

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Динамічна задача про дію зосередженого  
навантаження на пружний чверть простір»**

«The dynamical problem on acting concentrated load on the elastic quarter space»

Виконав: студент денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
Бондаренко Кирило Сергійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Фесенко  
Г. О.

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, ст. викл. Жу-  
равльова З.Ю.

Рекомендовано до захисту:  
Протокол засідання кафедри  
№ \_\_\_ від «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ р.  
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_  
Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_ р.  
Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
Голова ЕК

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# ЗМІСТ

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Основна частина</b>	<b>5</b>
1.1 Постановка задачі. . . . .	5
1.2 Зведення до векторної одновимірної задачі . . . . .	7
1.3 Побудова оригіналів розв'язків. . . . .	10
1.4 Випадок усталених коливань. . . . .	11
1.5 Зміщення для великих частот коливань. . . . .	13
1.6 Перетворення інтеграла $J_{s,1}^{A,B}(x, y)$ з (1.26). . . . .	14
1.7 Вирази для зміщення у далекому полі. . . . .	16
1.8 Результати чисельних розрахунків. . . . .	17
<b>Висновки</b>	<b>21</b>
<b>Список літератури</b>	<b>22</b>

## ВСТУП

Побудовано хвильове поле пружного чвертьпростору, коли одну границю жорстко закріплено, а на іншій по прямокутній ділянці діє нестационарне нормальне стискаюче навантаження в початковий момент часу. Інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є застосовано послідовно до рівнянь руху та до граничних умов, на відміну традиційним підходам, коли інтегральні перетворення застосовуються до подання розв'язків через гармонічні функції. Це приводить до одновимірної векторної однорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою матричного диференціального числення. Поле вихідних переміщень знайдено після застосування обернених інтегральних перетворень. Для випадку стаціонарних коливань вказано спосіб обчислення у розв'язку квадратур у ближній зоні навантаження. Для аналізу коливань у віддаленій зоні побудовано асимптотичні формули. Досліджено амплітуду вертикальних коливань в залежності від форми ділянки навантаження, власних частот коливань та матеріалу середовища.

Під час побудови та експлуатації споруд та конструкцій з'являються динамічні або статичні навантаження, через які у пружних тілах виникають та концентруються напруження. Ці напруження можуть деформувати та навіть зламати конструкцію. Тому треба їх враховувати під час будівництва. Через це у математичній фізиці з'являються задачі теорії пружності. Ці задачі розглядалися у статичних та динамічних постановці багатьма авторами для різних об'єктів за різних початкових та граничних умов [1, 2, 5, 9]. Такий об'єкт, як чверть простору, можна розглядати як модель перед розв'язанням подібних задач для нескінченного або напівнескінченного шару, а потім для плити. Чверть простору - це особливий випадок просторового клину. Зокрема, для другої крайової задачі для просторового клину точний розв'язок було побудовано Я. С. Уфлянд [12]. В іншій роботі [13] було побудовано точний розв'язок для випадку, коли задані нормальні переміщення та тангенціальне напруження. Точний розв'язок мішаної задачі теорії пружності для чверті простору у статичній постановці знайшов Г. Я. Попов у [5]. Важливо, що при розв'язанні цієї задачі був використаний новий метод, заснований на поданні нових функцій, які є сумою похідних

переміщень [6]. Цей метод було успішно застосовано до розв'язання задачі Лемба [7]. Також за допомогою цього методу знаходили розв'язок для однорідних та неоднорідних задач теорії пружності для напівкінцевого шару [6]. Розробкою методів для задач теорії пружності для різних об'єктів, зокрема для чверті простору, також займався А. М. Александров в [14]. Загальний розв'язок для проблеми пружного контактного простору з чвертю було представлено в [16]. Динамічні напруження в пружному напівпросторі були проаналізовані в [18]. Проблема площинного контакту на тиск штампа з прямокутною основою на шорсткий пружний напівпростір розглядалася в [17].

На основі результатів [5, 7], а також методу подання рівнянь руху в термінах двох спільно та одного самостійно розв'язуваних рівнянь, запропонованого в [6], метою цієї роботи є отримати точні формули переміщень, які з'являються в чверті простору, коли динамічне стискаюче навантаження діє на одну з його граней.

# РОЗДІЛ 1

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

Постановка задачі.

Розглянемо пружний чверть простір  $x > 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 < z < \infty$ . У момент часу  $t = 0$  динамічне нормальне навантаження  $\sigma_z(x, y, z, t)|_{z=0} = -p(x, y)P(t)$  задано на межі  $z = 0$  по прямокутній зоні  $0 \leq x \leq A$ ,  $-B \leq y \leq B$ . Дотичне напруження у всій площині  $XOY$  дорівнює нулю. Грань  $x = 0$  жорстко закріплена. Потрібно знайти нестационарні зміщення точок чверті простору  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$  при нульових початкових умовах. Постановка призводить до наступних крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, 0, t) &= -p(x, y)P(t), \quad 0 \leq x \leq A; \quad -B \leq y \leq B \\ \sigma_z(x, y, 0, t) &= 0, \quad x > A; \quad |y| > B \\ \tau_{zx}(x, y, 0, t) &= 0, \quad \tau_{zy}(x, y, 0, t) = 0 \\ u(0, y, z, t) &= v(0, y, z, t) = w(0, y, z, t) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Рівняння руху у векторній формі мають вигляд [7]

$$\Delta(u, v, w) + \frac{2}{\kappa - 1} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{G} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \tag{1.2}$$

Де  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\kappa = 3 - 4\mu$ ,  $\mu$  — коефіцієнт Пуассона,  $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  — об'ємне розширення,  $\rho$  — щільність матеріалу середовища,  $G$  — модуль зсуву;  $\frac{\rho}{G} = \frac{1}{c^2}$ ,  $c$  — швидкість поширення хвилі.

Для отримання розв'язку поставленої задачі необхідно отримати розв'язок від зосередженої в довільній точці межі  $z = 0$  динамічної сили, а потім розподілити її по необхідній ділянці:

$$p(x, y) = \delta(x - a)\delta(y - b)$$

Перейдемо до безрозмірної системи координат

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \tilde{y} = \frac{(y-b)}{a}, \tilde{z} = \frac{z}{a}, \tilde{t} = \left(\frac{1}{c^2}\right)t \quad (1.3)$$

Далі "хвилі" опускаємо, маючи на увазі заміну (1.3) і введемо нові функції [6]

$$\begin{aligned} Z(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}v(x, y, z) \\ \tilde{Z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}v(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y}u(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тоді система рівнянь руху (1.2) і граничні умови (1.1) враховуючи нові функції переписуть у вигляді:

$$\begin{cases} \Delta W + \frac{2}{\kappa-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( Z + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \Delta Z + \frac{2}{\kappa-1} \nabla_{xy} \left( Z + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\Delta \tilde{Z} = \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mu Z(x, y, 0, t) + (1-\mu) \frac{\partial}{\partial z} W(x, y, 0, t) &= -\frac{\kappa-1}{4Ga} \delta(x-1) \delta(y) P(t) \\ \nabla_{xy} W(x, y, 0, t) + \frac{\partial}{\partial z} Z(x, y, 0, t) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \tilde{Z}(x, y, 0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$u(0, y, z, t) = v(0, y, z, t) = w(0, y, z, t) = 0$$

