукту відповідно 2 та 5 тис. люд.-дн.

105. Виробнича потужність заводу дозволяє виробляти за місяць 200 електродвигунів типу A або 600 електродвигунів типу B . Визначити кількість електродвигунів кожного типу, яку повинен виробляти завод для досягнення максимуму товарної продукції за наступних умов:

1. Двигуни обох типів мають однакову ціну.
2. Ціна на двигун типу A у 3 рази більша за ціну двигуна типу B .
3. Ціни на двигуни типів A та B відносяться як 9:2.

106. Механічний цех може виготовити за зміну 600 деталей № 1 або 1200 деталей № 2. Виробнича потужність термічного цеху, куди ці деталі надходять на термообробку в той же день, дозволяє обробити за зміну 1200 деталей № 1 або 800 деталей № 2. Ціни на деталі однакові. Визначити щоденну виробничу програму випуску деталей, що максимізує товарну продукцію підприємства, за наступних додаткових умов:

1. Обидва цехи працюють одну зміну.
2. Механічний цех працює три зміни, а термічний — дві зміни.
3. Підприємство працює у дві зміни, при цьому деталей № 1 має бути виготовлено не більше ніж 800 шт. та деталей № 2 не більше 1000 шт.

107. Автомобільний завод випускає машини типів A та B . Виробничі потужності окремих цехів або відділів наведені в наступній таблиці.

Найменування цехів чи ділянок	Кількість машин за рік	
	типу A	типу B
Підготовка виробництва автомобілів	125	110
Кузовний	80	320
Виробництво шасі	110	110
Виробництво двигунів	240	120
Складальний	160	80
Ділянка випробувань	280	70

Визначити найбільш рентабельну виробничу програму за наступних додаткових умов:

1. Прибуток від випуску однієї машини типів A і B відповідно дорівнюють 2000 і 2400 гр.од.

2. Випуск однієї машини A приносить прибуток, удвічі менший, ніж випуск однієї машини B .
3. Виробнича потужність цеху з підготовки виробництва автомобілів та складального цеху збільшена в 1,5 рази за рахунок використання понаднормових робіт, що призводить до зменшення прибутку від випуску однієї машини типу A до 1500 гр.од. і типу B — до 2100 гр.од.
4. У задачі 1 виробнича програма обмежена зверху умовами: машин типу A не більше 50 і машин типу B не більше 60.

108. З пункту A до пункту B щодня відправляються пасажирські та швидкі поїзди. У наступній таблиці вказано наявний парк вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати дані поїзди, та кількість пасажирів, що вміщуються у кожному вагоні:

	Вагони				
	багажн.	почт.	ж. плацк.	куп.	м'який
Швидкий поїзд	1	1	5	6	3
Пасажирський поїзд	1	—	8	4	1
Кількість пасажирів	—	—	58	40	32
Парк вагонів	12	8	81	70	26

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських поїздів, у яких кількість перевезених пасажирів досягає максимуму.

109. Вирішити попереднє завдання, якщо пропускна спроможність дороги не дозволяє в день пройти більш ніж шістьом пасажирським поїздам.

110. Обладнання фабрики дозволяє випускати фруктові компоти у трьох видах тари: скляній – у кількості 100 шт.; бляшаній – у кількості 80 шт.; поліетиленової – 50 шт. Знайти виробничу програму підприємства, що максимізує прибуток, якщо собівартість компоту становить: у скляній

тарі — 16 гр.од. за шт.; в бляшаний — 10 гр.од. за шт.; в поліетиленовій — 16 гр.од. за шт. Відпускна ціна незалежно від тари становить 40 гр.од. за 1 шт.

111. При складанні добового раціону годівлі худоби можна використувати свіже сіно (не більше 50 кг) та силос (не більше 85 кг). Раціон повинен мати певну поживність (число кормових одиниць не менше 30) і містити поживні речовини: білок (не менше 1 кг), кальцій (не менше 100 г) та фосфор (не менше 80 г). У таблиці наведені дані про вміст зазначених компонентів в 1 кг кожного продукту харчування та собівартості (гр. од./кг) цих продуктів. Визначити оптимальний раціон за умови мінімуму собівартості.

Продукти	Компонент				
	Кількість кормових одиниць	Білок (г/кг)	Кальцій (г/кг)	Фосфор (г/кг)	Собівартість (гр.од./кг)
Сіно свіже	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

112. У цеху три токарні верстати і один автомат. Необхідно організувати виробництво двох деталей у комплекті: на кожну деталь № 1 три деталі № 2 та дві деталі № 3. Скласти програму роботи верстатів, при якій буде вироблено максимальну кількість комплектів, якщо денна продуктивність кожного верстата по кожній з деталей задана в наступній таблиці.

Верстати	Деталі		
	№ 1	№ 2	№ 3
Токарний	50	40	80
Автомат	120	90	60

113. Для виготовлення двох видів виробів А та Б фабрика витрачає як сировину сталь та кольорові метали, що є в обмеженій кількості. На виготовленні зазначених двох виробів зайняті токарні та фрезерні

верстати. У таблиці наведені вихідні дані завдання. Визначити план випуску продукції, за якого буде досягнуто максимального прибутку.

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Норма витрат на 1 виріб	
		Виріб А	Виріб Б
Сталь (кг)	570	10	70
Кольорові метали (кг)	420	20	50
Токарні верстати (верстат-год.)	5600	300	400
Фрезерні верстати (верстат-год.)	3400	200	100
Прибуток (гр.од.)		3	8

114. Підприємство має в своєму розпорядженні ресурси сировини, робочу силу та обладнання, яки необхідні для виробництва будь-якого з чотирьох видів товарів, що виготовляються. Витрати ресурсів на одиницю цього виду товару, прибуток, що одержуєваний підприємство, і запаси ресурсів вказані в таблиці. За цими вихідними даними вирішити такі завдання.

1. Який асортимент товару треба випускати, щоб прибуток був максимальним?
2. Визначити оптимальний асортимент за додаткової умови: 1-го товару випустити не більше 5 од., 2-го — не менше 8 од., а 3-го та 4-го — в співвідношенні 3:2.
3. Додатково до завдання 1 знайти оптимальний асортимент, який максимізує прибуток, за умови, що сумарні виробничі витрати не повинні перевищувати 96 гр. од. і відомі виробничі витрати в гр. од. на 1 од. кожного вироба: 6, 9, 12, 3.
4. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує нормативну вартість обробки, якщо нормативні вартості обробки одиниці кожного виду товарів задані числами 37, 35, 20, 15.

Вид ресурсу	Вид товару				Обсяг ресурсів
	1	2	3	4	
Сировина (кг)	3	5	2	4	60
Робоча сила (год.)	22	14	18	30	400
Обладнання (верстат-ч.)	10	14	8	16	128
Прибуток на одиницю товару (грн. од.)	30	25	56	48	

115. Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро та книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різні типи дощок, причому, фабрика має в наявності 1500 м дощок I-го типу і 1000 м дощок II-го типу. Крім того, задані трудові ресурси у кількості 800 люд.-год. У таблиці наведено нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення 1 од. виробу та прибуток на 1 од. виробу.

Ресурси	Вироби			
	Витрати на 1 од. виробу			
	столи	стільці	бюро	книжкові шафи
Дощки I типу (м)	5	1	9	12
Дощки II типу (м)	2	3	4	1
Трудові ресурси (люд.-год.)	3	2	5	10
Прибуток (грн. од.)	12	5	15	10

За цими вихідними даними вирішити такі завдання:

1. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.
2. Вирішити те саме завдання за додаткових умов, що накладаються на асортимент: столів — не менше 40, стільців — не менше 130, бюро — не менше 30 і книжкових шаф — не більше 10.
3. Розв'язати задачу 1 за умови комплектності: кількість столів відноситься до кількості стільців, як 1:6.

4. Задано додатково ціни: стіл — 32 гр.од., стілець — 15 гр. од., бюро — 12 гр. од. та книжкова шафа — 80 гр.од. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію, за єдиного обмеження на асортимент — умови комплектності столів та стільців 1:6.
5. Фабрика може додатково придбати дошки I типу по 0,12 гр.од./м та II типу по 0,08 гр.од./м. Крім того, можна збільшити трудові ресурси за рахунок понаднормової роботи, здійснюючи додаткову оплату кожної години в сумі 0,8 гр.од. Визначити за умов завдання 1, збільшення якого з видів ресурсів доцільніше.