де  $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Вихідна початкова крайова задача набуває вигляду (1.5)-(1.7) при початкових умовах

$$\left[ W, Z, \tilde{Z} \right] \Big|_{t=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ W, Z, \tilde{Z} \right] \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.8)$$

Після знаходження невідомих функцій  $W, Z, \tilde{Z}$  для відшукування переміщень

$u$  і  $v$  слід розв'язати рівняння Пуассона

$$\nabla_{xy}u = \frac{\partial}{\partial x}Z - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{Z}, \quad \nabla_{xy}v = \frac{\partial}{\partial y}Z + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{Z} \quad (1.9)$$

Зведення до векторної одновимірної задачі

Застосуємо послідовно до (1.5), (1.6) перетворення  $\sin$ -Фур'є за змінною  $x$ , повне перетворення Фур'є по змінній  $y$  і перетворення Лапласа за змінною  $t$  з параметрами  $\alpha, \beta$  і  $p$  відповідно.

$$\begin{bmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} W(x, y, z, t) \\ Z(x, y, z, t) \end{bmatrix} e^{i\beta y} \sin \alpha x e^{-pt} dy dx dt \quad (1.10)$$

Вважаємо також, що додатково виконуються такі умови [5]

$$Z_{\beta}(0, z) = 0, \quad \tilde{Z}_{\beta}(0, z) = 0 \quad (1.11)$$

Функція  $\tilde{Z}_{\alpha\beta p}(z)$  задовольняє однорідній задачі

$$\tilde{Z}_{\alpha\beta p}''(z) - (N^2 + p^2)\tilde{Z}_{\alpha\beta p}(z) = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad \tilde{Z}'_{\alpha\beta p}(0) = 0 \quad (1.12)$$

і тому  $\tilde{Z}(x, y, z, t) \equiv 0$ . Система рівнянь (1.5) та граничні умови (1.7) приймають вигляд

$$\begin{cases} W_{\alpha\beta p}''(z) + \frac{2}{\kappa + 1}Z'_{\alpha\beta p}(z) - N^2\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}W_{\alpha\beta p}(z) - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}p^2W_{\alpha\beta p} = 0 \\ Z_{\alpha\beta p}''(z) - \frac{2}{\kappa - 1}N^2W'_{\alpha\beta p}(z) - N^2\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}Z_{\alpha\beta p}(z) - p^2Z_{\alpha\beta p}(z) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} -N^2W_{\alpha\beta p}(0) + Z'_{\alpha\beta p} &= 0 \\ (3 - \kappa)\mu Z_{\alpha\beta p}(0) + (1 - \mu)W'_{\alpha\beta p}(0) &= -\frac{\kappa - 1}{4Ga} \cdot \sin \alpha \cdot P_p \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$P_p = \int_0^{\infty} P(t)e^{-pt} dt; \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

Для подання системи (1.13) у векторній формі вводиться невідомий вектор трансформант переміщень

$$\vec{\mathbf{y}}(z) = \begin{pmatrix} W_{\alpha\beta p}(z) \\ Z_{\alpha\beta p}(z) \end{pmatrix}$$

а також матриці

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ \frac{-N^2}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже, система (1.13) набуває форми

$$L_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = 0, 0 < z < \infty \quad (1.15)$$

де диференціальний оператор  $L_2$  має вигляд

$$L_2 \vec{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{I} \vec{\mathbf{y}}''(z) + 2\mathbf{Q} \vec{\mathbf{y}}'(z) - N^2 \mathbf{P} \vec{\mathbf{y}}(z) - p^2 \mathbf{T} \vec{\mathbf{y}}(z)$$

Рішення векторного рівняння (1.15) будується на основі рішення матричного рівняння  $L_2 [\mathbf{Y}(z)] = 0$ . Підстановка  $\mathbf{Y}(z) = e^{Nz} \mathbf{I}$  зроблена для формування характеристичної матриці  $\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}s^2 + 2\mathbf{Q}sN^2\mathbf{P} - p^2\mathbf{T}$ . Обернена матриця має вигляд

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} \begin{pmatrix} s^2 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} N^2 - p^2 & -\frac{2s}{\kappa+1} \\ \frac{2s}{\kappa-1} N^2 & s^2 - N^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} - p^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \end{pmatrix}$$

$$s_1 = -\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2}, s_2 = -\sqrt{N^2 + p^2}, s_3 = \sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2}, s_4 = \sqrt{N^2 + p^2}$$

Тут  $s_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) - це корені характеристичного рівняння  $\det[\mathbf{M}(s)] = 0$ .

Розв'язок матричного рівняння будується за формулою [8]

$$\mathbf{Y}_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sz} \mathbf{M}^{-1}(s) ds$$

де  $C$  – це замкнутий контур, що охоплює всі нулі визначника матриці  $\mathbf{M}(s)$ . Залишки на полюсах  $s_3$  і  $s_4$  дають зростаючий різв'язок на нескінченності і тому відкидаються. Залишки на полюсах  $s_1$  і  $s_2$  дають розв'язок, якій спадає на нескінченності. Після обчислення спадне рішення отримує форму

$$\mathbf{Y}_-(z) = \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_1 z} \begin{pmatrix} \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)\Delta_1} & -1 \\ \frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & -\Delta_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_2 z} \begin{pmatrix} -\frac{(\kappa+1)\Delta_2}{(\kappa-1)} & 1 \\ -\frac{(\kappa+1)N^2}{(\kappa-1)} & \frac{N^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \sqrt{N^2 + p^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{N^2 + \frac{p^2(\kappa-1)}{(\kappa+1)}}$$

Розв'язок векторного рівняння (1.15) будується у вигляді

$$\vec{y}(z) = \mathbf{Y}_-(z) \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

де константи  $C_i$ ,  $i = 0, 1$  знаходять, задовольняючи граничні умови (1.14). Таким чином, отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{2N^2}{\Delta_1} \left[ \Delta_1 \Delta_2 - N^2 - \frac{p^2}{2} \right] C_0 + p^2 C_1 = 0 \\ p^2 C_0 + 2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\Delta_2} \left[ \Delta_1 \Delta_2 - N^2 - \frac{p^2}{2} \right] C_1 = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2p^2}{Ga} \sin \alpha \cdot P_p \end{cases}$$

після її розв'язання були знайдені вирази для трансформантів

$$W_{\alpha\beta p}(z) = \frac{\sin \alpha}{Ga} \cdot P_p \frac{\Delta_2}{\tilde{\Delta}} \left[ -2N^2 e^{-\Delta_1 z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 z} \right] \quad (1.17)$$

$$Z_{\alpha\beta p}(z) = \frac{\sin \alpha}{Ga} \cdot P_p \frac{N^2}{\tilde{\Delta}} \left[ -2\Delta_1 \Delta_2 e^{-\Delta_1 z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 z} \right]$$

$$\tilde{\Delta} = 4N^4 + 4N^2 p^2 + p^4 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 \quad (1.18)$$

На основі формул (1.9), (1.12), знайдені трансформанти решти переміщень

$$u_{\alpha\beta p}(z) = -\frac{\alpha}{N^2} Z_{\alpha\beta p}(z), \quad v_{\alpha\beta p}(z) = \frac{i\beta}{N^2} Z_{\alpha\beta p}(z) \quad (1.19)$$

Таким чином, було отримано точне рішення поставленої векторної задачі (1.13) (1.14) у просторі трансформант.

Побудова оригіналів розв'язків.

Після застосування обернених інтегральних перетворень до розв'язку (1.17) було отримано вихідне вертикальне переміщення

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{Ga} \frac{1}{2\pi i} \int_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_2}{\tilde{\Delta}} P_p [-2N^2 e^{-\Delta_1 z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 z}] \sin \alpha e^{i\beta y} \sin \alpha x e^{pt} dp d\beta d\alpha$$

$$l = (\lambda - i\infty, \lambda + i\infty)$$

Використовуючи парність інтегралу та застосовуючи формулу Ейлера, переміщення переписується у форму

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{Ga} \frac{1}{2\pi i} \int_l P_p \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_2}{\tilde{\Delta}} [-2N^2 e^{-\Delta_1 \cdot z} + (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_2 \cdot z}] e^{i\beta y} [e^{-i(x-1)\alpha} - e^{-i(x+1)\alpha}] e^{pt} dp d\beta d\alpha$$

Для того, щоб позбутися подвійного інтегралу за параметрами перетворень Фур'є, було використано відношення, що з'єднує перетворення Фур'є і Ганкеля [10]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \chi_i^2}\right) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} s F(\sqrt{s^2 + \chi_i^2}) \times J_0(s\sqrt{x^2 + y^2}) ds$$

де  $J_0(s)$  - функція Бесселя,  $\chi_1 = p$ ,  $\chi_2 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}p$ . Після спрощення формула переміщення приймає форму

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi Ga} \frac{1}{2\pi i} \int_l P_p \int_0^{\infty} \frac{F(s)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-1)^2 + y^2}) - J_0(s\sqrt{(x+1)^2 + y^2}) \right] e^{pt} ds dp$$

$$F(s) = \sqrt{s^2 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}p^2} \cdot \left[ -4s^2 e^{-\sqrt{s^2+p^2}} + (2s^2 + p^2) e^{-\sqrt{s^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}} \right]$$

$$\Delta_s = 4s^4 + 4s^2p^2 + p^4 - 4s^2\sqrt{s^2 + p^2}\sqrt{s^2 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}p^2}$$

Використовуючи парність функції Бесселя  $J_0(s)$ , продовжимо інтегрування непарним чином до інтервалу  $(-\infty, 0)$

$$W(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi G a} \frac{1}{2\pi i} \int_l \int_{-\infty}^{\infty} P_p \frac{F(s)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-1)^2 + y^2}) - \right. \\ \left. - J_0(s\sqrt{(x+1)^2 + y^2}) \right] e^{pt} ds dp$$

Відповідно до отриманого розв'язку можна знайти переміщення від розподіленого по прямокутній площі навантаження

$$W^{AB}(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi G a} \frac{1}{2\pi i} \int_0^A \int_{-B}^B \int_l \int_{-\infty}^{\infty} P_p \frac{F(s)}{\Delta_s} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) - \right. \\ \left. - J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] e^{pt} ds dp da db \quad (1.20)$$

Формула була записана у вихідній системі координат.

Випадок усталених коливань.

Припустимо, що навантаження, прикладене до площі  $0 < x < A$ ;  $-B < y < B$  над площиною  $XOY$  змінюється відповідно до гармонічного закону  $P(t) = e^{i\omega t}$  і  $p(x, y) = P$ , де  $P$  — постійна інтенсивність навантаження,  $\omega$  — це природна частота коливань. У цьому випадку, підставляючи до побудованого розв'язку (1.20)  $p = i\omega$ , переміщення записується у вигляді

$$W^{AB}(x, y, z; \omega) = \frac{P}{\pi G a} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s; \omega)}{\Delta_{s\omega}} \cdot s \left[ J_0(s\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) - \right. \\ \left. - J_0(s\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}) \right] ds da db \quad (1.21)$$

$$F(s; \omega) = \delta_2 [-2s^2 e^{-\delta_1 z} + (2s^2 - \omega^2) e^{-\delta_2 z}]$$

$$\Delta_{s\omega} = 4s^4 - 4s^2\omega^2 + \omega^4 - 4s^2\delta_1\delta_2 = (2s^2 - \omega^2)^2 - 4s^2\delta_1\delta_2. \quad (1.22)$$

$$\delta_1 = \sqrt{s^2 - \omega^2}, \quad \delta_2 = \sqrt{s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2} \quad (1.23)$$

Оскільки вираз (1.23) включає багатозначні функції [2], вони повинні бути виправлені. А після зрізів, використовуючи методи інтегрування контуру, обчислюється переміщення. Необхідно, щоб із завантаженого прямокутника на грані чверті простору, де застосовується навантаження, енергія виносилася до нескінченності кожним із двох типів можливих хвиль. Ці вимоги дозволяють виправити багатозначні функції  $\sqrt{s^2 - \omega^2}$  и  $\sqrt{s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}$  [2, 7]

$$\begin{aligned} \text{when } |s| > \omega; |s| > \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega : \delta_1 &= \sqrt{s^2 - \omega^2}; \delta_2 = \sqrt{s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2} \\ \text{when } |s| < \omega; |s| < \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega : \delta_1 &= -i\sqrt{\omega^2 - s^2}; \delta_2 = -i\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Було введено загасання в середовище. Потік енергії повинен бути спрямований убік від місця, де прикладено навантаження. Корінь рівняння (1.22), [2], - це число  $s = \pm k_R$  - число хвилі, пов'язане зі швидкістю поширення хвилі Релея. Знаменник має інших коренів для такої фіксації  $\delta_1$  і  $\delta_2$  немає. Об'їжджаючи точки гілки у відповідних циклах, вибираючи  $\delta_1$  і  $\delta_2$  на відповідних ділянках циклу, щоб відповідати вимогам (1.24). Також, беручи до уваги залишок у корені Релея, отримується рішення для площини  $z = 0$

$$\begin{aligned} \frac{G}{P} W^{AB}(x, y, 0; \omega) &= -\frac{2i\omega^2 \sqrt{k_R^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}}{F'(k_R)} J_{k_R,1}^{A,B}(x, y) + \\ &+ \frac{2i}{\pi} \omega^2 \int_0^{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega}} \frac{s \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}}{(2s^2 - \omega^2)^2 + 4s^2 \sqrt{\omega^2 - s^2} \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}} J_{s,1}^{A,B}(x, y) ds + \\ &+ \frac{8i}{\pi} \omega^2 \int_{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega}}^{\omega} \frac{s^2 (s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2) \sqrt{\omega^2 - s^2}}{(2s^2 - \omega^2)^4 + 16s^4 (s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2) (\omega^2 - s^2)} J_{s,1}^{A,B}(x, y) ds \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\text{Де } J_{s,1}^{A,B}(x,y) = \int_0^A \int_{-B}^B \left[ J_0 \left( s \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) - J_0 \left( s \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} \right) \right] da db \quad (1.26)$$

$$F'(s) = 8s(2s^2 - \omega^2) - \frac{4s^3 \sqrt{s^2 - \omega^2}}{\sqrt{s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}} - \frac{12s^3 - 8s\omega}{\sqrt{s^2 - \omega^2}}$$