116. Тканина трьох артикулів виготовляється на ткацьких верстатах двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовується пряжа та барвники. У наступній таблиці вказані потужності верстатів (у тис. верстатів-год.), ресурси пряжі та барвників (в тис. кг), продуктивності верстатів по кожному виду пряжі (в м/год), норми витрати пряжі та фарби (в кг на 1000 м) та ціна (в гр. од.) 1 м тканини.

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Продуктивність та норми витрати		
		1	2	3
Верстати I типу (м)	30	20	10	25
Верстати II типу (м)	45	8	20	10
Пряжа	30	120	180	210
Барвники	1	10	5	8
Ціна		15	15	20

За цими вихідними даними вирішити такі завдання:

1. Визначити оптимальний асортимент, який максимізує товарну продукцію фабрики.
2. За умови, що кількість тканин трьох артикулів має бути в співвідношенні 2:1:3, визначити, яку максимальну кількість комплектів тканини може випустити фабрика.

3. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток, якщо собівартість 1 м тканини становить відповідно 8, 5 та 15 гр.од.
4. Розв'язати задачу 1 за умови, що верстати I типу тканину 1-го артикула не виробляють.

117. Нафтопереробний завод отримує 4 напівфабрикати: 400 тис. л алкілату, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки та 100 тис. л ізопентону. Внаслідок змішування цих чотирьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: бензин А — 2 : 3 : 5 : 2, бензин В — 3 : 1 : 2 : 1 та бензин С — 2 : 2 : 1 : 3. Вартість 1 тис. л зазначених сортів бензину характеризується числами: 120 гр.од., 100 гр. од. та 150 гр. од.

1. Визначити план змішування компонентів, за якого буде досягнуто максимальної вартості всієї продукції.
2. Визначити оптимальний план змішування за умови максимального використання компонентів.

118. До складу раціону годівлі входять три продукти: сіно, силос та концентрати, що містять поживні речовини: білок, кальцій та вітаміни. Вміст поживних речовин (в г на 1 кг) відповідного продукту харчування та мінімально необхідні норми їх споживання задані наступною таблицею:

№	Продукти	Поживні речовини		
		Білок	Кальцій	Вітаміни
1	Сіно	50	6	2
2	Силос	20	4	1
3	Концентрати	180	3	1
	Норми споживання	2000	120	40

Використовуючи ці вихідні дані, вирішити такі завдання.

1. Визначити оптимальний раціон годівлі за умови мінімальної вартості, якщо ціна 1 кг продукту харчування відповідно становить: сіна — 0,03 гр.од.; силосу — 0,02 гр.од.; концентратів — 0,05 гр. од.

2. Розв'язати задачу 1, якщо додатково задані граничні норми добової видачі: сіна — не більше 12 кг; силосу — не більше 20 кг; концентратів — не більше 16 кг.
3. Включити в завдання 2 умови обмеженості ресурсів продуктів на один раціон: сіна — не більше 10 кг; силосу — не більше 15 кг; концентратів — не більше 20 кг.

119. Тваринницька ферма складає раціон годівлі корів на зиму. Є два науково розроблені раціони А і В та довільний раціон С, яки мають наступний склад:

Раціон А	Не менше 40% кукурудзяного силосу, не більше 40% кормових трав
Раціон В	Не менше 30% кукурудзяного силосу, не більше 50% кормових трав
Раціон С	Корм без обмежень

Задано такі граничні норми витрати кожного продукту, виходячи з вироблених заготівель кормів: кукурудзяного силосу — 200 ц, кормових трав — 300 ц. Яка кількість кожного з раціонів повинна скласти ферма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо при раціоні А вона становить 10 гр.од./ц, при раціоні В — 12 гр. од./ц, при довільному раціоні С — 5 гр.од./ц ?

120. Для годування піддослідної тварини їй необхідно давати щодня щонайменше 15 од. хімічної речовини A_1 (вітаміну або деякої солі) та 15 од. хімічної речовини A_2 . Не маючи можливості давати речовину A_1 або A_2 у чистому вигляді, можна купувати речовину B_1 по 0,01 гр.од. або B_2 по 0,03 гр.од. за 1 кг, причому, кожен кілограм B_1 містить 1 од. A_1 та 5 од. A_2 , а кілограм B_2 — 5 од. A_1 та 1 од. A_2 . Визначити оптимальний вміст речовин B_1 та B_2 у щоденному раціоні.

121. З чотирьох видів основних матеріалів: мідь, цинк, свинець, нікель – складають три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний і для художніх виробів. Ціни одиниці ваги міді, цинку, свинцю та нікелю становлять 0,8 гр. за од., 0,6 гр. за од., 0,4 гр. за од. та 1,0 гр. за од. відповідно, а одиниці ваги металу, відповідно, 2 гр. за од., 3 гр. од.,

4 гр. од. Сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6% нікелю, не менше 50% міді і не більше 30% свинцю; спеціальний — не менше 4% нікелю, не менше 70% міді, не менше 10% цинку і не більше 20% свинцю. У стандартний метал компоненти можуть входити без обмежень. Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати (за певний термін) не більше 400 од. ваги звичайного сплаву, не більше 700 од. ваги спеціального сплаву і не більше 100 од. ваги декоративного сплаву. Знайти виробничий план, який би забезпечив максимальний прибуток.

122. Для виготовлення брусів трьох розмірів 0,6 м, 1,5 м і 2,5 м у співвідношенні 2:1:3 на розпил надходять колоди завдовжки 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів.

123. Визначити за даними попереднього завдання оптимальний план розпилу, якщо на обробку надходять також 2-х метрові колоди, причому співвідношення між 3-х і 2-х метровими колодами становить 1:3.

124. Зробити розпил 5-и метрових колод на бруси розмірами по 1,5 м, 2,4 м та 3,2 м у співвідношенні 2:3:5 так, щоб мінімізувати загальну величину відходів.

125. Напівфабрикати надходять на підприємство у вигляді аркушів фанери. Усього є дві партії матеріалу, причому перша партія містить 400 аркушів, а друга — 250 аркушів фанери. З листів фанери необхідно виготовити комплекти, що включають 4 деталі I-го типу, 3 деталі II-го типу і 2 деталі III-го типу. Лист фанери кожної партії може розкрююватись у різний спосіб. Кількість деталей кожного типу, що отримують при розкрої одного аркуша відповідної партії з того чи іншого способу розкрою, представлено в таблиці.

Перша партія				Друга партія		
Деталі типу	Спосіб розкрою			Деталі типу	Спосіб розкрою	
	1	2	3		1	2
I	0	6	9	I	6	5
II	4	3	4	II	5	4
III	10	16	0	III	8	0

Потрібно розкроїти матеріал так, щоб забезпечити виготовлення максимальної кількості комплектів.

126. Є три технологічні процеси I, II і III, які пов'язані з виробництвом деякого продукту і зі споживанням при цьому чотирьох видів сировини. Нехай c_i означає ціну продукту, отриманого в результаті застосування i -го процесу з одиничною інтенсивністю ($i = 1, 2, 3$), b_k — ресурси k -го виду сировини ($k = \overline{1, 4}$) і a_{ik} — витрати k -го виду сировини при i -м процесі з одиничною інтенсивністю.

Процеси	Сировина				c_i
	1	2	3	4	
	Витрати сировини				
I	5	8	3	6	10
II	4	3	9	5	15
III	6	7	4	2	8
	50	50	20	60	

Визначити інтенсивність використання кожного процесу за умови забезпечення максимуму товарної продукції.

127. Підприємство може випускати продукцію за трьома технологічно відпрацьованими способами виробництва. При цьому, за 1 год за I-м способом виробництва воно випускає 20 од. продукції, за II-м — 25 од. та за III-м — 30 од. продукції. Кількість виробничих факторів, що витрачаються за годину при різних способах виробництва, і ресурси цих факторів представлені в таблиці.

Спосіб виробництва	Чинники					
	Сировина	Верстатний парк	Робоча сила	Енергія	Транспорт	Інші витрати
I	2	3	7	2	1	4
II	1	4	3	1	0	2
III	3	2	4	3	1	1
Нааявні ресурси факторів	60	80	70	50	40	50

Спланувати роботу підприємства за умови отримання максимуму продукції, якщо відомо, що час роботи підприємства становить 30 год.

128. Підприємство може працювати за п'ятьма технологічними процесами, причому кількість одиниць продукції по різних технологічних процесах за 1 од. часу відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 та 450 шт. У процесі виробництва враховуються такі виробничі фактори: сировина, електроенергія, заробітна плата та накладні витрати. Витрати відповідних факторів на гр.од. під час роботи з різних технологічних процесів протягом 1 од. часу вказано у таблиці.

Виробничі фактори	№ технологічних процесів					Ресурси
	1	2	3	4	5	
Сировина	12	15	10	12	11	1300
Електроенергія	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	30
Заробітна плата	3	4	5	4	2	400
Накладні витрати	6	5	4	6	4	800

В останній графі таблиці вказані ресурси, які має підприємство по кожному з виробничих факторів. Знайти програму максимального випуску продукції.

129. Механічний завод при виготовленні трьох різних типів деталей використовує токарні, фрезерні та стругальні верстати. При цьому обробку кожної деталі можна проводити трьома різними технологічними методами. У нижченаведеній таблиці вказані ресурси (в верстаті-ч.) кожної групи верстатів, норми витрати часу при обробці деталі на відповідному верстаті за цим технологічним способом і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду.

Деталі		I		II			III			Ресурси часу
		1	2	1	2	3	1	2	3	
Верстати	Токарний	0,4	0,9	0,5	0,3	—	0,7	—	0,9	250
	Фрезерний	0,5	—	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	—	450
	Стругальний	0,3	0,5	0,4	1,5	0,3	—	1,0	0,5	600
Прибуток		12		18			30			

1. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, що забезпечує максимальний прибуток.
2. Враховуючи, що між кількістю деталей, що випускаються, має виконуватися співвідношення комплектності 1:2:1, визначити виробничу програму, що забезпечує виготовлення максимальної кількості комплектів.

3. Розв'язати задачу 1, якщо кількість деталей II типу не має перевищувати 100 од.

130. Нафтопереробний завод має 10 од. нафти сорту А та 15 од. сорти В. При переробці нафти виходять бензин та мазут. При цьому відомі наступні три способи переробки:

Способи переробки	Результат	
	Мазут	Бензин
$1A + 2B$	2	3
$2A + 1B$	5	1
$2A + 2B$	2	1
Ціна за одиницю	2	10

131. Планується поквартальний випуск продукції для задоволення змінного попиту ($b_1 = 50, b_2 = 30, b_3 = 40, b_4 = 20$). Скласти оптимальний графік роботи підприємства, якщо витрати на додатковий випуск 1 од. продукції становлять 30 гр.од., а витрати на зберігання тієї ж одиниці в запасах протягом одного періоду – 3 гр.од. При цьому задано початковий запас $u_0 = 5$.

132. Розв'язати задачу 131, прийнявши додатково умову, що до кінця запланованого періоду запасів не залишається.

133. Розв'язати задачу 131, якщо скорочення виробництва пов'язане з витратами, що становлять 20 гр.од. на одиницю продукції.

134. Знайти оптимальний графік виробництва за двомісячними періодами для задоволення змінного попиту $b_1 = 50, b_2 = 30, b_3 = 40, b_4 = 35, b_5 = 60, b_6 = 30$, якщо витрати на зберігання 1 од. продукції протягом двох місяців становлять 5 гр.од., а витрати на розширення виробництва — 16 гр.од. на 1 од. продукції. Прийняти початковий запас $u_0 = 0$ і $u_6 = 0$.

135. Розв'язати задачу 134, якщо $u_0 = 15$ та u_6 — довільне.

136. Склад місткістю 100 од. сезонного продукту має до початку запланованого періоду 30 од. Визначити, скільки потрібно купувати і продавати протягом кожного з чотирьох кварталів для отримання максимуму прибутку, якщо ціна придбаної одиниці до кінця кварталу становить 5, 7, 4, 9, а ціна проданої одиниці протягом кварталу відповідно дорівнює 10, 8, 5, 10.

137. Для задоволення поквартального змінного попиту в деяких виробках $b_1 = 30$, $b_2 = 70$, $b_3 = 40$, $b_4 = 20$, підприємство має в своєму розпорядженні дві можливості: застосовувати три денні зміни, під час кожної з яких підприємство може випускати 20 од. виробів у квартал, та дві нічні з продуктивністю 15 од. на квартал кожна. Витрати на 1 од. продукції на денну зміну становлять 150 гр. од. а в нічну зміну – 200 гр.од. Визначити оптимальний графік роботи підприємства, що мінімізує собівартість продукції, якщо запаси продукції до початку та кінця планованого періоду дорівнюють нулю, а витрати на зберігання протягом кварталу становлять 100 гр.од. на 1 од. продукції.

138. Є тригалузева балансова модель з матрицею коефіцієнтів витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами 300, 200, 500. Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо заданий вектор цін на кінцевий продукт $C = (2, 5, 1)$.

139. Розв'язати задачу **138**, якщо на кінцевий продукт накладаються такі обмеження: $y_1 : y_2 = 2 : 1$ та $y_2 \leq 100$.

140. Додатково до даних задачі 138 задані коефіцієнти прямих витрат праці на випуск 1 од. продукції кожної галузі: 0,2; 0,3; 0,15. Визначити максимально можливий випуск кінцевого продукту у вартісному вираженні, якщо сумарні витрати праці не повинні перевищувати 70 од.

141. Тригалузева балансова модель у вартісному вираженні характеризується матрицею коефіцієнтів прямих витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що для збільшення наступного року валового випуску 1, 2, 3-ї галузей на 1 од. необхідно витратити капіталовкладень: у 1-у галузь — 0,6; в 2-у галузь — 0,2 і в 3-ю галузь — 0,1. Визначити оптимальне розподілення капіталовкладень, що забезпечує максимальний приріст кінцевого продукту в наступного році, якщо розміри капіталовкладень у галузі обмежені числами 100, 50 і 60, а вартості одиниці кінцевого продукту відповідно дорівнюють 1, 5 і 4.

142. Розв'язати задачу 141, якщо встановлено асортиментне обмеження на приріст кінцевого продукту: $\Delta y_1: \Delta y_2: \Delta y_3 = 5 : 1 : 2$.

143. Розглядається тригалузева балансова модель у вартісному вираженні з матрицею коефіцієнтів прямих витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для розширеного відтворення наступного року в кожній з галузей створено додатково знаряддя праці у сумі відповідно 120, 50 та 80 од. Ці величини можна використовувати як капіталовкладення розширеного відтворення галузей наступного року. При цьому відома матриця коефіцієнтів капітальних витрат:

$$K = (k_{ij}) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,05 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

де k_{ij} означає необхідні витрати знарядь праці, створених i -ю галуззю для додаткового випуску продукції j -ї галузі на 1 од. (Всі дані вказані

у грошових одиницях). Визначити оптимальний розподіл капіталовкладень, що забезпечує максимальний сумарний приріст кінцевого продукту за наступних цін на нього: 2, 3, 1.

144. Розв'язати задачу 143 за наступного асортиментного обмеження на приріст кінцевого продукту: $\Delta y_1 : \Delta y_3 = 2 : 1$.

145. Для виготовлення певного сплаву зі свинцю, цинку та олова використовується сировина у вигляді наступних п'яти сплавів з тих же металів, що відрізняються складом та вартістю 1 кг.

Компоненти	Сплав: вміст у %				
	I	II	III	IV	V
Свинець	10	10	40	60	30
Цинк	10	30	50	30	20
Олово	80	60	10	10	50
Вартість	4	4,5	5,8	6,0	7,5

1. Визначити, скільки потрібно взяти сплаву кожного виду, щоб виготовити з мінімальною собівартістю сплав, що містить 20% свинцю, 30% цинку і 50% олова.
2. Вирішити те саме завдання, якщо для нового сплаву задаються такі обмеження: олова від 40 до 60% і цинку від 20 до 30%.
3. Вирішити те ж завдання при наступних обмеженнях на склад сплаву: олова — не більше 40% і цинку — не менше 20%.

146. Для будівництва будинків на 100 будівельних майданчиках вибрано 5 типових проектів. По кожному з проектів відомі: тривалість закладки фундаментів та будівництва решти будівлі у днях, а також житлова площа будинку та вартість 1 кв. м житлової площі.

Тип будинку	I	II	III	IV	V
Фундамент	20	30	35	30	40
Інші роботи	40	20	60	35	25
Житлова площа	3000	2000	5000	4000	6000
Вартість 1 кв. м.	200	150	220	180	200

Паралельно можна вести закладку 10 фундаментів та будівництво 15 будівель.

1. Визначити план будівництва, який забезпечує введення максимальної житлової площі протягом року (300 робочих днів).
2. Вирішити ту ж задачу при додатковому обмеженні: число будинків кожного типу має виявитися не менше ніж 10.
3. Визначити річний план будівництва, що максимізує сумарну житлову площу за додаткової умови, що середня собівартість 1 кв. м не перевищує 180 гр. од.