$k_R = \frac{7-\kappa}{6.84-1.12\kappa}\omega$ , де була використана приблизна формула з [2].

Далі формула (1.25) переписується з точки зору хвильових чисел

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega = \frac{\omega}{c_1}$$

$c_1$  - поздовжня швидкість хвилі;  $c_2$  - швидкість зсувної хвилі. Значення інтегралу в (1.21)  $\frac{F(s;\omega) \cdot s}{\Delta_{s\omega}}$  збігається зі значенням у задачі Лемба [2]. Різниця з роботою [7] полягає у вигляді функції  $J_{s,1}^{A,B}(x,y)$ . Таким чином, за припущенням (1.11), що функції  $Z_\beta(0,z)$  and  $\tilde{Z}_\beta(0,z)$  дорівнюють нулю, рішення виявилось практично ідентичним вирішенню задачі Лемба.

Зміщення для великих частот коливань.

Для великих значень частоти  $\omega$ , використовується асимптотичне подання

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots \quad x^2 \leq 1$$

і на основі формул (1.21) – (1.23), була отримана розрахункова формула переміщення у вигляді

$$\frac{G}{P}W^{AB}(x,y,0;\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty F(s;\omega) J_{s,1}^{A,B}(x,y) ds, \quad (1.27)$$

де  $F(s; \omega) =$

$$\frac{\omega^3 s - \frac{1}{2} \kappa_0 \omega s^3 - \frac{1}{8} \kappa_0^2 \frac{s^5}{\omega} - \frac{1}{16} \kappa_0^3 \frac{s^7}{\omega^3} - \frac{5}{128} \kappa_0^4 \frac{s^9}{\omega^5}}{4s^4 \left( \sqrt{\kappa_0} - \frac{\kappa}{\kappa-1} \right) + \omega^4 \sqrt{\kappa_0} + 4s^2 \omega^2 \left( \sqrt{\kappa_0} - 1 \right) - 4s^2 \left\{ \frac{s^4}{\omega^2} \kappa_1 + \frac{s^6}{\omega^4} \kappa_2 + \frac{s^8}{\omega^6} \kappa_3 \right\}}$$

$$\kappa_0 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}, \kappa_1 = \frac{1}{8} \kappa_0^2 + \frac{1}{4} \kappa_0, \kappa_2 = \frac{1}{16} \kappa_0^2 + \frac{1}{16} \kappa_0, \kappa_3 = \frac{1}{64} \kappa_0^2 + \frac{1}{32} \kappa_0$$

Перетворення інтеграла  $J_{s,1}^{A,B}(x, y)$  з (1.26).

За схемою [7] розглянемо інтеграл  $J_{s,1}^{A,B}(x, y)$ . Використання інтегрального подання для функції Бесселя [11]

$$J_0(s\sqrt{(x \mp a)^2 + (y - b)^2}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos [s(x \mp a) \cos \psi] \cdot \cos [s(y - b) \sin \psi] d\psi$$

який слід підставити у формулу (1.26). Після зміни порядку інтегрування та обчислення інтегралів, як повторюється, процедура була детально описана в [1], формула (1.26) була переписана у форму

$$J_{s,1}^{A,B}(x, y) = \frac{8AB}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi) \sin [sx \cos \psi] \cdot \cos [sy \sin \psi] d\psi, \quad (1.28)$$

$$\text{where } S_s^{A,B}(\psi) = \frac{\sin [sB \sin \psi]}{sB \sin \psi} \cdot \frac{1 - \cos [sA \cos \psi]}{sA \cos \psi}$$

функція  $S_s^{A,B}(\psi)$  нескінченно диференційована щодо  $\psi$ , а також парна, отже, шлях інтеграції можна прийняти рівним  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Подальша заміна змінних  $\sin \psi = \tau$  дозволяє переписати (1.28) як

$$J_{s,1}^{A,B}(x, y) = \frac{4AB}{\pi} \int_{-1}^1 F_{s,\tau}^{A,B}(x, y) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad (1.29)$$

$$\text{де } F_{s,\tau}^{A,B}(x, y) = \frac{\sin [sB\tau]}{sB\tau} \cdot \frac{1 - \cos [sA\sqrt{1 - \tau^2}]}{sA\sqrt{1 - \tau^2}} \cdot \sin [sx\sqrt{1 - \tau^2}] \cdot \cos [sy\tau]$$

Квадратурна формула найвищого ступеня точності [4] була застосована до інтеграла (1.29)

$$J_{s,1}^{A,B}(x, y) = \frac{4AB}{N} \sum_{i=1}^N F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y) \quad (1.30)$$

де  $\tau_i = \cos \frac{2i-1}{2N} \pi$ ,  $i = \overline{1, N}$  - нулі полінома Чебишева 1-го роду.

$$F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y) = \frac{\sin [sB\tau_i]}{sB\tau_i} \cdot \frac{1 - \cos [sA\sqrt{1 - \tau_i^2}]}{sA\sqrt{1 - \tau_i^2}} \cdot \sin [sx\sqrt{1 - \tau_i^2}] \cdot \cos [sy\tau_i] \quad (1.31)$$

Підставивши вираз у формулу переміщення (1.25) та (1.27), був побудований кінцевий вираз

$$\begin{aligned} \frac{G}{P} W^{AB}(x, y, 0; \omega) = & \frac{4AB}{N} \left[ -\frac{2i\omega^2 \sqrt{k_R^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2}}{F'(k_R)} \sum_{i=1}^N F_{k_R,\tau_i}^{A,B}(x, y) + \right. \\ & + \frac{2i}{\pi} \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega} \frac{s\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}}{(2s^2 - \omega^2)^2 + 4s^2\sqrt{\omega^2 - s^2}\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2 - s^2}} F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y) ds + \\ & \left. + \frac{8i}{\pi} \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_{\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\omega}^{\omega} \frac{s^2 (s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2) \sqrt{\omega^2 - s^2}}{(2s^2 - \omega^2)^4 + 16s^4 (s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\omega^2) (\omega^2 - s^2)} F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y) ds \right] \quad (1.32) \end{aligned}$$

де  $F'(s)$  визначено в (1.26), а  $F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y)$  - у (1.31). Для великих значень частоти  $\omega$  формула приймає вигляд

$$\frac{G}{P} W^{AB}(x, y, 0; \omega) = -\frac{4ABi}{N\pi} \sum_{i=1}^N \int_0^{\omega} F(s; \omega) F_{s,\tau_i}^{A,B}(x, y) ds, \quad (1.33)$$

де функція  $F(s; \omega)$  визначена в (1.27)

Таким чином, формула була спрощена для обчислення одиничних інтегралів неперервних функцій, що не представляє труднощів, якщо цікавлять коливання в ближній зоні.