147. Обробка деталей А, В та С може проводитись на трьох верстатах І, ІІ, ІІІ. У таблиці зазначені норми витрати часу на обробку верстатом відповідної деталі, продажна ціна одиниці деталі (в гр.од.), оплата 1 год. роботи верстата і граничний час роботи верстата.

Верстати	Деталі: норми часу			Оплата	Час роботи верстата
	А	В	С		
І	0,2	0,1	0,05	30	40
ІІ	0,6	0,3	0,2	10	60
ІІІ	0,2	0,1	0,4	20	30
Ціна	10	16	12		

На підставі наступних додаткових вказівок скласти математичну модель та визначення оптимальної виробничої програми, припускаючи в задачах 1) – 5), що будь-яка деталь може вироблятися на будь-якому з верстатів:

- 1) максимум товарної продукції Т;
- 2) максимум сумарного прибутку П;
- 3) мінімум сумарних витрат на обробку S при плані А – 300 шт., В – 500 шт., С – 100 шт.;
- 4) максимум числа комплектів, що включають 3 деталі А, 2 деталі В та 1 деталь С;
- 5) максимум П при заданому асортименті 3:2:1.

148. Для задачі 147 скласти математичну модель з визначення оптимальної виробничої програми, припускаючи в задачах 1) – 5) будь-яка деталь може вироблятися на будь-якому з верстатів і використовуючи наступні критерії:

- 1) максимум сумарного прибутку Π при заданій кількості деталей $A - 200$ шт., $B - 400$ шт., $C - 600$ шт.;
- 2) максимальне завантаження верстатів при заданому асортименті у співвідношенні 3:2:1;
- 3) максимальне число деталей A , B і C при однаковому часі роботи всіх верстатів;
- 4) максимум прибутку Π за додаткових умов, що кожен верстат завантажений виробництвом тільки однієї деталі і що план передбачає виробництво всіх трьох деталей;
- 5) максимум сумарної продуктивності за додаткових умов задачі 4) і рівного часу роботи всіх верстатів.

149. Для завдання 147 скласти математичну модель щодо визначення оптимальної виробничої програми, припускаючи, що кожна деталь при її виготовленні повинна послідовно оброблятися на кожному зі верстатів і використовуючи наступні критерії:

1. Максимум сумарного прибутку Π .
2. Максимум товарної продукції T .
3. Максимум Π за додаткових умов: деталей A не менше 300 од., деталей B не більше 200 од..
4. Максимум T при заданому асортименті 3:2:1.
5. Мінімум сумарних витрат на обробку S при заданому асортименті 1:2:3.

150. Для контролю за роботою космічної ракети використовуються 4 види датчиків, які розміщені на ракеті та результати вимірювань яких реєструються трьома типами наземних реєстраторів-самописців. Кожен датчик визначає одну з характеристик (температура, тиск і т. щ.) і передає результати по окремому каналу зв'язку на будь-який самописець. У наступній таблиці вказані чисельності датчиків та самописців, а також час, що витрачається на включення відповідного каналу зв'язку.

Самописці	Датчики			
	20	40	50	40
70	2	1	5	3
90	3	2	3	4
60	3	4	1	2

Визначити оптимальне закріплення датчиків до реєструючих пристроїв, при якому досягається мінімум сумарних витрат часу на перемикання каналів.

151. З пункту А до пункту В і назад відправляються 4 поїзди згідно з таким розкладом: з А до В: 9^{00} , 12^{00} , 16^{00} і 20^{00} ; з В до А: 10^{00} , 15^{00} , 18^{00} і 22^{00} . Час у дорозі для всіх поїздів однаковий і дорівнює 5 год. Локомотиви, що ведуть поїзди, здійснюють за добу два рейси: один з пункту, до якого локомотив прикріплений, і другий назад з найближчим черговим рейсом. Знайти оптимальне закріплення локомотивів за пунктами А і В, у якому досягається мінімум сумарного часу простою локомотивів Т.

152. Витрата газу в місті характеризується двома величинами: сумарні витрати за рік А та середньомісячні витрати за зимовий період В. Для задоволення потреб у газі можуть бути побудовані газосховища трьох типів I, II, III, для кожного з яких відомі ті ж дві характеристики a_i і b_i . Відомі також капітальні витрати на будівництво кожного газосховища та сумарний обсяг капіталовкладень на організацію газопостачання. Визначити оптимальний план будівництва газосховищ, що забезпечує задоволення потреб у газі за мінімальної його собівартості, за конкретними даними, наведеними в таблиці.

	Типи газосховищ			Усього
	I	II	III	
Річна потреба (продуктивність)	50	100	50	2500
Середньомісячна потреба (продуктивність)	20	30	10	500
Собівартість 1 м ³	1	0,8	0,8	
Капіталовкладення	120	90	180	3600

153. Для задоволення змінного попиту по кварталах застосовується, крім нормального режиму роботи, понаднормова робота в кількості, що не перевищує 25% часу основної роботи та випуску продукції на додатковому обладнанні в кількості не більше ніж 20% від основної продукції. Крім того, надлишок продукції у цьому кварталі може зберігатися у вигляді запасів. Вихідні дані задачі наведені в наступних таблицях:

Квартали	I	II	III	IV
Попит	140	120	200	140
Випуск за нормального режиму роботи	100	80	120	100

Витрати на одиницю продукції			
Норм. роботи	Понаднормові роботи	Додат. обладнання	Зберігання
5	8	10	3

Визначити оптимальний режим роботи підприємства, що задовольняє попит із мінімальними витратами за наступних умов:

- 1) початковий та кінцевий запаси рівні;
- 2) початковий запас дорівнює 20 од., а кінцевий дорівнює нулю;
- 3) початковий запас дорівнює 20 од., а кінцевий не заданий;
- 4) початковий та кінцевий запаси довільні.

154. Підприємство випускає два продукти: 1 і 2, для задоволення попиту b_k^j ($k = 1, 2$), що змінюється за півріччями ($j = 1, 2$). Виготовлення продуктів може проводитися на трьох машинах ($i = 1, 2, 3$), для яких відомий час t_{ik} , що витрачається i -ою машиною на виробництво одиниці k -го продукту і сумарний резерв часу a_i^j , який має i -а машина в j -му півріччі. Відомі також витрати c_k на зберігання одиниці k -го продукту протягом півріччя. Усі зазначені величини наведено у наступній таблиці.

	t_{ik}		a_i^j			b_k^j			c_k
	I	II		I	II		I	II	
1	2	1	1	70	80	1	20	30	3
2	2	3	2	100	60	2	30	40	5
3	4	2	2	120	100				

Визначити оптимальну виробничу програму за умови мінімізації витрат на зберігання.

155. (Задача про постачальника.) Для обслуговування автоперевезень в j -й день тижня потрібно a_j автомобілів. Машини після подорожі повинні пройти профілактичний ремонт. Звичайний ремонт триває 4 дні за витратами 20 гр.од. на машину, терміновий ремонт триває 2 дні за витрат 30 гр.од. на машину. Крім того, можна використовувати для перевезень машини, знявши їх з іншої ділянки, що призведе до втрат 50 гр.од. на машину. Визначити оптимальну тижневу програму підготовки машин, яка мінімізує сумарні витрати автобази, якщо потреби в машинах характеризуються такими даними:

Дні тижня	1	2	3	4	5	6	7
a_j	50	40	70	60	80	40	50

156. (Задача про склад.) Склад ємністю 200 од. товару використовується для зберігання продукції та відпуску товарів у торговельну мережу. Передбачається, що надходження товарів до складу відбувається наприкінці кожного кварталу, а продаж — протягом усього кварталу. Витрати на виготовлення та зберігання, а також відпускна ціна 1 од. товару за кварталами вказані у таблиці.

Квартали	Втрати		Відпускна ціна
	Виготовлення	Зберігання	
I	8	5	20
II	12	4	16
III	10	7	15
IV	15	6	18

Передбачаючи попит необмеженим, визначити оптимальну щоквартальну програму виготовлення, зберігання та продажу товарів, що максимізує сумарний прибуток за рік, за наступних умов:

- 1) початкові запаси дорівнюють нулю;
- 2) початкові та кінцеві запаси дорівнюють нулю;
- 3) початкові та кінцеві запаси рівні 250 од.;
- 4) розв'язати задачу 1) при додатковому обмеженні: щокварталу можна виготовити не більше ніж 500 од.

157. Фермер може продати частину врожаю пшениці і посіяти залишок. При цьому урожай становить 20 ц з га на кожні посіяні 10 кг. Крім того, відомі ціни, за якими він може продати центнер пшениці за 4 послідовні роки (7, 8, 10 та 6 гр.од. відповідно). Визначити оптимальну стратегію для фермера на зазначені 4 роки, за якої буде досягнуто максимального прибутку.

158. (Транспортна задача з проміжними пунктами.) Є всього 5 пунктів ($i = 1, \dots, 5$), що включені до загальної транспортної мережі. Для кожного з пунктів вказано обсяг виробництва a_i та обсяг споживань b_k . Задано також коефіцієнти c_{ik} витрат на перевезення з i -го пункту в k -й. Всі наведені дані відображені в наступній таблиці.

i	k					a_i	b_k
	1	2	3	4	5		
1		7	3	9	4	40	15
2	7		8	4	5	60	100
3	4	2		6	4	20	20
4	5	1	9		7	70	20
5	5	2	9	2		40	30

Скласти оптимальний план перевезень, що мінімізує сумарні витрати.

159. Для обслуговування чотирьох авіаліній є три типи літаків. У наступній таблиці вказано число літаків i -го типу a_i , кількість пасажирів, які відправляються по k -й лінії b_k експлуатаційні витрати на один літак i -го типу на k -й лінії c_{ik} та загальна кількість пасажирів, яке може перевезти за даний період i -й тип літака на k -й лінії λ_{ik} :

	Авіалінії							
	$b_1 = 20\ 000$		$b_2 = 10\ 000$		$b_3 = 15\ 000$		$b_4 = 40\ 000$	
a_i	λ_{i1}	c_{i1}	λ_{i2}	c_{i2}	λ_{i3}	c_{i3}	λ_{i4}	c_{i4}
15	500	5	1200	7	1000	20	2200	12
10	750	9	1800	4	1500	8	330	10
25	1000	6	2450	8	2000	4	4350	5

Визначити оптимальний розподіл літаків по авіалініях, що мінімізує сумарні витрати.

160. У вугільному басейні видобувається вугілля трьох сортів у відносних частках 20%, 60%, 15%. Видобуте вугілля поставляють чотирьом енергетичним установкам. Задано теплотворні здібності кожного з сортів палива (ккал/кг): 2800, 3000, 3500; потреби установок (у млн. ккал): 10, 25, 15, 30 та витрати з видобутку 1 т кожного сорту (у гр. од.): 8, 10, 15. Визначити необхідний обсяг видобутку та розподіл різних сортів вугілля між енергетичними установками за умови мінімізації сумарних витрат.

161. Скласти модель завдання щодо визначення оптимального плану виробництва n типів машин при заданих обсягах $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$ ресурсів, норм витрат a_{ik} ($i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$) i -го ресурсу виробництва однієї k -ї машини, та заданих величинах c_k ($k = 1, \dots, n$) прибутку при реалізації однієї машини k -го типу. Передбачається, що до кінця запланованого періоду не повинно бути незавершеного виробництва.

162. Є m типів машин ($i = 1, \dots, m$) та n видів робіт ($k = 1, \dots, n$), що підлягають виконанню в обсягах $b_1, \dots, b_k, \dots, b_n$. Задано матрицю (λ_{ik}) , де λ_{ik} – продуктивність i -ї машини на k -й роботі, матрицю (c_{ik}) , де c_{ik} – собівартість виконання одиниці k -ї роботи машиною i -го типу, та

вартість d_i однієї машини i -го типу. Скласти математичну модель завдання щодо визначення оптимального машинного парку (тобто кількість машин кожного типу) та оптимального його розподілу за зазначеними роботами за умови мінімізації сумарної вартості (машинного парку та робіт, що виконуються).

Вказівка. Ввести два види змінних: y_i – загальна кількість машин i -го типу та x_{ik} – кількість машин i -го типу, що використовуються на k -й роботі; останні можуть і не бути цілими, якщо виробництво машини λ_{ik} не кратна обсягу роботи b_k .

163. Є судна m типів у кількостях $q_1, \dots, q_i, \dots, q_m$, на кожному з яких є n вантажних ємностей ($k = 1, \dots, n$) з вантажопідйомністю d_{ik} (деякі d_{ik} можуть дорівнювати нулю). Підлягають перевезенню p видів вантажів в кількості $b_1, \dots, b_j, \dots, b_p$. Скласти математичну модель завдання на вибір оптимального складу судів, якщо витрати на експлуатацію одного судна i -го типу рівні c_i .

164. Є n маршрутів, по кожному з яких необхідно здійснити b_k рейсів ($k = 1, \dots, n$) та m типів автомашин, кожна з яких може бути використана протягом a_i г. ($i = 1, \dots, m$). На виконання i -ю машиною рейсу по k -му маршруту потрібно t_{ik} год при витратах c_{ik} гр.од. Скласти модель завдання оптимального розподілу машин за маршрутами.

165. Потрібно розпиляти a колод, довжиною кожна в 10 м, на бруси трьох розмірів: 3,5; 4,5 і 5 м, які мають бути виготовлені в асортименті 2 : 1 : 1. Скласти модель для визначення оптимального плану розпилу з умови максимального використання кожної колоди.

166. (Завдання про оптимальне призначення.) Є n робіт ($k = 1, 2, \dots, n$) та m механізмів ($i = 1, \dots, m$), здатних виконувати ці роботи. Задано матрицю (c_{ik}) , елементи якої c_{ik} характеризують ефективність виконання i -м механізмом k -ї роботи. При цьому як додаткову умову приймають, що кожен механізм може бути використаний тільки на одній роботі і кожна робота може виконуватися тільки одним механізмом. Скласти модель завдання оптимального розподілу механізмів.

167. Скласти модель завдання щодо визначення оптимального порядку обробки шести деталей ($k = 1, \dots, 6$) на двох верстатах ($i = 1, 2$) за умови, що кожна деталь спочатку обробляється на 1-му, потім на 2-му верстаті з наступними даними про час обробки t_{ik} на кожному верстаті:

i	t_{ik}					
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
1	5	12	4	20	18	14
2	9	12	15	6	12	5

168. Для задоволення попиту q споживачів, в кількості $b_1, \dots, b_i, \dots, b_q$ одиниць продукції можуть бути частково використані наявні підприємства-постачальники, а частково підприємства, що реконструюються або знову будуються. Реальні або проєктовані виробничі потужності цих підприємств складають $a_1, \dots, a_i, \dots, a_p$. Задано матрицю (c_{ik}) транспортних витрат на доставку продукції та вектор, $C = c_1, \dots, c_i, \dots, c_p$, де c_i — виробничі витрати на одиницю продукції. Крім того ще відомі «фіксовані» витрати d_i пов'язані з реконструкцією або будівництвом нових підприємств (частка загальних капіталовкладень, розрахована на планований період, виходячи із загального терміну окупності). Ці фіксовані витрати $d_i = 0$, якщо $a_i = 0$, тобто якщо i -й постачальник у плані не передбачається, і $d_i > 0$, якщо $a_i > 0$. Для наявних підприємств відповідне $d_i = 0$, незалежно від a_i . Скласти модель завдання визначення оптимального плану розміщення виробництва та транспортування продукції за умови мінімізації сумарних витрат.

Вказівка. Ввести альтернативні змінні

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_i = 0, \\ 1, & \text{якщо } a_i > 0, \end{cases}$$

які увійдуть в обмеження по рядках та цільову функцію.

169. Загальну суму капіталовкладень S необхідно розподілити між q об'єктами ($k = 1, \dots, q$), потреби яких вимірюються сумами $b_1, \dots, b_k, \dots, b_q$, а очікувані прибутки $c_1, \dots, c_i, \dots, c_q$. На кожен об'єкт капіталовкладення або виділяються у необхідній сумі, або зовсім не виділяються. Скласти модель завдання цілісного програмування, що полягає в оптимальному розподілі капіталовкладень.

170. Чотири підприємства можуть виробляти продукцію в термін в кількості 160, 250, 390, 200 од. та додатково, використовуючи понаднормовий час, у кількостях 40, 50, 110, 50 од. При цьому витрати на виробництво одиниці продукції на підприємствах становлять 30, 50, 40, 35 — при роботі у термін і відповідно на 50% вище при роботі в понаднормовий час. Продукція має бути доставлена чотирьом споживачам у кількості 380, 250, 400 та 200 од. Транспортні витрати c_{ik} на перевезення одиниці продукції від i -го підприємства ($i = \overline{1, 4}$) k -му споживачеві ($k = \overline{1, 4}$) задані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 40 & 35 \\ 30 & 40 & 30 & 20 \\ 25 & 45 & 30 & 40 \\ 42 & 36 & 28 & 34 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальну виробничу програму підприємств та оптимальний план перевезень.