Вирази для зміщення у далекому полі.

Розрахунок інтегралів у (1.32), (1.33) для великих значень  $x$  і  $y$  важко через наявність коливальної функції в інтегралі. Щоб усунути цю складність для великих значень  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , бажано отримати асимптотичні вирази для аналізу дальнього поля. В інтегралі (1.28) зміна змінних  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ,  $\lambda = tr$  зроблено

$$J_{s,1}^{A,B}(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{4AB}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi) e^{i\lambda \cos(\phi-\psi)} d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_s^{A,B}(\psi) e^{i\lambda \cos(\phi+\psi)} d\psi \right\} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.34)$$

Для аналізу асимптотики був використаний метод стаціонарної фази [3, 7], де роль функції для аналізу асимптотики,  $f(\psi)$  відіграє  $\cos(\phi \mp \psi)$ , а функція  $\phi(\psi)$  є нескінченно диференційованою функцією  $S_s^{A,B}(\psi)$ . Перший інтеграл має нерухому точку а другий, отже, не може нехтувати його внеском в асимптотику (1.34). Перший інтеграл у (1.34) може бути представлений як сума

$$J_{s,1}^{A,B}(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{4AB}{\pi} \operatorname{Im} \left( \int_0^{\phi} + \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \right) S_s^{A,B}(\psi) e^{i\lambda \cos(\phi-\psi)} d\psi.$$

де в першому інтегралі нерухома точка знаходиться в кінці шляху інтегрування  $f'(\psi) = \frac{\partial}{\partial \psi} \cos(\psi - \phi) = 0$  для  $\psi = \phi$  та  $f''(\psi) = -1 < 0$ , а у другому інтегралі — на початку шляху інтегрування. Після застосування теорем 2 та 3 [3], формула (1.34) була переписана

$$J_{s,1}^{A,B}(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{2AB}{\sqrt{\pi sr}} [\sin sr - \cos sr] \cdot S_s^{A,B}(\phi) + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.35)$$

$$S_s^{A,B}(\phi) = \frac{\sin [sB \sin \psi]}{sB \sin \psi} \cdot \frac{1 - \cos [sA \cos \psi]}{sA \cos \psi}$$

Підстановка (1.35) у формули (1.25) та (1.27) дає можливість визначити переміщення  $W(x, y, 0; \omega)$  у далеке поле  $r \rightarrow \infty$ . Оскільки в роботі [2, 7] лише член Релея вносить основний внесок в асимптотичну поведінку переміщення в дальньому полі, найвищі значення досягаються з кути  $\phi = 0$  та  $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$J_{k_R, 1}^{A, B}(r \cos \phi, r \sin \phi) \Big|_{\phi=0; \phi=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k_R}} (\sin k_R r - \cos k_R r) \times \\ \times \left[ -\frac{\cos k_R A}{k_R A}; \frac{\sin k_R B}{k_R B} \right] + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (1.36)$$

Результати чисельних розрахунків.

Для числової реалізації зміщення слід помножити на  $e^{i\omega t}$ , а дійсну або уявну частину слід відокремити. Графіки наведені для функції  $\frac{G}{\rho} \text{Im } W^{AB}(x, y, 0; \omega)$  з (1.32) для значень коефіцієнта Пуассона  $\mu = \frac{1}{3}$  та  $\mu = \frac{1}{4}$  для частот  $\omega = 0.3; 1; 3$ . Для великих значень частот була використана формула (1.33). Коди програм які використовувались для побудови графіків наведені відповідно у додатку А та додатку В для великих частот власних коливань. Розглянуто три форми ділянки розподілу навантаження по забою  $z = 0$

- 1)  $B = A/2$  - навантаження розподіляється по квадрату;
- 2)  $B = A$  - навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі  $Oy$ ;
- 3)  $B = A/4$  - навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі  $Ox$ .

Для аналізу віддаленої зони  $r \rightarrow \infty$ , використовувались асимптотичні рівності (1.35), (1.36), замінені на вирази переміщення (1.25), (1.27). Код програми за допомогою якої були побудовані графіки для віддалені зони наведено у додатку С.

Порівняння графіків вертикальних переміщень для однієї і тієї ж частоти  $\omega = 0.3$  та коефіцієнта Пуассона  $\mu = 1/3$  при різних ділянках розподілу навантаження (Рис. 1.1, Рис. 1.2, Рис. 1.3), видно, що максимальні абсолютні значення, що дорівнюють 2.5, досягнуті за формою перерізу  $B = A$ , який відповідає прямокутнику, витягнутому вздовж осі  $y$ . У той же

час переміщення має максимальну амплітуду, яка становить приблизно 2 одиниць. У випадку, коли навантаження розподіляється по прямокутнику, витягнутому вздовж осі  $x$ , переміщення має мінімальну амплітуду 0.6, а його максимальне переміщення становить близько 0.7 одиниць.

У випадку, коли навантаження розподіляється по квадрату  $B = A/2$ , із збільшенням частоти коливань (Рис. 1.1, Рис. 1.4, Рис. 1.7), амплітуда переміщення зростає. Крім того, у випадку, коли частота коливань дорівнює 3, спостерігаються негативні переміщення, що означає підняття грані чверті простору. Також зростання амплітуди зі збільшенням частоти видно з Рис. 1.2 та Рис. 1.5, що відповідає випадку  $B = A$ , коли амплітуда збільшилась із 2 одиниці ( $\omega = 0.3$ ) до 4 одиниць ( $\omega = 1$ ). Існує також ефект підняття краю чверті простору через наявність зон негативних амплітуд (Рис. 1.5).

Порівнюючи значення вертикальних переміщень для різних значень коефіцієнта Пуассона (Рис. 1.5, Рис. 1.6), можна побачити, що поведінка графіків аналогічно, але для значень  $\mu = 1/3$  амплітуда коливань більше.

Графіки вертикальних переміщень у віддаленій зоні прикладання навантаження залежно від частоти коливань з коефіцієнтом Пуассона, рівним  $1/3$ , та перерізу навантаження  $B = A$ , представлені на Рис. 8. Як відстань від ділянки розподілу навантаження збільшується, коливання занепадають. Подібно до результатів для зони ближнього навантаження, максимальні переміщення відбуваються у разі форми ділянки навантаження  $B = A$ . Амплітуда більша для великих значень частот коливань. При зменшенні частоти коливань амплітуди практично дорівнюють нулю.

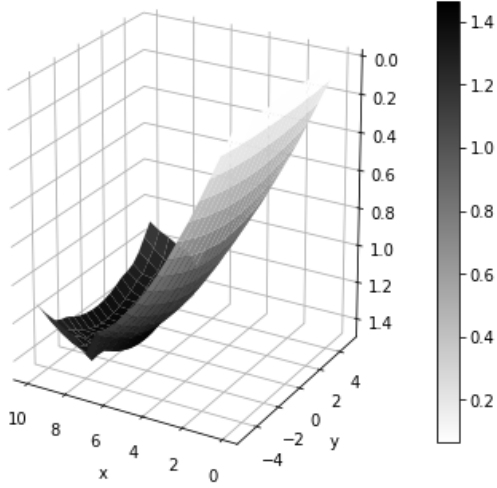


Рис. 1.1.  $B = A/2$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$

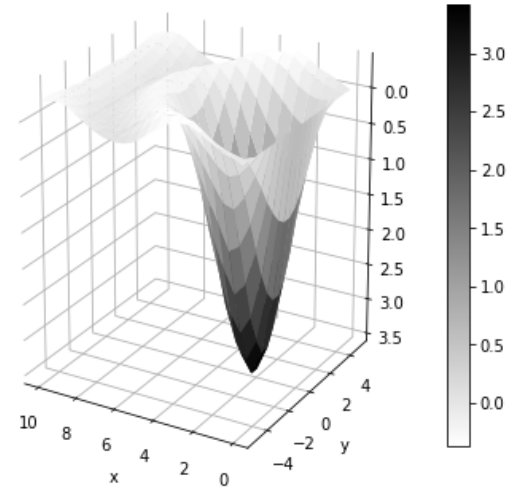


Рис. 1.4.  $B = A/2$ ,  $\omega = 1$ ,  $\mu = 1/3$

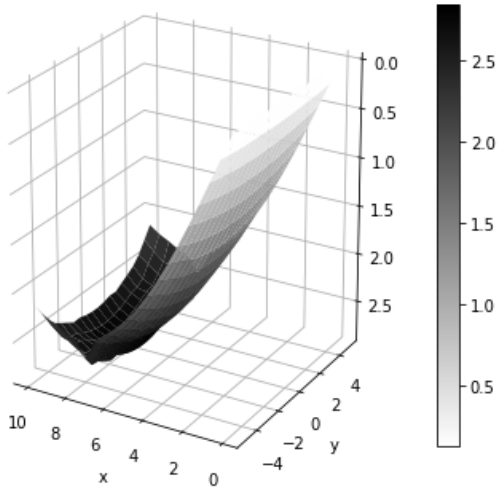


Рис. 1.2.  $B = A$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$

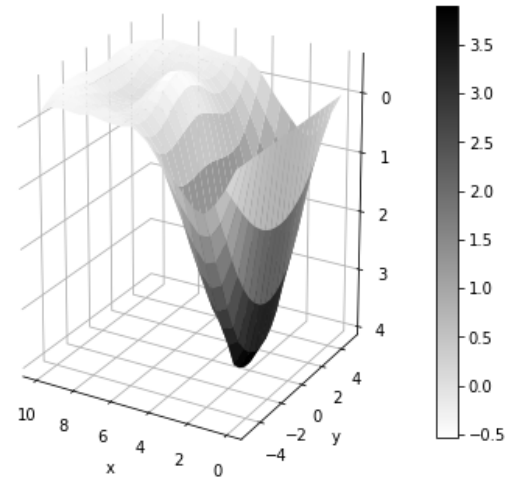


Рис. 1.5.  $B = A$ ,  $\omega = 1$ ,  $\mu = 1/3$

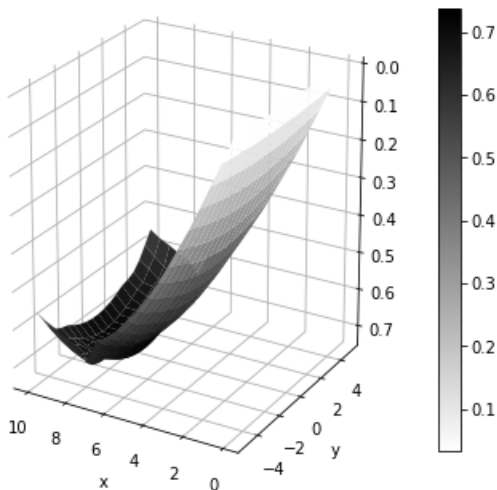


Рис. 1.3.  $B = A/4$ ,  $\omega = 0.3$ ,  $\mu = 1/3$

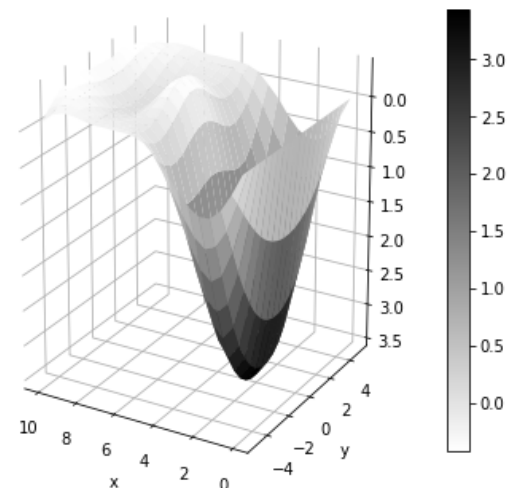


Рис. 1.6.  $B = A$ ,  $\omega = 1$ ,  $\mu = 1/4$

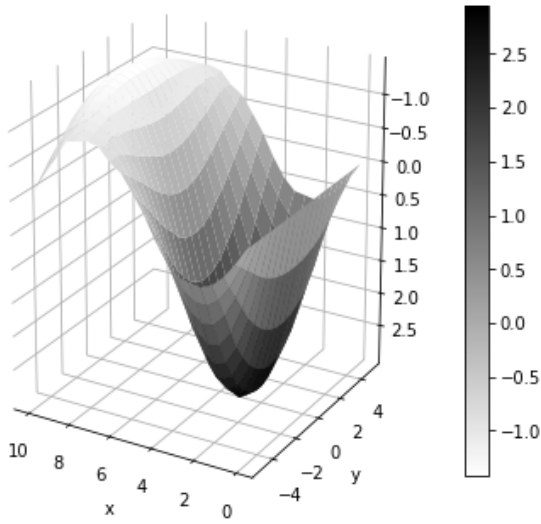


Рис. 1.7.  $B = A/2$ ,  $\omega = 3$ ,  $\mu = 1/3$

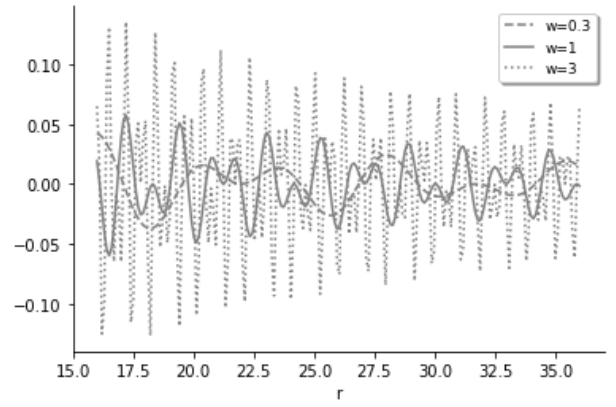


Рис. 1.8.  $B = A$ ,  $\mu = 1/3$ .