Вказівка. Крім звичайних змінних x_{ik} для позначення перевезень від i -го підприємства k -му споживачеві, ввести додаткові змінні x_i , що виражають сумарний випуск продукції i -го підприємства.

171. Винайти оптимальний розподіл загальної суми капіталовкладень в 120 000 000 гр. од. для будівництва трьох підприємств. При цьому величина віддачі (в млн.гр.од.) до кінця року на кожен млн. гр. од. капіталовкладень залежить не тільки від підприємства, а й від величини відпущених йому коштів, спадаючи зі зростанням останніх (у зв'язку з труднощами щодо їх освоєння). Ці залежності представлені в таблиці.

Підприємства	Розмір кап.вкл.	Віддача	Розмір кап.вкл.	Віддача	Розмір кап.вкл.	Віддача
I	до 15	1,5	15-30	0,5	вище 30	0
II	до 20	1,0	20-40	0,4	40-50	0,2
III	до 10	1,2	10-15	1,0	15-30	0,5

172. Визначити місце будівництва заводу між двома пунктами збуту, відстань між якими 100 км. і розмір поставок до кожного з пунктів.

Валовий випуск продукції заводу становить 150 од., а залежність продажної ціни одиниці продукції від кількості продукції, що поставляється x_i ($i = 1, 2$) у кожен із пунктів збуту і витрат за перевезення одиниці виробленої продукції від відстані y_i між заводом і пунктом збуту задаються у таблиці.

Пункти збуту	Ціна продажу (гр.од./од.)	Витрати (гр.од./од.)
1	$15 - 0,1x_1$	$1,5 + 0,1y_1$
2	$12 - 0,08x_2$	$1,5 + 0,05y_2$

173. Підприємство може випускати три види продукції А, Б і В, маючи для цього ресурси сировини в 1000 од., що витрачається в кількості 5, 2, 5 і 2 од. відповідно на кожну одиницю продукції А, Б і В. Прибуток, одержуваний підприємством на кожну одиницю продукції, залежить від виду продукції та від загальної величини витрачених на нього ресурсів згідно з такими даними:

Витрати ресурсів	А		Б		В	
	до 100	100-200	до 200	200-400	до 300	300-600
Прибуток	5	3	10	6	4	2

Визначити оптимальний план випуску продукції.

174. Випуск продукції може здійснюватися двома технологічними режимами, витрати при кожному з яких відповідно дорівнюють $21x_1^{\frac{4}{3}}$ і $4x_2^{\frac{3}{2}}$, де x_1 і x_2 — обсяг продукції, яка обробляється відповідно по 1-му та 2-му технологічним режимам відповідно. При цьому другий технологічний режим передбачає використання привізної сировини та пов'язаний з додатковими витратами на транспортування у сумі $400x_2^{\frac{1}{2}}$. Визначити оптимальне використання обох технологічних режимів, що забезпечують загальний випуск продукції в кількості 100 од.

175. Визначити оптимальний розмір партії сировини, що закуповується через різні проміжки часу, якщо річна потреба в ньому становить Q од., витрати сировини рівномірні, річні витрати на зберігання одиниці сировини α та витрати на закупівлю нової партії β .

Вказівка. Якщо партія розміром x витрачається рівномірно протягом року, то середньорічний запас сировини дорівнює $x/2$.

176. Розв'язати задачу 175, якщо місткість складу для зберігання запасів не перевищує D .

177. Визначити оптимальну програму випуску двох видів продукції з урахуванням обмежених ресурсів сировини (120 кг), обладнання (300 верстат-год.) та електроенергії (280 квтч.) за наступних норм витрат на одиницю продукції: сировини 3 та 2 кг/од., електроенергії 4 та 7 квтч. і обладнання $50 - 5x_1$ і $20 - 4x_2$, де x_1 і x_2 — шукана кількість одиниць, що виробляються 1-го та 2-го виду.

178. Розглядається тригалузева модель економіки з технологічною матрицею (a_{ik}) ($i = 1, 2, 3$ і $k = 1, 2, 3$), де a_{ik} — коефіцієнти прямих витрат. Задані коефіцієнти прямих витрат праці t_k і капіталовкладень c_k , загальний обсяг трудових ресурсів T , потреби в кінцевому продукті b_i , ціни на продукти, що імпортуються α_i і на експортовані продукти $\beta_i = \gamma_i - \delta_i y_i$, де y_i — розмір експорту i -го продукту і максимально допустимий дефіцит зовнішньої торгівлі D (тобто різниця між сумарною вартістю імпорту та експорту). Скласти математичну модель щодо визначення валового випуску продукції, обсягу експорту та імпорту, у яких потрібно мінімум капіталовкладень.

179. Підприємство електронної промисловості випускає дві моделі радіоприймачів, причому кожна модель виробляється на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії — 60 виробів, другої лінії — 75 виробів. На радіоприймачі першої моделі витрачається 10 однотипних елементів електронних схем, на радіоприймачі другої моделі — 8 таких же елементів. Максимальний добовий запас елементів дорівнює 800 одиницям. Прибутки від реалізації одного радіоприймача першої та другої моделей дорівнюють 30 і 20 гр. од. відповідно. Визначте оптимальні добові обсяги виробництва першої та другої моделей.

180. Процес виготовлення двох видів промислових виробів полягає у послідовній обробці кожного з них на трьох верстатах. Час використання цих верстатів для цих виробів обмежено 10 год. на добу. Час обробки та прибуток від продажу одного виробу кожного виду наведено

у таблиці. Знайдіть оптимальні обсяги виробництва виробів кожного виду.

Виріб	Час обробки одного виробу (хв)			Питомий прибуток
	верстат 1	верстат 2	верстат 3	
1	10	6	8	2 гр. од.
2	5	20	15	3 гр. од.

181. Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійні мережі. Витрати на рекламу у бюджеті фірми обмежені величиною 1000 гр.од. у місяць. Кожна хвилина радіореклами коштує 5 гр.од., а кожна хвилина телереклами — в 100 гр.од. Фірма хотіла б використовувати радіомережу принаймні вдвічі частіше, ніж мережу телебачення. Досвід минулих років показав, що обсяг збуту, який забезпечує кожна хвилина телереклами, у 25 разів більший за збут, що забезпечується однією хвилиною радіореклами. Визначте оптимальний розподіл фінансових коштів, які щомісяця відпускаються на рекламу, між радіо- та телерекламою.

182. Фірма виробляє два види продукції — A та B . Обсяг збуту продукції виду A становить не менше 60% загального обсягу реалізації продукції обох видів. Для виготовлення продукції A та B використовується та сама сировина, добовий запас якої обмежений величиною 100 кг. Витрата сировини на одиницю продукції A становить 2 кг, а на одиницю продукції B — 4 кг. Ціни продукції A та B рівні 20 і 40 гр.од. відповідно. Визначте оптимальний розподіл сировини для виготовлення продукції A та B .

183. Фірма випускає ковбойські капелюхи двох фасонів. Трудомісткість виготовлення капелюха фасону 1 удвічі вище трудомісткості виготовлення капелюха фасону 2. Якби фірма випускала тільки капелюхи фасону 1, то добовий обсяг виробництва міг би становити 500 капелюхів. Добовий обсяг збуту капелюхів обох фасонів обмежений діапазоном від 150 до 200 штук. Прибуток від продажу капелюха фасону 1 дорівнює 8 гр.од., а фасону 2 — 5 гр.од. Визначте, скільки капелюхів кожного фасону слід виготовляти, щоб максимізувати прибуток.

184. Вироби чотирьох типів проходять послідовну обробку на двох верстатах. Час обробки одного виробу кожного типу на кожному станку наведено в таблиці.

Верстат	Час обробки одного виробу (год.)			
	тип 1	тип 2	тип 3	тип 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одного виробу кожного типу визначаються як величини, що прямо пропорційні часу використання верстатів (в машино-годинах). Вартість машино-години становить 10 гр.од. для верстата 1 та 15 гр. од. — для верстата 2. Допустимий час використання верстатів для обробки виробів всіх типів обмежений такими значеннями: 500 машино-годин — для верстата 1 та 380 машино-годин для верстата 2. Ціни виробів типів 1, 2, 3 та 4 рівні 65, 70, 55 та 45 гр.од. відповідно. Для наведених умов сформулюйте завдання максимізації сумарного чистого прибутку.

185. Завод випускає вироби трьох моделей I, II та III. Для їх виготовлення використовуються два види ресурсів A та B , запаси яких становлять 4000 та 6000 одиниць відповідно. Витрата ресурсів на один виріб кожної моделі наведено в таблиці.

Ресурс	Витрати ресурсу на один виріб цієї моделі		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

Трудомісткість виготовлення виробу моделі I удвічі більша, ніж виробу моделі II, і втричі більша, ніж виробу моделі III. Чисельність робітників заводу дозволяє випускати 1500 виробів моделі I. Аналіз умов збуту показує, що мінімальний попит продукції заводу становить 200, 200 і 150 виробів моделей I, II і III відповідно. Однак співвідношення випуску виробів моделей I, II та III має дорівнювати 3:2:5. Питомий прибуток від реалізації виробів моделей I, II і III становить 30, 20 і 50 гр. од. відповідно. Сформулюйте для цих умов завдання визначення обсягів випуску виробів кожної моделі, за яких прибуток буде максимальним.

186. Грошові кошти можуть бути використані для фінансування двох проектів. Проект A гарантує отримання прибутку на суму 0,7 гр.од на 1 вкладену гр.од. через рік. Проект B гарантує отримання прибутку на суму 2 гр. од. на кожному інвестовану гр.од., але за два роки. При фінансуванні проекту B період інвестицій має бути кратним двом рокам. Як слід розпорядитися капіталом 100 000 гр.од., щоб максимізувати сумарну величину прибутку, яку можна одержати через три роки після початку інвестицій? Сформулюйте це завдання як завдання ЛП.

187. Мінімально необхідна кількість автобусів в i -у годину доби дорівнює b_i ($i = 1, 2, \dots, 24$). Кожен автобус безперервно використовується на лінії протягом 6 год. Перевищення числа автобусів у період i -ї години порівняно з величиною b_i приводить до додаткових витрат на одну машину-годину у розмірі c_i . Сформулюйте це завдання як завдання мінімізації загального розміру додаткових витрат.

188. Розгляньте завдання розподілу літаків трьох типів за чотирма маршрутами. Характеристики парку літаків та руху авіалініями наведені в таблиці.

Тип літака	Місткість (число пасажирів)	Кількість літаків	Кількість рейсів на добу на кожному маршруті			
			1	2	3	4
1	50	6	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Добовий пасажиропотік			100	200	90	120

Вартісні авіаперевезень наведені у наступній таблиці.

Тип літака	Експлуатаційні витрати на 1 рейс за цим маршрутом (гр. од.)			
	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Збитки від незадоволеного попиту (на одного пасажера, якого не перевезли)	40	50	45	70

Сформулюйте завдання ЛП, в якому потрібно мінімізувати суму експлуатаційних витрат та втрат через незадоволений попит.

189. Для отримання двох сплавів A та B використовуються чотири виду металу I, II, III та IV. Вимоги до вмісту цих металів у сплавах A та B наведені у першій таблиці. Характеристики та запаси руд, з яких отримують метали I, II, III та IV, зазначені у другій таблиці.

Сплав	Вимоги до вмісту металів
A	Не більше 80% металу виду I Не більше 30% металу виду II Не менше 50% металу виду IV
B	Від 40% до 60% металу виду II Не менше 30% металу виду III Не більше 70% металу виду IV

Руда	Максимальний запас (т)	Склад (%)					Ціна (гр. од./т.)
		I	II	III	IV	Інші компоненти	
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Нехай ціна 1 т сплаву A дорівнює 200 гр.од., а 1 т металу B — 300 гр.од. Сформулюйте завдання ЛП, що максимізує прибуток від продажу сплавів A та B .

Вказівка: позначте через x_{ijk} кількість тонн металу i , що отримується з руди j і використовуваного для виготовлення сплаву k .

190. Потрібно розподілити наявні кошти за чотирма альтернативними варіантами. Гра має три результати. У таблиці наведено розміри виграшу (чи програшу) на кожному гр.од., вкладену у відповідний альтернативний варіант, для кожного з трьох результатів.

Вихід	Виграш (або програш) на 1 ден. од., вкладену в даний варіант			
	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

Гравець має 500 гр.од., причому використовувати їх у грі можна лише один раз. Точний результат гри заздалегідь невідомий, і, з огляду на цю невизначеність, гравець вирішив розподілити гроші так, щоб максимізувати *мінімальну* віддачу від вкладеної суми. Сформулюйте це завдання як завдання ЛП.

Примітка. Віддача від вкладених коштів може бути негативною, нульовою або додатною.

191. Три нафтопереробні заводи з максимальною щоденною продуктивністю в 6, 5 і 8 млн. літрів бензину постачають три бензосховища, попит яких становить 4, 8 і 7 млн. літрів. Бензин транспортується до бензосховищ по трубопроводу. Вартість перекачування бензину на кілометр, розрахована з урахуванням довжини трубопроводу, становить 0,01 гр.од. на 100 л. У таблиці відстаней, наведеній нижче, показано, що завод 1 не пов'язаний із сховищем 3. Сформулюйте відповідне транспортне завдання.

Заводи	Бензосховища		
	1	2	3
1	120	180	—
2	300	100	80
3	200	250	120

192. Нехай у задачі 191 продуктивність нафтопереробного заводу 3 знизилася до 6 млн. літрів. Крім того, обов'язково повне задоволення попиту бензосховища 1, а недопоставки до сховищ 2 і 3 штрафуються 0.05 гр.од. за кожний літр. Сформулюйте відповідне транспортне завдання.

193. Нехай у задачі 191 щоденний попит сховища 3 падає до 4 млн. літрів. Надлишок продукції на нафтопереробних заводах 1 і 2 повинен переправлятися на вантажівках до інших сховищ. Відповідні середні транспортні витрати становлять 1,5 гр. од. за 100 літрів при перевезенні із заводу 1 та 2,2 гр. од. — під час перевезення із заводу 2. Завод 3 може використовувати надлишок бензину для потреб свого хімічного виробництва. Сформулюйте відповідне транспортне завдання.

194. Автомобілі перевозяться на трейлерах із трьох центрів розподілу п'ятьма продавцями. Вартість перевезення розрахована на основі відстаней між вихідними пунктами та пунктами призначення. Вартість не залежить від того, наскільки повно завантажується трейлер. У наведеній нижче таблиці вказані відстані між центрами розподілу та продавцями, а також величини, що характеризують щомісячний попит та обсяг виробництва, що обчислюються кількістю автомобілів.

Центри розподілу	Продавці					Обсяги поставок
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	400
2	50	70	60	65	80	200
3	40	90	100	150	130	150
Постачання	100	200	150	60	140	

Один трейлер може перевозити до 18 автомобілів. Сформулюйте транспортне завдання, беручи до уваги той факт, що вартість розрахунку 1 кілометр шляху, пройденого трейлером, дорівнює 10 гр.од.

195. Розв'яжіть задачу розподілу верстатів чотирьох різних типів за п'ятьма типами робіт. Нехай є 25, 30, 20 та 30 верстатів відповідних типів. П'ять типів робіт характеризуються 20, 20, 30, 10 та 25 операціями відповідно. На верстаті 4 не може виконуватися робота 4. Виходячи

з коефіцієнтів вартості операції, представлених у таблиці, побудуйте модель для оптимального розподілу верстатів по роботах.

Тип верстатів	Тип робіт				
	1	2	3	4	5
1	10	2	3	15	9
2	5	10	15	2	4
3	15	5	14	7	15
4	20	15	13	—	8

196. (Завдання про ресторан.) Директор ресторану, складаючи план роботи на чергові N днів, повинен подбати про щоденний запас чистих серветок. Потреба ресторану в серветках на ці N днів дорівнює b_1, b_2, \dots, b_n відповідної може бути задоволена трьома різними способами:

- 1) купівлею нових серветок за ціною $0,01p_1$ гр.од.;
- 2) пранням використаних серветок у пральні з терміном виконання 24 год за ціною $0,01p_2$ гр.од.;
- 3) пранням використаних серветок у пральні з терміном виконання 48 год за ціною $0,01p_3$ гр.од.

Завдання можна сформулювати у вигляді транспортної задачі наступним чином. Є $N + 1$ вихідних пунктів та N пунктів призначення. Один з вихідних пунктів відповідає джерелу надходження нових серветок, решта N вихідних пунктів розглядаються як джерела надходження серветок з пралень наприкінці кожного з N днів. Пункти призначення відповідають кожному з N днів запланованого періоду. Коефіцієнт вартості «перевезення» дорівнює $0,01p_1$ якщо постачання здійснюється з вихідного пункту, що відповідає новим серветкам; $0,01p_2$, якщо серветки надходять із пральні з 24-х годинним терміном виконання; $0,01p_3$ — якщо термін виконання 48 год. Можливий обсяг поставок нових серветок повинен дорівнювати сумарній величині попиту за всі дні, оскільки цілком ймовірно, що весь попит припаде на нові серветки. Крім того, величина пропозиції в кінці дня i повинна дорівнювати попиту в той же день.