## ВИСНОВКИ

Знайдено розв'язок динамічної задачі теорії пружності для чверті простору, коли одна грань жорстко закріплена, а інша знаходиться під впливом нормального динамічного стискаючого навантаження, що застосовується в початковий момент часу і розподіляється за прямокутним перерізом. Застосування методу інтегрального перетворення безпосередньо до рівнянь руху зводило початкову задачу до одновимірної векторної задачі. Остання була розв'язана за допомогою матричного диференціального числення. Запропонований підхід дає можливість отримати точний розв'язок задачі в просторі перетворення. Досліджено випадок стаціонарних коливань та проаналізовано вертикальну амплітуду поблизу навантаження та у віддаленій зоні, для якої виведені асимптотичні формули.

У той же час також можна побудувати та вивчити нормальне напруження, що виникає в чверті простору, і порівняти амплітуди всіх трьох переміщень. Використовуючи запропонований підхід, розглядається подібна динамічна задача для пружного напівнескінченного шару, коли на нижній грані встановлюються різні граничні умови. За отриманими результатами було опубліковано статтю [15].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вайсфельд Н. Д. Мішані задачі теорії пружності для півнескінченного шару / Н. Д. Вайсфельд, Г. О. Фесенко — Одеса: Астропринт, 2019. — 120 с.
2. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах. / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко — Киев: Наукова думка, 1981. — 284с.
3. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон. — М.: Мир, 1966. — 159 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
5. Попов Г. Я. Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства / Г. Я. Попов // Известия РАН. Мех. твердого тела. — 2003. — №6. — С. 31–39.
6. Попов Г. Я. О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям / Г. Я. Попов // ДАН. — 2002. — 384, №2. — С. 193–196.
7. Попов Г. Я. Об одном новом подходе к решению задачи Лэмба / Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд // ДАН.— 2010.— Т. 432, №3.— С. 337–342.
8. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. — Алматы: Рауан, 1999. — 133 с.
9. Поручников В. Б. Методы динамической теории упругости. / В. Б. Поручников. — М.: Наука, 1986. — 328с.
10. Снеддон, И. Н. Преобразование Фурье / И. Н. Снеддон. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 668 с.
11. Сонин Н. Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. — Гостехтеориздат, 1954.
12. Уфлянд Я. С. Вторая основная задача теории упругости для клина // Тр. Ленинград. политехн. ин-та. — 1960. — №210. — С. 87–94.
13. Уфлянд Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы

- анализа. — М.: Наука.— 1972.— С. 549–553.
14. Alexandrov A. M., Pozharskii D. A. Three-dimensional contact problems. — Springer Science & Business Media, 2001. — Т. 93.
  15. Fesenko A. A., Bondarenko K. S. The dynamical problem on acting concentrated load on the elastic quarter space // Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 2 (36). — P. 7–26.
  16. Hetényi M. A General Solution for the Elastic Quarter Space. / M. Hetényi // ASME J. Appl. Mech. — 1970. — Т. 37 — №1. — С. 70–76.
  17. Rabinovich, A. S. Plane contact problem on the pressure of a stamp with a rectangular base on a rough elastic half-space. / Rabinovich, A. S. // Izv. Akad. Nauk. ArmSSR, Mekhanika. — 1974. — Vol. 27(4).
  18. Schepers W., Savidis S., Kausel E. Dynamic stresses in an elastic half-space // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. — 2010. — Т. 30. — №. 9. — С. 833-843.

## Додаток А

Код для побудови графіків переміщення для значень  $\omega \leq 1$

Для побудови графіків переміщень, розробимо програму на мові Python. Будемо використовувати бібліотеки Numpy, Scipy, Matplotlib. Numpy потрібна для того, щоб зробити розбиття обраної області на якій буде будуватися графік. Matplotlib потрібна для відтворення двовимірного графіка переміщення. У бібліотеці Scipy зберігаються алгоритми для наближеного обчислення певного інтеграла методом Гаусса з заданою точністю.

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import copy
x = np.linspace(0, 10, 20)
y = np.linspace(-5, 5, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
n = int(np.sqrt(X.size))
kappa = 3-(4/3)
w = 0.3
f1=copy.copy(X)
c = (7-kappa)/(6.84-1.12*kappa)
A = 4
B = A/2
N = 20
def F_div(t):
    g = 8*t*(2*t**2-w**2)-((4*t**3*np.sqrt(t**2-w**2))
    /(np.sqrt(t**2-w**2*((kappa-1)/(kappa+1)))))
    -(12*t**3-8*t*w)/(np.sqrt(t**2-w**2))
    return g
coef_1=(((2*w**2*np.sqrt((c*w)**2-(kappa-1)/(kappa+1)))
    /F_div(c*w))*np.cos(w*w*c))
def F_AB(t, tau, x, y):
    g = ((np.sin(t*B*tau)/(t*B*tau))*
```

```

(1-np.cos(t*A*np.sqrt(1-tau**2)))/
(t*A*np.sqrt(1-tau**2))*np.sin(t*x*np.sqrt(1-tau**2))*
np.cos(t*y*tau)
return g
def coefficient_1(t):
num = (t*np.sqrt((kappa-1)/(kappa+1)*w**2-t**2)*
np.cos(w*t))
denom = ((2*t**2-w**2)**2+4*t**2*np.sqrt(w**2-t**2)*
np.sqrt((kappa - 1)/(kappa+1)*(w**2)-t**2))
return num/denom
def coefficient_2(t):
num = (t**2*(t**2-(kappa-1)/(kappa+1)*w**2)*
np.sqrt(w**2-t**2)*np.cos(w*t))
denom = ((2*t**2-w**2)**4+16*t**4*
(t**2-(kappa-1)/(kappa+1)*w**2)*(w**2-t**2))
return num/denom
def integral_func_1(t, tau, x, y):
return coefficient_1(t)*F_AB(t, tau, x, y)
def integral_func_2(t, tau, x, y):
return coefficient_2(t)*F_AB(t, tau, x, y)
def S1(x, y):
sum = 0
for i in range(1, N):
tau = np.cos((2*i-1)/(2*N)*np.pi)
sum += F_AB(c*w, tau, x, y)
return coef_1*sum
def S2(x, y):
a=0
b=np.sqrt((kappa-1)/(kappa+1))*w
sum = 0
for i in range(1, N):
tau = np.cos((2*i-1)/(2*N)*np.pi)
h, e = (spint.quadrature(integral_func_1, a, b,
args = (tau, x, y),

```

```

        tol=1.49e-03, rtol=1.49e-03, maxiter = 50))
        sum += h
    return sum
def S3(x, y):
    a=np.sqrt((kappa-1)/(kappa+1))*w
    b=w
    sum = 0
    for i in range(1, N):
        tau = np.cos((2*i-1)/(2*N)*np.pi)
        h,e =(spint.quadrature(integral_func_2, a, b,
            args = (tau, x, y),
            tol=1.49e-03, rtol=1.49e-03, maxiter = 50))
        sum += h
    return sum
def distribute_force(x, y):
    return (((4*A*B)/N)*(-S1(x, y) + ((2*w**2)/np.pi)*S2(x, y)+
        ((8*w**2)/np.pi)*S3(x, y)))
def f(x, y):
    return distribute_force(x, y)

for i in range(20):
    for j in range(20):
        f1[i, j] = f(X[i,j], Y[i,j])
fig = mpl.figure(figsize = (14, 14))
ax = fig.add_subplot(2,2,1, projection = '3d')
ax.w_xaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.w_yaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.w_zaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.view_init(200, 60)
p = ax.plot_surface(X, Y, f1, cmap = mpl.cm.binary)
cb = fig.colorbar(p, shrink = 0.8)

```

## Додаток В

Код для побудови графіків переміщення для значень  $\omega \geq 1$

Для побудови графіків переміщень, розробимо програму на мові Python. Будемо використовувати бібліотеки Numpy, Scipy, Matplotlib. Numpy потрібна для того, щоб зробити розбиття обраної області на якій буде будуватися графік. Matplotlib потрібна для відтворення двовимірного графіка переміщення. У бібліотеці Scipy зберігаються алгоритми для наближеного обчислення певного інтеграла методом Гаусса з заданою точністю. Для застосування цього алгоритму потрібно, використовую нелінійну заміну перейти від напівнескінченного проміжку до кінцевого.

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.special import jv
import copy
x = np.linspace(0, 10, 20)
y = np.linspace(-5, 5, 20)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
n = int(np.sqrt(X.size))
kappa = 3-(4/3)
kappa_0 = (kappa+1)/(kappa-1)
kappa_1 = 1/8*kappa_0**2+1/4*kappa_0
kappa_2 = 1/16*kappa_0**2+1/16*kappa_0
kappa_3 = 1/64*kappa_0**2+1/32*kappa_0
w = 3
f1=copy.copy(X)
c = (7-kappa)/(6.84-1.12*kappa)
A = 4
B = A/2
N = 30
def T(t):
    return 1-(2/(t+1))
```

```

def F_AB(t, tau, x, y):
    g = ((np.sin(t*B*tau)/(t*B*tau))*
          (1-np.cos(t*A*np.sqrt(1-tau**2)))/
          (t*A*np.sqrt(1-tau**2)))*
          np.sin(t*x*np.sqrt(1-tau**2))*np.cos(t*y*tau))
    return g
def F_for_large_frequencies(t):
    num = (w**3*t-(0.5*kappa_0*w*t**3)-
           ((1/8)*kappa_0**2*(t**5/w))-
           ((1/16)*kappa_0**3*(t**7/w**3))-
           ((5/128)*kappa_0**4*(t**9/w**5)))
    denom = (4*t**4*(np.sqrt(kappa_0)-
                     (kappa/(kappa-1))) +
             w**4*np.sqrt(kappa_0)+
             4*t**2*w**2*(np.sqrt(kappa_0)-1)-
             4*t**2*((t**4/w**2)*kappa_1 + (t**6/w**4)*kappa_2 +
                    (t**8/w**6)*kappa_3))
    return num/denom
def int_f(t, tau, x, y):
    return F_for_large_frequencies(T(t))*F_AB(T(t), tau, x, y)
def large_frequencies(x, y):
    a=-1
    b=1
    sum = 0
    for i in range(1, N):
        tau = np.cos((2*i-1)/(2*N)*np.pi)
        h, e = (spint.quadrature(int_f, a, b,
                                args = (tau, x, y),
                                tol=5.49e-05, maxiter = 30))
        sum += h
    return ((-4*A*B)/(np.pi*N))*sum
def f(x, y):
    return large_frequencies(x, y)
for i in range(n):

```

```
    for j in range(n):
        f1[i, j] = f(X[i,j], Y[i,j])
fig = mpl.figure(figsize = (14, 14))
ax = fig.add_subplot(2,2,1, projection = '3d')
ax.w_xaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.w_yaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.w_zaxis.set_pane_color((1,1,1,1))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.view_init(200, 60)
p = ax.plot_surface(X, Y, f1, cmap = mpl.cm.binary)
cb = fig.colorbar(p, shrink = 0.8)
```

## Додаток С

Код для побудови графіків для далекої зони.

Для побудови графіків переміщень, розробимо програму на мові Python. Будемо використовувати бібліотеки Numpy, Scipy, Matplotlib. Numpy потрібна для того, щоб зробити розбиття обраної області на якій будуть будуватися графіки. Matplotlib потрібна для відтворення графіків переміщення для різних значень  $\omega$ .

```
import numpy as np
import scipy.integrate as spint
import matplotlib.pyplot as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.special import jv
import copy
kappa = 3-(4/3)
c = (7-kappa)/(6.84-1.12*kappa)
A = 4
B = A
N= 200
r = np.linspace(4*A, 9*A, N)
def F_div(t, w):
    g = (8*t*(2*t**2-w**2)-
          ((4*t**3*np.sqrt(t**2-w**2))/
           (np.sqrt(t**2-w**2*((kappa-1)/(kappa+1))))))-
          (12*t**3-8*t*w)/(np.sqrt(t**2-w**2)))
    return g
def coef_1(w):
    return ((2*w**2*np.sqrt((w*c)**2-w**2*(kappa-1)/
                              (kappa+1)))/F_div(c*w, w))
def F_AB(r, w):
    g = ((np.sin(c*w*r)-np.cos(c*w*r))*(np.sin(c*w*r*B))/
          (c*w*r*B))
    return g
def S1(r, w):
```

```
    return ((4*A*B))*coef_1(w)*F_AB(r, w)
def distribute_force(r, w):
    return (-1/np.sqrt(2*c*w))*(-S1(r, w))
def f(r, w):
    return distribute_force(r, w)

fig, ax = mpl.subplots()
ax.spines['right'].set_color('none')
ax.spines['top'].set_color('none')
ax.set_xlabel('r')
ax.plot(r, f(r, 0.3), label="w=0.3", color='gray', ls = "--")
ax.plot(r, f(r, 1), label = "w=1", color = 'gray', ls = "-")
ax.plot(r, f(r, 3), label = "w=3", color = 'gray', ls = ":")
legend = ax.legend(loc = 1, fontsize = 9, shadow = True)
```