Сформулюйте відповідне транспортне завдання.

197. У наступній транспортній задачі сумарний попит перевищує сумарний обсяг виробництва. Нехай штрафи за недопостачання одиниці продукції до пунктів призначення 1, 2 та 3 дорівнюють 5, 3 та 2 відповідно. Знайдіть оптимальне рішення.

Пункти виробництва	Пункти призначення			Об'єми виробництва
	1	2	3	
1	5	1	7	10
2	6	4	6	80
3	3	2	5	15
Попит обсягу	75	20	50	

198. Нехай у задачі 197 не введено штрафів і попит пункту призначення 3 має бути повністю задоволений. Сформулюйте нову задачу.

199. У наступній незбалансованій транспортній задачі призначається плата за зберігання кожної одиниці вантажу, який не був вивезений з вихідного пункту I . Нехай коефіцієнти вартості зберігання вантажу у вихідних пунктах 1, 2 та 3 дорівнюють 5, 4 та 3 відповідно. Знайдіть оптимальне рішення, якщо об'єм вантажу вихідного пункту 2 повинен бути вивезений для того, щоб звільнити місце для нової продукції.

Пункти виробництва	Пункти призначення			Об'єми виробництва
	1	2	3	
1	1	2	1	20
2	0	4	5	40
3	2	3	3	30
Попит обсягу	30	20	20	

200. Розгляньте наступне завдання розподілу чотирьох робітників по чотирьох верстатах. Відповідні коефіцієнти вартості в гр.од. наведено у таблиці. Робочий 1 не може працювати на верстаті 3, а робочий 3 — верстаті 4. Знайдіть оптимальне рішення.

Робочий	Верстат			
	1	2	3	4
1	5	5	—	2
2	7	4	2	3
3	9	3	5	—
4	7	2	6	7

201. Нехай у задачі 200 введено ще один верстат. Відповідні коефіцієнти вартості (гр. од.) для чотирьох робочих рівні 2, 1, 2 і 8. Цей новий верстат може замінювати будь-який із чотирьох, якщо така заміна економічно виправдана. Сформулюйте завдання як завдання призначення та знайдіть оптимальне рішення.

202. Повітряна лінія пов'язує два міста A і B . Екіпаж, що формується в місті A (відповідно B) і що вилітає в місто B (відповідно A), має здійснити зворотний рейс до міста A (відповідно B) у той самий день, або наступного дня. Екіпаж, що формується в A , може бути призначений на зворотний рейс у A , тільки якщо між часом прибуття в B і часом вильоту з B пройшло не менше 90 хв. Завдання полягає у складанні розкладу польотів, що мінімізує сумарний час простоїв усіх екіпажів. Розв'яжіть це завдання про призначення, використовуючи наведений нижче розклад.

Рейс	Звідки A	Куди B	Рейс	Звідки B	Куди A
1	6:00	8:30	10	7:30	9:30
2	8:15	10:45	20	9:15	11:15
3	13:30	16:00	30	16:30	18:30
4	15:00	17:30	40	20:00	22:00

203. Розгляньте транспортне завдання, в якому дві фабрики забезпечують певною продукцією три склади роздрібного продажу. Продуктивність фабрик 1 і 2 дорівнює 200 та 300 одиниць, а попит на складах 1, 2 та 3 становить 100, 200 та 50 одиниць відповідно. Замість безпосередньо везти продукцію з фабрик на склади, вирішено досліджувати можливості перевезень через проміжні пункти. Знайдіть оптимальний план перевезень. Коефіцієнти вартості перевезень наведено в наступній таблиці.

		Фабрики		Склади		
		1	2	1	2	3
Фабрики	1	0	6	7	8	9
	2	6	0	5	4	3
Склади	1	7	8	0	5	1
	2	1	5	1	0	4
	3	8	9	7	6	0

204. (Задача про доставку.) Центральний склад забезпечує доставку замовлених товарів до m різних пунктів призначення. Кожен із пунктів обслуговується протягом одного циклу доставки. Існує безліч допустимих маршрутів, якими потрібно розподілити транспортні засоби, причому кожен транспортний засіб може забезпечити доставку не більше ніж r замовлень. Припустимо, що є n допустимих маршрутів, кожен із яких дозволяє обслужити певну підмножину пунктів призначення. Нехай c_j — вартість доставки за j -м маршрутом. Можливі ситуації, коли через один і той же пункт призначення проходять два або більше транспортні засоби. Побудуйте модель цілісного програмування, що відповідає умовам цього завдання.

205. (Квадратична задача про призначення.) Потрібно розмістити n виробничих агрегатів на n різних виробничих ділянках. Кількість матеріалів, що транспортуються між агрегатами i і j дорівнює d_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$); питомі витрати на транспортування матеріалів з ділянки p на ділянку q становлять c_{pq} ($p, q = \overline{1, n}$). Побудуйте модель цілісного програмування, що мінімізує сумарні витрати на транспортування.

206. Розгляньте завдання про завантаження літака предметами п'яти різних типів. Вага w_i , об'єм v_i , а також вартість r_i одного предмета кожного типу наведені в таблиці.

i	w_i	v_i	r_i
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

Максимальна вантажопідйомність та обсяг літака дорівнюють $W = 112$ і $V = 109$ відповідно. Потрібно визначити набір предметів, що забезпечує максимальну вартість вантажу. Побудуйте модель цілісного програмування.

207. У задачі розподілу капіталовкладень розглядається п'ять проектів, які можуть бути здійснені протягом наступних трьох років. Очікувані

величини прибутку від реалізації кожного з проектів та розподіл необхідних капіталовкладень за роками (у тис.гр.од.) наводяться в таблиці.

Проект	Розподіл капіталовкладень			Прибуток
	рік 1	рік 2	рік 3	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Максимальний обсяг капіталовкладень	25	25	25	—

Передбачається, що кожен затверджений проект буде реалізовано за трирічний період. Потрібно вибрати сукупність проектів, якій відповідає максимум сумарного прибутку. Сформулюйте завдання цілісного програмування з булевими змінними та розв'яжіть його за допомогою адитивного алгоритму.

208. Розглядається завдання виробничого планування, пов'язане з виготовленням 2000 одиниць певної продукції на трьох верстатах. Величини накладних витрат, витрат на виробництво одиниці продукції та максимальної продуктивності для кожного зі верстатів наведені нижче у таблиці. Потрібно мінімізувати сумарні витрати виробництва зазначеної кількості одиниць продукції.

Верстат	Накладні витрати	Витрати виробництва одиниці продукції	Продуктивність (в одиницях продукції)
1	100	10	600
2	300	2	800
3	200	5	1200

Сформулюйте відповідне завдання цілісного програмування та знайдіть його оптимальне рішення.

Рекомендована література

1. **Жданова О. Г., Попенко В. Д., Сперкач М. О.** *Дослідження операцій. Побудова економіко-математичних моделей. Практикум [Електронний ресурс]: навчальний посібник.* Київ: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2019. – 79 с. – Режим доступу до ресурсу: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/32223>
2. **Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П.** *Дослідження операцій. Збірник задач: 2-е вид.* К.: Видавничий Дім «Слово», 2014. 412 с.
3. **Зайченко Ю. П.** *Дослідження операцій. 7-ме вид.* Київ: Вища шк., 2006. 816 с.
4. **Лисенко О. І., Алексеева І.В.** *Дослідження операцій. Конспект лекцій.* К: НТУУ «КПІ», 2016. – 196 с.
5. **Frederick S. Hillier & Gerald J. Lieberman.** *Introduction to Operations Research, 10th Edition.* McGrawHill: Boston MA, 2014. 550 p.
6. **Taha, Hamdy A.** *Operations Research: An Introduction, 10th Edition,* Pearson, 2016. 912 p.

Навчальне видання

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

ЕЛЕКТРОННИЙ МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

до самостійної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика,
122 Комп'ютерні науки, 126 Інформаційні системи і технології

Електронне практичне видання

Укладачі:

**Кічмаренко Ольга Дмитрівна
Стехун Анжела Олексіївна**

В авторській редакції

Затвердж. авт. 12.07.2024. Шрифт Times New Roman.
Системні вимоги: операційна система сумісна з програмним забезпеченням
для читання файлів формату PDF.
Обсяг 0,9 МБ. Зам. № 2807.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Університетська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua